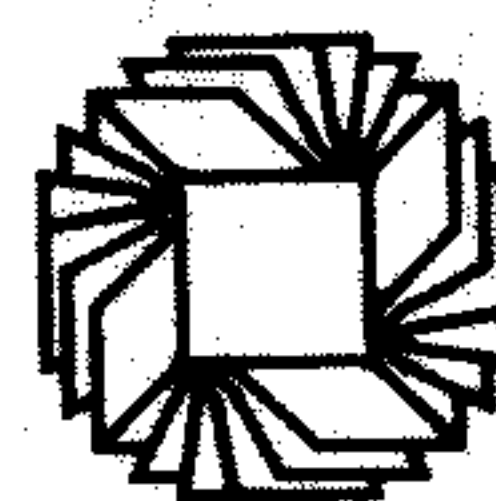
OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA 9 ELEMENTAR

GEOMETRIA PLANA

41 exercícios resolvidos
971 exercícios propostos com resposta
373 testes de vestibulares com resposta

7ª edição

ATUAL EDITORA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dolce, Osvaldo, 1938-
Fundamentos de matemática elementar, 9 : geometria plana: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. — 7. ed. — São Paulo : Atual, 1993.

ISBN 85-7056-268-3

1. Matemática (2º grau) 2. Matemática (2º grau) — Problemas, exercícios, etc. 3. Matemática (Vestibular) I. Pompeo, José Nicolau, 1945- II. Título. III. Título: Geometria plana.

92-1062 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino de 2º grau 510.7

Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 9
Editora: Bárbara Ferreira Arena
Coordenadora editorial: Sandra Lucia Abrano
Chefe de preparação de texto e revisão: Noé G. Ribeiro
Revisores: Alice Kobayashi
Magna Reimberg Teobaldo
Vera Lúcia Pereira Della Rosa
Chefe de arte: Zildo Braz
Coordenadora de arte: Thaís de B. F. Motta
Assistentes de arte: Lu Bevilacqua Ghion
Ricardo Yorio
Rosi Meire Martins Ortega
Gerente de produção: Antonio Cabello Q. Filho
Coordenadora de produção: Silvia Regina E. Almeida
Produção gráfica: José Rogerio L. de Simone
Maurício T. de Moraes
Projeto gráfico: Thaís de B. F. Motta
Capa: Ettore Bottini
Foto de capa: Hilton Ribeiro
Fotolito: Binhos Cromoset-Fotolito
Composição e arte-final: Diarte Ed. e Coml. de Livros Ltda.

ATUAL EDITORA LTDA.
Rua José Antônio Coelho, 785
04011-062 — São Paulo — SP

NOS PEDIDOS TELEGRÁFICOS BASTA CITAR O CÓDIGO ADSM 4209 I

Apresentação

Fundamentos de Matemática Elementar é uma coleção em dez volumes elaborada com o objetivo de dar ao estudante uma visão global da Matemática, no nível da escola do 2º grau. Desenvolvendo os programas em geral adotados no curso colegial, os *Fundamentos* dirigem-se aos alunos em preparativos para exames vestibulares, aos universitários que necessitam rever a Matemática Elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos do colegial interessados em adquirir uma formação mais consistente na área de Matemática.

No desenvolvimento dos inúmeros capítulos dos livros de *Fundamentos* procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática Elementar, as proposições e teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das áreas de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, levando o estudante a uma revisão. A seqüência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final do volume, o aluno pode encontrar a resposta para cada problema proposto e assim ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

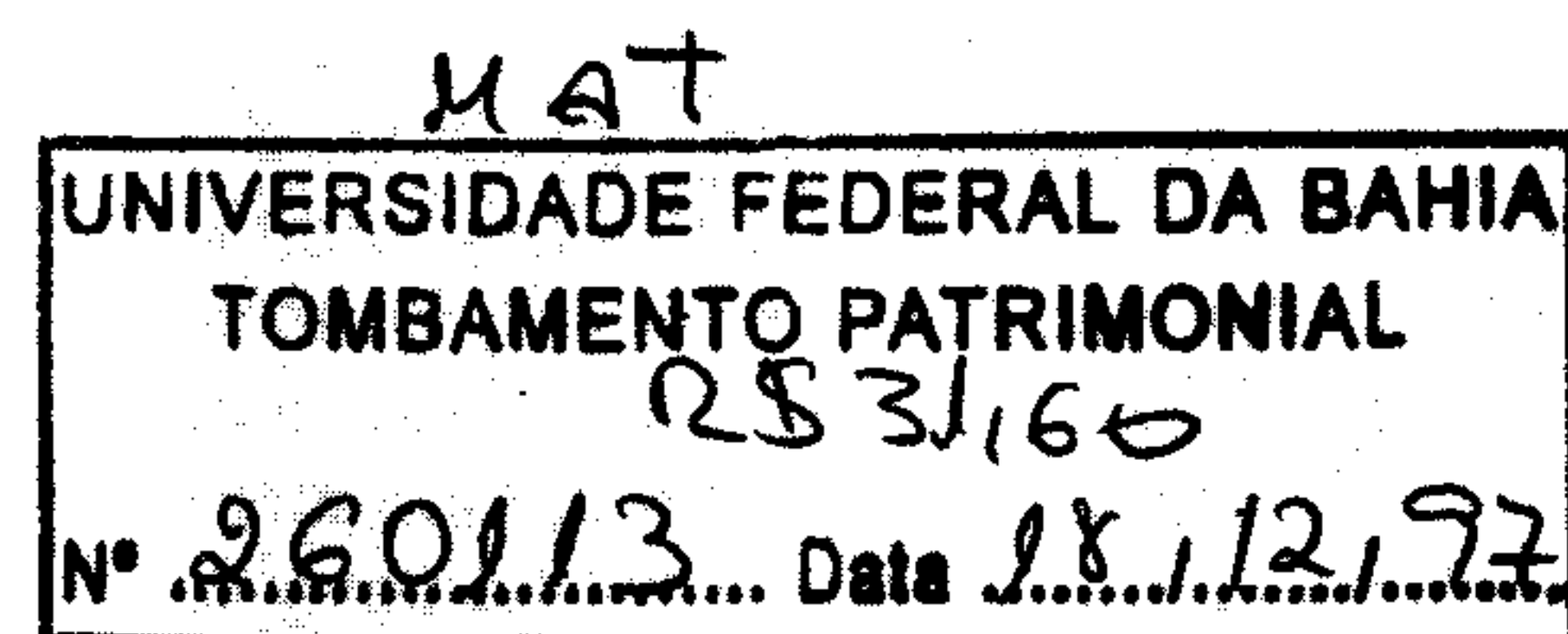
A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares dos últimos anos, selecionados e com respostas, que podem ser usados para uma revisão da matéria estudada.

Queremos consignar aqui nossos agradecimentos ao professor Dr. Hygino H. Domingues, autor dos textos de história da Matemática que figuram nesta nova edição e que contribuem em muito para o enriquecimento da obra.

Neste volume 9 — *Geometria Plana* — a **teoria** foi reciclada, com a exclusão de alguns assuntos e o acréscimo de outros. Em cada capítulo, os **exercícios**, selecionados e graduados, foram dispostos de acordo com a seguinte metodologia: os primeiros são introduzidos por *figuras*, com os dados numéricos e depois com os dados literais; na seqüência vem uma série que obedece à ordem: *enunciados*, dados numéricos e dados literais; posteriormente, são apresentados exercícios *demonstrativos*; e por fim os mais complexos, que representam verdadeiros desafios pelo grau de dificuldade que revelam. Para todos esses exercícios são fornecidas **respostas** ou é apontada uma seqüência de passos que permite obter suas soluções ou demonstrações.

A revisão e reformulação de exercícios teve a participação especial do professor Manuel Benedito Rodrigues, a quem agradecemos pelo enriquecimento da qualidade do livro.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os Autores.

Sumário

CAPÍTULO I

Noções e Proposições Primitivas

I. Noções primitivas

1. As *noções* (conceitos, termos, entes) geométricas são estabelecidas por meio de *definição*.

As *noções primitivas* são adotadas sem definição.

Adotaremos sem definir as noções de:

PONTO, RETA E PLANO.

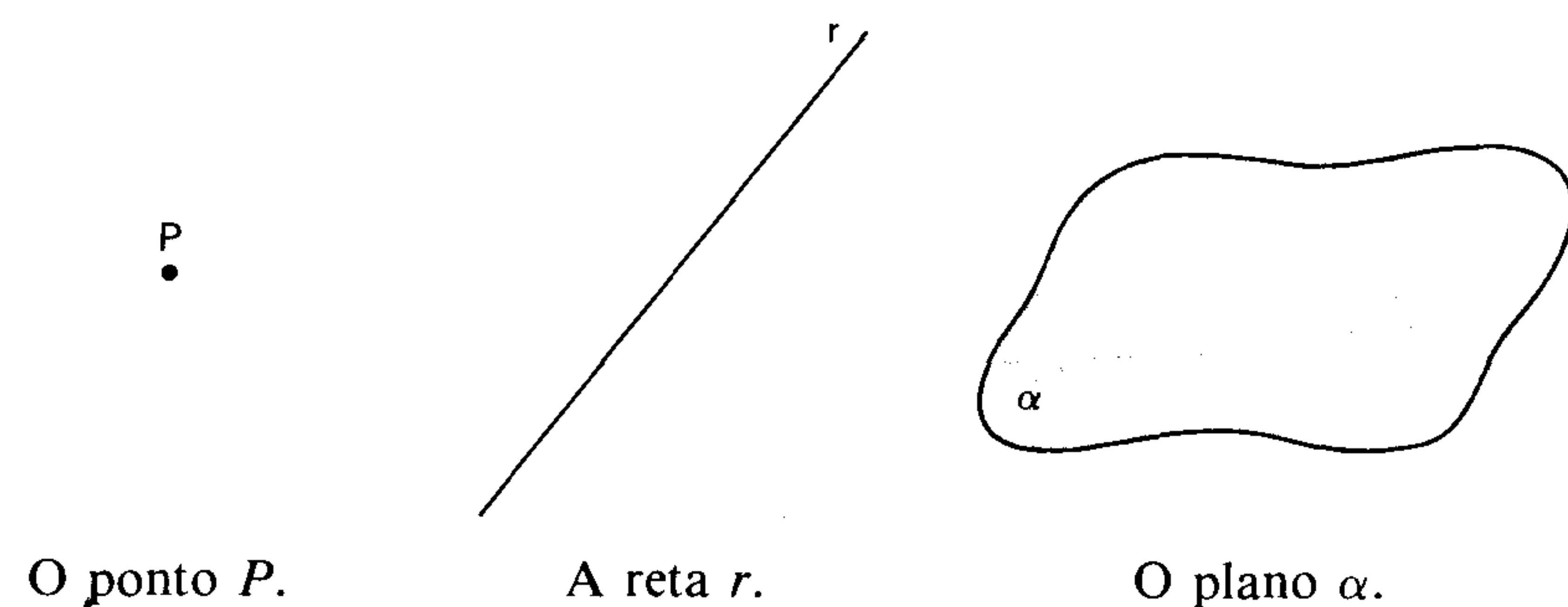
De cada um desses entes temos conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação.

2. *Notação de ponto, reta e plano*

a) *Com letras*

Ponto — letras maiúsculas latinas: A, B, C, ...
Reta — letras minúsculas latinas: a, b, c, ...
Plano — letras gregas minúsculas: α, β, γ, ...

b) *Notações gráficas*

O ponto P. A reta r. O plano α.

II. Proposições primitivas

3. As *proposições* (propriedades, afirmações) geométricas são aceitas mediante *demonstrações*.

As *proposições primitivas* ou *postulados* ou *axiomas* são aceitos sem demonstração.

Iniciaremos a Geometria Plana com alguns postulados relacionando o *ponto*, a *reta* e o *plano*.

4. *Postulado da existência*

> **a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.**
> **b) Num plano há infinitos pontos.**

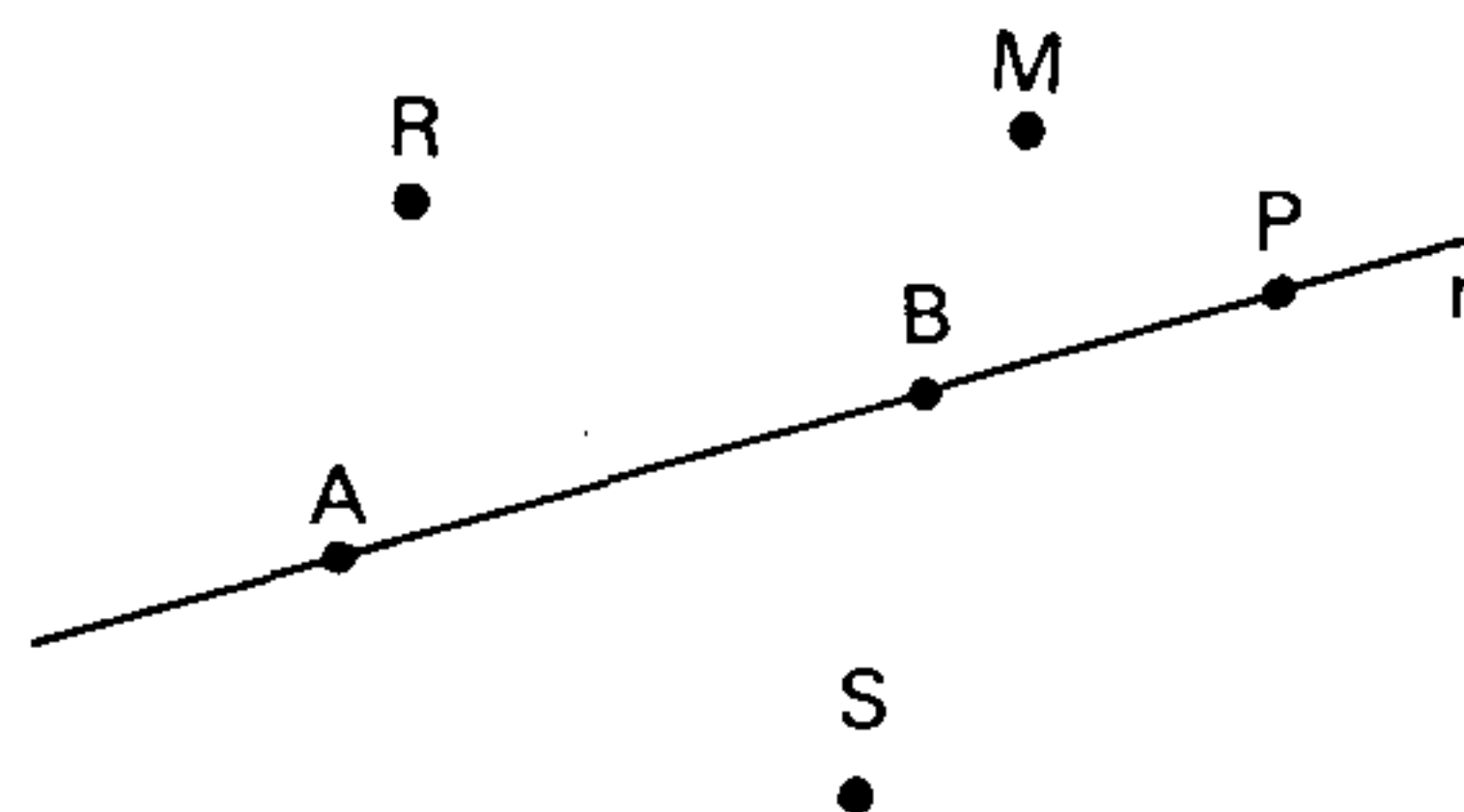
A expressão "infinitos pontos" tem o significado de "tantos pontos quantos quisermos".

A figura ao lado indica uma reta r e os pontos A, B, P, R, S e M, sendo que:

A, B e P estão em r ou a reta r passa por A, B e P, ou ainda

$$A \in r,\ B \in r,\ P \in r;$$

R, S e M não estão em r ou r não passa por R, S e M, ou ainda

$$R \notin r,\ S \notin r,\ M \notin r.$$

5. *Posições de dois pontos e de ponto e reta*

Dados dois pontos A e B, de duas uma:

ou A e B são coincidentes

(é o mesmo ponto, um só ponto, com dois nomes: A e B)

ou A e B são distintos.

$(A = B)$

$(A \neq B)$

Dados um ponto P e uma reta r, de duas uma:

ou o ponto P está na reta r

(a reta r passa por P)

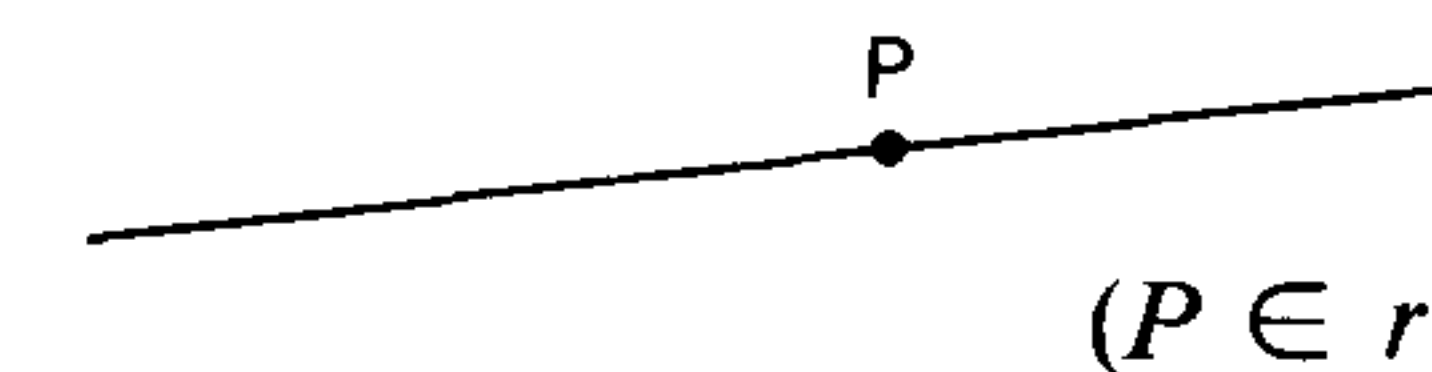
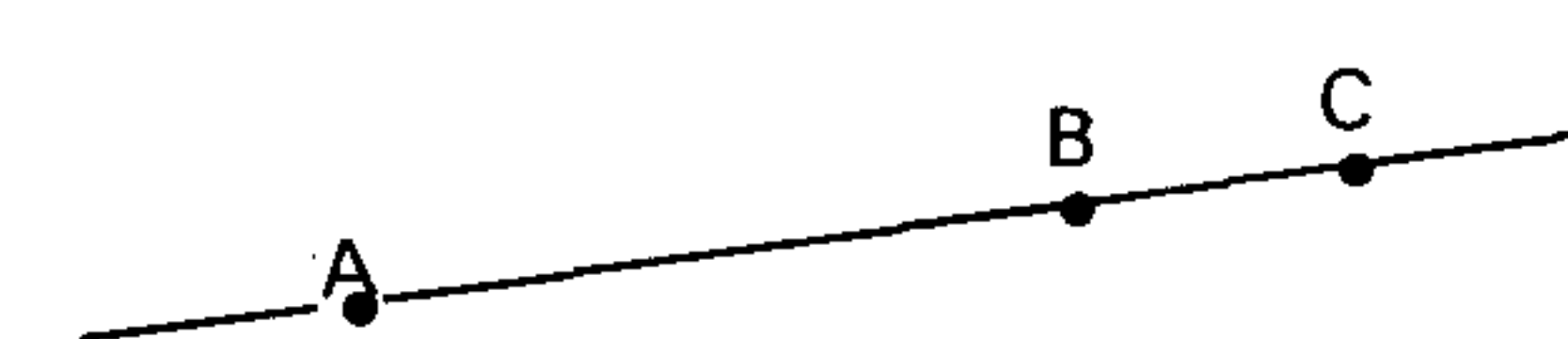
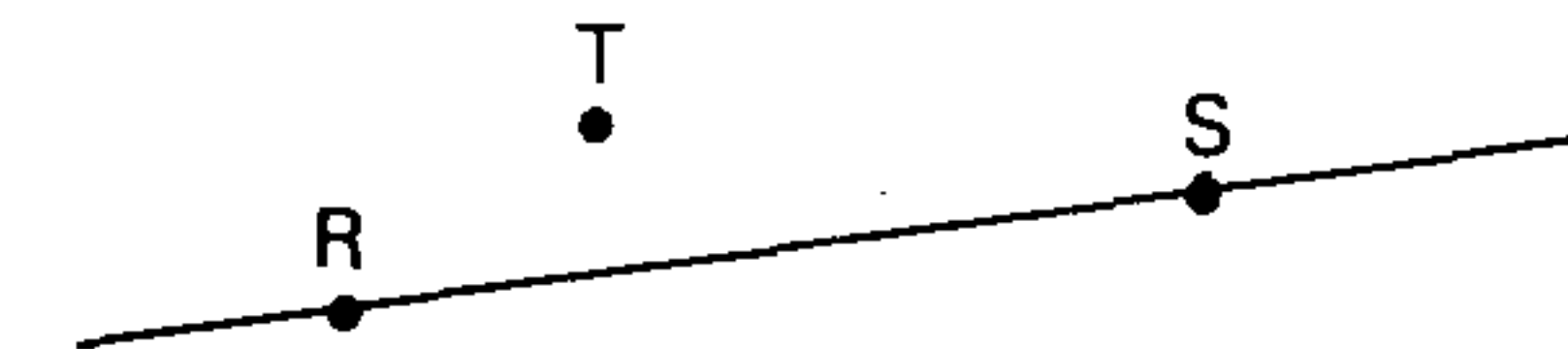
$$P \in r$$

ou o ponto P não está na reta r

(a reta r não passa por P)

$$P \notin r$$

$(P \in r)$

$(P \notin r)$

6. Pontos *colineares* são pontos que pertencem a uma mesma reta.

Os pontos A, B e C são colineares.

Os pontos R, S e T não são colineares.

7. *Postulado da determinação*

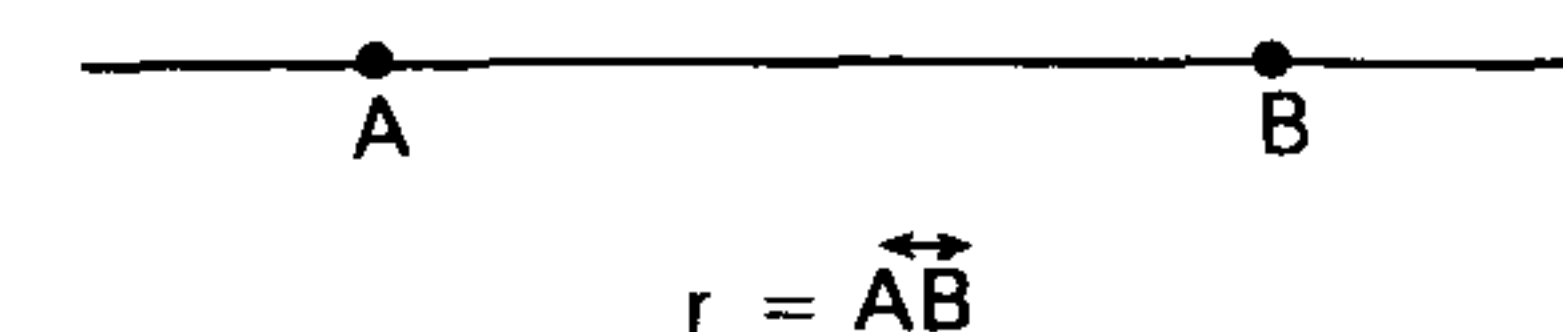
a) *Da reta*

> **Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.**

Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por $\overleftrightarrow{AB}$.

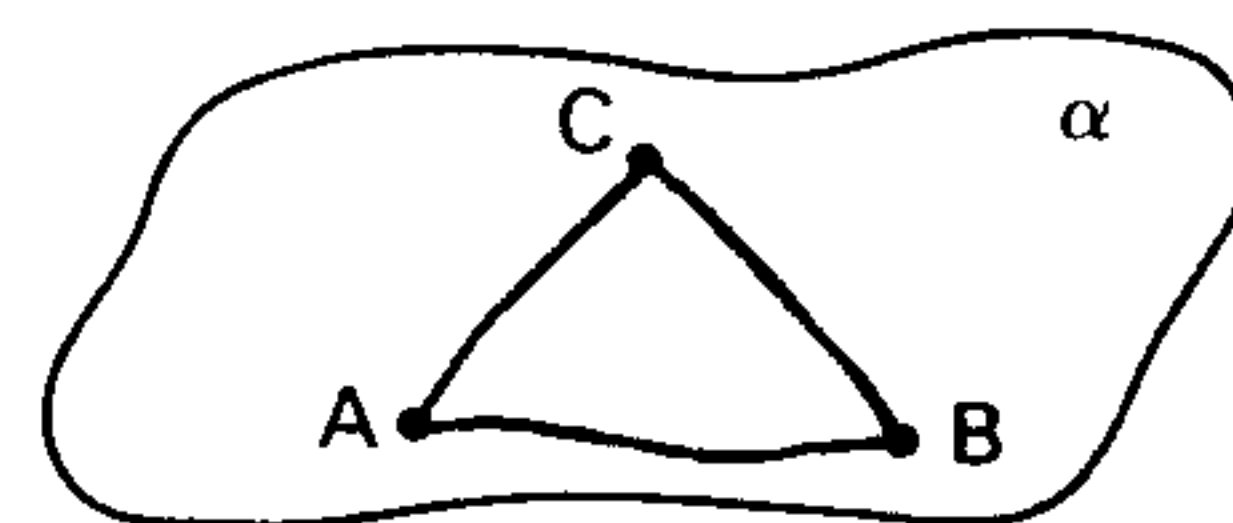
$$(A \neq B,\ A \in r,\ B \in r) \implies r = \overleftrightarrow{AB}$$

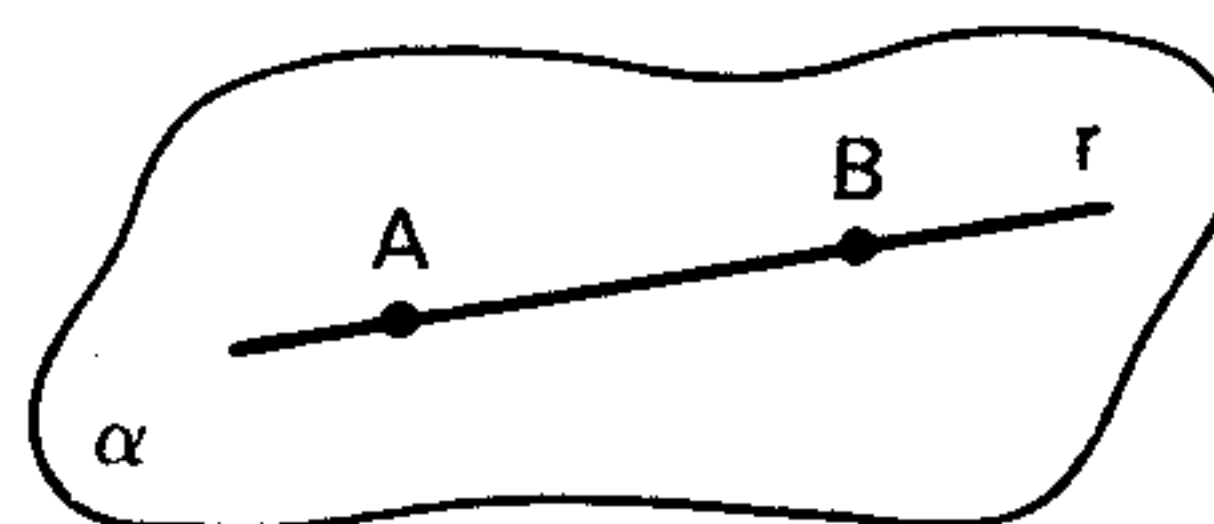
A expressão *duas retas coincidentes* é equivalente a *uma única reta*.

$r = \overleftrightarrow{AB}$

b) *Do plano*

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Os pontos A, B e C não colineares determinam um plano α que indicamos por (A, B, C).

O plano α é o único plano que passa por A, B e C.

8. *Postulado da inclusão*

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

$$(A \neq B,\ r = \overleftrightarrow{AB},\ A \in \alpha,\ B \in \alpha) \implies r \subset \alpha$$

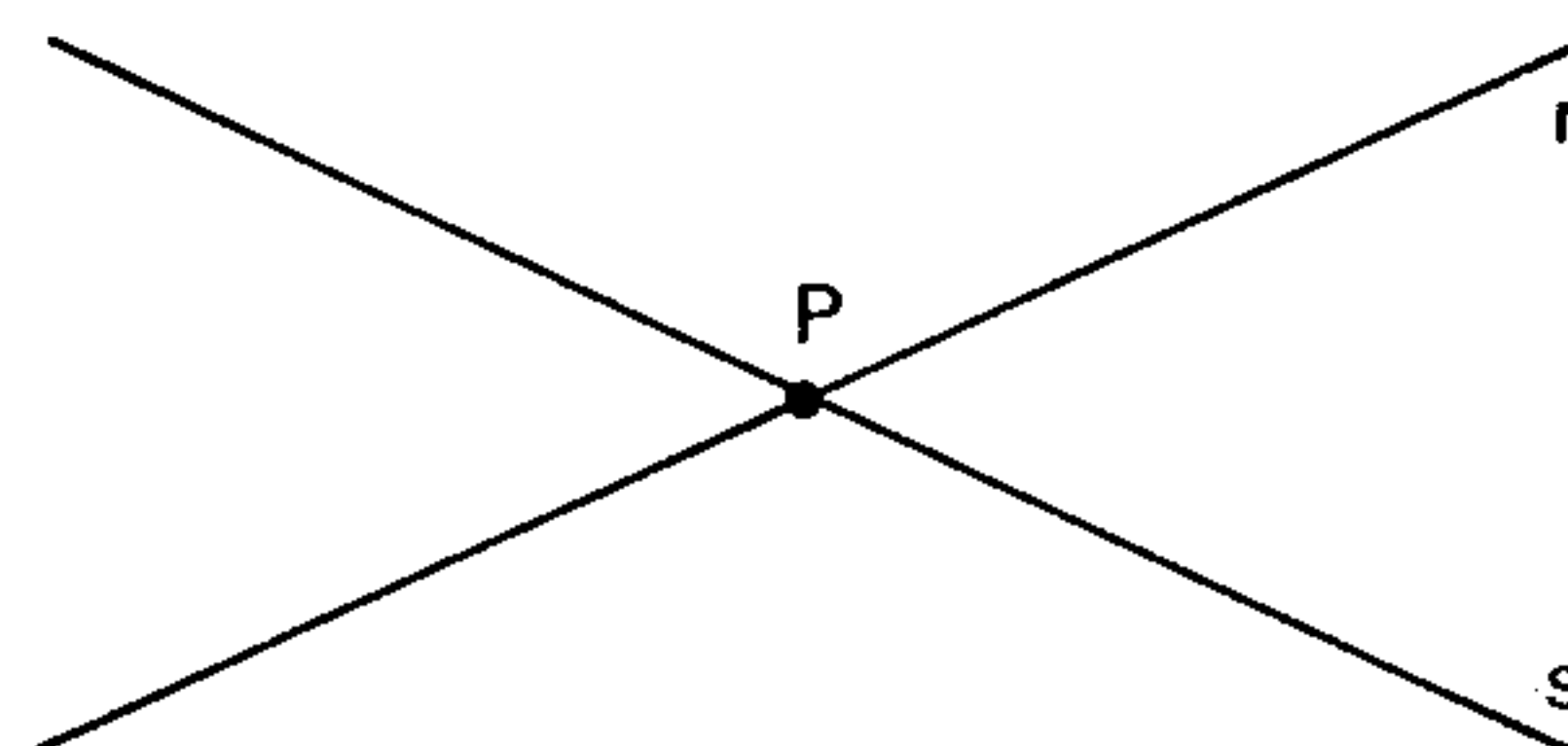
Dados dois pontos distintos A e B de um plano, a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ tem todos os pontos no plano.

9. Pontos *coplanares* são pontos que pertencem a um mesmo plano.
Figura é qualquer conjunto de pontos.
Figura plana é uma figura que tem todos os seus pontos num mesmo plano.
A *Geometria Plana* estuda as figuras planas.

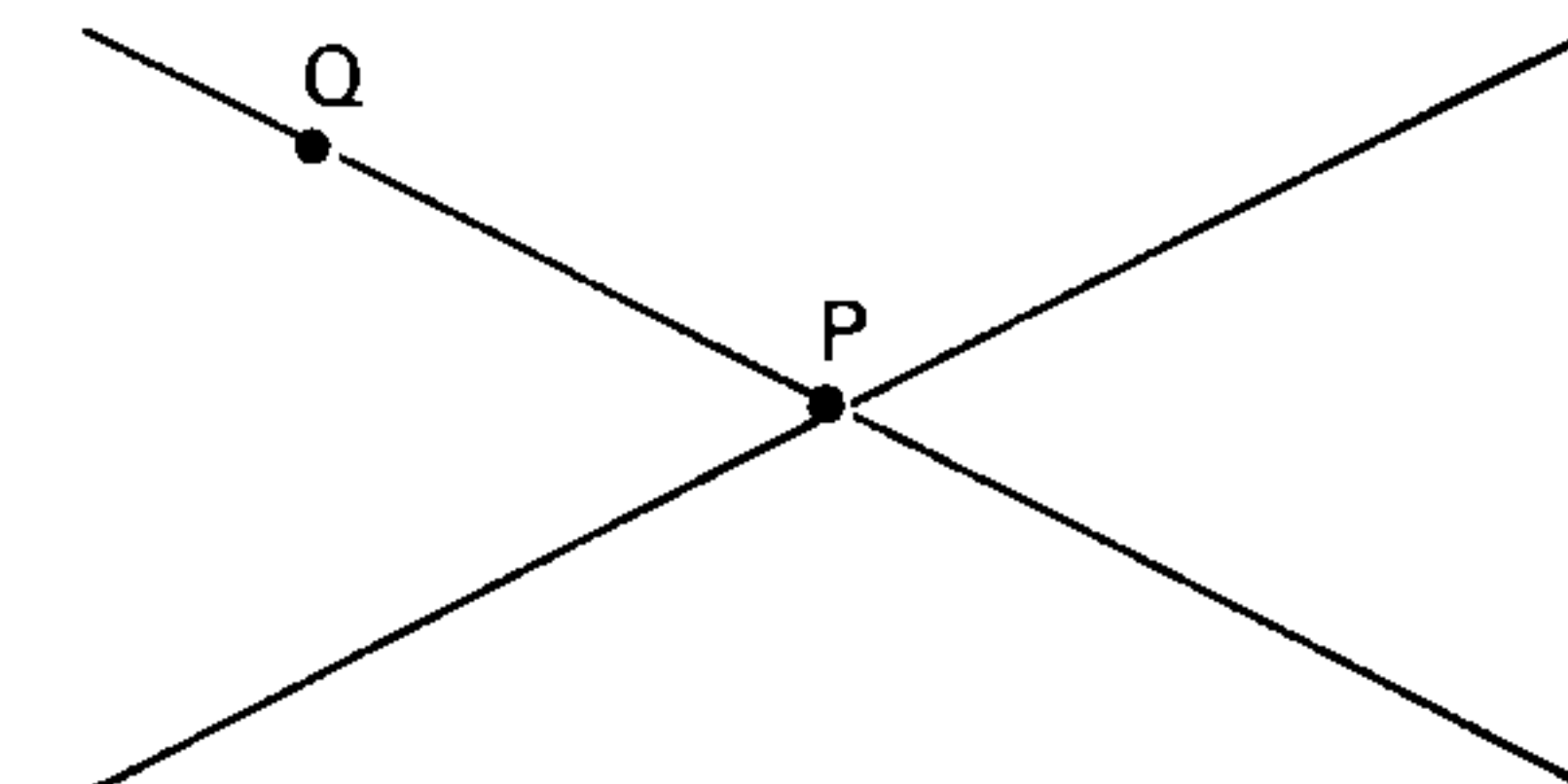
10. *Retas concorrentes*

a) *Definição*

Duas retas são *concorrentes* se, e somente se, elas têm *um único* ponto comum.

$$r \cap s = \{P\}$$

b) *Existência*

Usando o postulado da existência (item 4), tomemos uma reta r, um ponto P em r $(P \in r)$ e um ponto Q fora de r $(Q \notin r)$.

Os pontos P e Q são distintos, pois um deles pertence a r e o outro não.

Usando o postulado da determinação (item 7a), consideremos a reta s determinada pelos pontos P e Q $(s = \overleftrightarrow{PQ})$.

As retas r e s são distintas, pois se coincidissem o ponto Q estaria em r (e ele foi construído fora de r), e o ponto P pertence às duas. Logo,

r e s são concorrentes.

EXERCÍCIOS

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
a) Por um ponto passam infinitas retas.
b) Por dois pontos distintos passa uma reta.
c) Uma reta contém dois pontos distintos.
d) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.
e) Por três pontos dados passa uma só reta.

2. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
a) Três pontos distintos são sempre colineares.
b) Três pontos distintos são sempre coplanares.
c) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.
d) Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.
e) Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares.

3. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe uma reta a tal que $A \in a$ e $B \in a$.

b) Quaisquer que sejam os pontos P e Q e as retas r e s, se P é distinto de Q, e P e Q pertencem às retas r e s, então $r = s$.

c) Qualquer que seja uma reta r, existem dois pontos A e B tais que A é distinto de B, com $A \in r$ e $B \in r$.

d) Se $A = B$, existe uma reta r tal que $A, B \in r$.

4. Usando quatro pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?

5. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.

b) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.

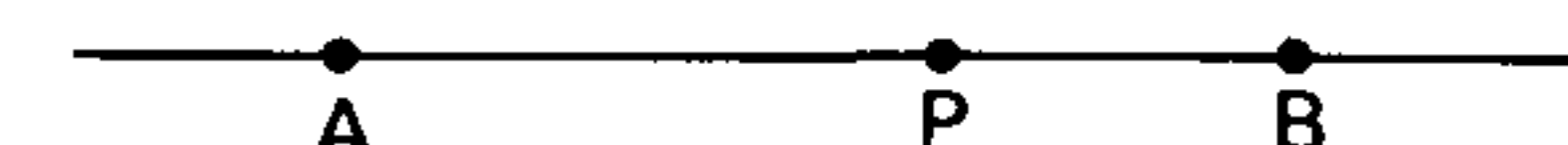
c) Se duas retas distintas têm um ponto comum, então elas possuem um único ponto comum.

CAPÍTULO II

Segmento de Reta

Conceitos

11. A noção *estar entre* é uma noção primitiva que obedece aos postulados (ou axiomas) que seguem:

A P B

Quaisquer que sejam os pontos A, B e P:

1) Se P está entre A e B, então A, B e P são colineares;

2) Se P está entre A e B, então A, B e P são distintos dois a dois;

3) Se P está entre A e B, então A não está entre P e B nem B está entre A e P;

e ainda

4) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe um ponto P que está entre A e B.

12. *Segmento de reta — definição*

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um *segmento de reta*.

Assim, dados A e B, $A \neq B$, o segmento de reta AB (indicado por $\overline{AB}$) é o que segue:

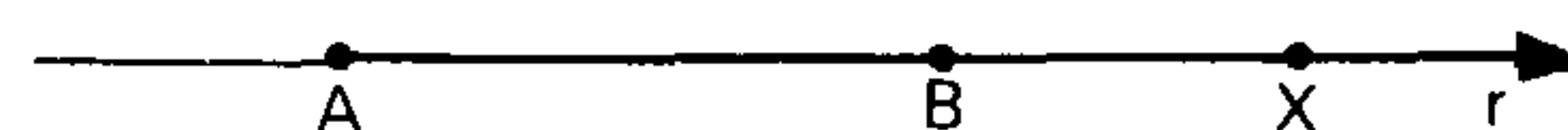
$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

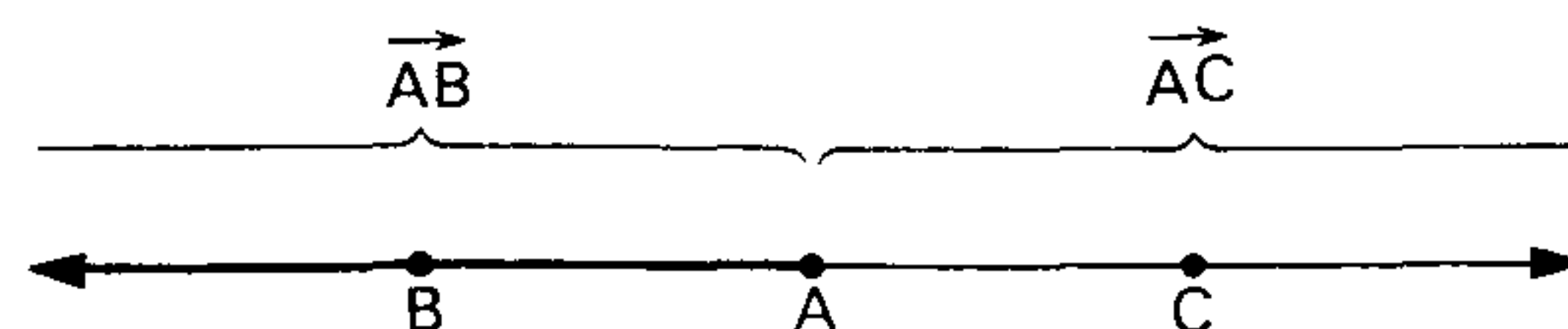
Os pontos A e B são as *extremidades* do segmento $\overline{AB}$ e os pontos que estão entre A e B são pontos *internos* do segmento $\overline{AB}$.

Se os pontos A e B coincidem ($A = B$), dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é o *segmento nulo*.

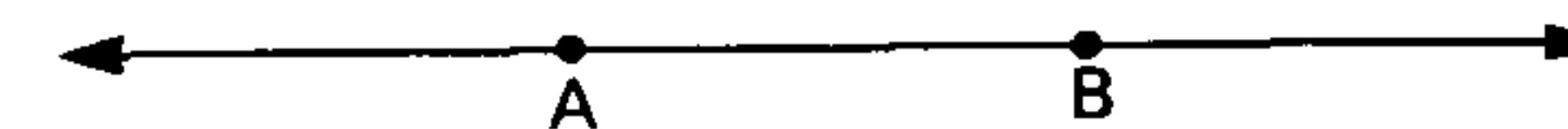
13. *Semi-reta — definição*

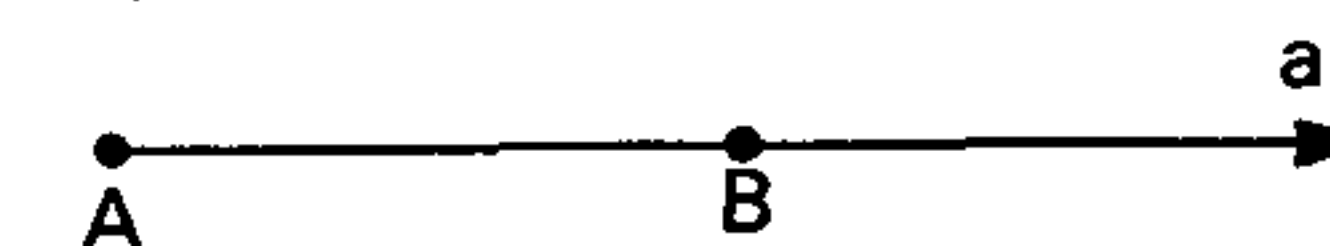
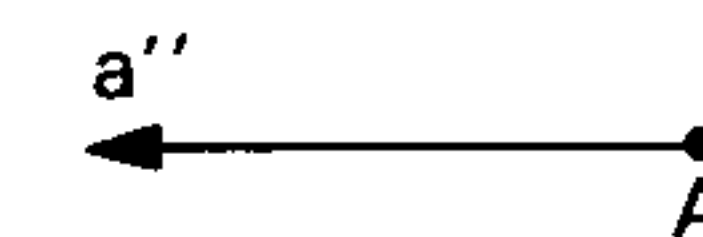
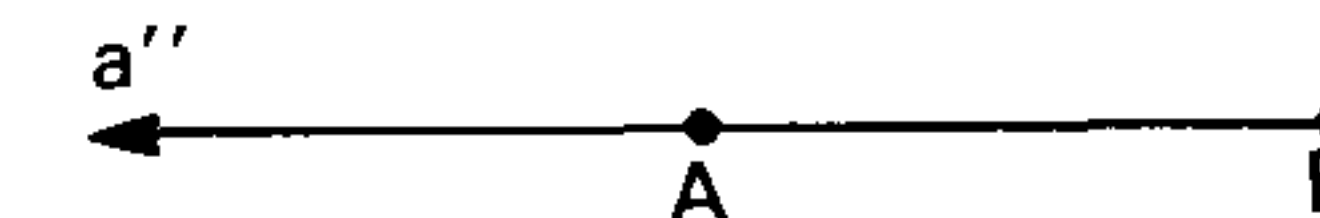
Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semi-reta AB (indicada por $\overrightarrow{AB}$).

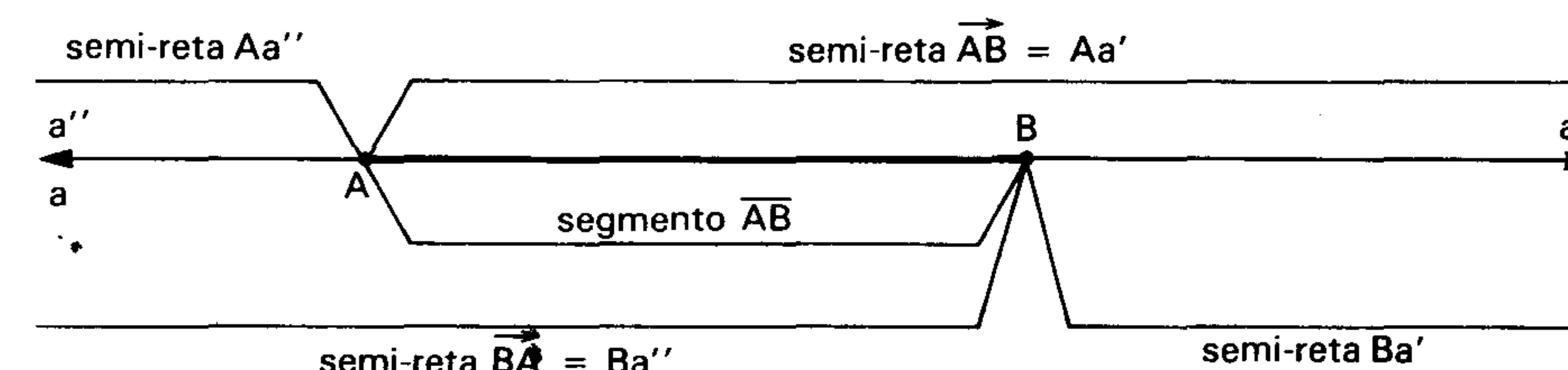
O ponto A é a origem da semi-reta $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid B \text{ está entre } A \text{ e } X\}$$

Se A está entre B e C, as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ditas semi-retas opostas.

14. *Resumo*

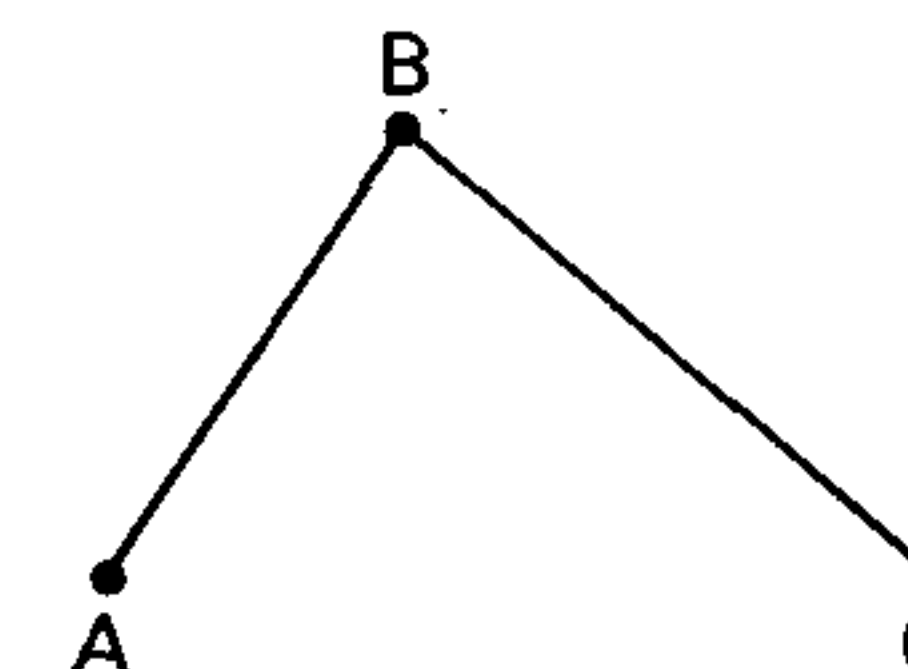
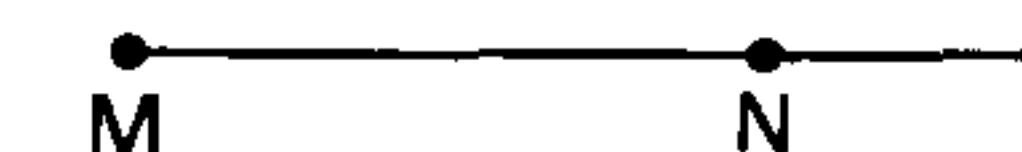
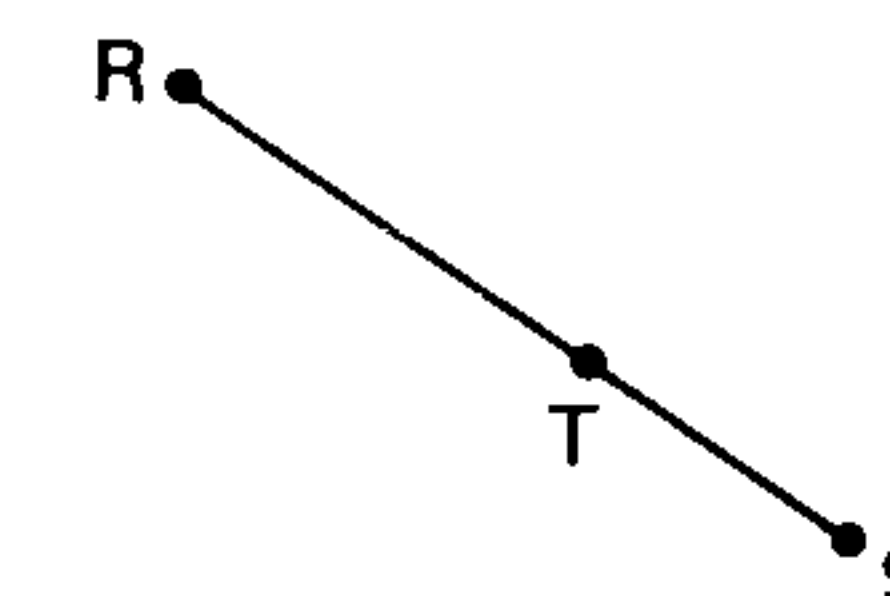
Considerando dois pontos distintos A e B, temos:

A reta $\overleftrightarrow{AB}$:

O segmento $\overline{AB}$:

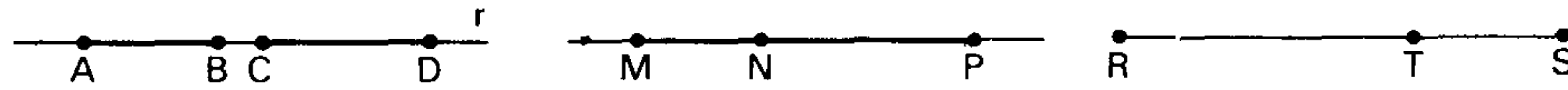
A semi-reta $\overrightarrow{AB}$ (ou Aa'):

A semi-reta oposta a $\overrightarrow{AB}$ (ou semi-reta Aa''):

A semi-reta $\overrightarrow{BA}$ (ou Ba''):

A semi-reta oposta a $\overrightarrow{BA}$ (ou semi-reta Ba'):

semi-reta Aa'' — semi-reta $\overrightarrow{AB}$ = Aa' — segmento $\overline{AB}$ — semi-reta $\overrightarrow{BA}$ = Ba'' — semi-reta Ba'

Notamos ainda que: $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

15. *Segmentos consecutivos*

Dois segmentos de reta são *consecutivos* se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro (uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro).

$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos

$\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são consecutivos

$\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ são consecutivos

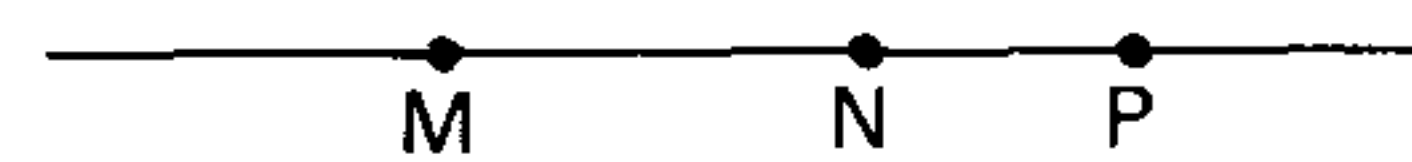
16. *Segmentos colineares*

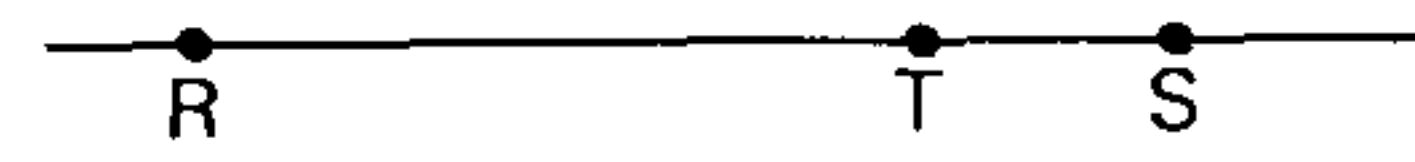
Dois segmentos de reta são *colineares* se, e somente se, estão numa mesma reta.

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares (não são consecutivos)

$\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são colineares (e consecutivos)

$\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ são colineares (e consecutivos)

17. *Segmentos adjacentes*

Dois segmentos *consecutivos* e *colineares* são *adjacentes* se, e somente se, possuem em comum apenas uma extremidade (não têm pontos internos comuns).

$\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são adjacentes (são consecutivos colineares, tendo somente N comum)

$$\overline{MN} \cap \overline{NP} = \{N\}$$

$\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ não são adjacentes (são consecutivos colineares e além de S têm outros pontos comuns)

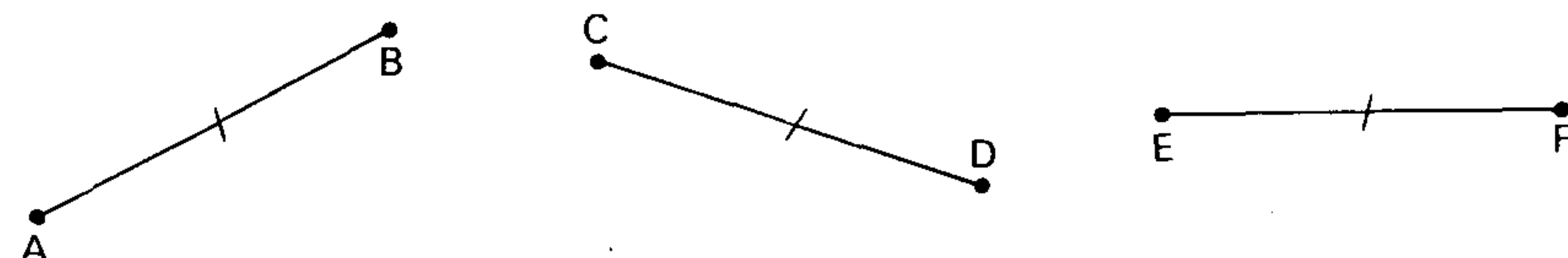
$$\overline{RS} \cap \overline{ST} = \overline{ST}$$

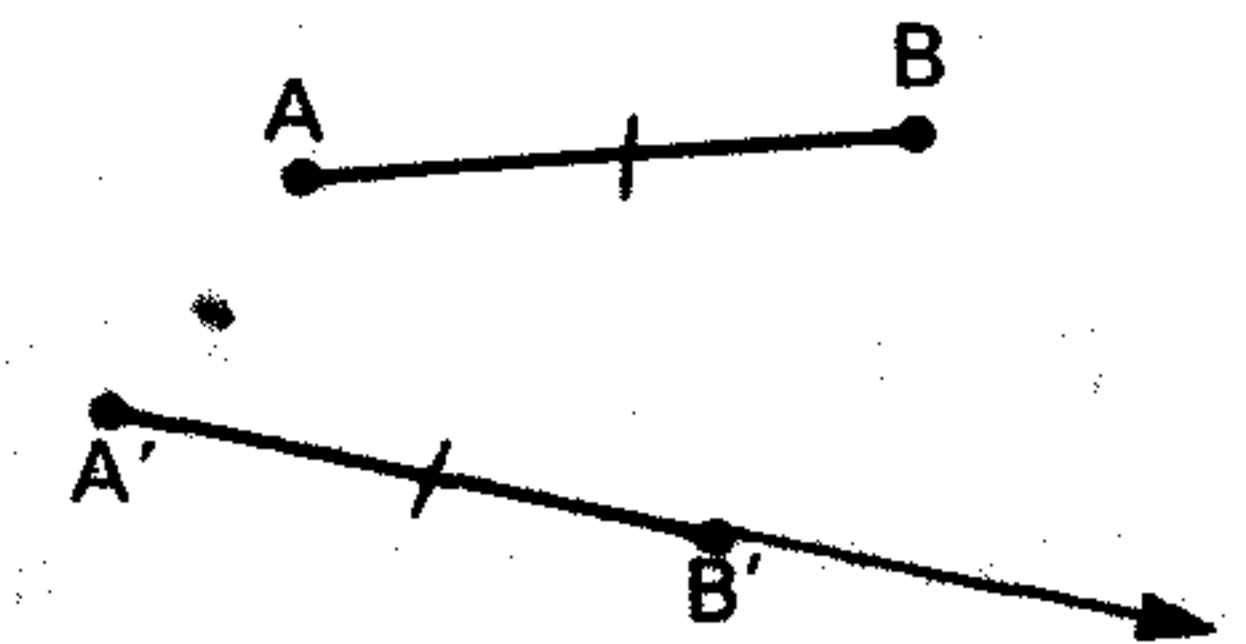
18. *Congruência de segmentos*

A congruência (símbolo: $\equiv$) de segmentos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

1) Reflexiva. Todo segmento é congruente a si mesmo: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.

2) Simétrica. Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.

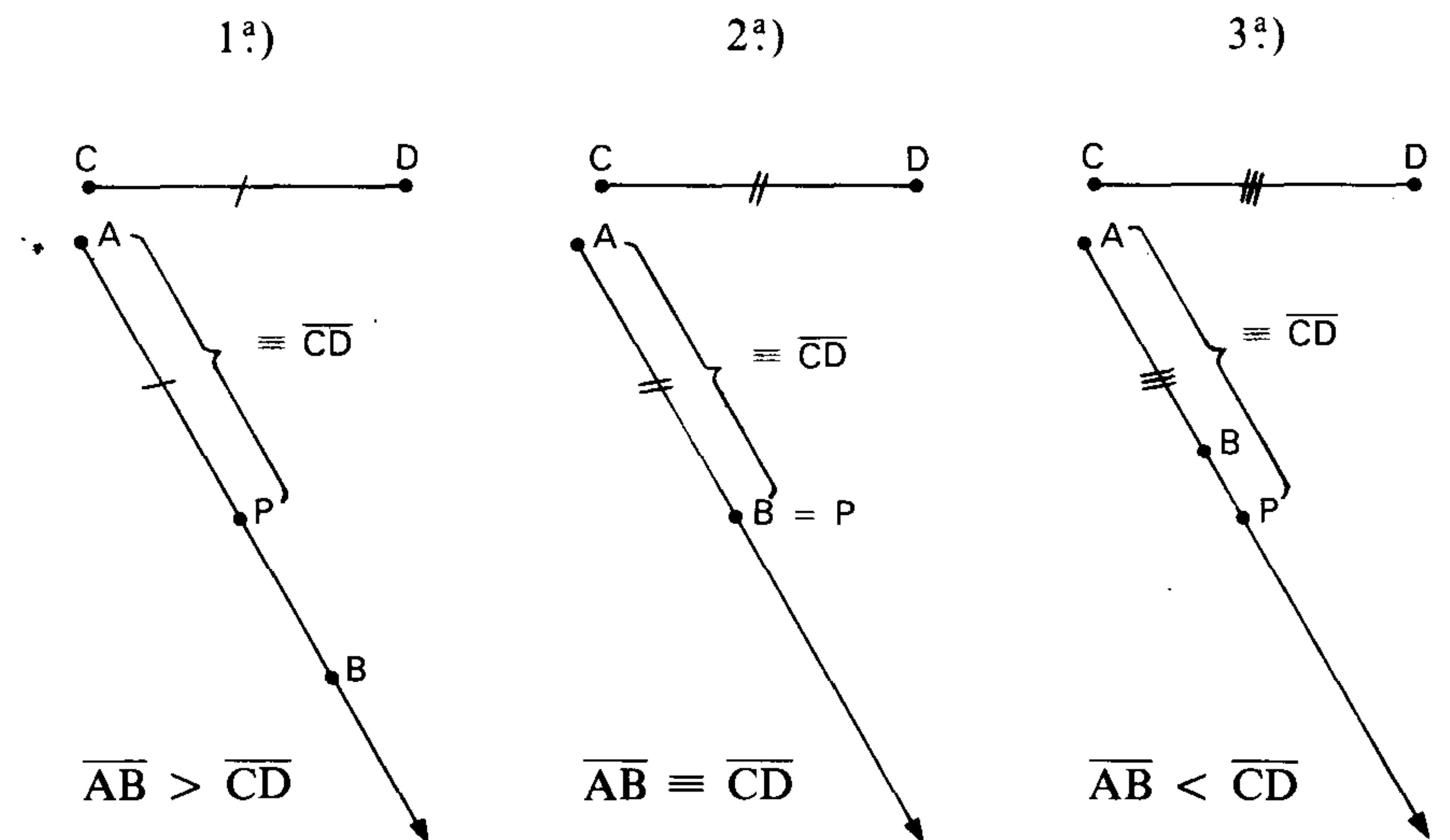
3) Transitiva: Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

4) *Postulado do transporte de segmentos*

Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semi-reta de origem A', existe sobre esta semi-reta um *único* ponto B' tal que $\overline{A'B'}$ seja congruente a $\overline{AB}$.

19. *Comparação de segmentos*

Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, pelo postulado do transporte podemos obter na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ um ponto P tal que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$. Temos três hipóteses a considerar:

1ª) $\overline{AB} > \overline{CD}$

2ª) $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$

3ª) $\overline{AB} < \overline{CD}$

1ª) O ponto P está entre A e B. Neste caso, dizemos que $\overline{AB}$ é *maior* que $\overline{CD}$ $(\overline{AB} > \overline{CD})$.

2ª) O ponto P coincide com B. Caso em que $\overline{AB}$ é *congruente* a $\overline{CD}$ $(\overline{AB} \equiv \overline{CD})$.

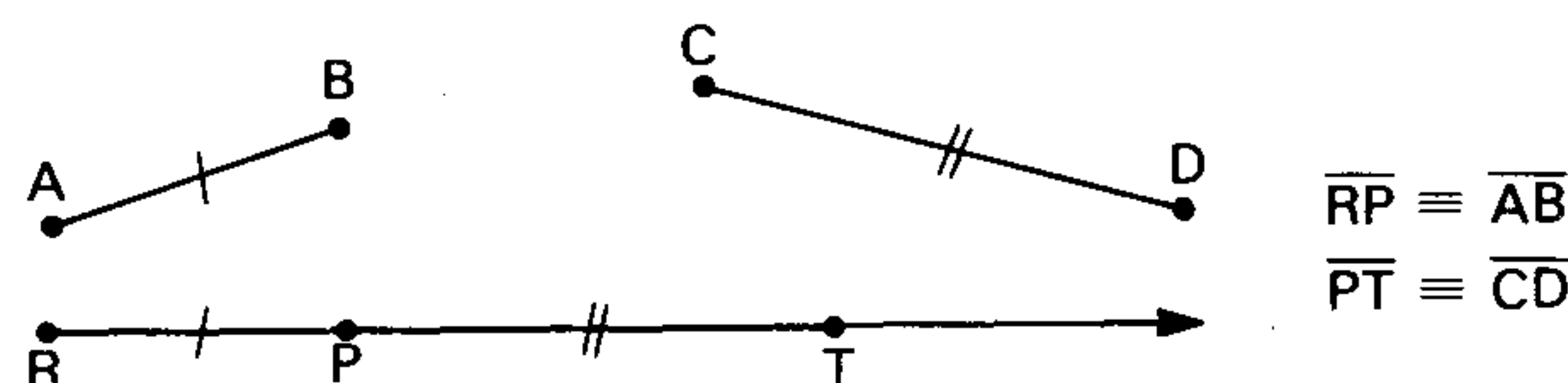
3ª) O ponto B está entre A e P. Neste caso, dizemos que $\overline{AB}$ é *menor* que $\overline{CD}$ $(\overline{AB} < \overline{CD})$.

20. *Adição de segmentos*

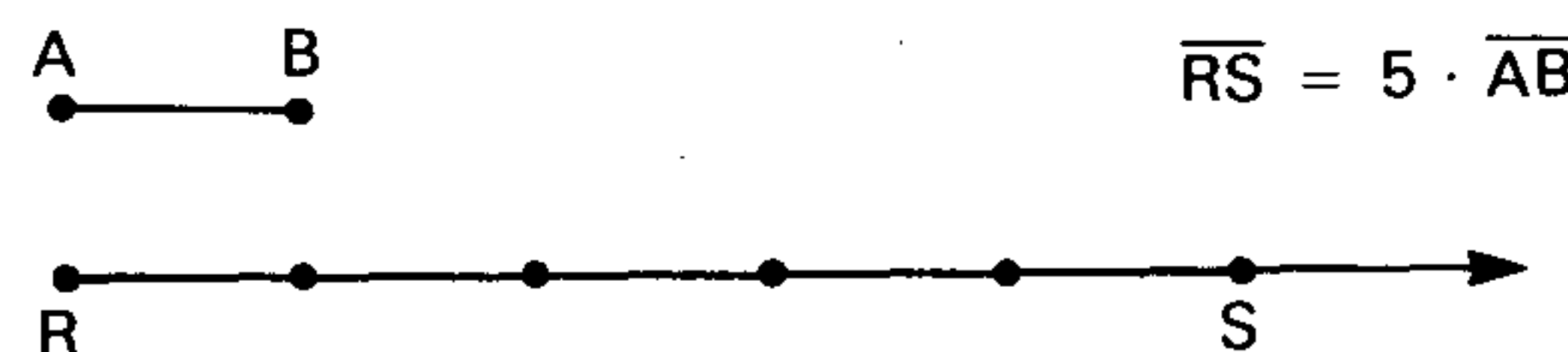
Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tomando-se numa semi-reta qualquer de origem R os segmentos *adjacentes* $\overline{RP}$ e $\overline{PT}$ tais que

$$\overline{RP} \equiv \overline{AB} \quad e \quad \overline{PT} \equiv \overline{CD},$$

dizemos que o segmento $\overline{RT}$ é a *soma* de $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$.

$\overline{RP} \equiv \overline{AB}$
$\overline{PT} \equiv \overline{CD}$

$$\overline{RT} = \overline{AB} + \overline{CD} \text{ e também } \overline{RT} = \overline{RP} + \overline{PT}$$

O segmento $\overline{RS}$, que é a soma de n segmentos congruentes a $\overline{AB}$, é *múltiplo* de $\overline{AB}$ segundo n ($\overline{RS} = n \cdot \overline{AB}$). Se $\overline{RS} = n \cdot \overline{AB}$, dizemos que $\overline{AB}$ é *submúltiplo* de $\overline{RS}$ segundo n.

$\overline{RS} = 5 \cdot \overline{AB}$

21. *Ponto médio de um segmento*

a) *Definição*

Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

$$M \in \overline{AB} \quad e \quad \overline{MA} \equiv \overline{MB}$$

b) *Unicidade do ponto médio*

Se X e Y distintos ($X \neq Y$) fossem pontos médios de $\overline{AB}$, teríamos:

$$\overline{AX} \equiv \overline{XB} \ (1) \quad e \quad \overline{AY} \equiv \overline{YB} \ (2)$$

X está entre A e Y $\Rightarrow$ $\overline{AY} > \overline{AX}$
e
Y está entre X e B $\Rightarrow$ $\overline{XB} > \overline{YB}$
$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\overline{AY} > \overline{AX} \equiv \overline{XB} > \overline{YB}$, o que é absurdo, de acordo com (2)

ou

Y está entre A e X $\Rightarrow$ $\overline{AX} > \overline{AY}$
e
X está entre Y e B $\Rightarrow$ $\overline{YB} > \overline{XB}$
$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $\overline{AX} > \overline{AY} \equiv \overline{YB} > \overline{XB}$, o que é absurdo, de acordo com (1)

Logo, o ponto médio de $\overline{AB}$ é único.

c) A *existência* do ponto médio está provada no item 56.

22. *Medida de um segmento — comprimento*

A medida de um segmento $\overline{AB}$ será indicada por $m(\overline{AB})$ ou simplesmente por AB.

A medida de um segmento (não nulo) é um número real positivo associado ao segmento de forma tal que:

1º) Segmentos *congruentes* têm medidas *iguais* e, reciprocamente, segmentos que têm medidas *iguais* são *congruentes*.

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$$

2º) Se um segmento é *maior* que outro, sua medida é *maior* que a deste outro.

$$\overline{AB} > \overline{CD} \iff m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})$$

3º) A um *segmento soma* está associada uma medida que é a *soma* das medidas dos segmentos parcelas.

$$\overline{RS} = \overline{AB} + \overline{CD} \iff m(\overline{RS}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{CD})$$

À medida de um segmento dá-se o nome de *comprimento* do segmento.

Em geral, associa-se um número (medida) a um segmento estabelecendo a razão (quociente) entre este segmento e outro segmento tomado como unidade.

O segmento unitário usual é o *metro* (*m*). Seus múltiplos — decâmetro (*dam*), hectômetro (*hm*) e quilômetro (*km*) — ou submúltiplos — decímetro (*dm*), centímetros (*cm*) e milímetro (*mm*) — também são utilizados.

23. *Nota*

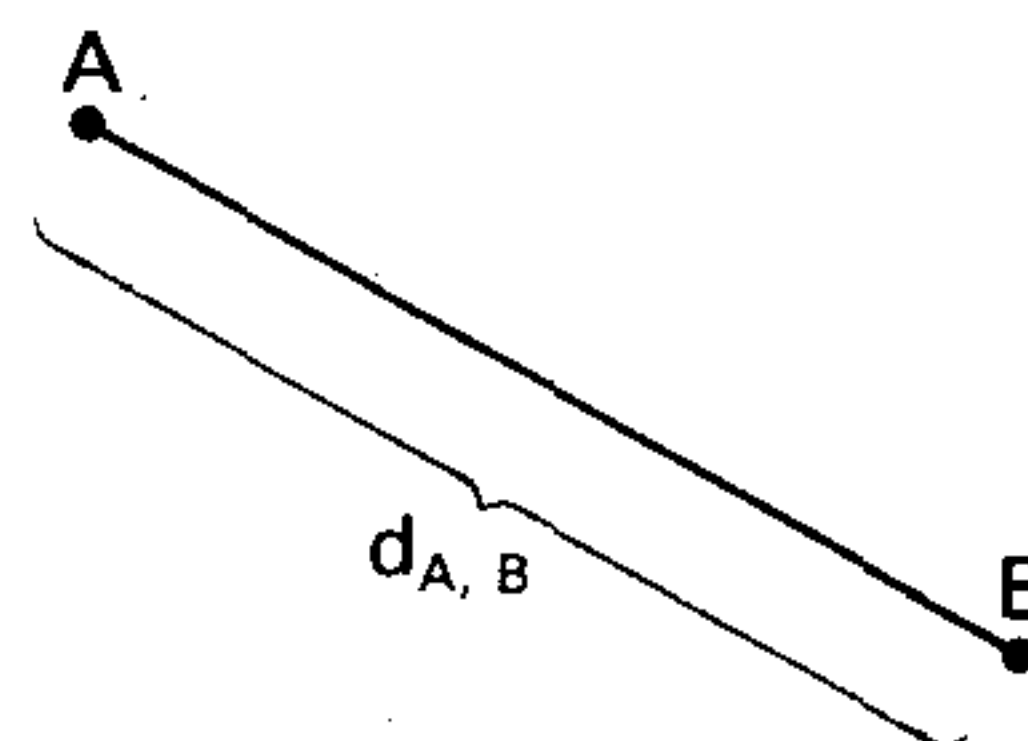
A congruência, a desigualdade e a adição de segmentos, aliadas ao postulado de Eudóxio-Arquimedes (Eudóxio: 408-355 a.C.; Arquimedes: 278-212 a.C.), cujo enunciado é:

"dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro", permitem-nos estabelecer a razão entre dois segmentos quaisquer. Podemos então medir um deles tomando o outro como unidade de comprimento.

24. *Distância entre dois pontos*

a) *Distância geométrica*

Dados dois pontos distintos A e B, a distância entre A e B (indicada por $d_{A,B}$) é o segmento $\overline{AB}$ ou qualquer segmento congruente a $\overline{AB}$.

A
$d_{A,B}$
B

b) *Distância métrica*

Dados dois pontos distintos A e B, a distância entre A e B é a medida (número, *comprimento*) do segmento $\overline{AB}$.

Se A e B coincidem, dizemos que a distância geométrica entre A e B é nula e a distância métrica é igual a zero.

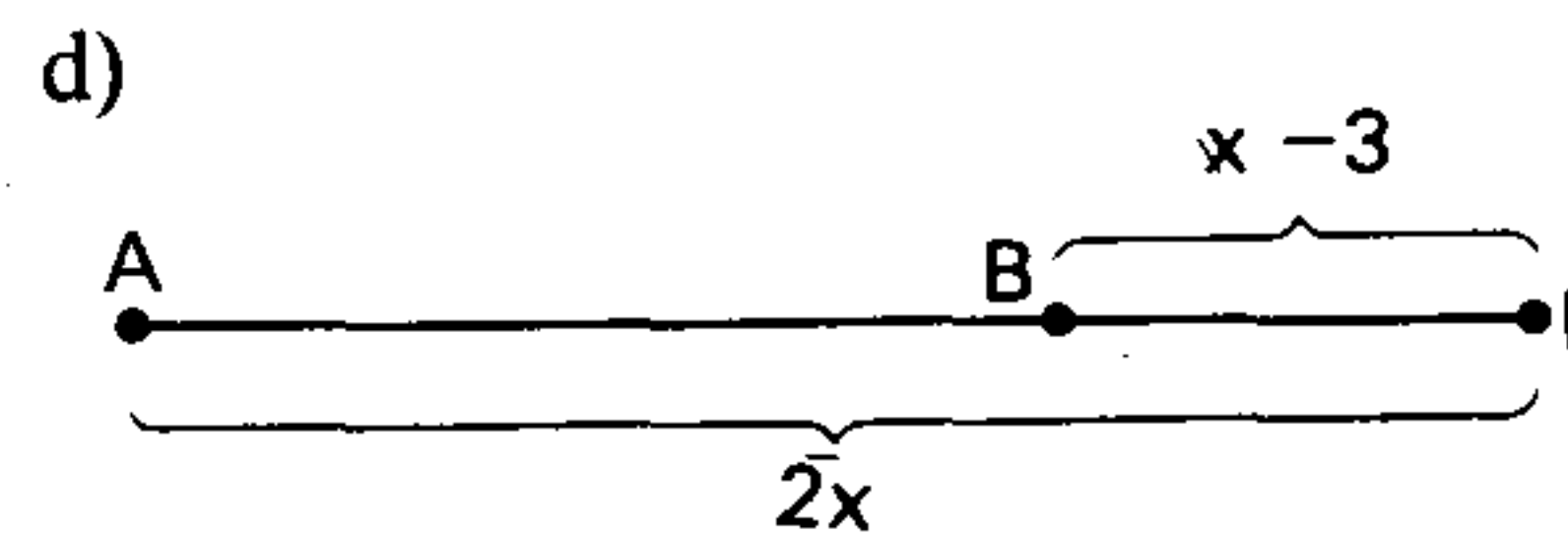
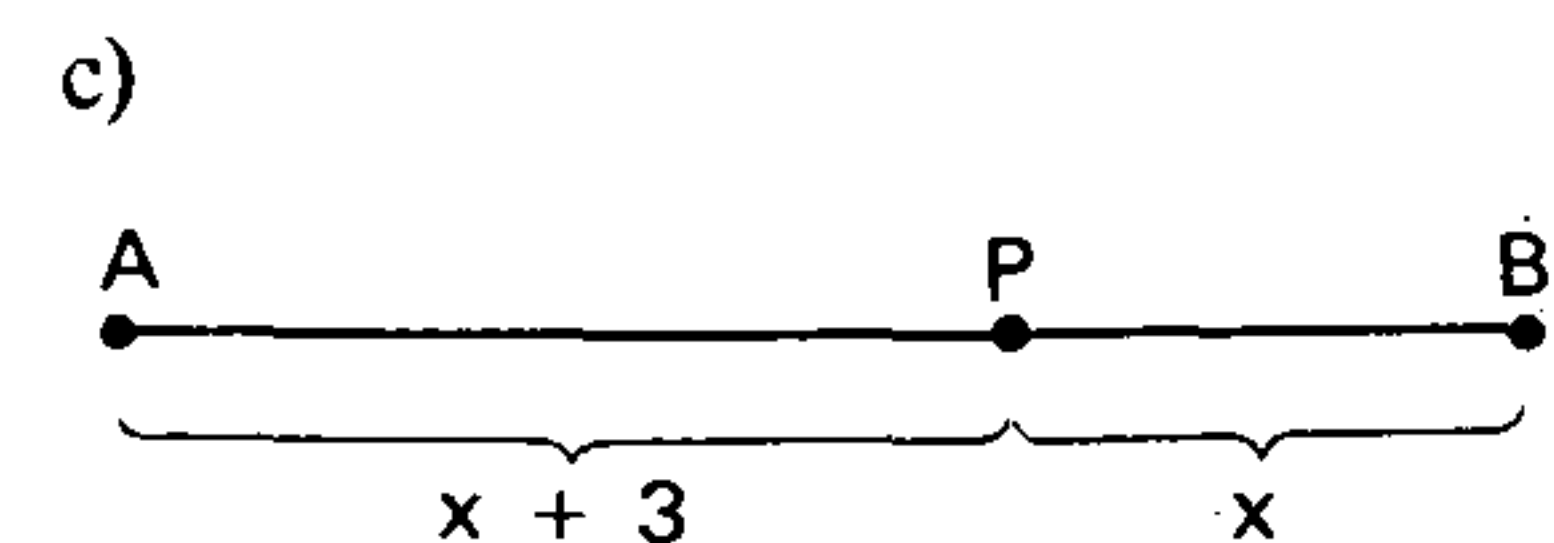
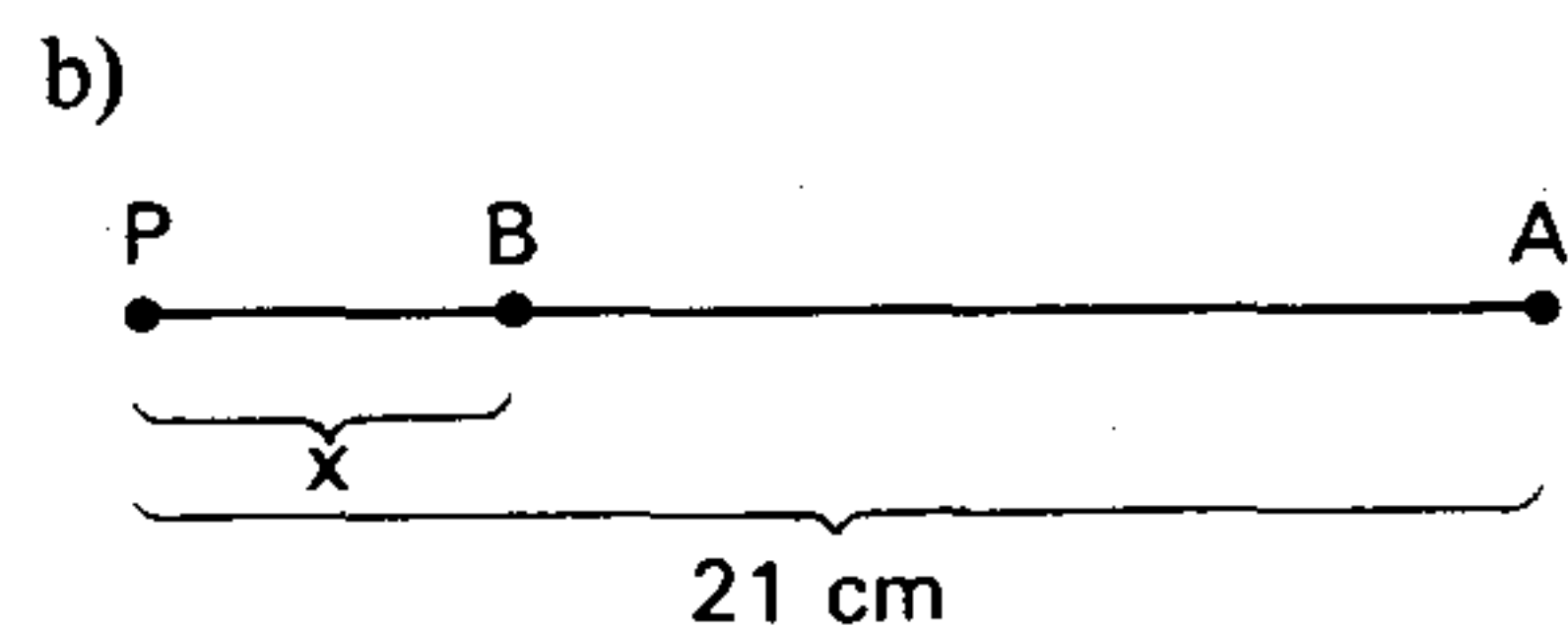
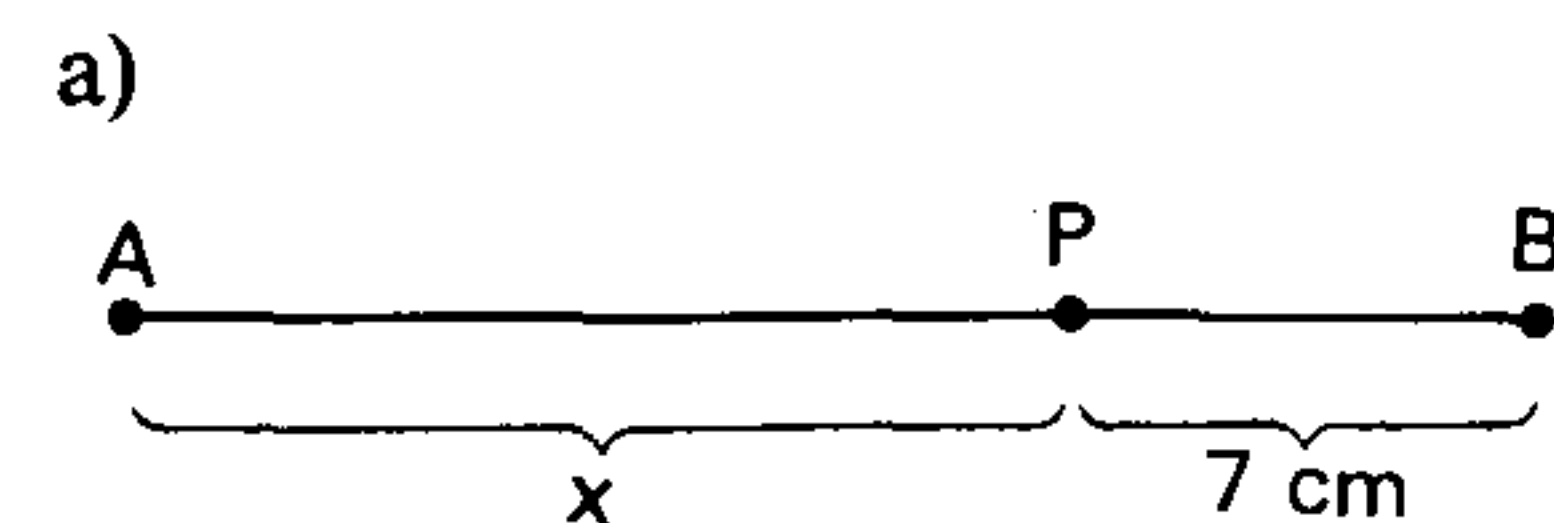
EXERCÍCIOS

6. Se o segmento AB mede *17 cm*, determine o valor de x nos casos:

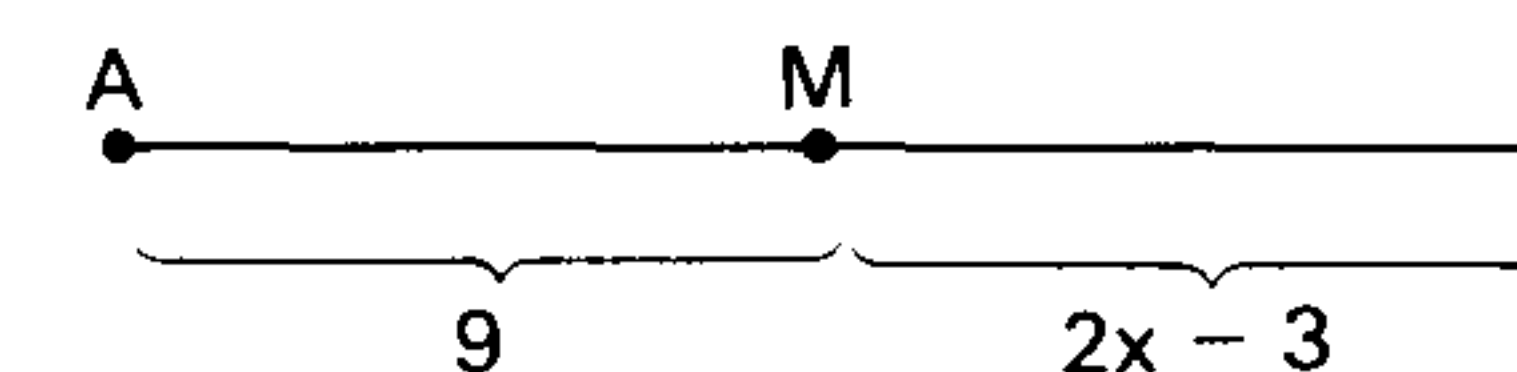
a) A, P, B — x; 7 cm

b) P, B, A — x; 21 cm

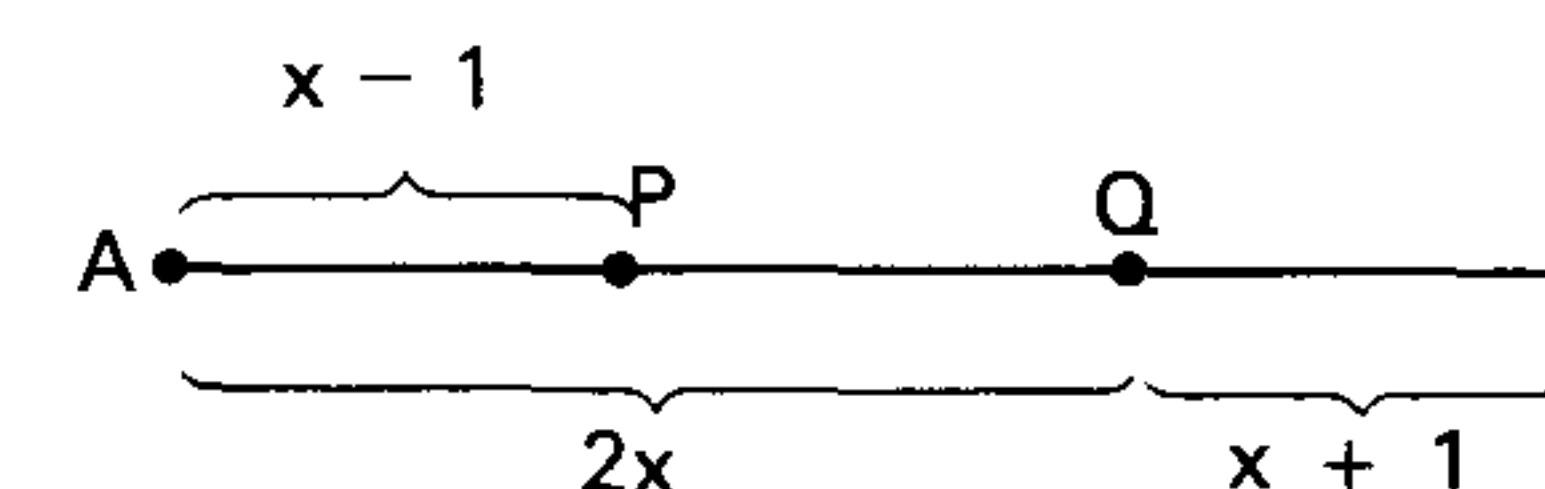
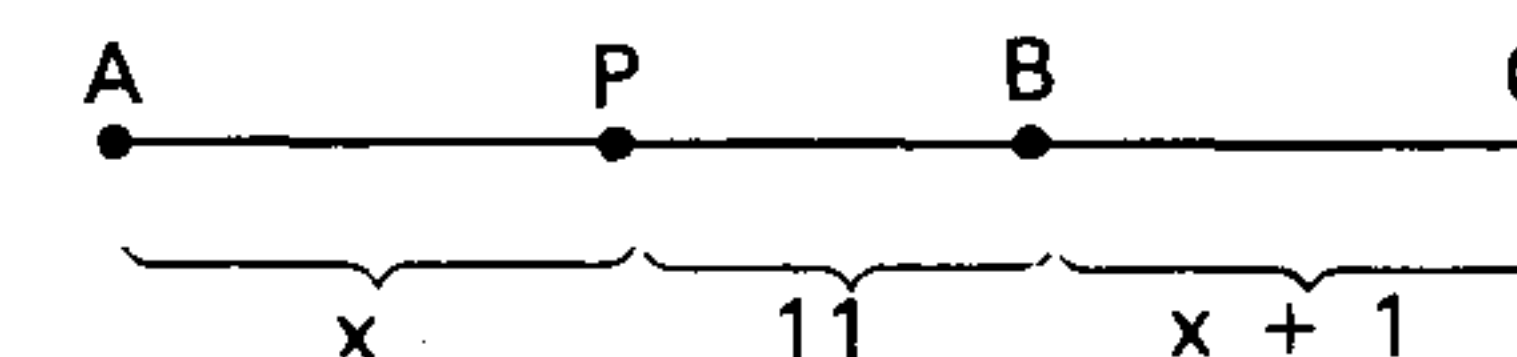
c) A, P, B — x + 3; x

d) A, B, P — x − 3; 2x

7. Determine x, sendo M ponto médio de $\overline{AB}$:

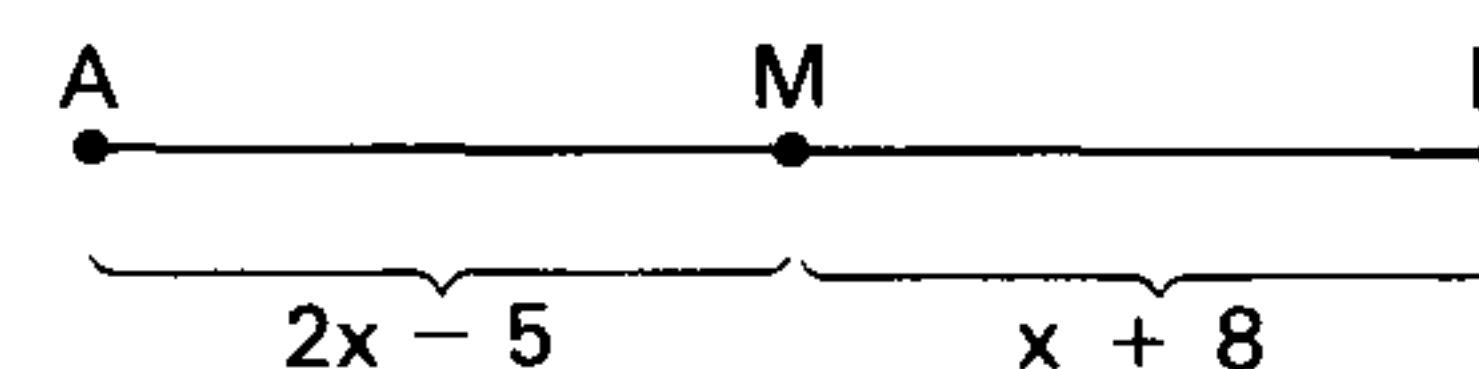
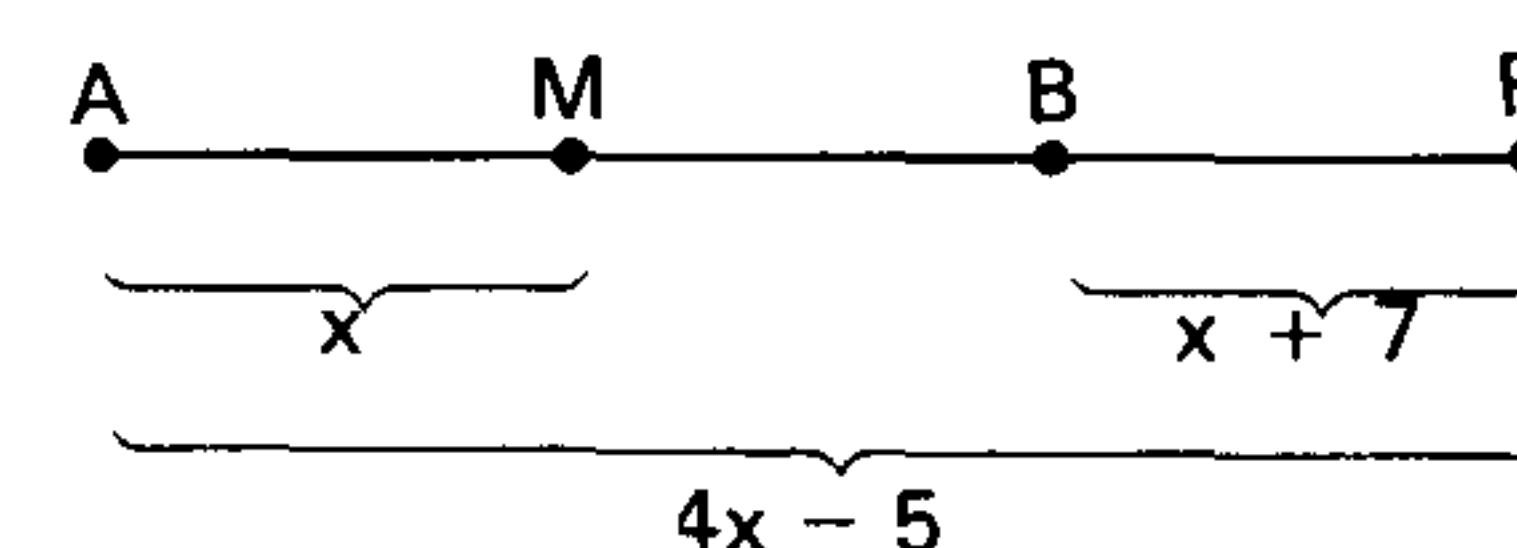
a) A, M, B — 2x − 3; x + 4

b) A, M, B — 9; 2x − 3

8. Determine PQ, sendo $AB = 31$:

a) A, P, Q, B — x − 1; 2x; x + 1

b) A, P, B, Q — x; 11; x + 1

9. Determine AB, sendo M ponto médio de $\overline{AB}$:

a) A, M, B — 2x − 5; x + 8

b) A, M, B, P — x; x + 7; 4x − 5

10. Quantas semi-retas há numa reta, com origem nos quatros pontos A, B, C e D da reta?

11. Três pontos distintos de uma reta quantos segmentos distintos podem determinar?

12. Quantos segmentos há que passam pelos pontos A e B distintos? Quantos há com extremidades A e B?

13. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.
b) Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos.
c) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são colineares.
d) Se dois segmentos são colineares, então eles são adjacentes.
e) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos.
f) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são adjacentes.

14. O segmento $\overline{AB}$ de uma reta é igual ao quíntuplo do segmento $\overline{CD}$ dessa mesma reta. Determine a medida do segmento $\overline{AB}$, considerando como unidade de medida a quinta parte do segmento $\overline{CD}$.

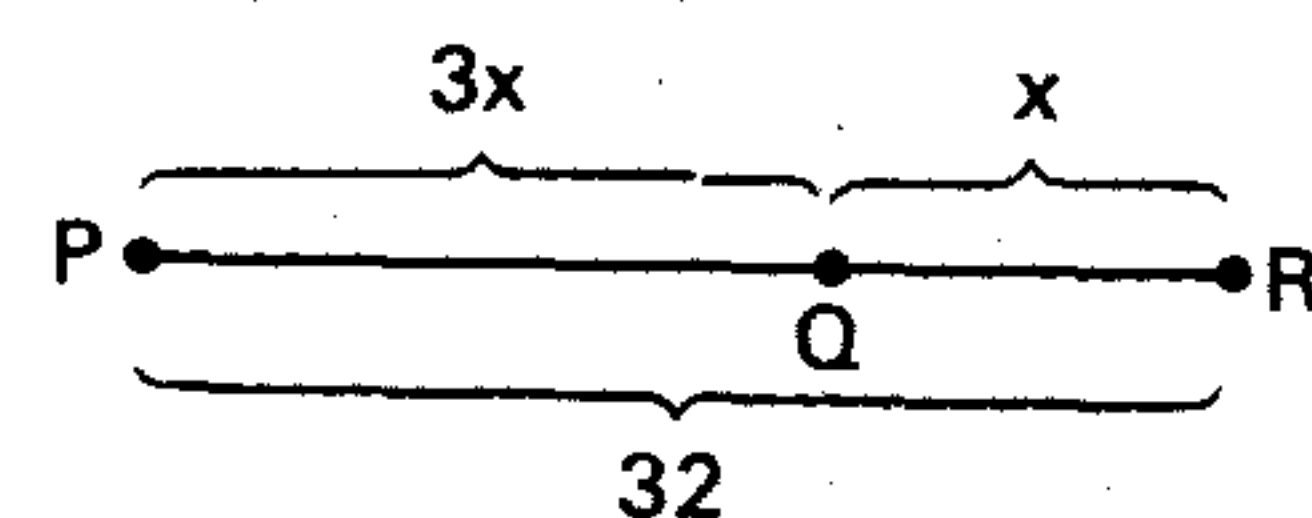
15. P, A e B são três pontos distintos de uma reta. Se P está entre A e B, que relação deve ser válida entre os segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ e $\overline{AB}$?

16. P, Q e R são três pontos distintos de um reta. Se $\overline{PQ}$ é igual ao triplo de $\overline{QR}$ e $PR = 32\ cm$, determine as medidas dos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$.

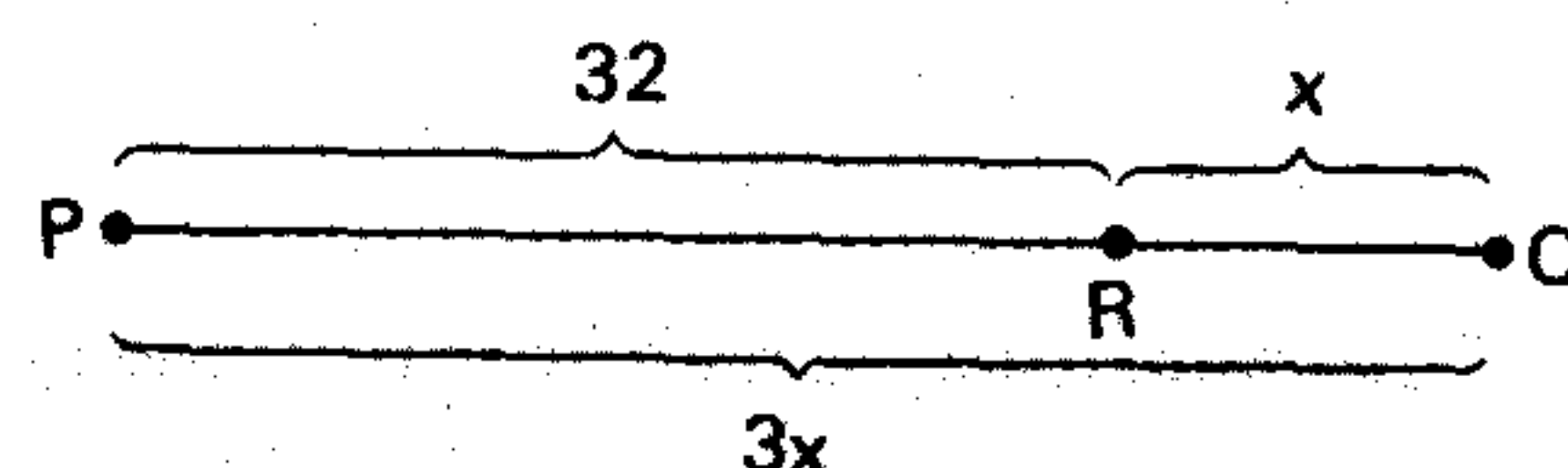
Solução

Temos duas possibilidades:

1ª) Q está entre P e R

P —— Q —— R (PQ = 3x, QR = x, PR = 32)

$$3x + x = 32 \Rightarrow x = 8$$
$$PQ = 24 \qquad QR = 8$$

2ª) R está entre P e Q

P —— R —— Q (PR = 32, RQ = x, PQ = 3x)

$$3x = 32 + x \Rightarrow x = 16$$
$$PQ = 48 \qquad QR = 16$$

Resposta: PQ = 24 cm e QR = 8 cm ou PQ = 48 cm e QR = 16 cm.

17. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são adjacentes, de tal maneira que $\overline{AB}$ é o triplo de $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ é o dobro de $\overline{CD}$, e $AD = 36\ cm$. Determine as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$.

18. Sejam P, A, Q e B pontos dispostos sobre uma reta r, nessa ordem. Se $\overline{PA}$ e $\overline{QB}$ são segmentos congruentes, mostre que $\overline{PQ}$ e $\overline{AB}$ são congruentes.

19. Se A, B e C são pontos colineares, determine AC, sendo $AB = 20\ cm$ e $BC = 12\ cm$.

20. $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são dois segmentos adjacentes. Se $\overline{AB}$ é o quíntuplo de $\overline{BC}$ e $AC = 42\ cm$, determine AB e BC.

21. Sendo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ segmentos colineares consecutivos, $\overline{AB}$ o quádruplo de $\overline{BC}$ e $AC = 45\ cm$, determine AB e BC.

22. Numa reta r, tomemos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e um ponto P de modo que $\overline{AB}$ seja o quíntuplo de $\overline{PC}$, $\overline{BC}$ seja o quádruplo de $\overline{PC}$ e $AP = 80\ cm$. Sendo M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, determine MN.

23. Sejam quatro pontos A, B, C, D dispostos sobre uma mesma reta r, nessa ordem, e tais que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sejam congruentes. Demonstre que os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ têm o mesmo ponto médio.

24. Sejam quatro pontos A, B, C, D dispostos sobre uma mesma reta, nessa ordem, e tais que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ sejam congruentes. Demonstre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes e que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ têm o mesmo ponto médio.

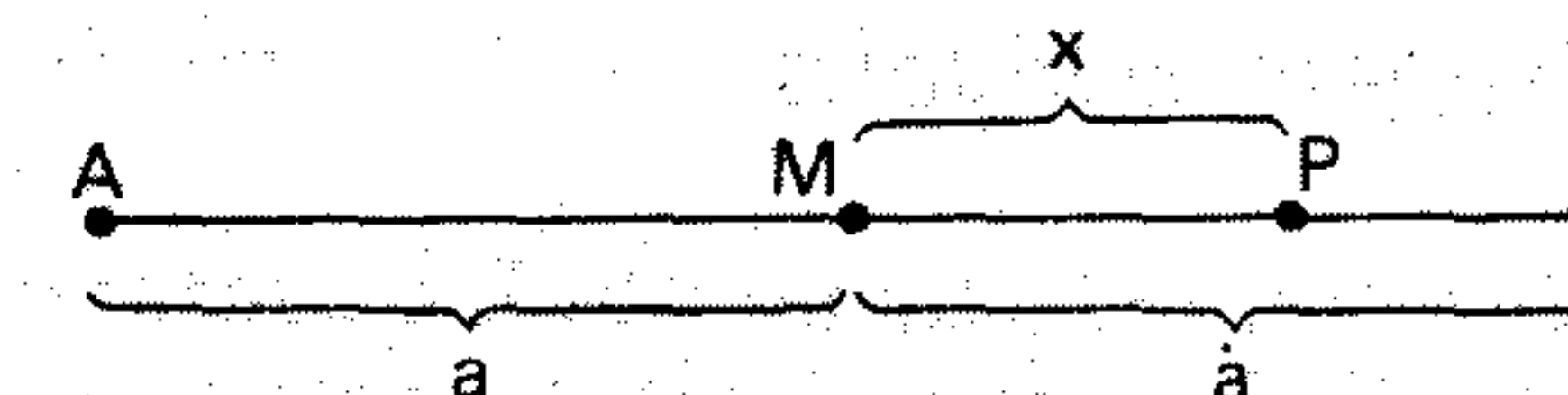
25. Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, contidos numa mesma reta, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, com $A \neq C$. Demonstre que $\overline{MN}$ é congruente a $\overline{AB}$.

26. Dados três pontos A, B, C sobre uma mesma reta, consideremos M e N os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Demonstre que $\overline{MN}$ é igual à semi-soma ou à semidiferença dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

27. Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta e M o seu ponto médio. Consideremos um ponto P entre os pontos M e B. Demonstre que $\overline{PM}$ é dado pela semidiferença positiva entre $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.

Solução

Indicando a medida de $\overline{AB}$ por $2a$ e a de $\overline{PM}$ por x, temos:

A —— M —— P —— B (AM = a, MB = a, MP = x)

$$\left.\begin{array}{l} PA = a + x \\ PB = a - x \end{array}\right\} \Rightarrow PA - PB = 2x \Rightarrow x = \frac{PA - PB}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PM = \frac{PA - PB}{2}$$

28. Consideremos sobre uma reta r um segmento fixo $\overline{AB}$ e um ponto móvel P. Seja M o ponto médio de $\overline{AP}$ e N o ponto médio de $\overline{BP}$. O que podemos dizer a respeito do segmento $\overline{MN}$?

CAPÍTULO III

Ângulos

I. Introdução

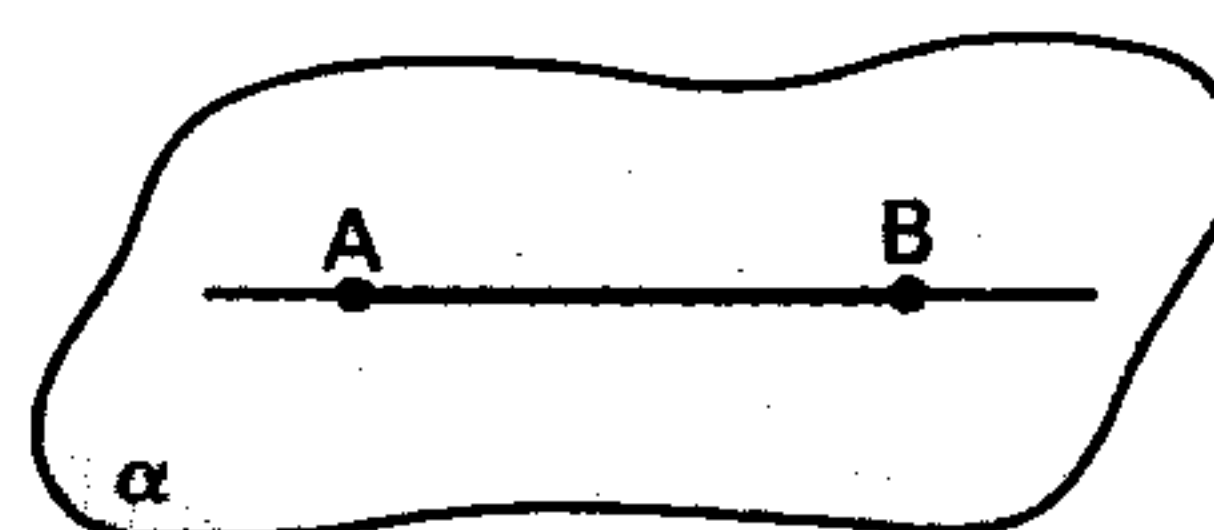
25. Região convexa

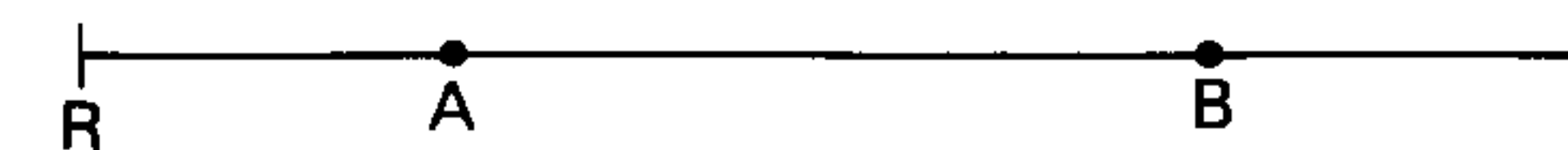
Um conjunto de pontos Σ é convexo (ou é uma região convexa) se, e somente se, dois pontos distintos quaisquer A e B de Σ são extremidades de um segmento $\overline{AB}$ contido em Σ, ou se Σ é unitário, ou se Σ é vazio.

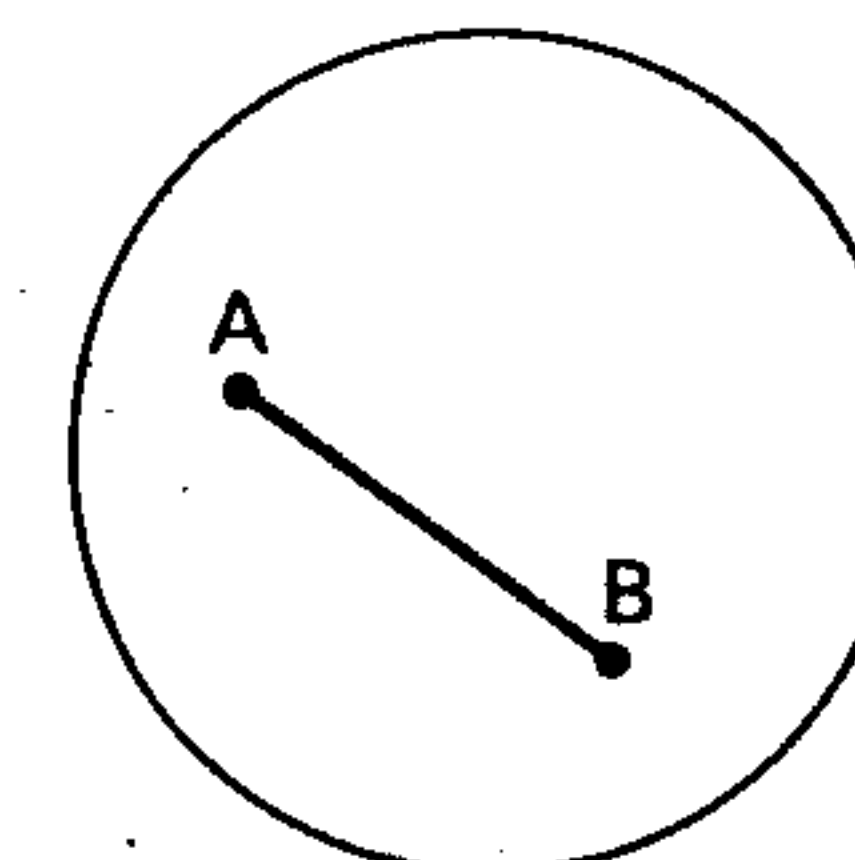
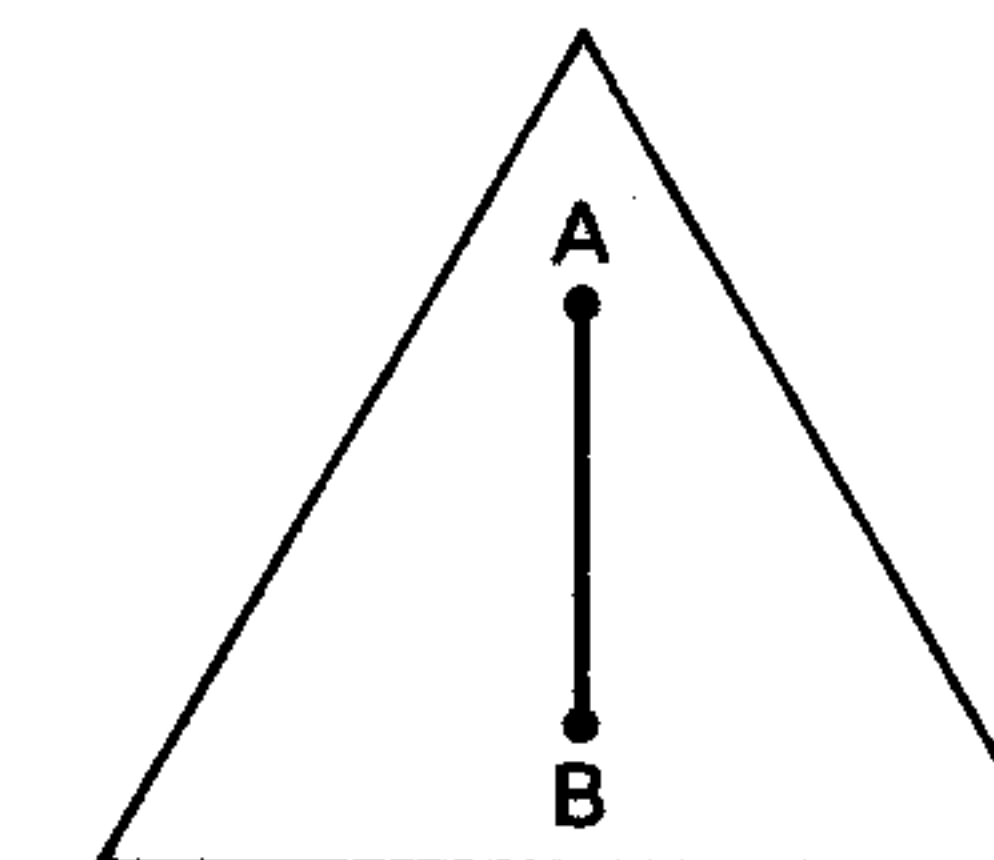
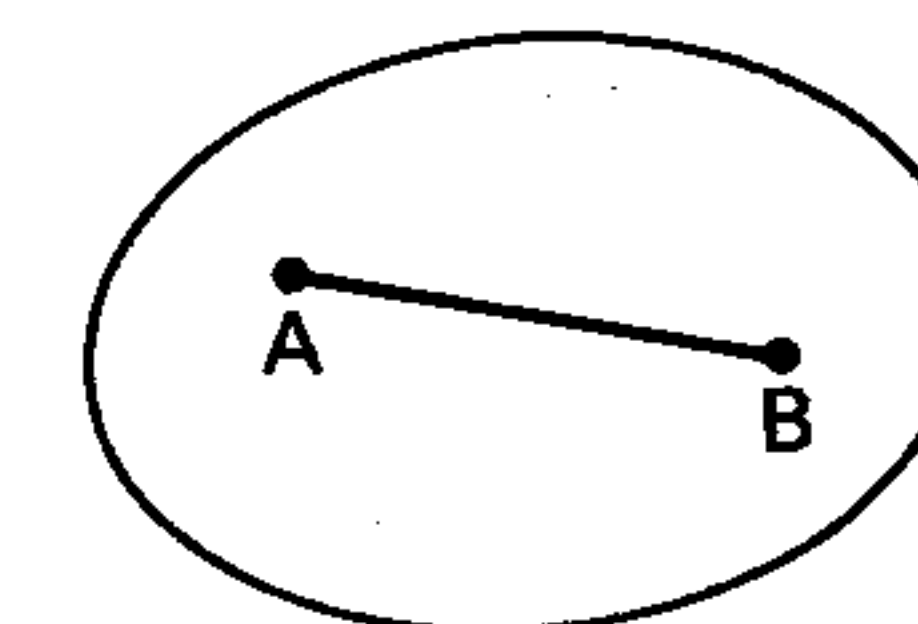
Exemplos

1) Uma reta r é um conjunto de pontos convexo, pois

$$\forall A, \forall B, \forall r \ (A \neq B, A \in r, B \in r \implies \overline{AB} \subset r)$$

2) Um plano α é uma região convexa, pois, se A e B são dois pontos distintos de α, o segmento $\overline{AB}$ está contido em α.

$$\forall A, \forall B, \forall \alpha \ (A \neq B, A \in \alpha, B \in \alpha \implies \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \implies \overline{AB} \subset \alpha)$$

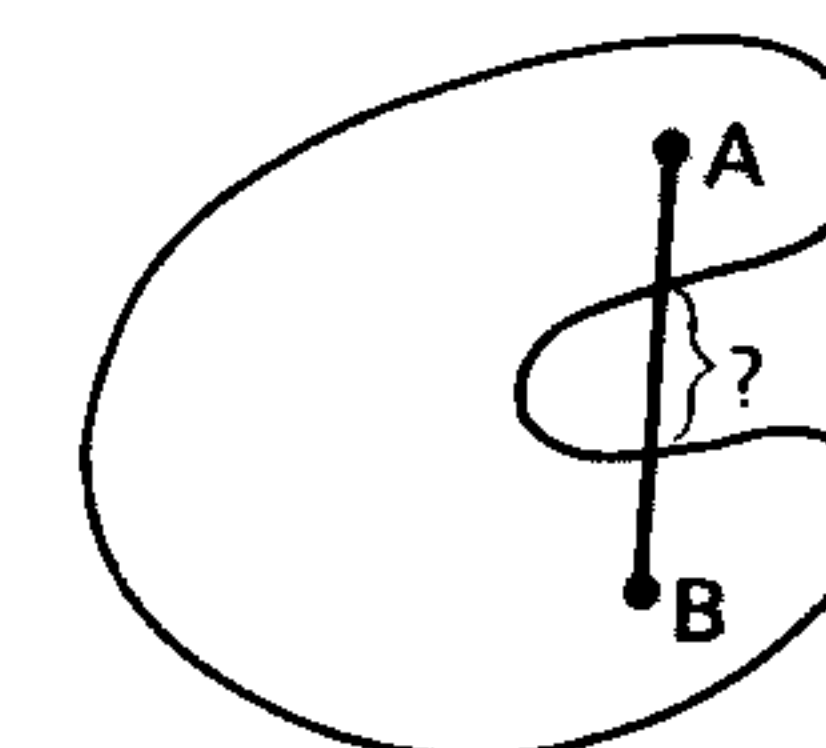
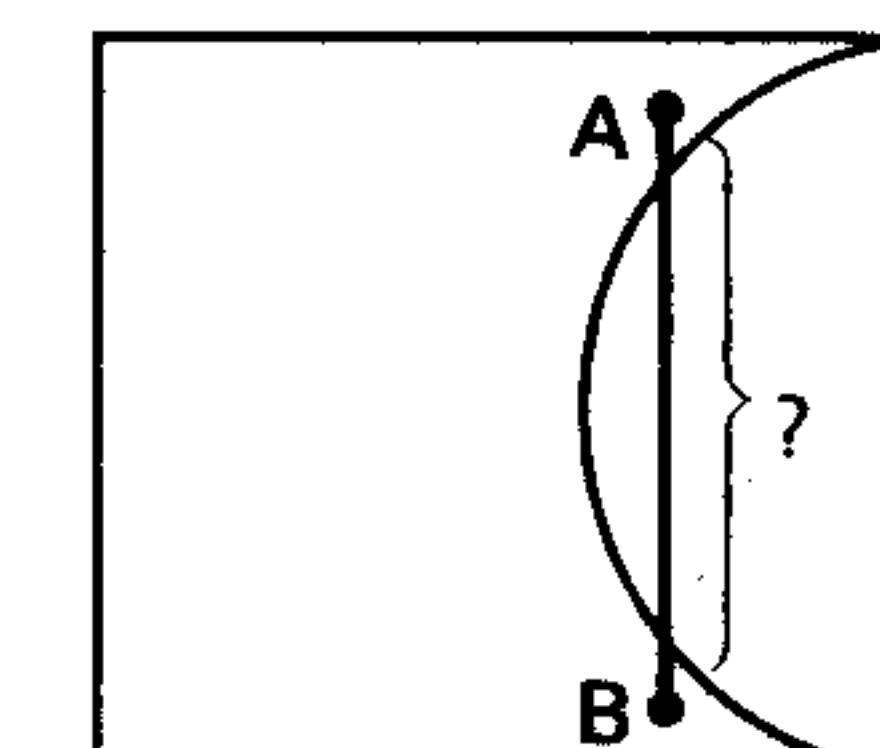
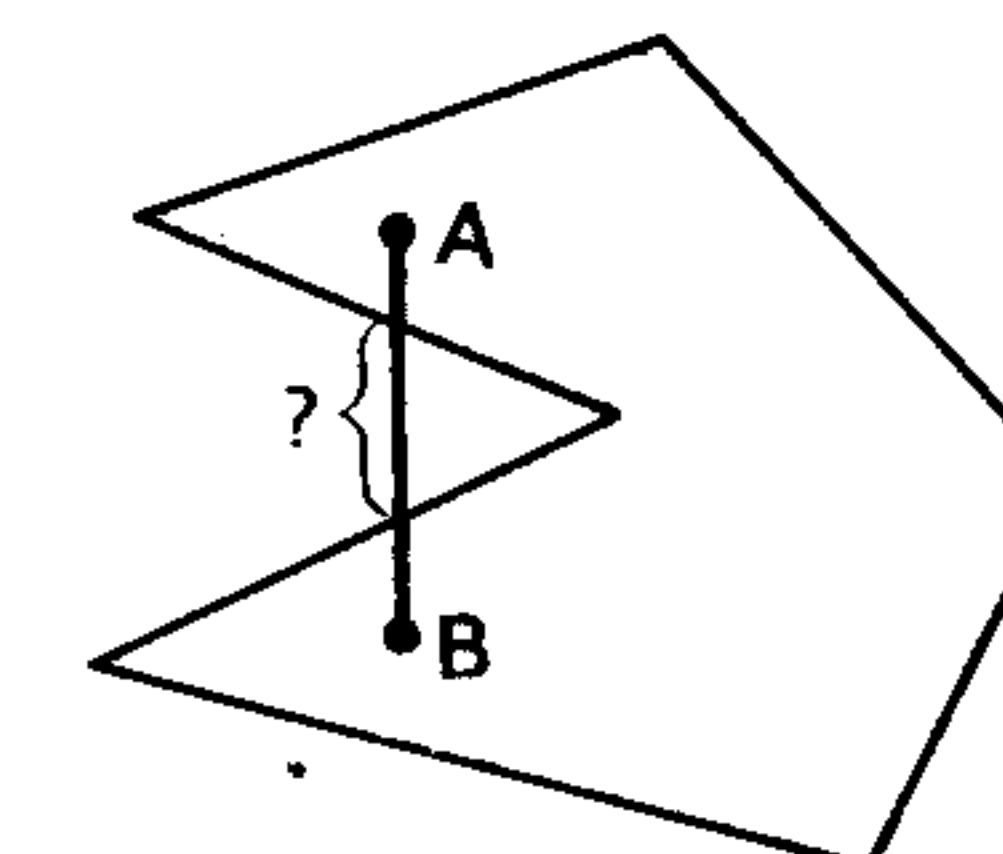
3) Um segmento de reta também é uma figura convexa:

$$\forall A, \forall B, \forall \overline{RS} \ (A \neq B, A \in \overline{RS}, B \in \overline{RS} \implies \overline{AB} \subset \overline{RS})$$

4) Temos a seguir três figuras ainda não definidas que são convexas:

Σ_1 — $\overline{AB} \subset \Sigma_1$ região convexa

Σ_2 — $\overline{AB} \subset \Sigma_2$ conjunto de pontos convexo

Σ_3 — $\overline{AB} \subset \Sigma_3$ figura convexa

26. Se uma região *não* é convexa, ela é uma região *côncava*.

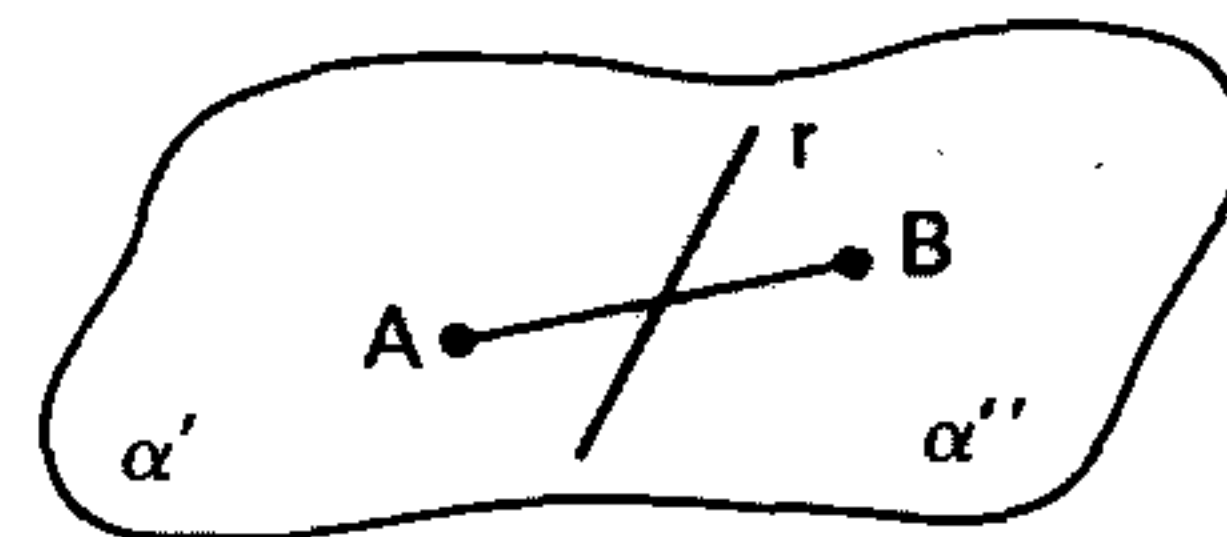
Exemplos

Σ' — $\overline{AB} \not\subset \Sigma'$ — Σ' é côncava

Σ'' — $\overline{AB} \not\subset \Sigma''$ — Σ'' é côncava

Σ''' — $\overline{AB} \not\subset \Sigma'''$ — Σ''' é uma região côncava

27. *Postulado da separação dos pontos de um plano*

Uma reta r de um plano α separa este plano em dois conjuntos de pontos α' e α'' tais que:

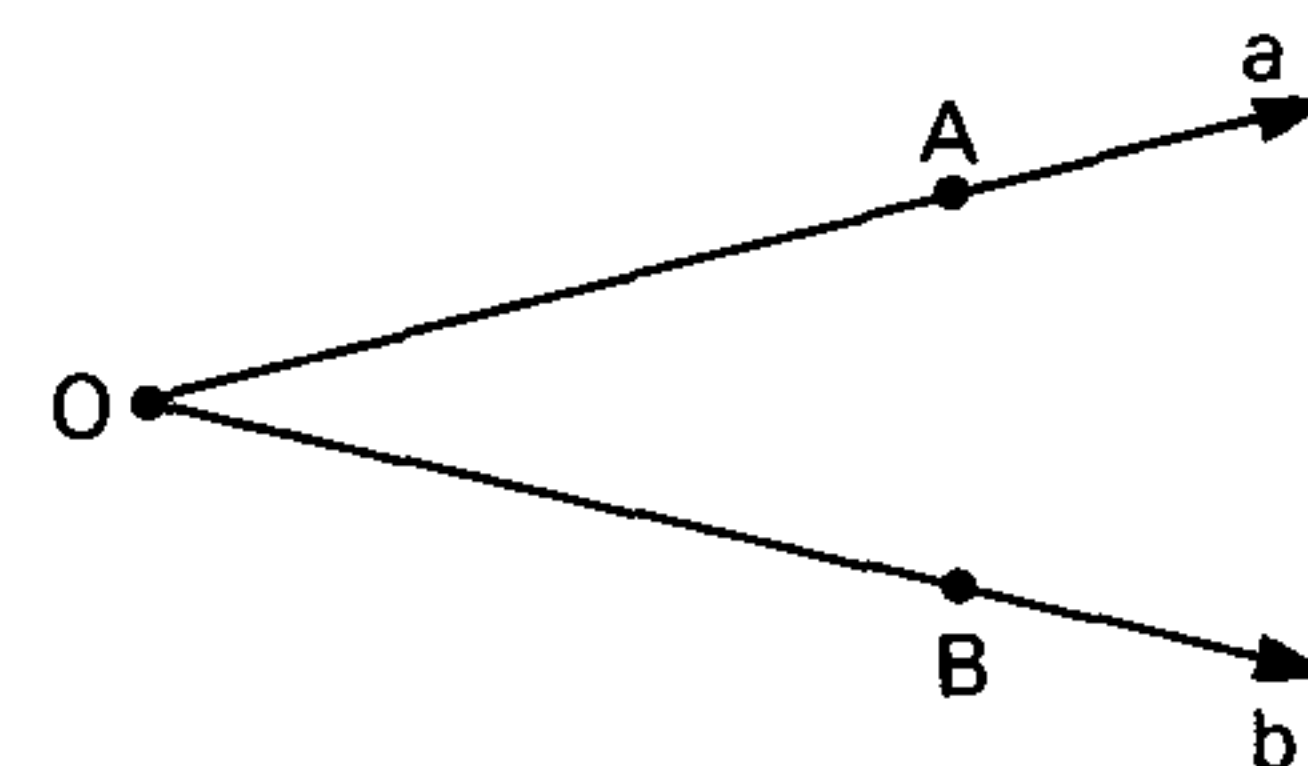
a) $\alpha' \cap \alpha'' = \emptyset$
b) α' e α'' são convexos.
c) $A \in \alpha', B \in \alpha'' \implies \overline{AB} \cap r \neq \emptyset$

Os pontos de α que não pertencem à reta r formam dois conjuntos tais que:

- cada um deles é convexo e
- se A pertence a um deles e B pertence ao outro, então o segmento $\overline{AB}$ intercepta a reta r.

28. *Semiplano — definição*

Cada um dos dois conjuntos (α' e α'') é chamado *semiplano* aberto.
Os conjuntos $r \cup \alpha'$ e $r \cup \alpha''$ são *semiplanos.*
A reta r é a origem de cada um dos semiplanos.
α' e α'' são semiplanos opostos.

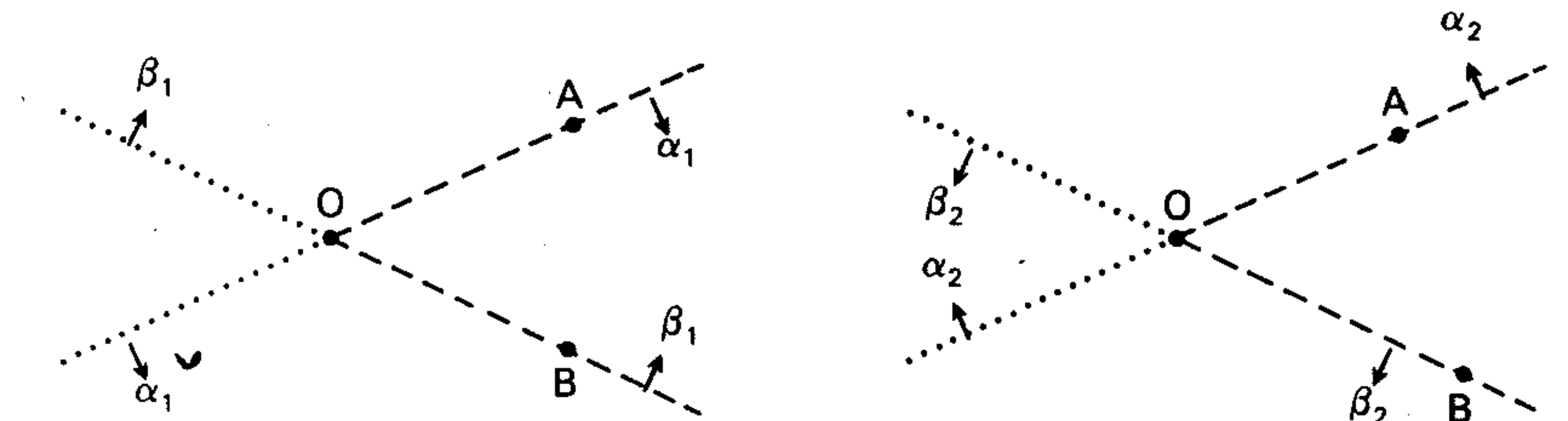
II. Definições

29. Chama-se *ângulo* à reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

$$A\hat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

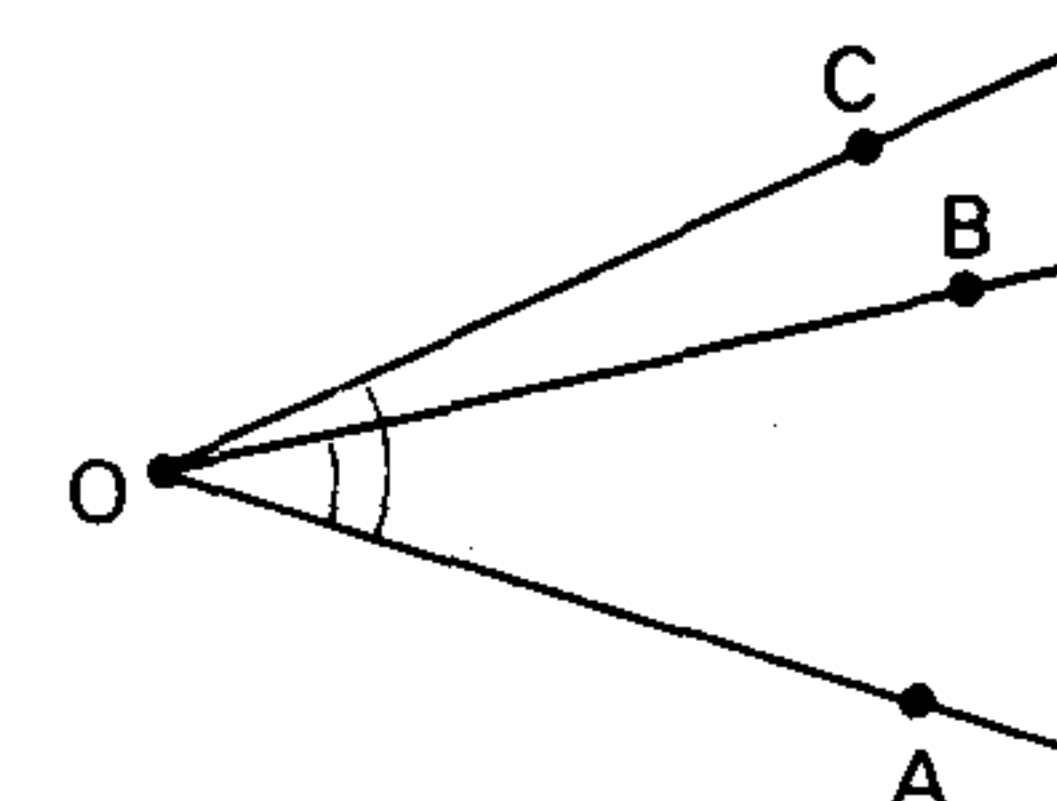
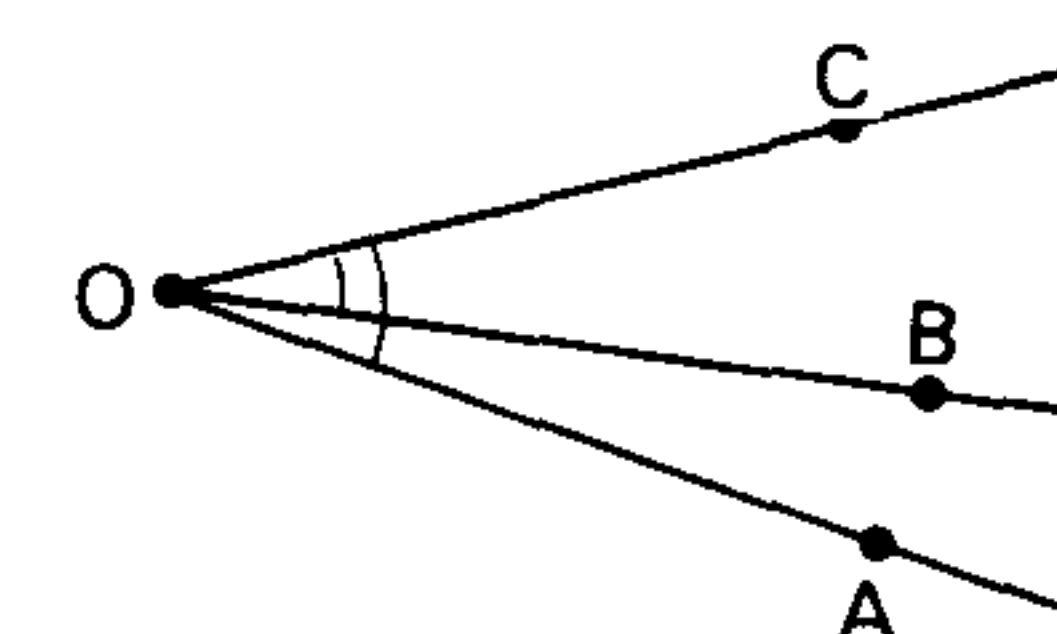
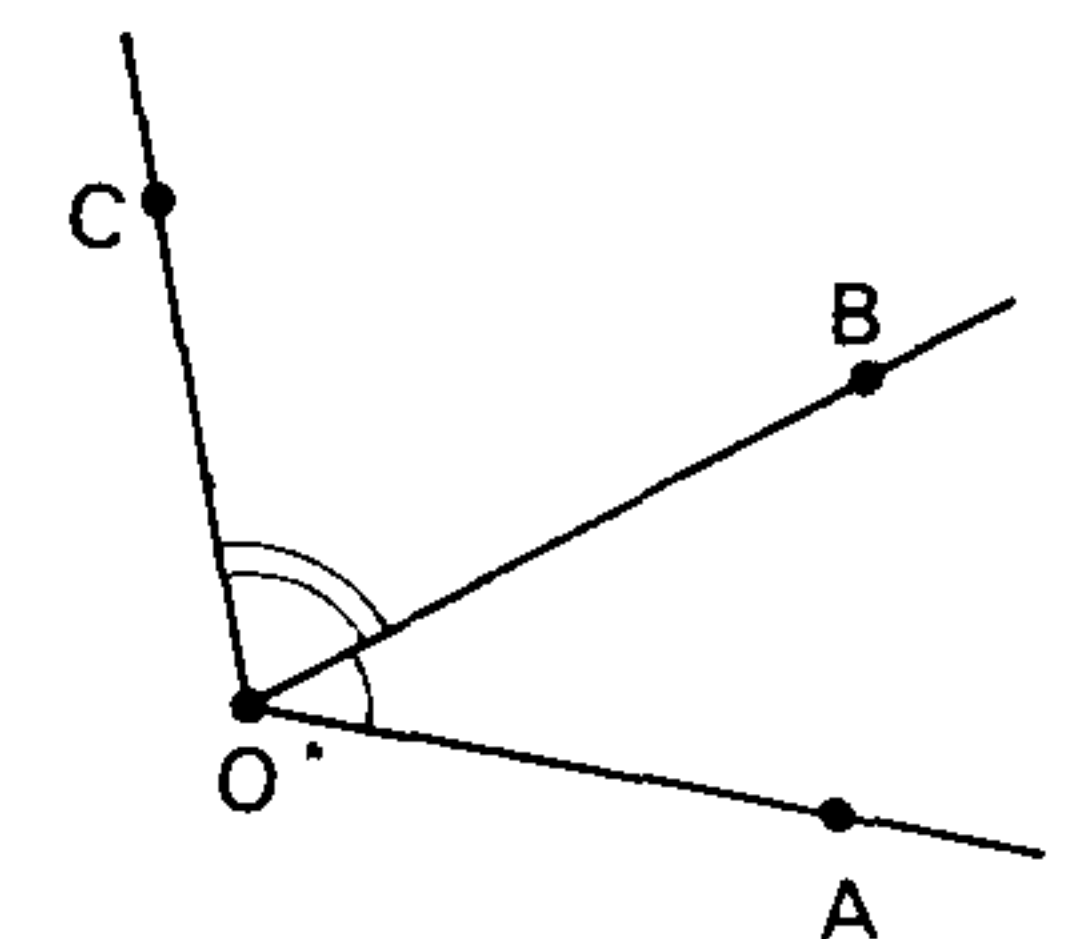
$$A\hat{O}B = a\hat{O}b = \widehat{ab}$$

O ponto O é o vértice do ângulo.
As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

30. *Interior* do ângulo $A\hat{O}B$ é a *interseção* de dois semiplanos abertos, a saber:
α_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ e que contém o ponto B e
β_1 com origem em $\overleftrightarrow{OB}$ e que contém o ponto A.
Interior de $A\hat{O}B = \alpha_1 \cap \beta_1$.

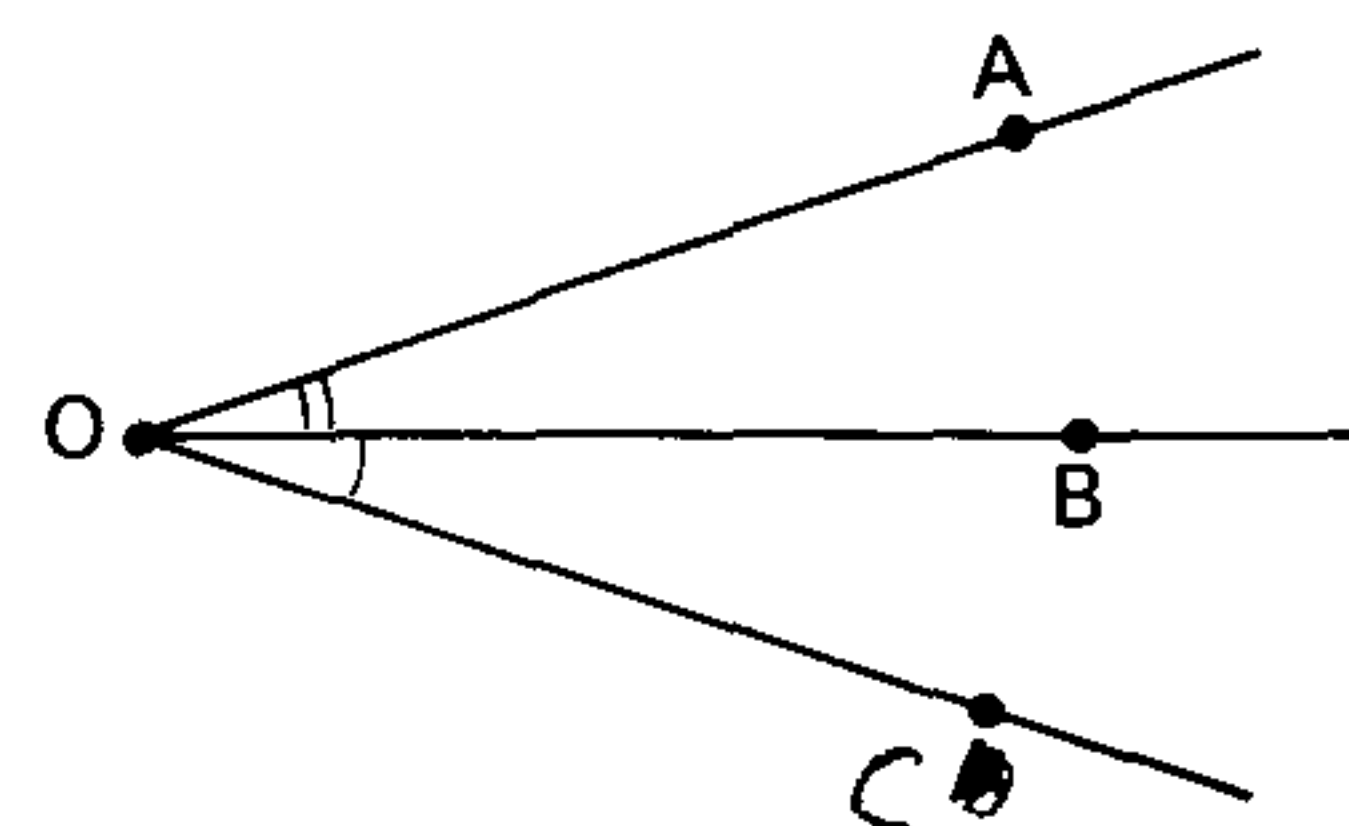
O interior de um ângulo é convexo.
Os pontos do interior de um ângulo são pontos *internos* ao ângulo.
A reunião de um ângulo com seu interior é um *setor angular* ou *ângulo completo* e também é conhecido por "*ângulo convexo*".

31. *Exterior* do ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto dos pontos que não pertencem nem ao ângulo $A\hat{O}B$ nem ao seu interior.
O *exterior* de $A\hat{O}B$ é a *reunião* de dois semiplanos abertos, a saber:
α_2 com origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ e que não contém o ponto B (oposto ao α_1) e
β_2 com origem na reta $\overleftrightarrow{OB}$ e que não contém o ponto A (oposto ao β_1).
Exterior de $A\hat{O}B = \alpha_2 \cup \beta_2$.
O exterior de um ângulo é côncavo.
Os pontos do exterior de um ângulo são pontos *externos* ao ângulo.
A reunião do ângulo com seu exterior também é conhecida por "*ângulo côncavo*".

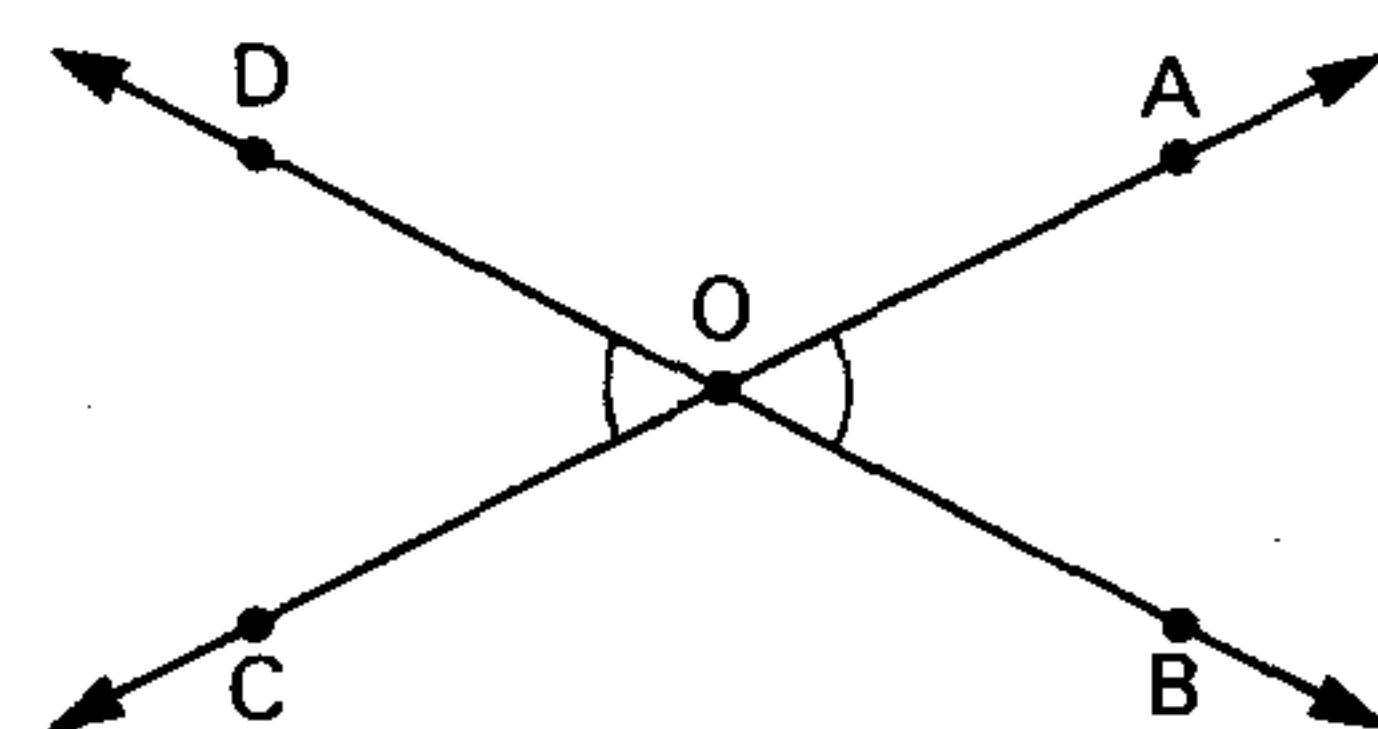
32. *Ângulos consecutivos*

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles é também lado do outro (um lado de um deles coincide com um lado do outro).

$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ são consecutivos ($\overrightarrow{OA}$ é o lado comum).

$A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos ($\overrightarrow{OC}$ é o lado comum).

$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos ($\overrightarrow{OB}$ é o lado comum).

33. Ângulos adjacentes

Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não têm pontos internos comuns.

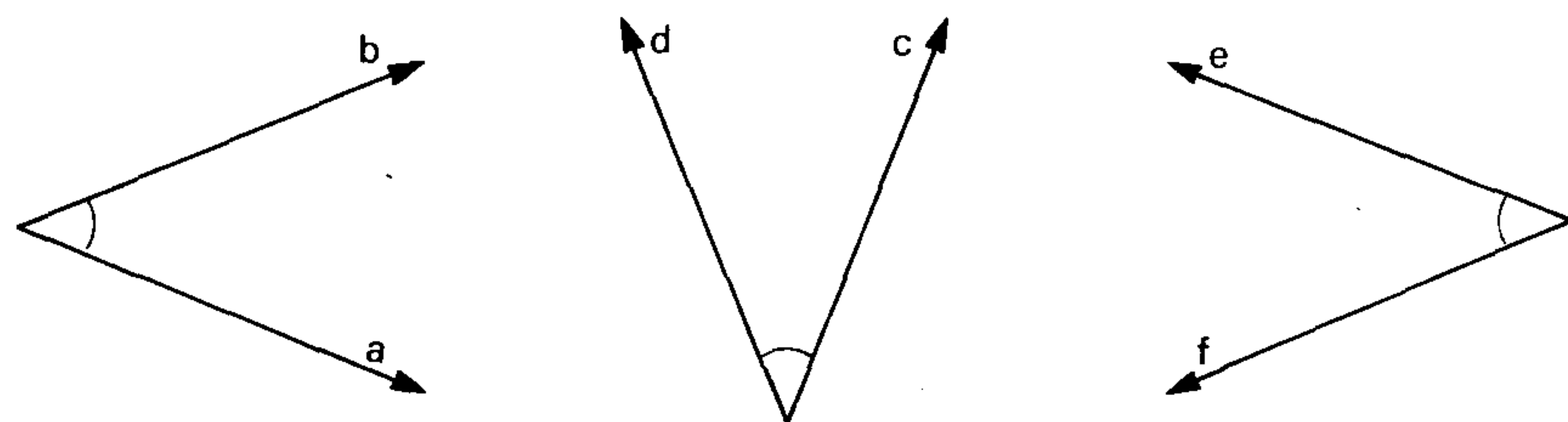
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos adjacentes.

34. Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

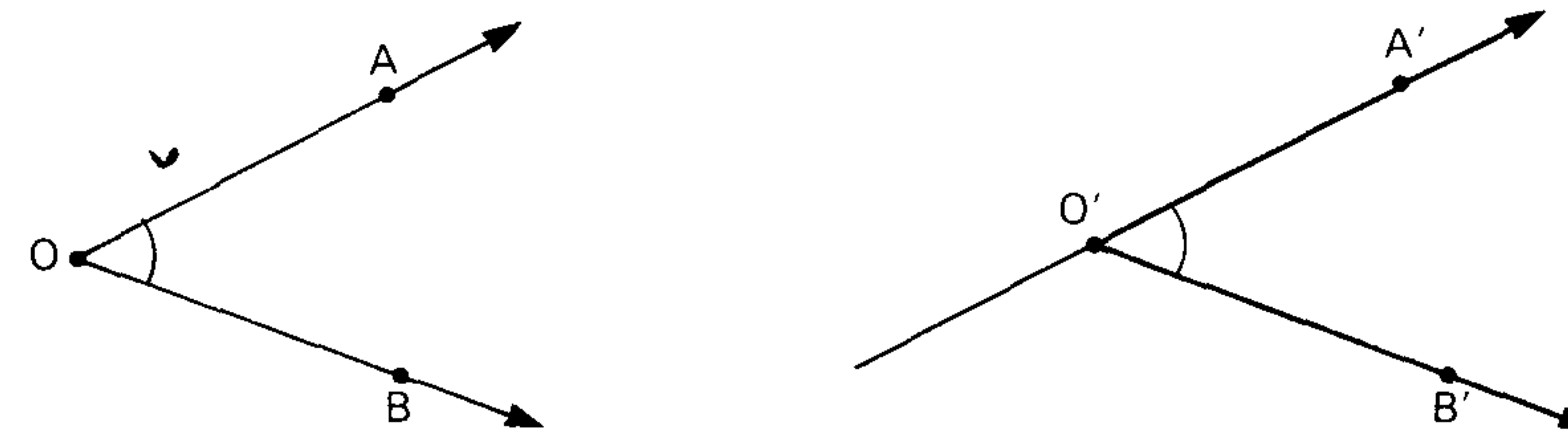
Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} \text{ e } \overrightarrow{OC} \text{ opostas} \\ \overrightarrow{OB} \text{ e } \overrightarrow{OD} \text{ opostas}\end{array}\right\} \implies A\hat{O}B \text{ e } C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice.

Notemos que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

III. Congruência e comparação

35. A *congruência* (símbolo $\equiv$) entre ângulos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

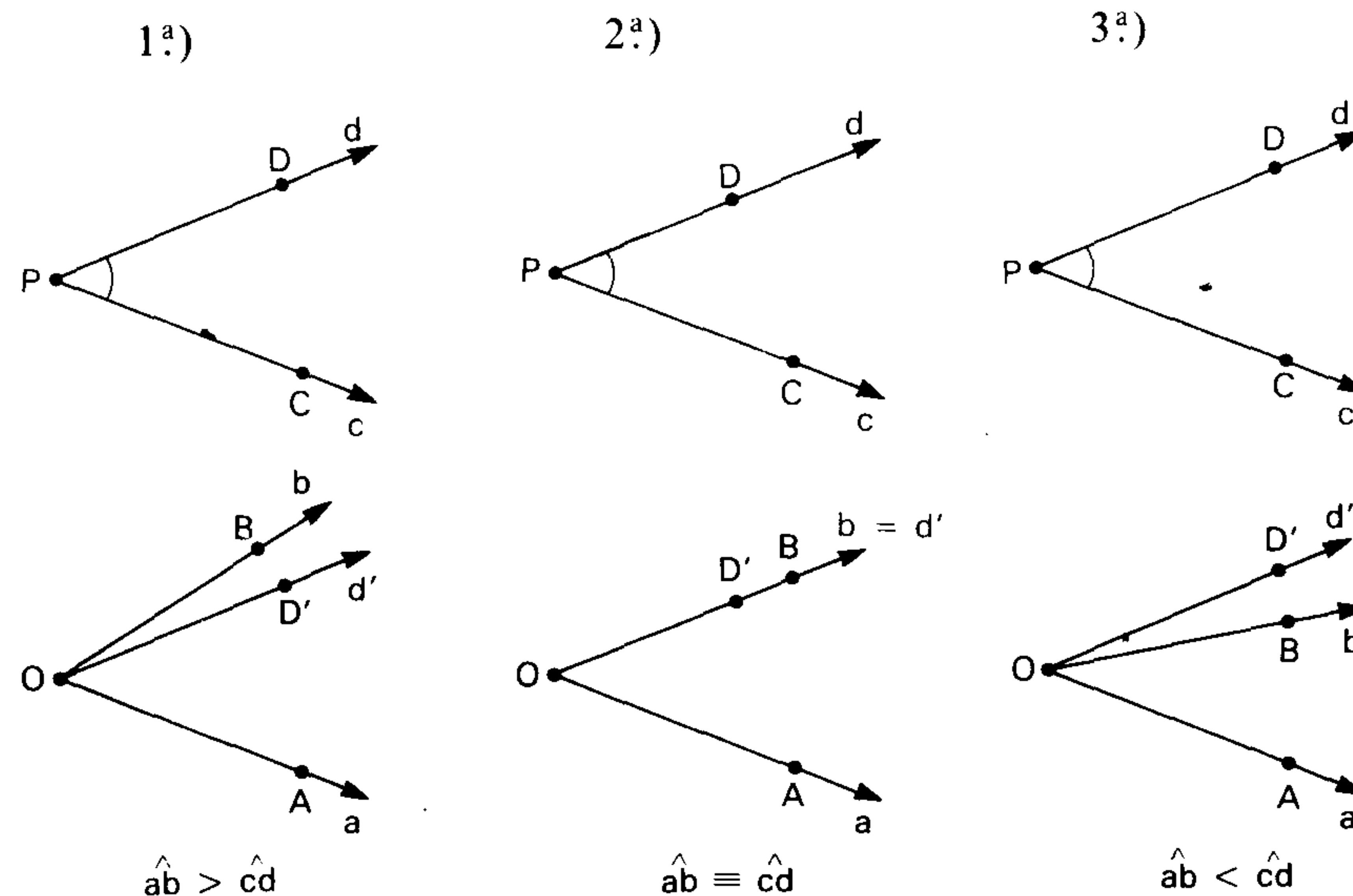
1º) Reflexiva. Todo ângulo é congruente a si mesmo: $\hat{ab} \equiv \hat{ab}$.
2º) Simétrica. Se $\hat{ab} \equiv \hat{cd}$, então $\hat{cd} \equiv \hat{ab}$.
3º) Transitiva. Se $\hat{ab} \equiv \hat{cd}$ e $\hat{cd} \equiv \hat{ef}$, então $\hat{ab} \equiv \hat{ef}$.

4º) *Postulado do transporte de ângulos*

Dados um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semi-reta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, e num dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma *única* semi-reta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O}'B'$ *congruente* ao ângulo $A\hat{O}B$.

36. Comparação de ângulos

Dados dois ângulos $A\hat{O}B$ (ou $a\hat{O}b$ ou $\hat{ab}$) e $C\hat{P}D$ (ou $c\hat{P}d$ ou $\hat{cd}$), pelo postulado do transporte podemos obter, no semiplano que tem origem em $\overleftrightarrow{OA}$ e contém B, uma semi-reta $\overrightarrow{OD'}$ (Od' ou d') tal que $\hat{ad'} \equiv \hat{cd}$. Temos três hipóteses a considerar:

1ª) $\hat{ab} > \hat{cd}$

2ª) $\hat{ab} \equiv \hat{cd}$ ($b = d'$)

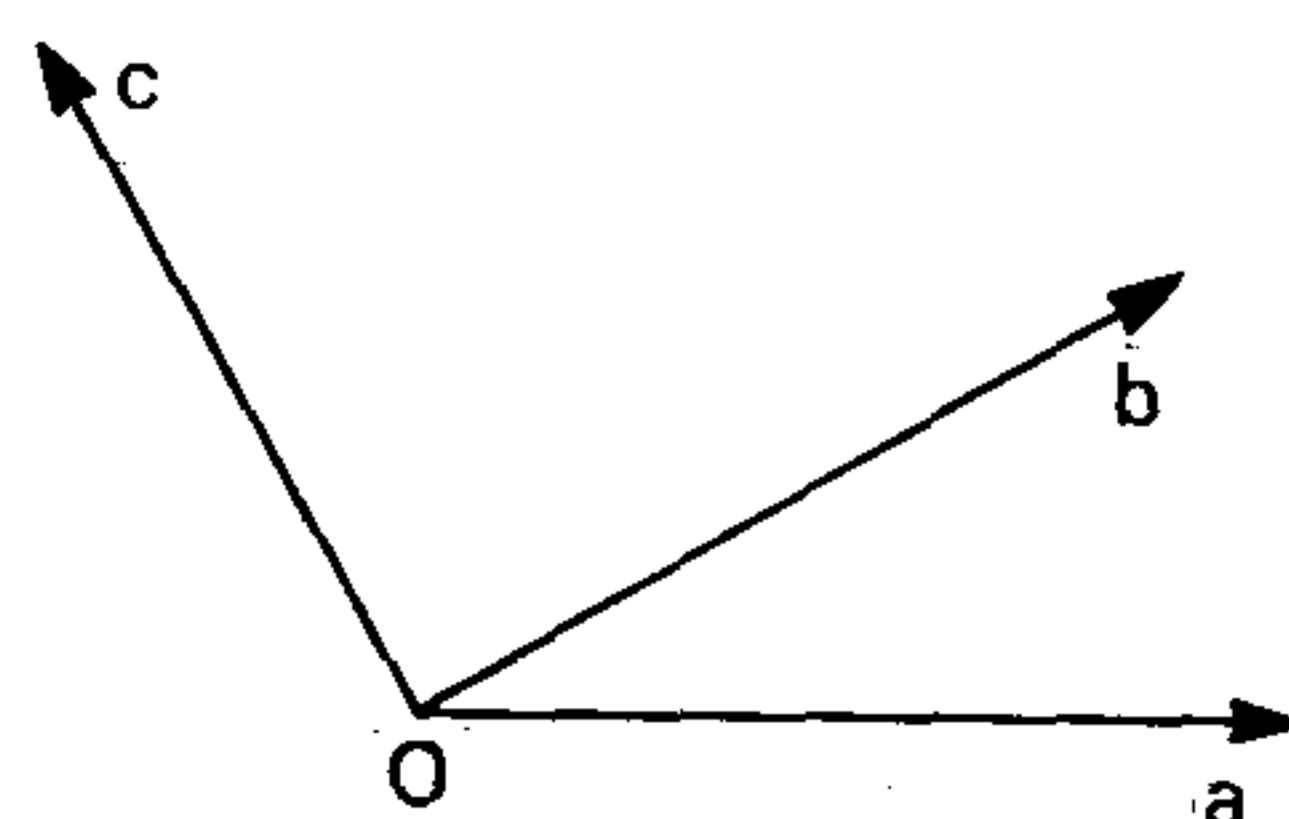
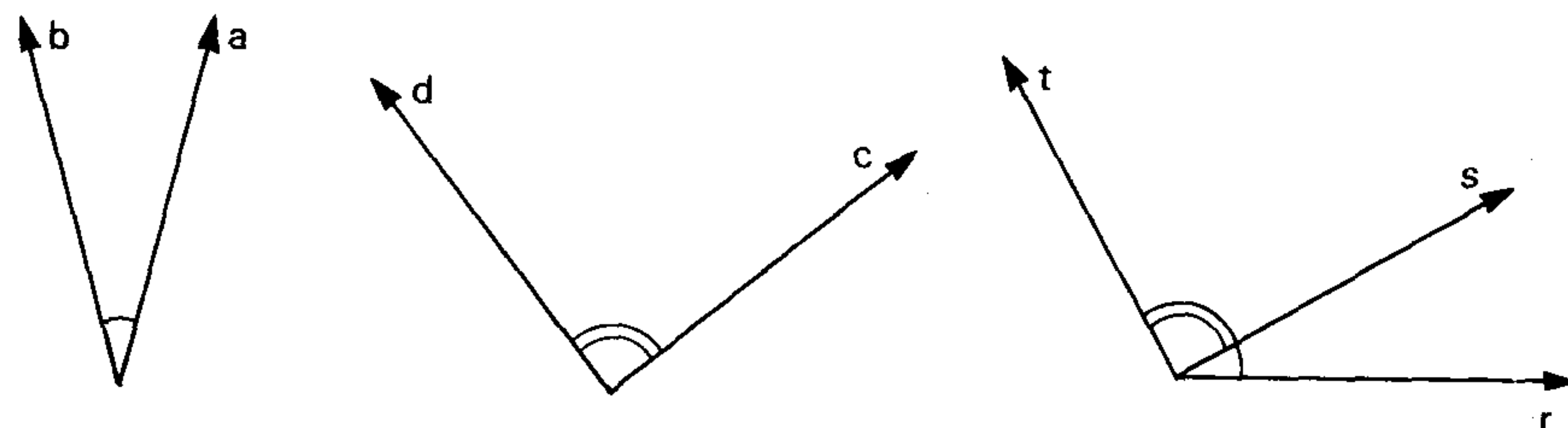
3ª) $\hat{ab} < \hat{cd}$

1ª) A semi-reta d' é interna a $\widehat{ab}$ (d' tem pontos internos a $\widehat{ab}$). Neste caso, dizemos que $\widehat{ab}$ é maior que $\widehat{cd}$ ($\widehat{ab} > \widehat{cd}$).

2ª) A semi-reta d' coincide com b ($\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OB}$). Neste caso, $\widehat{ab}$ é congruente a $\widehat{cd}$ ($\widehat{ab} \equiv \widehat{cd}$).

3ª) A semi-reta d' é externa a $\widehat{ab}$. Neste caso, dizemos que $\widehat{ab}$ é menor que $\widehat{cd}$ ($\widehat{ab} < \widehat{cd}$).

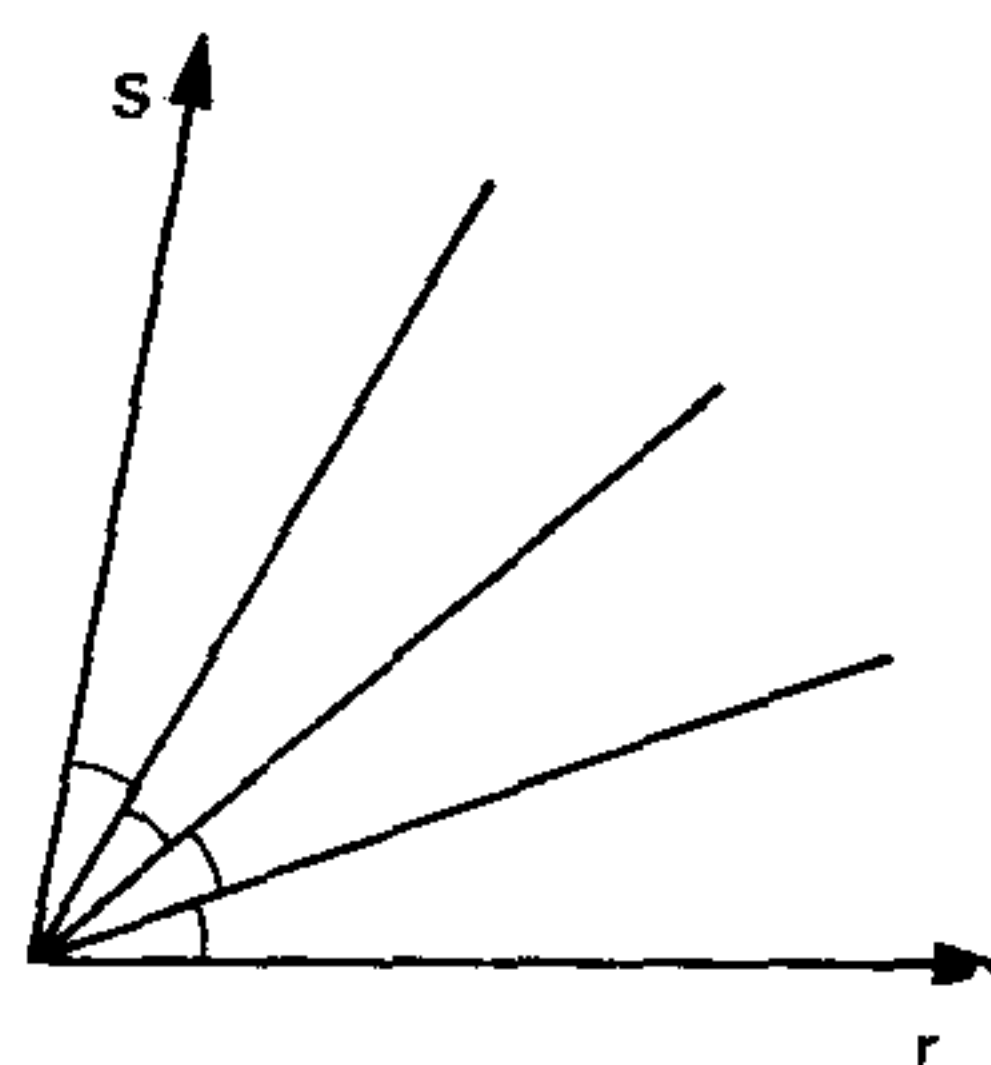
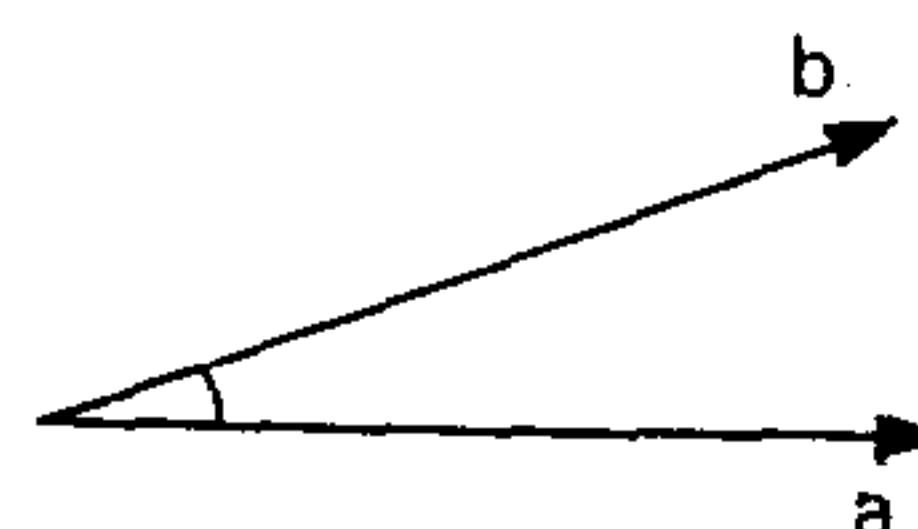
37. Adição de ângulos

Se a semi-reta Ob é interna ao ângulo $a\hat{O}c$, o ângulo $a\hat{O}c$ é soma dos ângulos $a\hat{O}b$ e $b\hat{O}c$.

$$\widehat{ac} = \widehat{ab} + \widehat{bc}$$

Dados dois ângulos $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$, se existem $\widehat{rs} \equiv \widehat{ab}$ e $\widehat{st} \equiv \widehat{cd}$ tais que s é interna a $\widehat{rt}$, dizemos que o ângulo $\widehat{rt}$ é a *soma* de $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$.

$$\widehat{rt} = \widehat{ab} + \widehat{cd} \qquad \widehat{rt} = \widehat{rs} + \widehat{st}$$

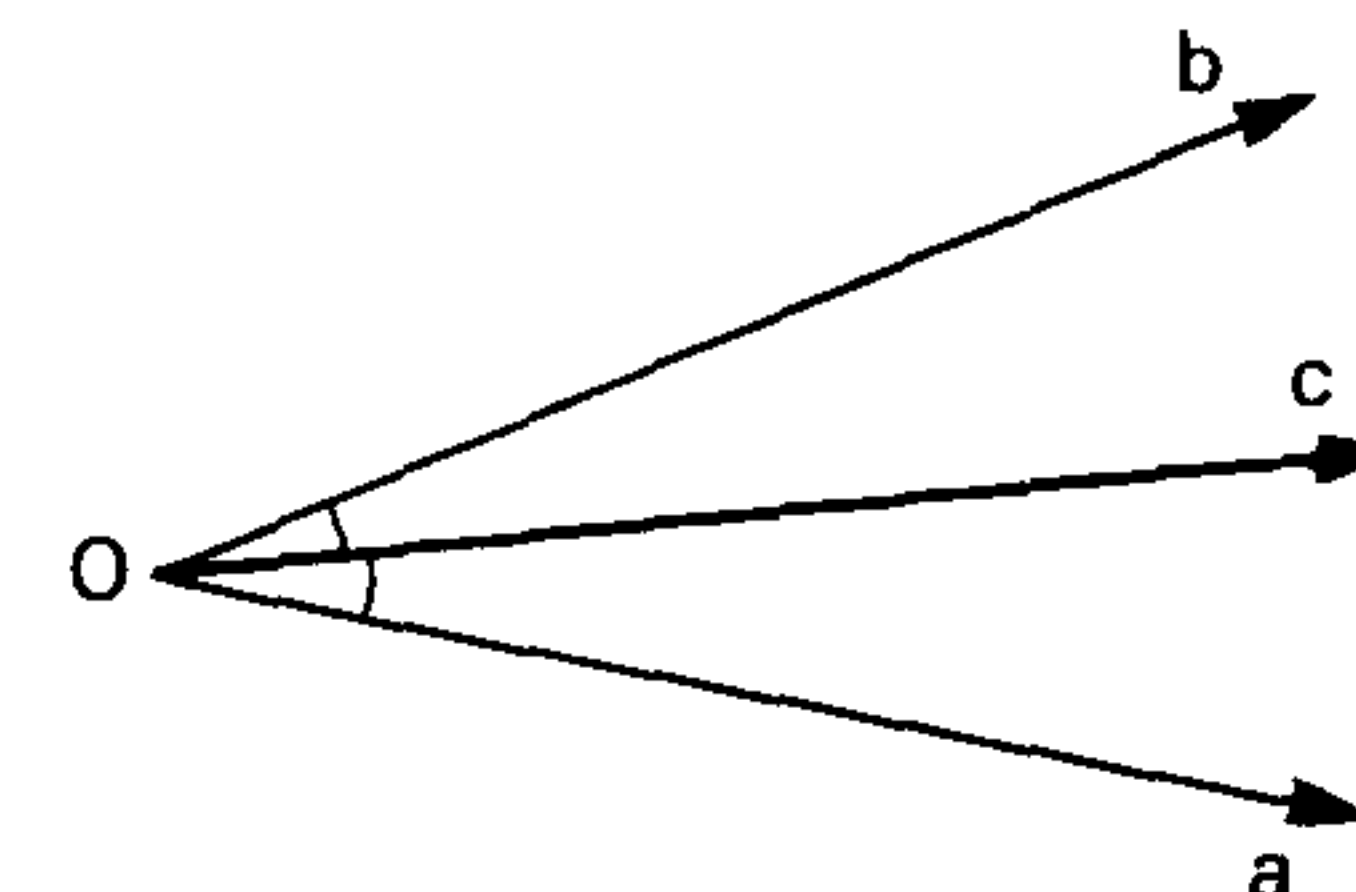
O ângulo $\widehat{rs}$ que é soma de n ângulos $\widehat{ab}$, se existir, é chamado *múltiplo* de $\widehat{ab}$ segundo n ($\widehat{rs} = n \cdot \widehat{ab}$).

Se $\widehat{ab} = n \cdot \widehat{cd}$, dizemos que $\widehat{cd}$ é *submúltiplo* de $\widehat{ab}$ segundo n.

$$\widehat{rs} = 4 \cdot \widehat{ab}$$

38. Bissetriz de um ângulo

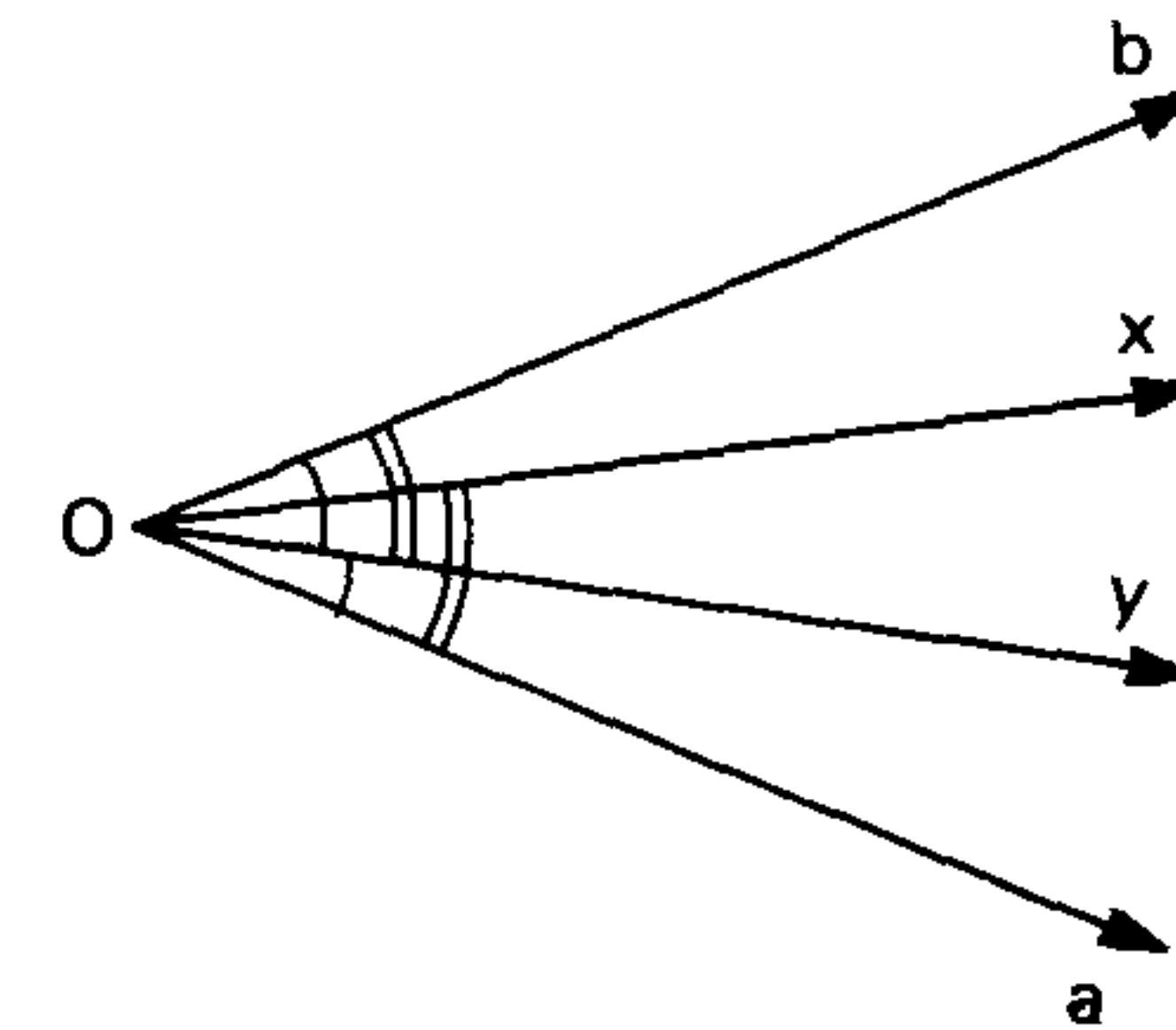
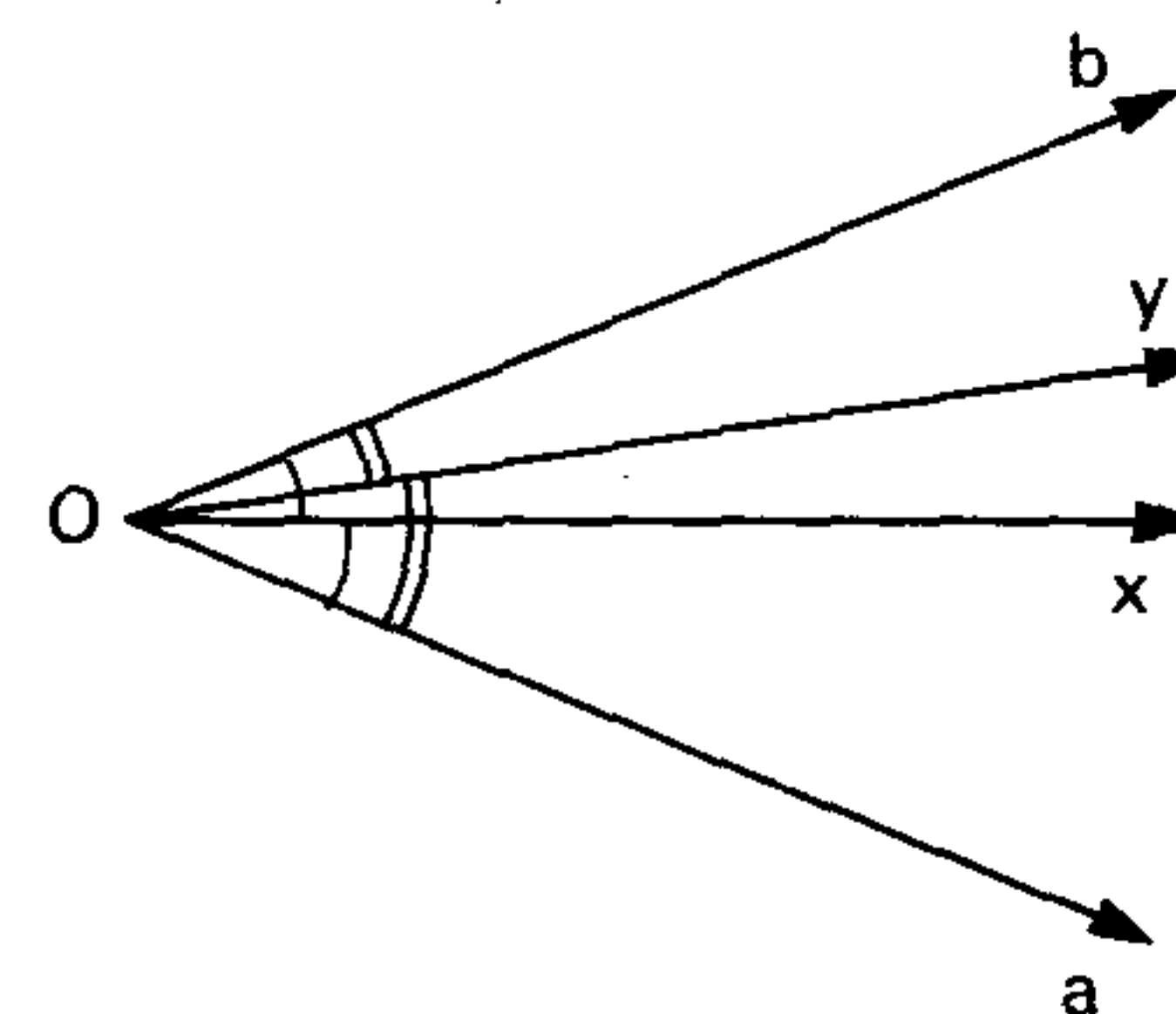
a) *Definição*

Uma semi-reta Oc interna a um ângulo $a\hat{O}b$ é bissetriz do ângulo $a\hat{O}b$ se, e somente se,

$$a\hat{O}c \equiv b\hat{O}c.$$

A bissetriz de um ângulo é uma semi-reta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

b) *Unicidade da bissetriz*

Se Ox e Oy distintas ($Ox \neq Oy$) fossem bissetrizes de $a\hat{O}b$, teríamos:

$$a\hat{O}x \equiv b\hat{O}x \ (1) \quad \text{e} \quad a\hat{O}y \equiv b\hat{O}y \ (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} Ox \text{ interna a } a\hat{O}y \implies \widehat{ay} > \widehat{ax} \\ \qquad\text{e} \\ Oy \text{ interna a } x\hat{O}b \implies \widehat{xb} > \widehat{yb} \end{array}\right\} \overset{(1)}{\implies} \begin{array}{l} \widehat{ay} > \widehat{ax} \equiv \widehat{xb} > \widehat{yb} \\ \text{o que é absurdo, de acordo com (2)} \end{array}$$

ou

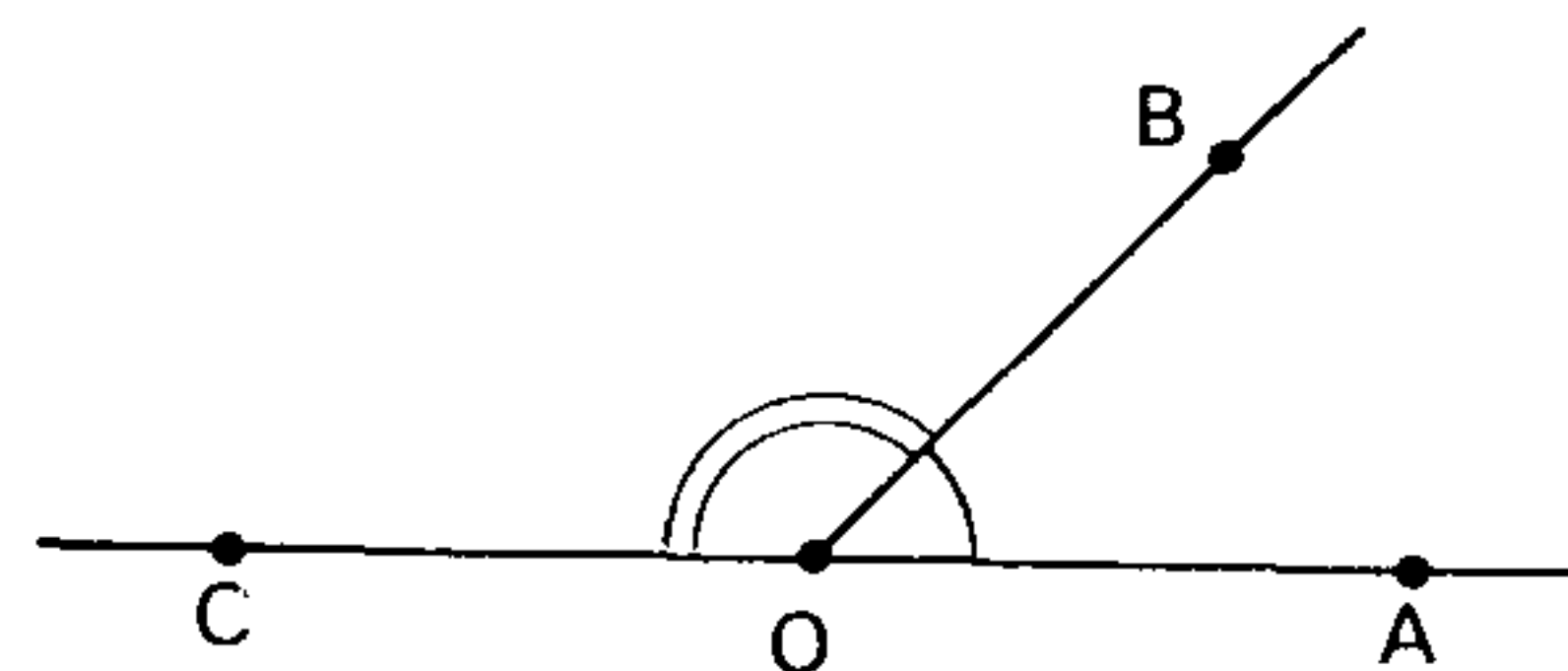
$$\left.\begin{array}{l} Oy \text{ interna a } a\hat{O}x \implies \widehat{ax} > \widehat{ay} \\ \qquad\text{e} \\ Ox \text{ interna a } y\hat{O}b \implies \widehat{yb} > \widehat{xb} \end{array}\right\} \overset{(2)}{\implies} \begin{array}{l} \widehat{ax} > \widehat{ay} \equiv \widehat{yb} > \widehat{xb} \\ \text{o que é absurdo, de acordo com (1)} \end{array}$$

Logo, a bissetriz de um ângulo é única.

c) A *existência* da bissetriz está provada no item 57.

IV. Ângulo reto, agudo, obtuso — Medida

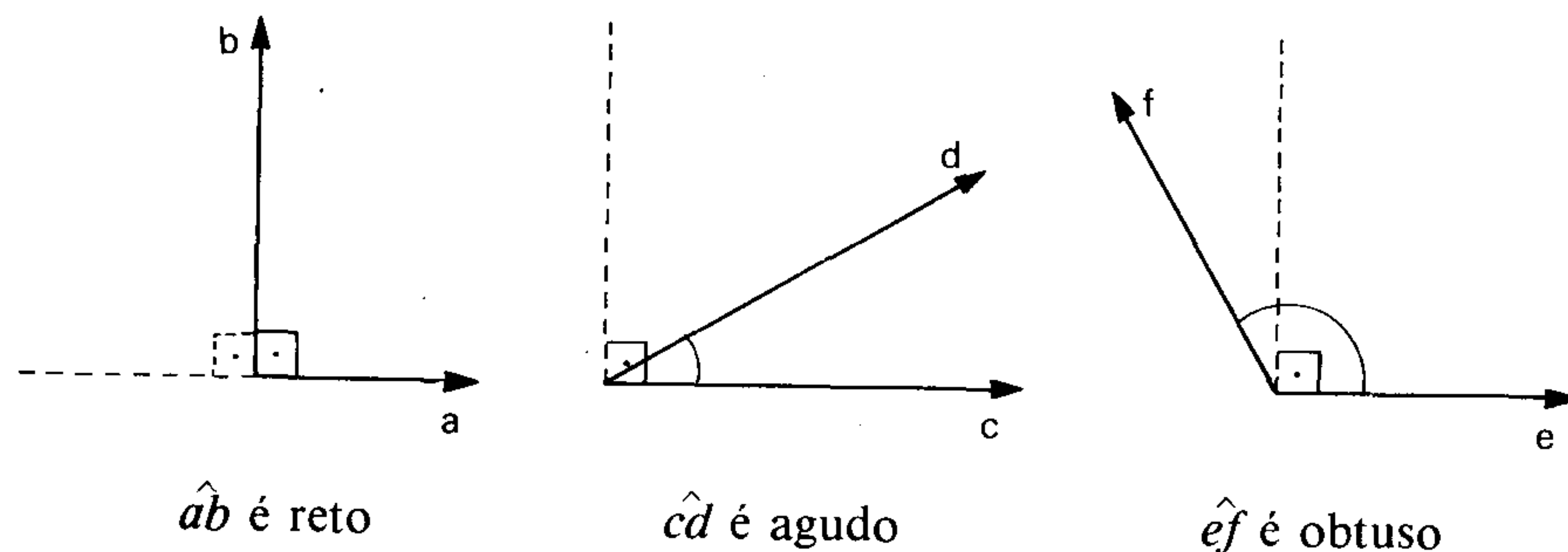
39. *Ângulo suplementar adjacente*

Dado o ângulo $A\hat{O}B$, a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ oposta à semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e a semi-reta $\overrightarrow{OB}$ determinam um ângulo $B\hat{O}C$ que se chama *ângulo suplementar adjacente* ou *suplemento adjacente* de $A\hat{O}B$.

40. *Ângulos: reto, agudo, obtuso*

Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.

Ângulo agudo é um ângulo *menor* que um ângulo reto.

Ângulo obtuso é um ângulo *maior* que um ângulo reto.

$\hat{ab}$ é reto $\qquad$ $\hat{cd}$ é agudo $\qquad$ $\hat{ef}$ é obtuso

41. *Medida de um ângulo — amplitude*

A medida de um ângulo $A\hat{O}B$ será indicada por $m(A\hat{O}B)$.

A medida de um ângulo é um número real positivo associado ao ângulo de forma tal que:

1º) Ângulos *congruentes* têm medidas *iguais* e, reciprocamente, ângulos que têm medidas *iguais* são *congruentes*.

$$A\hat{O}B \equiv C\hat{P}D \iff m(A\hat{O}B) = m(C\hat{P}D)$$

2º) Se um ângulo é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$A\hat{O}B > C\hat{P}D \iff m(A\hat{O}B) > m(C\hat{P}D)$$

3º) A um *ângulo soma* está associada uma medida que é a *soma* das medidas dos ângulos parcelas.

$$\hat{rt} \equiv \hat{ab} + \hat{cd} \implies m(\hat{rt}) = m(\hat{ab}) + m(\hat{cd})$$

À medida de um ângulo dá-se o nome de *amplitude* do ângulo.

Em geral, associa-se um número a um ângulo estabelecendo a razão (quociente) entre este ângulo e outro ângulo tomado como unidade.

42. *Unidades de medida de ângulos*

Ângulo de um grau (1°) é o ângulo submúltiplo segundo *90* (noventa) de um ângulo reto.

$$\text{ângulo de um grau} = \frac{\text{ângulo reto}}{90}$$

Um ângulo reto tem *90* graus (90°).

A medida de um ângulo agudo é menor que *90°* (um ângulo agudo tem menos de *90°*).

A medida de um ângulo obtuso é maior que *90°* (um ângulo obtuso tem mais de *90°*).

A medida α de um ângulo é tal que:

$$0° < \alpha < 180°$$

Ângulo de um minuto (1′) é o ângulo submúltiplo segundo *60* (sessenta) do ângulo de um grau.

$$1' = \frac{1°}{60}$$

Um grau tem *60* minutos (60′).

Ângulo de um segundo (1″) é o ângulo submúltiplo segundo *60* (sessenta) do ângulo de um minuto.

$$1'' = \frac{1'}{60}$$

Um minuto tem *60* segundos (60″).

Ângulo de um grado (1 gr) é o ângulo submúltiplo segundo *100* (cem) de um ângulo reto.

$$\text{ângulo de um grado} = \frac{\text{ângulo reto}}{100}$$

Dos submúltiplos do grado, dois se destacam:

- o centígrado (0,01 gr), também chamado minuto de grado, e
- o decimiligrado (0,0001 gr), também chamado segundo de grado.

43. *Ângulos complementares e ângulos suplementares*

Dois ângulos são *complementares* se, e somente se, a soma de suas medidas é 90°. Um deles é o *complemento* do outro.

Dois ângulos são *suplementares* se, e somente se, a soma de suas medidas é 180°. Um deles é o *suplemento* do outro.

44. *Ângulo nulo e ângulo raso*

Pode-se estender o conceito de ângulo para se ter o *ângulo nulo* (cujos lados são coincidentes) ou o *ângulo raso* (cujos lados são semi-retas opostas).

Então, a medida α de um ângulo é tal que

$$0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$$

EXERCÍCIOS

29. Simplifique as seguintes medidas:

a) 30°70'
b) 45°150'
c) 65°39'123''
d) 110°58'300''
e) 30°56'240''

30. Determine as somas:

a) 30°40' + 15°35'
b) 10°30'45'' + 15°29'20''

31. Determine as diferenças:

a) 20°50'45'' − 5°45'30''
b) 31°40' − 20°45'
c) 90°15'20'' − 45°30'50''
d) 90° − 50°30'45''

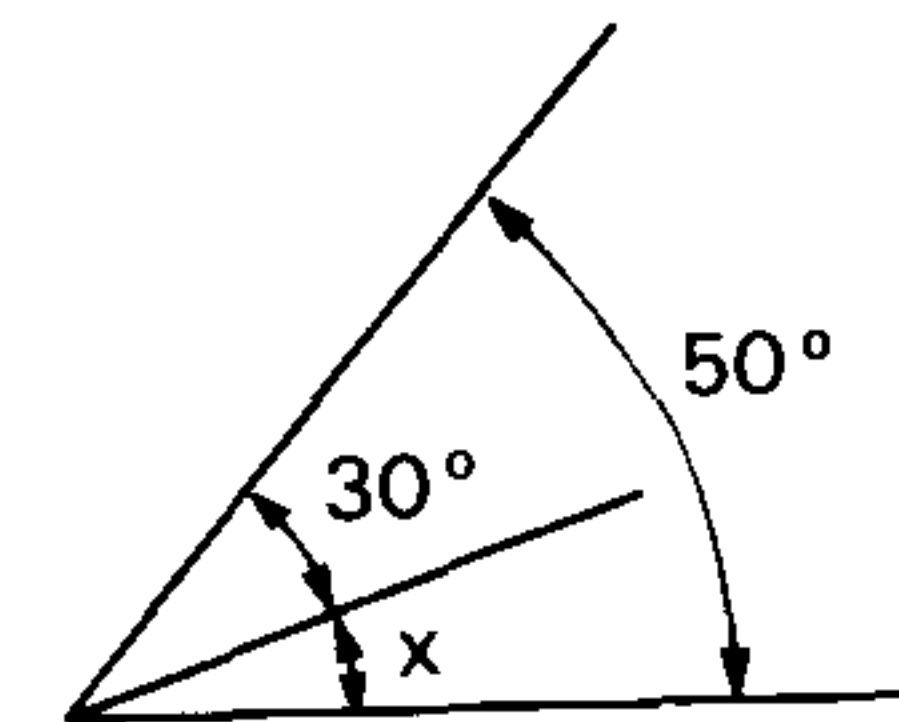
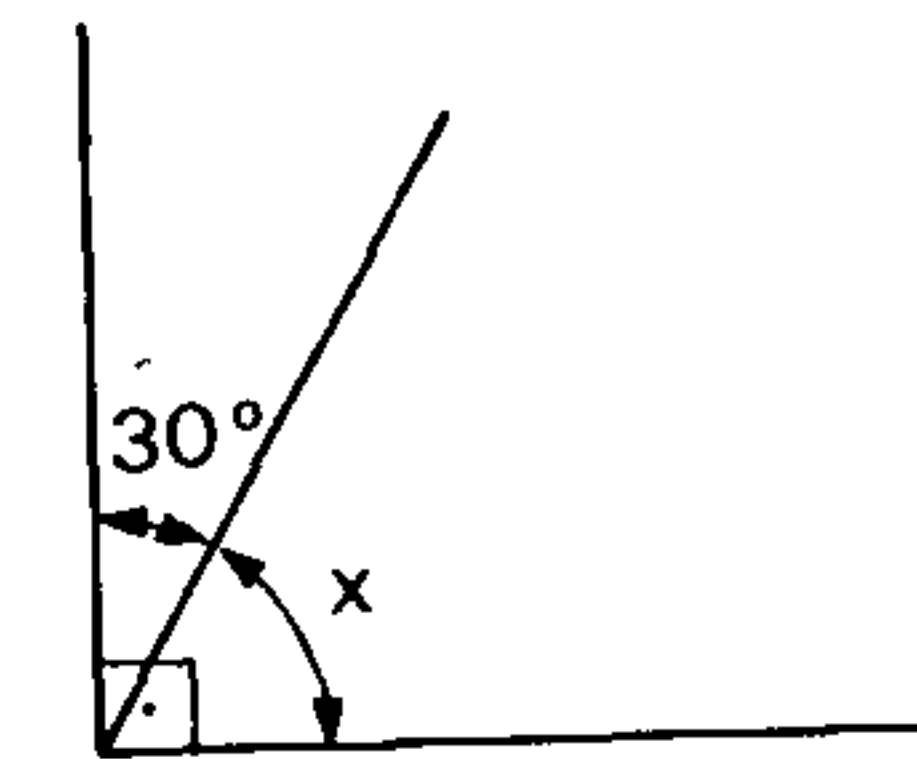
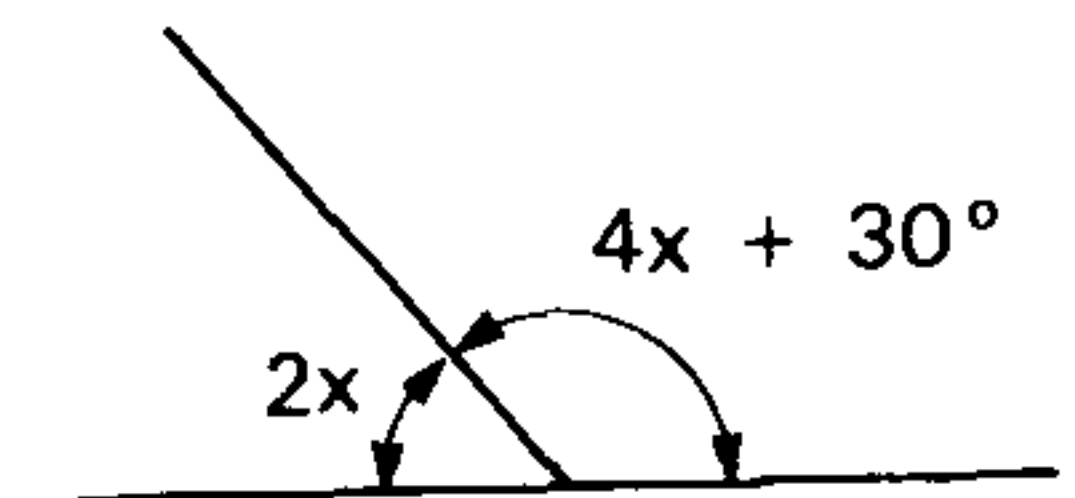
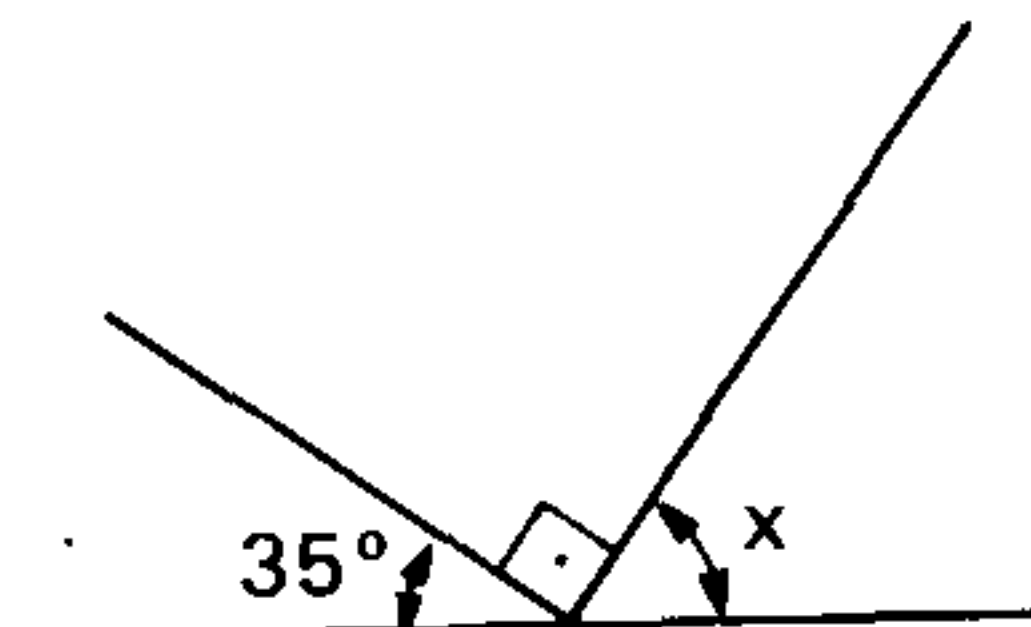
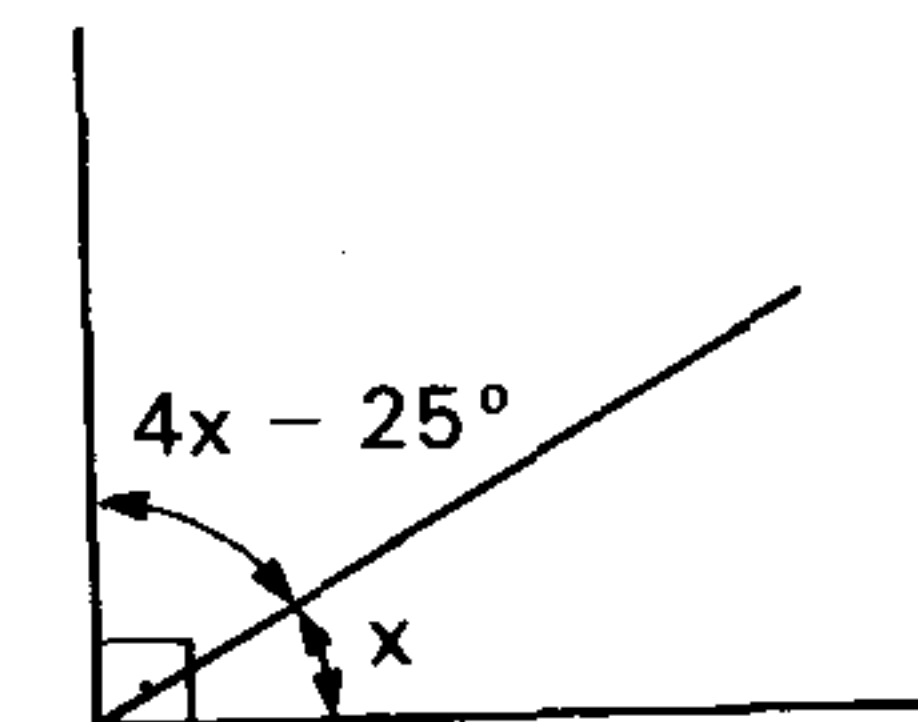
32. Determine os produtos:

a) 2 × (10°35'45'')
b) 5 × (6°15'30'')

33. Determine as divisões:

a) (46°48'54'') : 2
b) (31°32'45'') : 3
c) (52°63'42'') : 5

34. Determine o valor de x nos casos:

a) 30°, 50°, x
b) 35°, x
c) 30°, x
d) 4x − 25°, x
e) 2x, 4x + 30°

35. *Oa* e *Ob* são duas semi-retas colineares opostas. *Oc* é uma semi-reta qualquer. Os ângulos $a\hat{O}c$ e $c\hat{O}b$ são adjacentes? São suplementares?

36. **Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.**

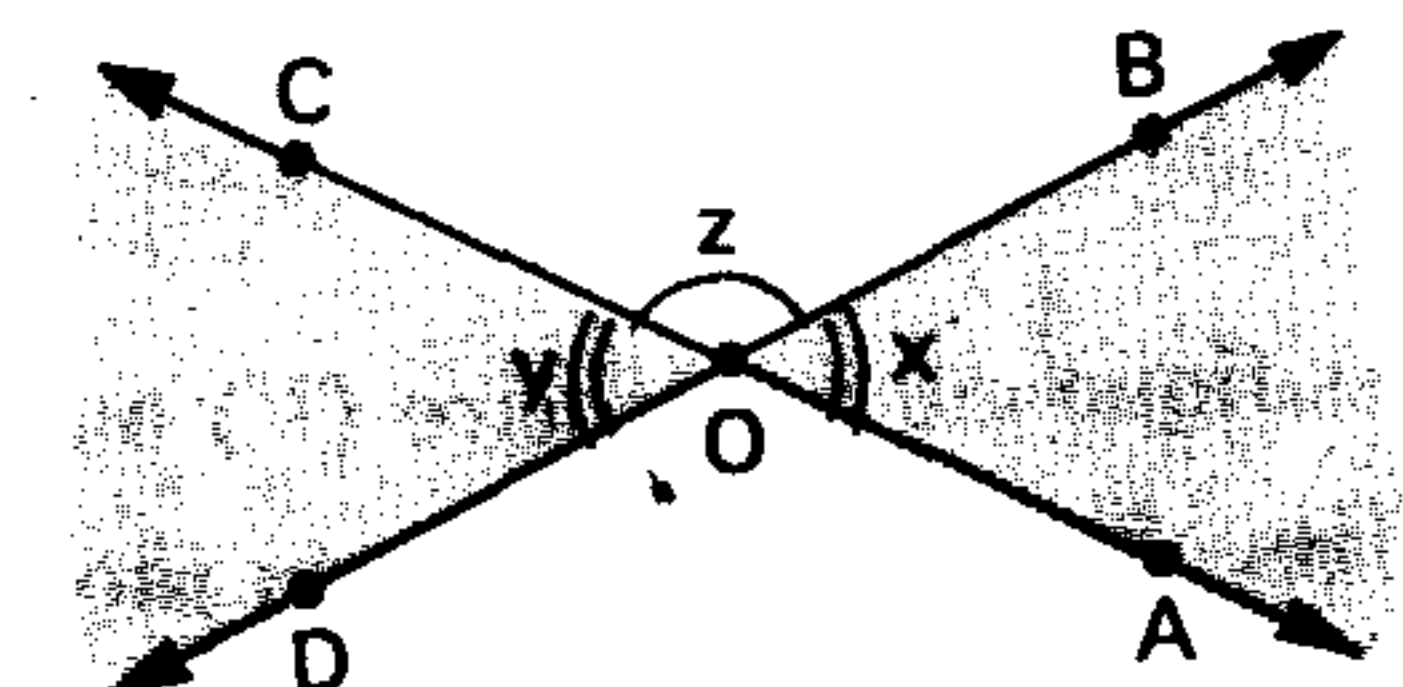
Dois ângulos o.p.v. são congruentes.

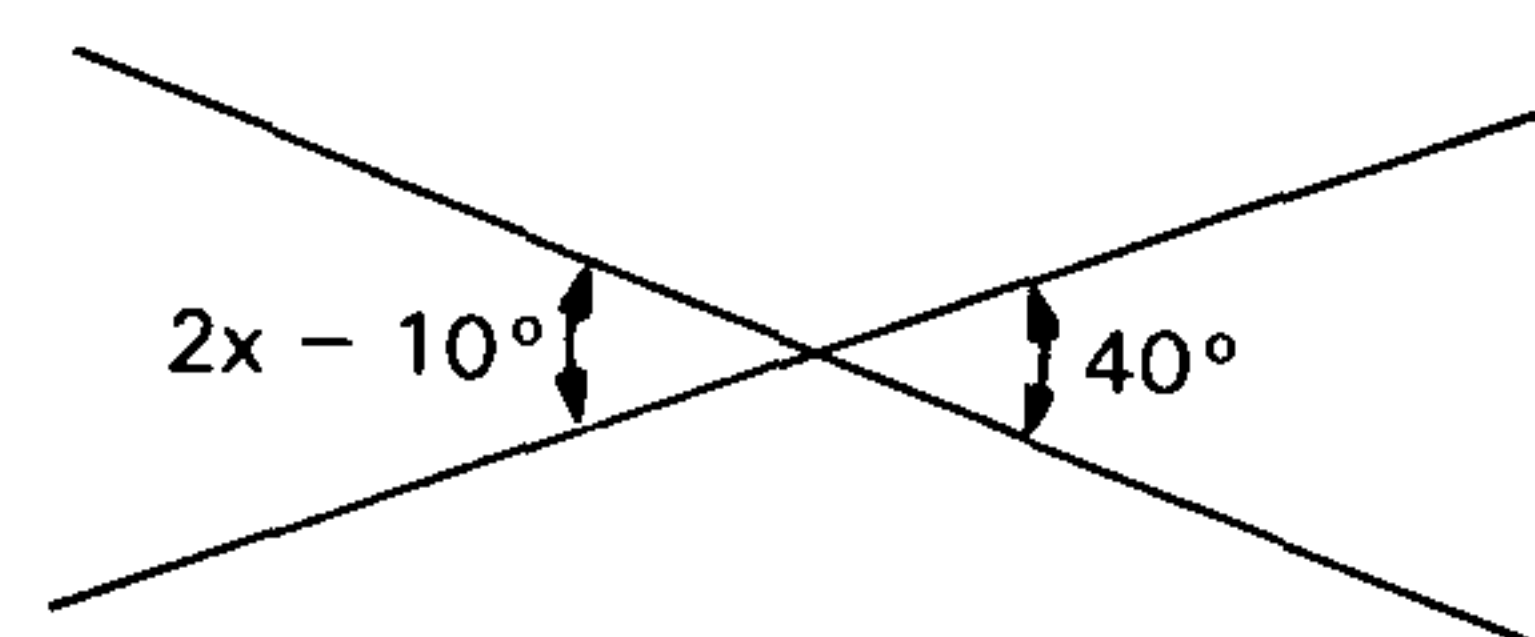
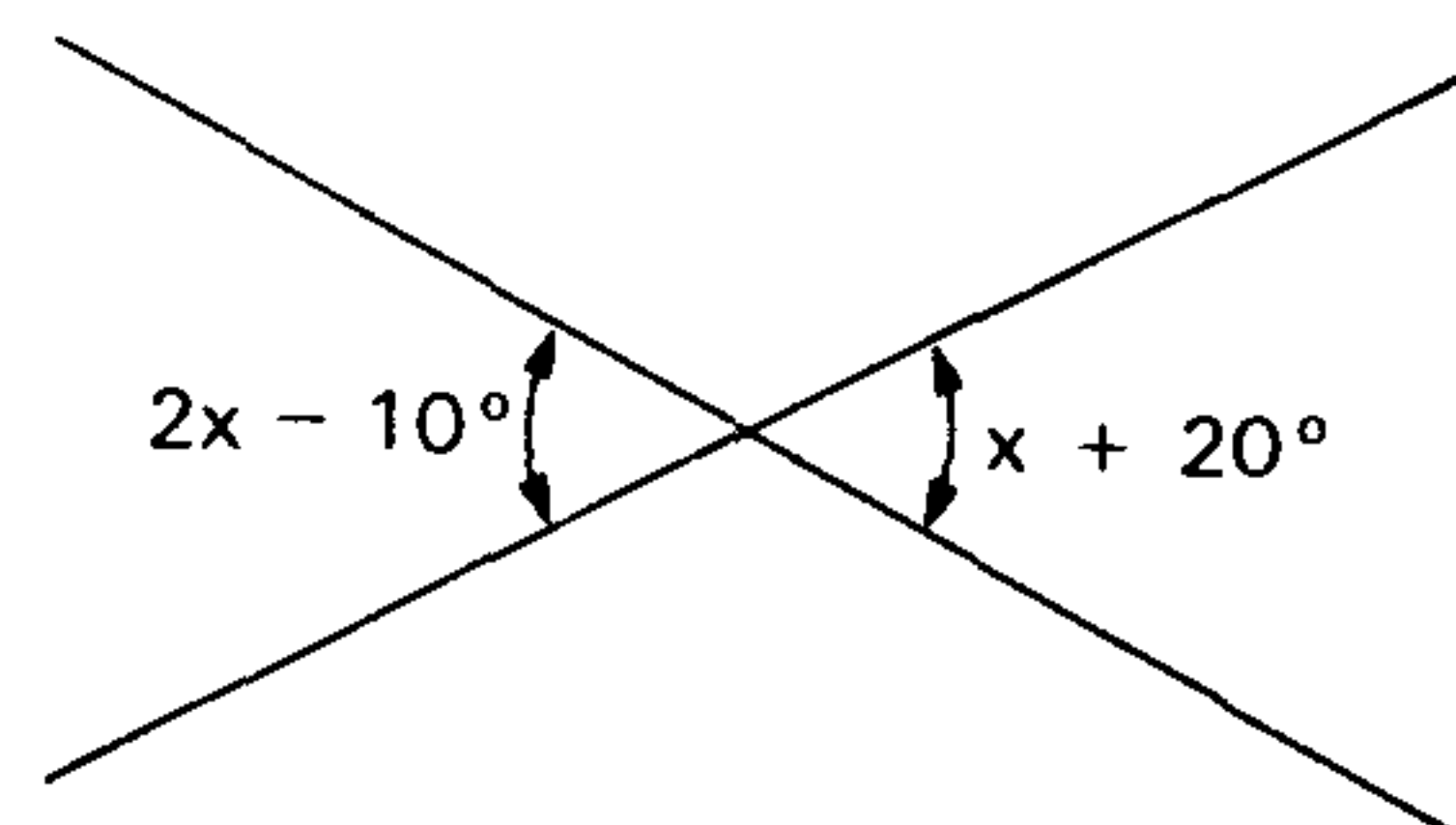
Solução

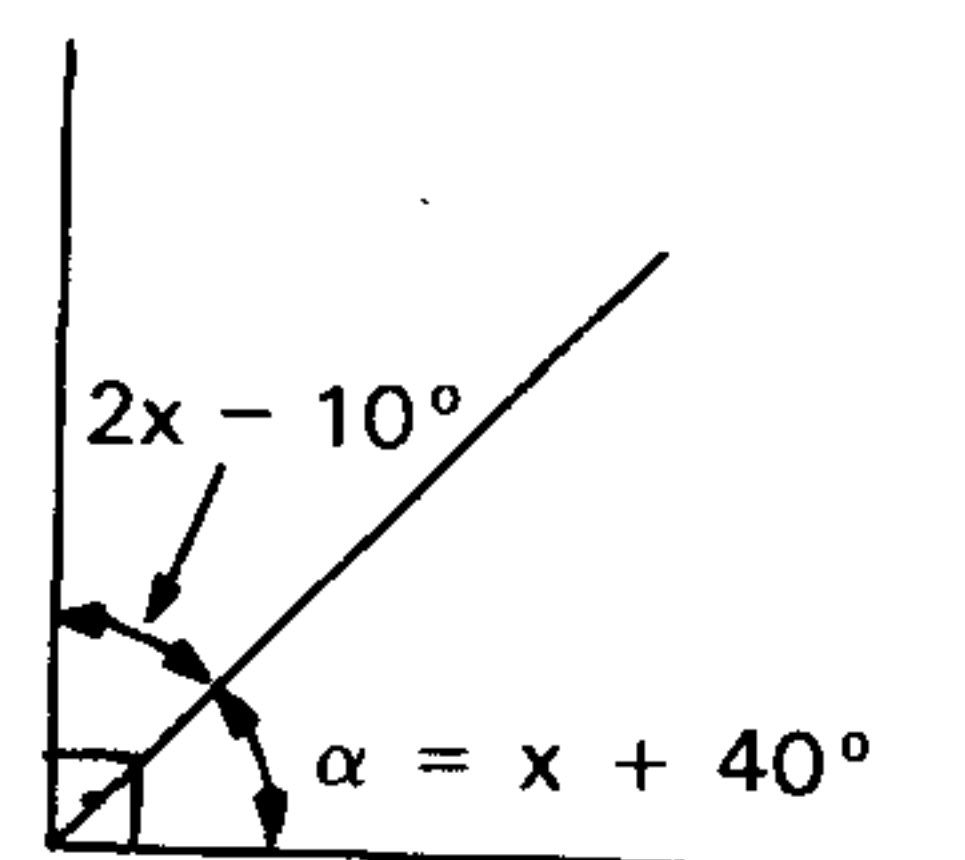
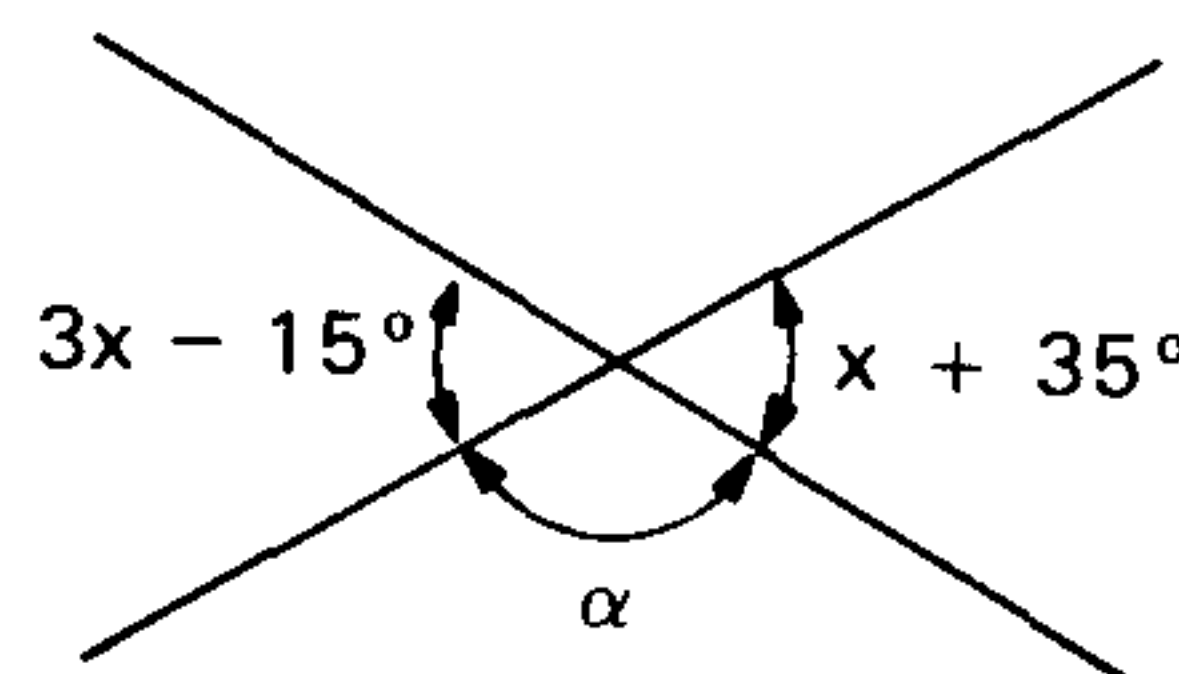
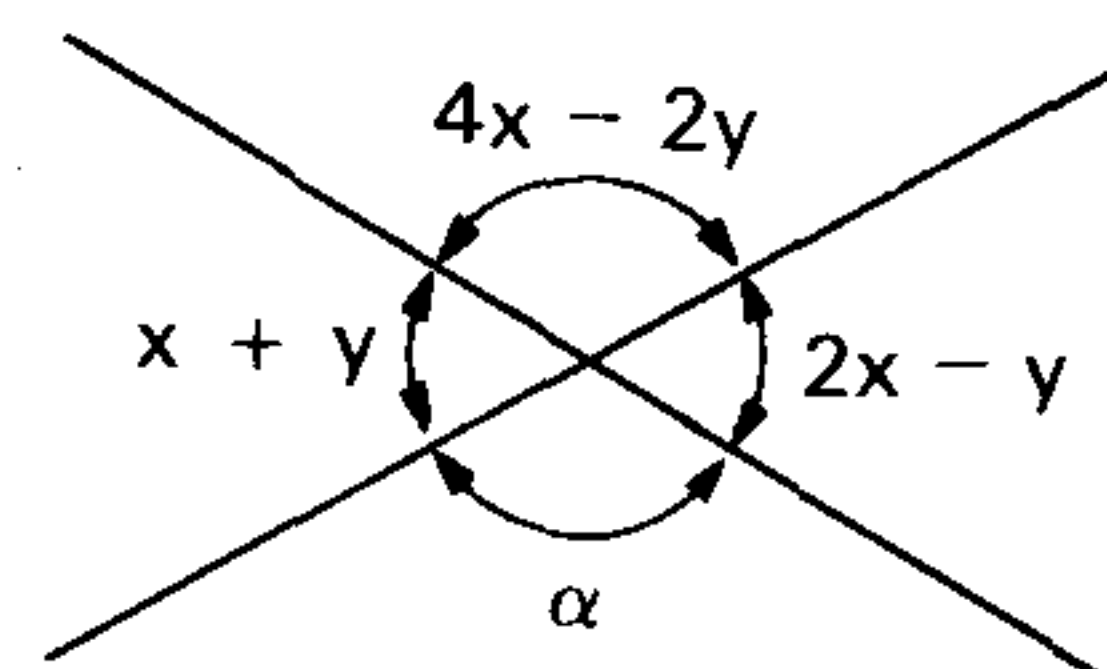
$\underbrace{A\hat{O}B \text{ e } C\hat{O}D \text{ são o.p.v.}}_{\text{Hipótese}} \Rightarrow \underbrace{A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D}_{\text{Tese}}$

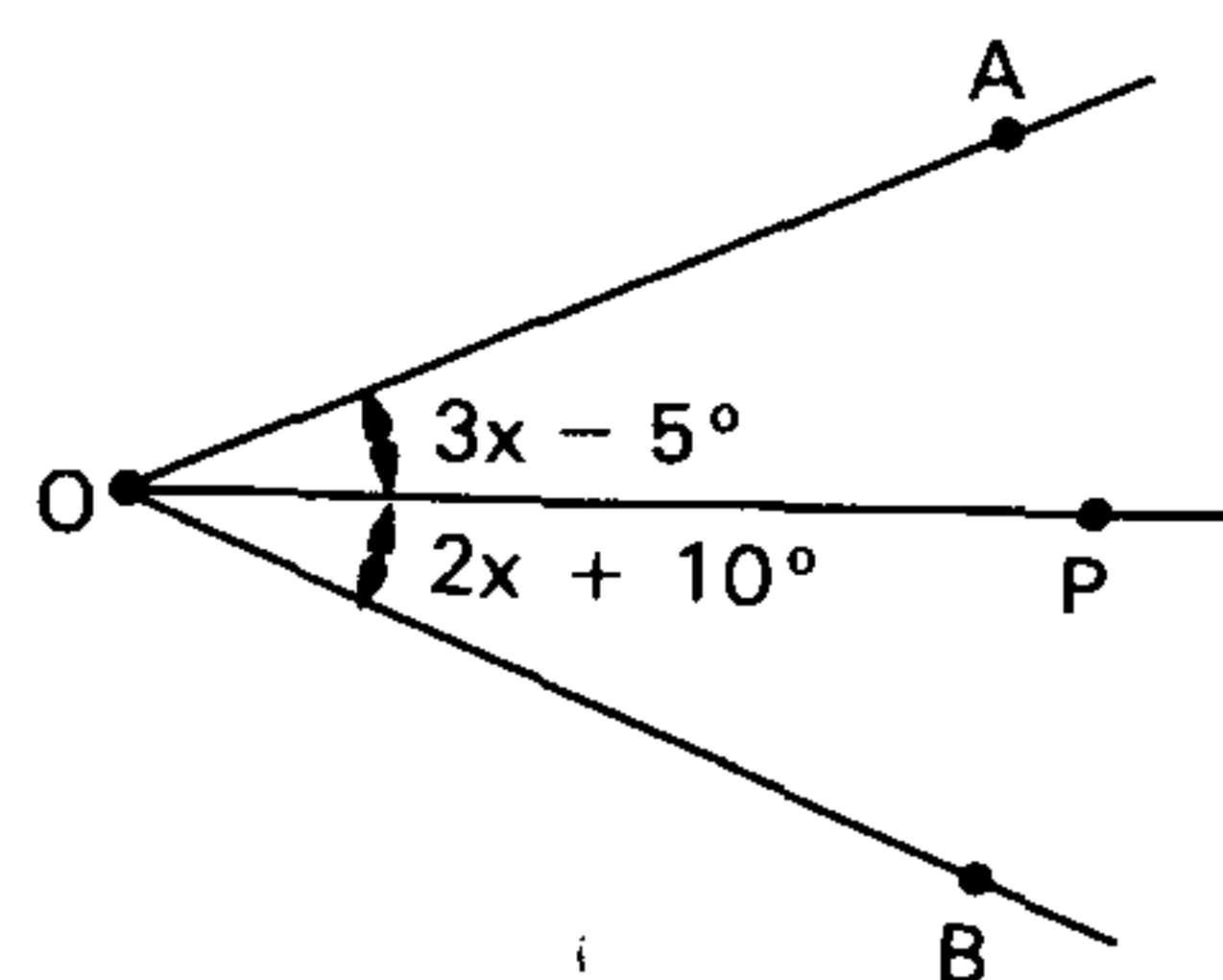
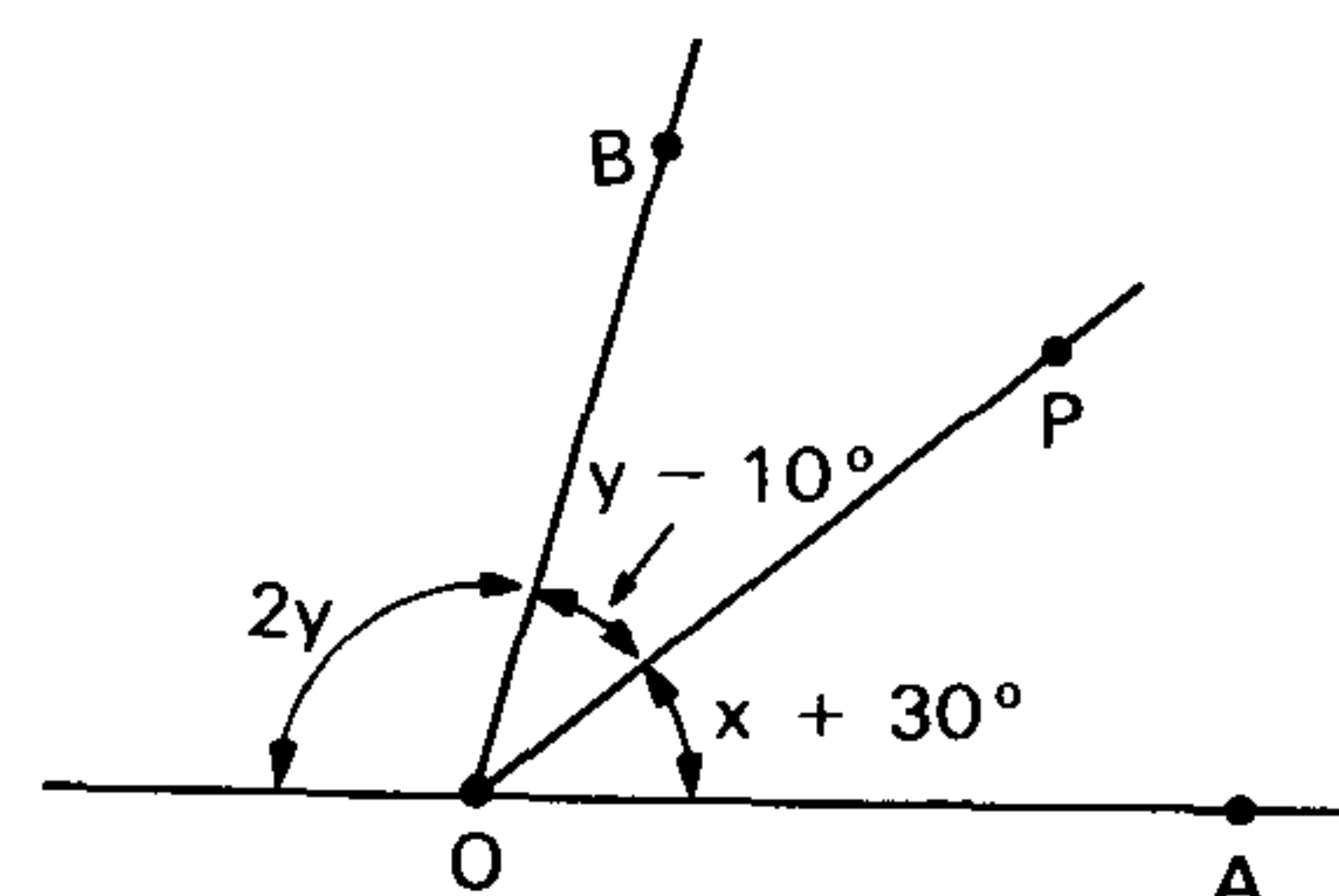
Demonstração

Considerando $A\hat{O}B$ de medida x e $C\hat{O}D$ de medida y opostos pelo vértice e o ângulo $B\hat{O}C$ de medida z, temos:

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 180^\circ \\ y + z = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$$

37. Determine o valor de x nos casos:

a)

b)

38. Determine o valor de α nos casos:

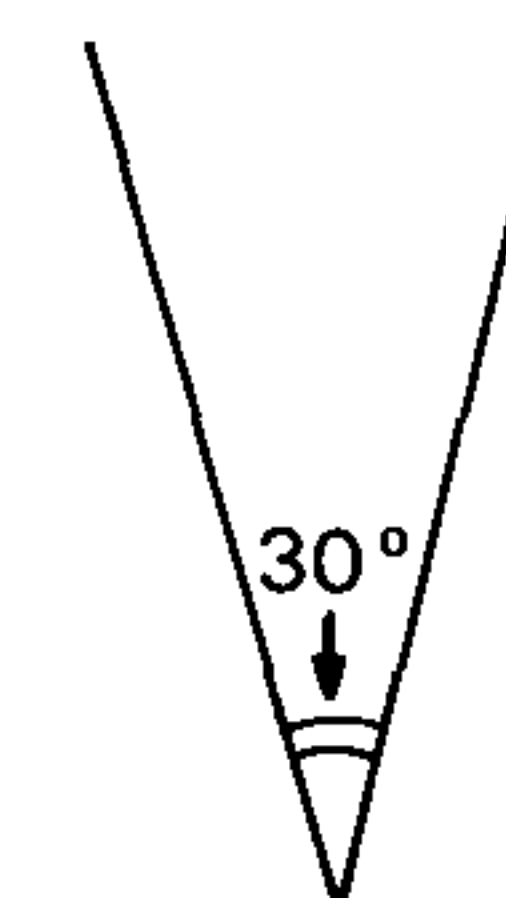
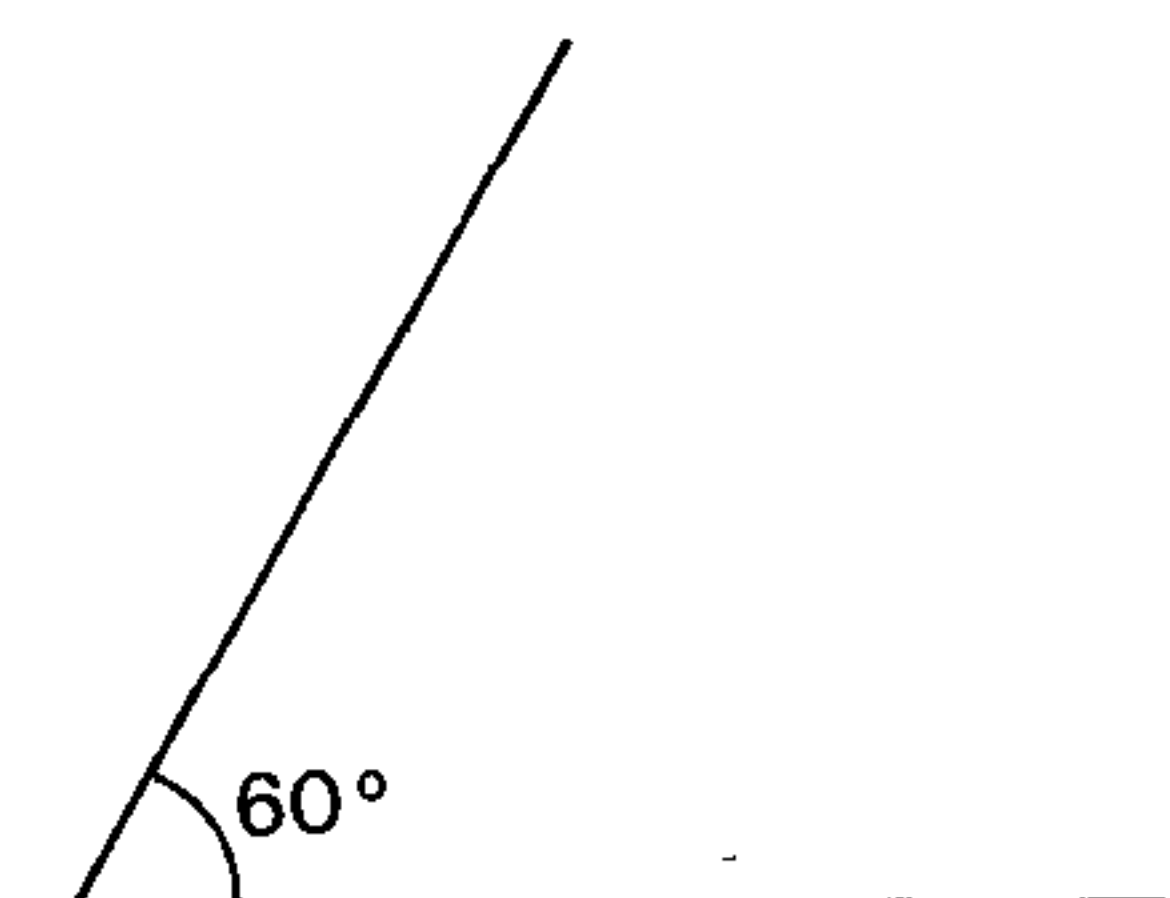
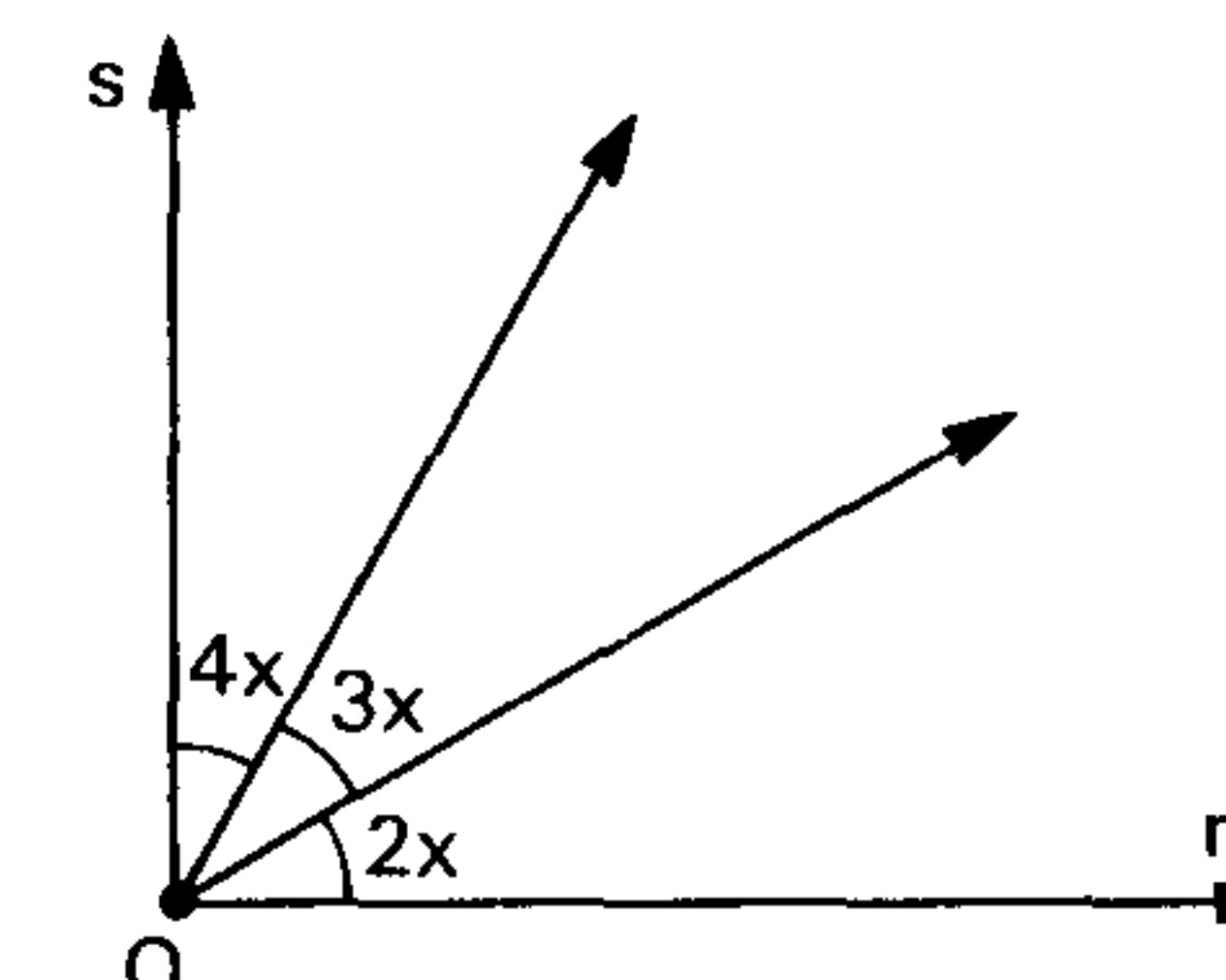
a)

b)

c)

39. Se $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, determine x nos casos:

a)

b)

40. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dois ângulos consecutivos são adjacentes.
b) Dois ângulos adjacentes são consecutivos.
c) Dois ângulos adjacentes são opostos pelo vértice.
d) Dois ângulos opostos pelo vértice são adjacentes.
e) Dois ângulos opostos pelo vértice são consecutivos.

41. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dois ângulos suplementares são adjacentes.
b) Dois ângulos complementares são adjacentes.
c) Dois ângulos adjacentes são complementares.
d) Os ângulos de medida $10°$, $20°$ e $60°$ são complementares.
e) Os ângulos de medida $30°$, $60°$ e $90°$ são suplementares.

42. Os ângulos da figura a seguir são complementares? São adjacentes?

43. Calcule o valor de x no caso ao lado, em que $m(r\hat{O}s) = 90°$.

44. A soma de dois ângulos adjacentes é $120°$. Calcule a medida de cada ângulo, sabendo que a medida de um deles é a diferença entre o triplo do outro e $40°$.

45. Calcule o complemento dos seguintes ângulos:

a) 25° b) 47° c) 37°25′

46. Calcule o suplemento dos seguintes ângulos:

a) 72° b) 141° c) 93°15′

47. Dado um ângulo de medida x, indique:

a) seu complemento;
b) seu suplemento;
c) o dobro do seu complemento;
d) a metade de seu suplemento;
e) o triplo de seu suplemento;
f) a sétima parte do complemento;
g) a quinta parte do suplemento;
h) o complemento da sua terça parte;
i) o triplo do suplemento da sua quinta parte.

48. Dê a medida do ângulo que vale o dobro do seu complemento.

49. Determine a medida do ângulo igual ao triplo do seu complemento.

50. Calcule o ângulo que vale o quádruplo de seu complemento.

51. Calcule um ângulo, sabendo que um quarto do seu suplemento vale *36°*.

52. Qual é o ângulo que excede o seu complemento em *76°*?

Solução

ângulo → x complemento → 90° − x

"Ângulo menos complemento é igual a 76°."

$x - (90° - x) = 76° \Rightarrow 2x = 166° \Rightarrow x = 83°$.

Resposta: O ângulo mede 83°.

53. Qual é o ângulo que excede o seu suplemento em *66°*?

54. Determine um ângulo, sabendo que o seu suplemento excede o próprio ângulo em *70°*.

55. Qual é o ângulo que somado ao triplo do seu complemento dá *210°*?

56. Um ângulo excede o seu complemento em *48°*. Determine o suplemento desse ângulo.

57. O suplemento de um ângulo excede este ângulo em *120°*. Determine o ângulo.

58. O complemento da terça parte de um ângulo excede o complemento desse ângulo em *30°*. Determine o ângulo.

Solução

ângulo → x complemento do ângulo → 90° − x

complemento da terça parte → $90° - \frac{x}{3}$

$$\left(90° - \frac{x}{3}\right) - (90 - x) = 30° \Rightarrow 2x = 90° \Rightarrow x = 45°$$

Resposta: O ângulo mede 45°.

59. O suplemento do triplo do complemento da metade de um ângulo é igual ao triplo do complemento desse ângulo. Determine o ângulo.

60. O suplemento do complemento de um ângulo excede a terça parte do complemento do dobro desse ângulo em *85°*. Determine o ângulo.

61. Dois ângulos são suplementares e a razão entre o complemento de um e o suplemento do outro, nessa ordem, é $\frac{1}{8}$. Determine esses ângulos.

Solução

x e *y* são as medidas dos ângulos.

complemento de um: 90° − x suplemento do outro: 180° − y

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ \dfrac{90° - x}{180° - y} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 180° - x \\ 720° - 8x = 180° - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 80° \\ y = 100° \end{cases}$$

Resposta: Os ângulos medem 80° e 100°.

62. Dois ângulos estão na relação $\frac{4}{9}$. Sendo *130°* sua soma, determine o complemento do menor.

63. Determine dois ângulos suplementares, sabendo que um deles é o triplo do outro.

64. Dois ângulos são suplementares. Um deles é o complemento da quarta parte do outro. Calcule esses ângulos.

65. A razão entre dois ângulos suplementares é igual a $\frac{2}{7}$. Determine o complemento do menor.

66. Determine o complemento de um ângulo, sabendo que a razão entre o ângulo e seu complemento é igual a $\frac{5}{4}$.

67. O complemento de um ângulo está para o seu suplemento como *2* para *7*. Calcule a medida do ângulo.

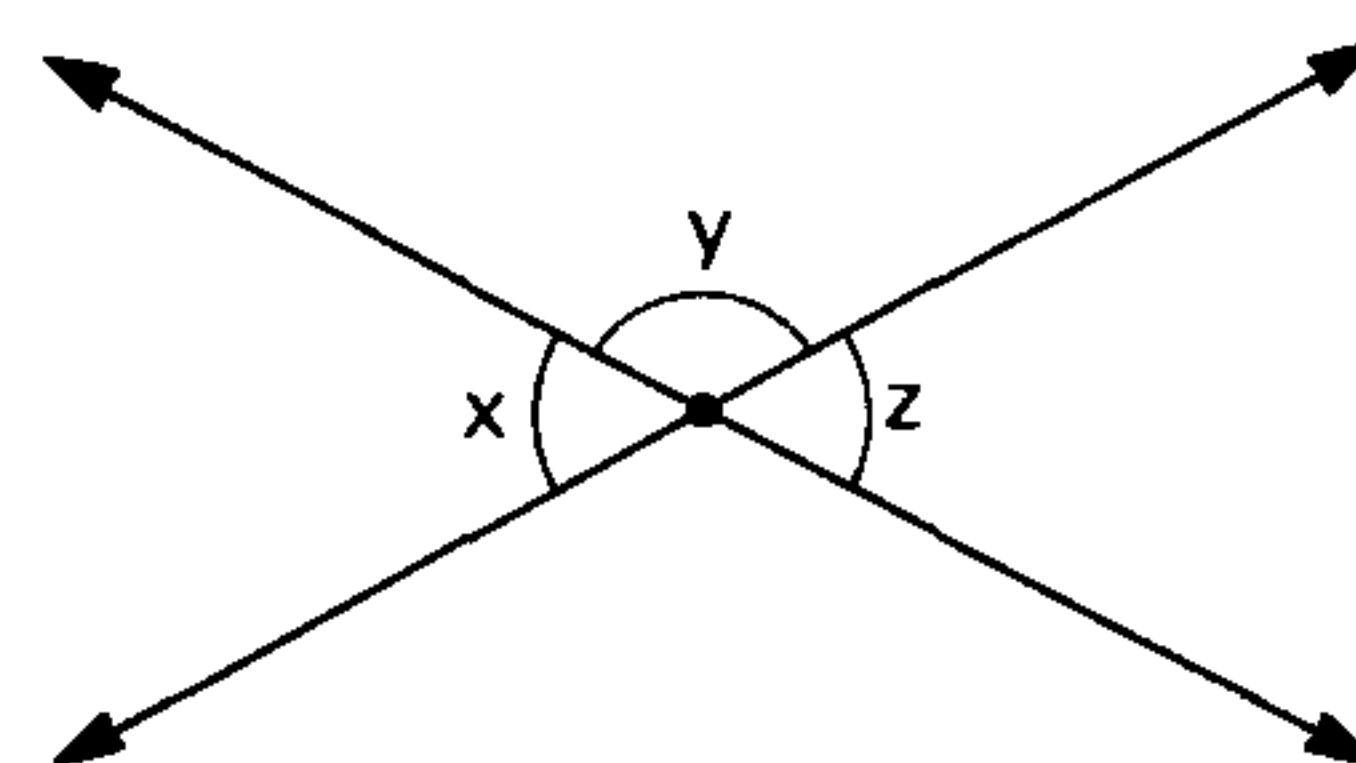
68. O triplo do complemento de um ângulo, aumentado em *50°*, é igual ao suplemento do ângulo. Determine a medida do ângulo.

69. Determine as medidas de dois ângulos suplementares, sabendo que o dobro de um deles, somado com a sétima parte do outro, resulta *100°*.

70. A soma de um ângulo com a terça parte do seu complemento resulta *46°*. Determine o suplemento desse ângulo.

71. Determine dois ângulos complementares tais que o dobro de um, aumentado da terça parte do outro, seja igual a um ângulo reto.

72. Na figura, o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y, mais a metade do ângulo z. Calcule o ângulo y.

y
x
z

73. Os ângulos α e β são opostos pelo vértice. O primeiro é expresso em graus por $9x - 2$ e o segundo por $4x + 8$. Determine esses ângulos.

74. Cinco semi-retas partem de um mesmo ponto V, formando cinco ângulos que cobrem todo o plano e são proporcionais aos números $2, 3, 4, 5$ e 6. Calcule o maior dos ângulos.

75. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semi-retas opostas.

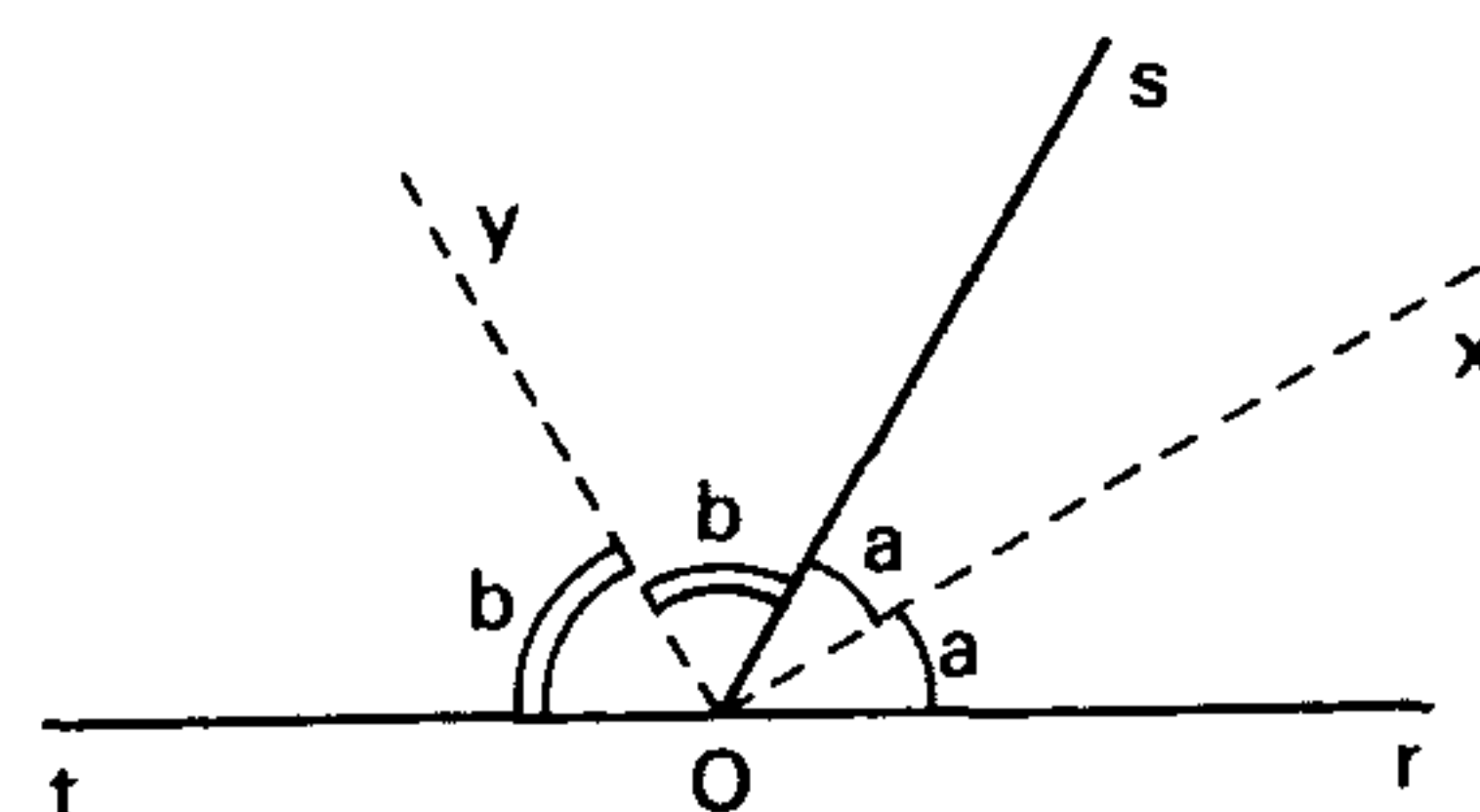
76. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares formam ângulo reto.

Solução

Hipótese

$r\hat{O}s$ e $s\hat{O}t$ adjacentes e suplementares
Ox e Oy respectivas bissetrizes.

$\Longrightarrow$ *Tese* $x\hat{O}y$ é reto

s
y
x
b
a
b
a
t
O
r

Demonstração

Sejam a a medida de $r\hat{O}x$ e $x\hat{O}s$ e b a medida de $s\hat{O}y$ e $y\hat{O}t$.

$a + a + b + b = 180° \Longrightarrow 2a + 2b = 180° \Longrightarrow a + b = 90° \Longrightarrow x\hat{O}y$ é reto.

77. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e complementares formam um ângulo de *45°*.

78. Dois ângulos adjacentes somam *136°*. Qual a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes?

79. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de *52°*. Se um deles mede *40°*, qual é a medida do outro?

CAPÍTULO IV

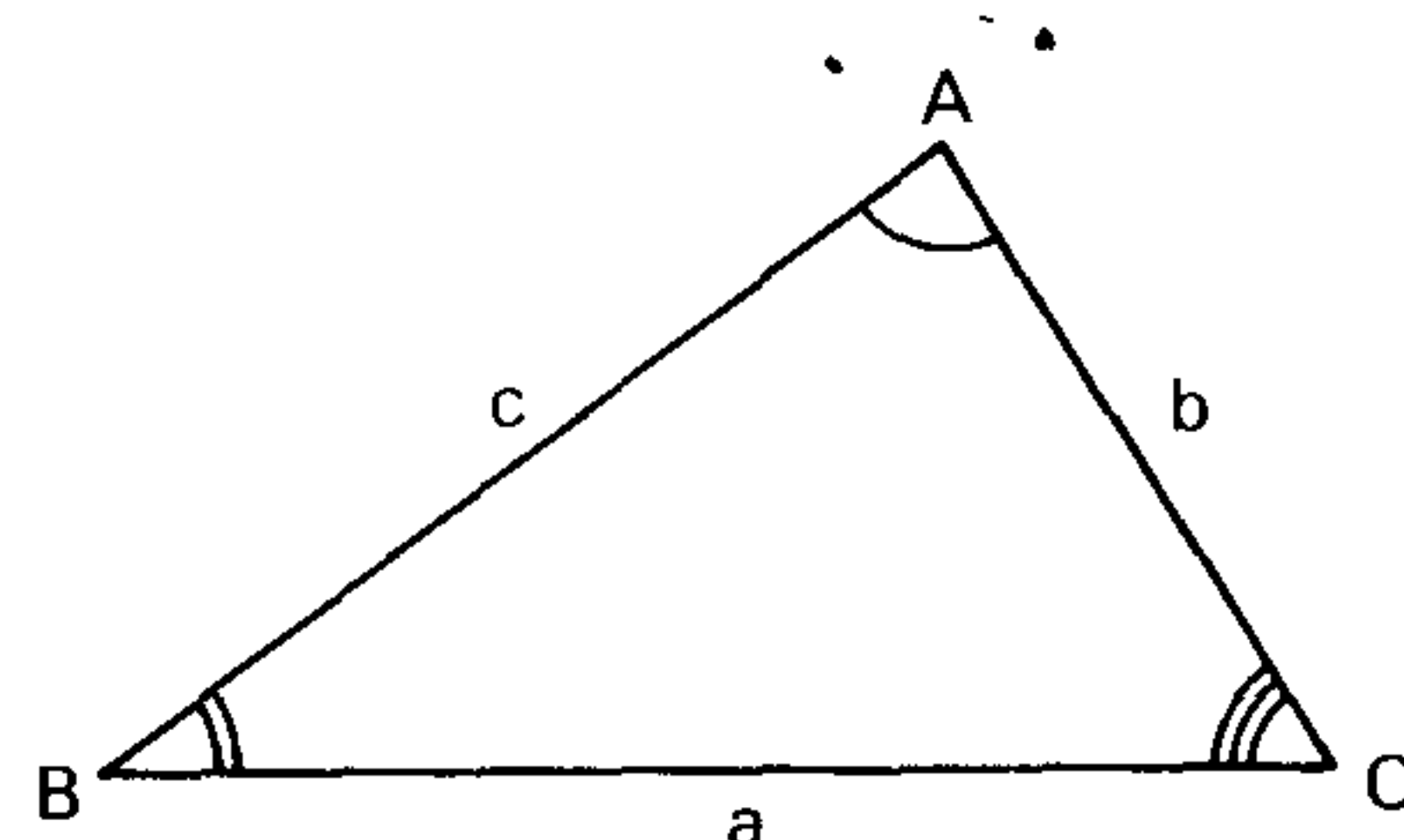
Triângulos

I. Conceito — Elementos — Classificação

45. *Definição*

Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se *triângulo* ABC.

Indicação:
triângulo $ABC = \triangle ABC$

$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$

46. *Elementos*

Vértices: os pontos A, B e C são os *vértices* do $\triangle ABC$.

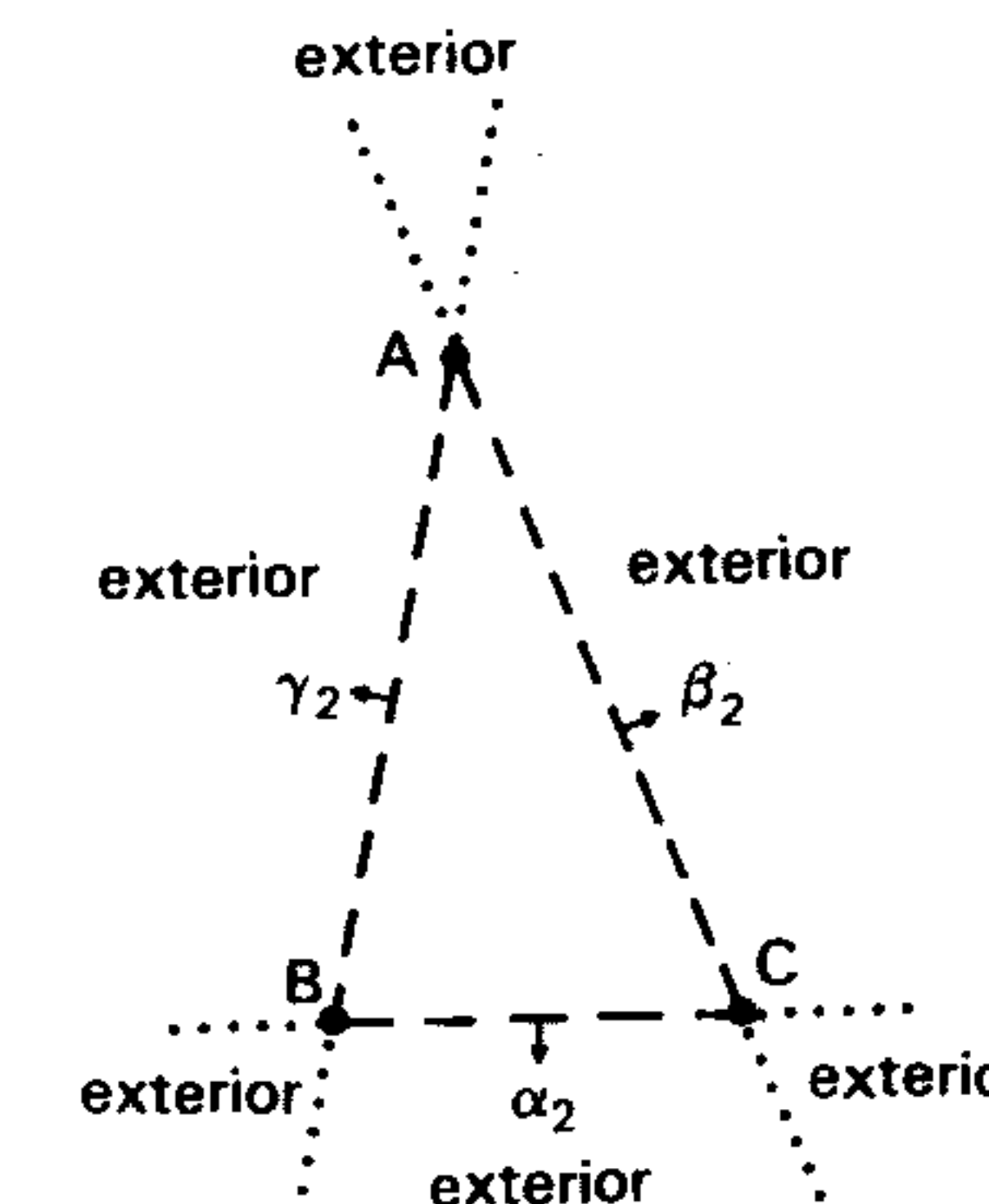
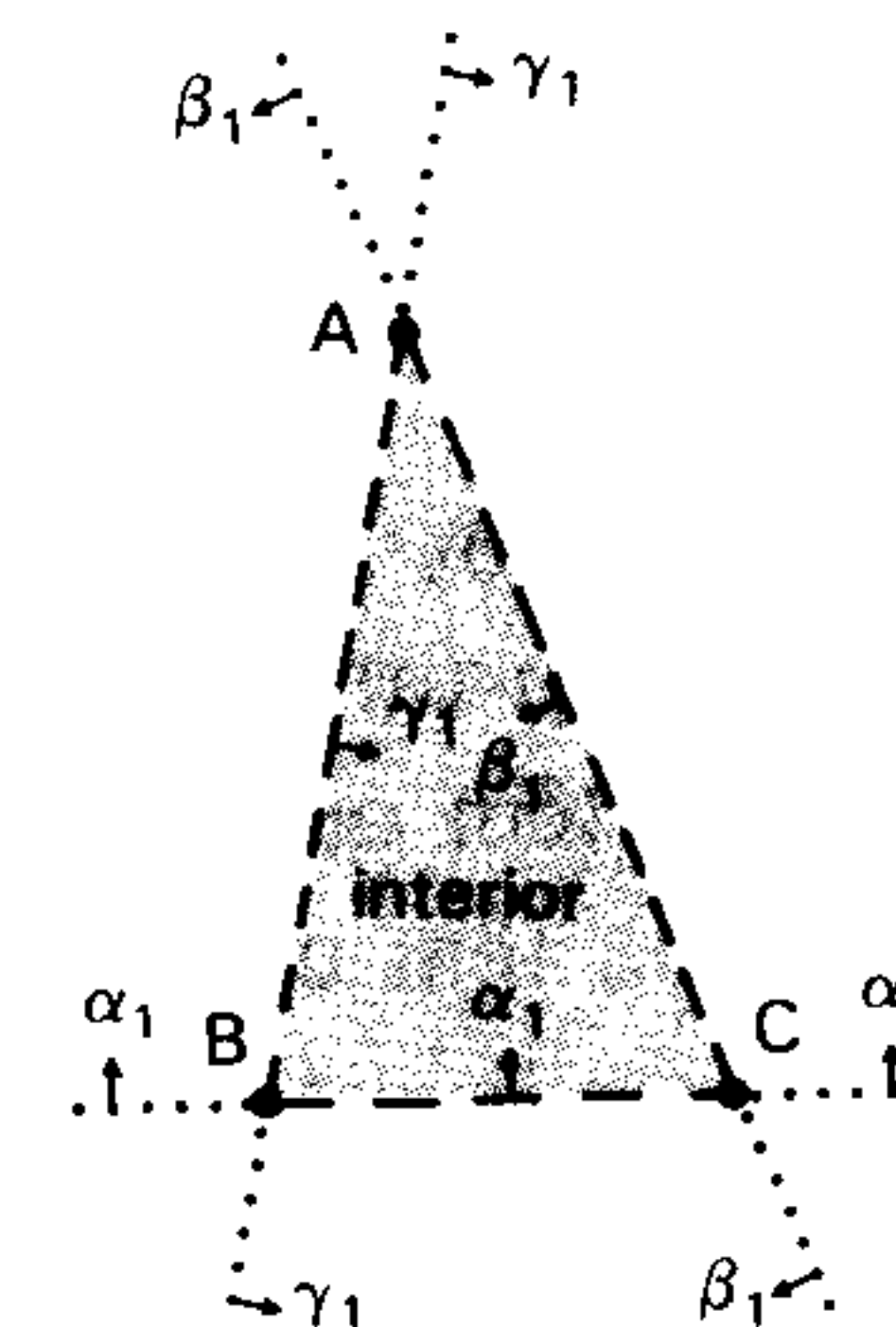
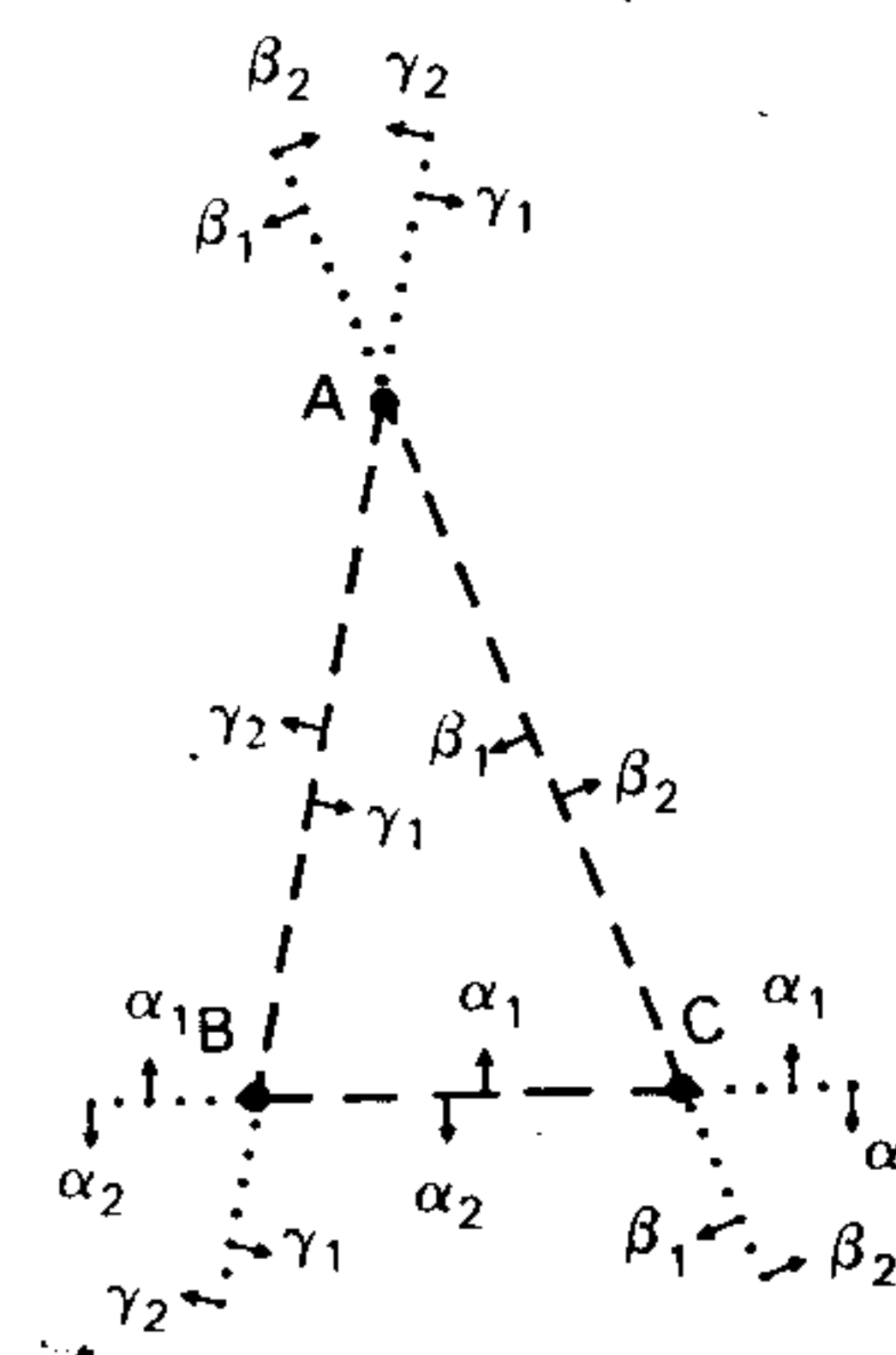
Lados: os segmentos $\overline{AB}$ (de medida c), $\overline{AC}$ (de medida b) e $\overline{BC}$ (de medida a) são os *lados* do triângulo.

Ângulos: os ângulos $B\hat{A}C$ ou $\hat{A}$, $A\hat{B}C$ ou $\hat{B}$ e $A\hat{C}B$ ou $\hat{C}$ são os *ângulos* do $\triangle ABC$ (ou ângulos internos do $\triangle ABC$).

Diz-se que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, *opostos*.

47. *Interior e exterior*

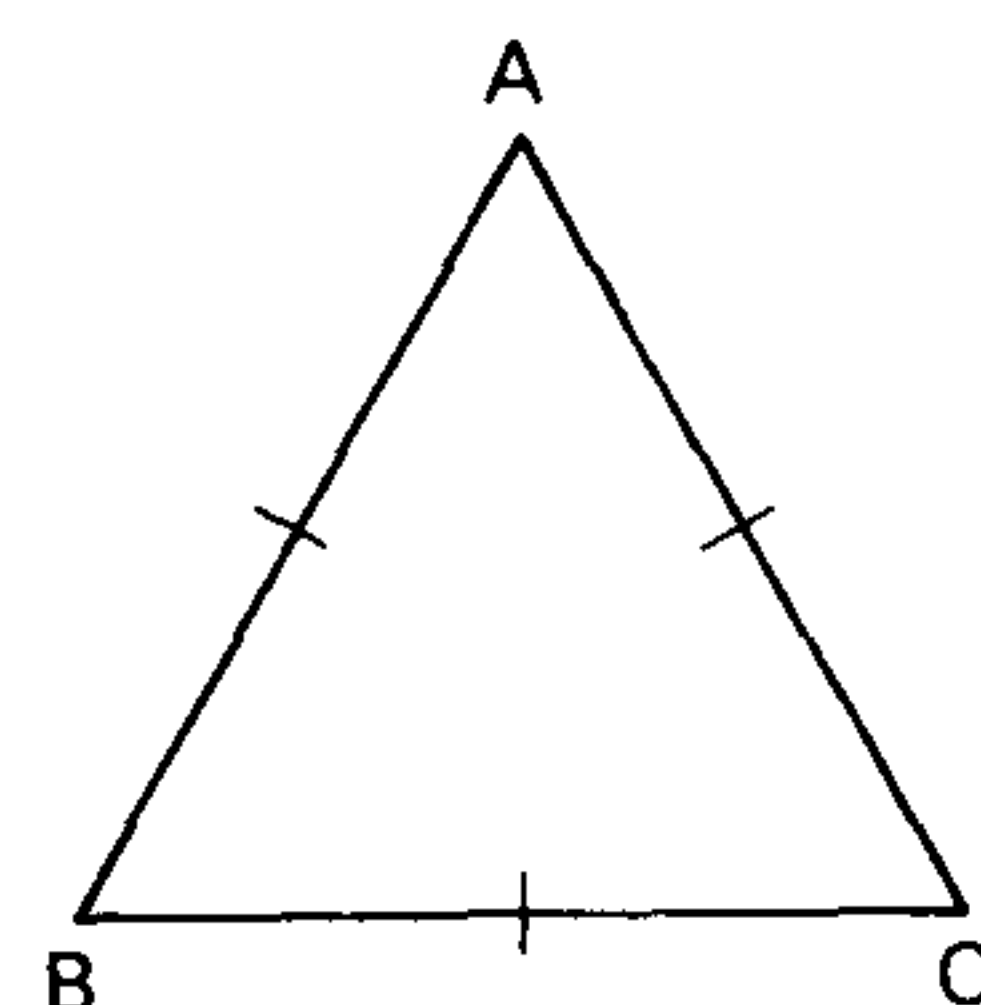
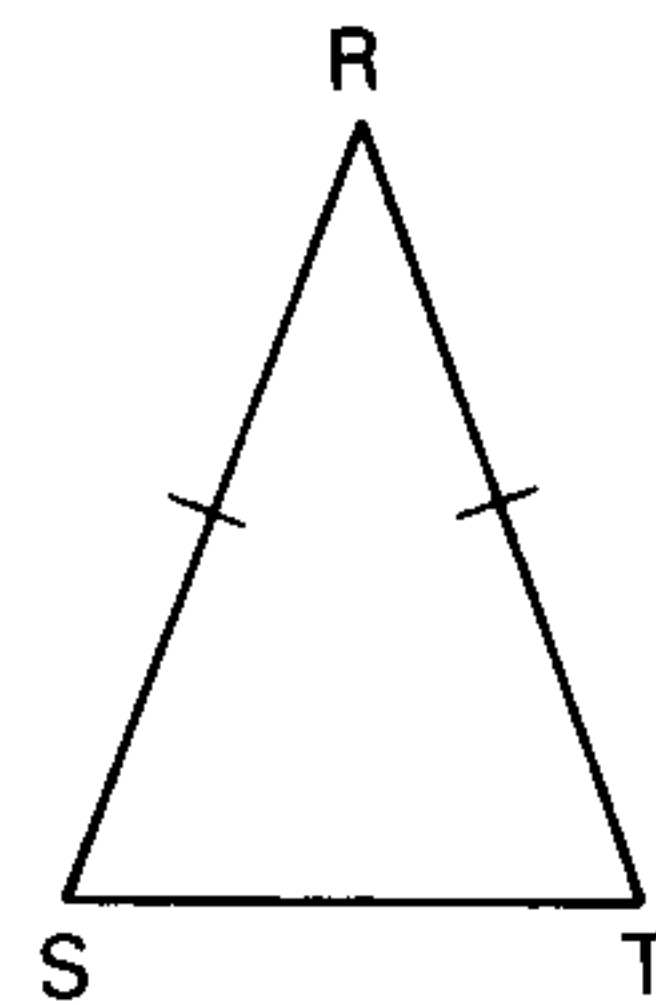
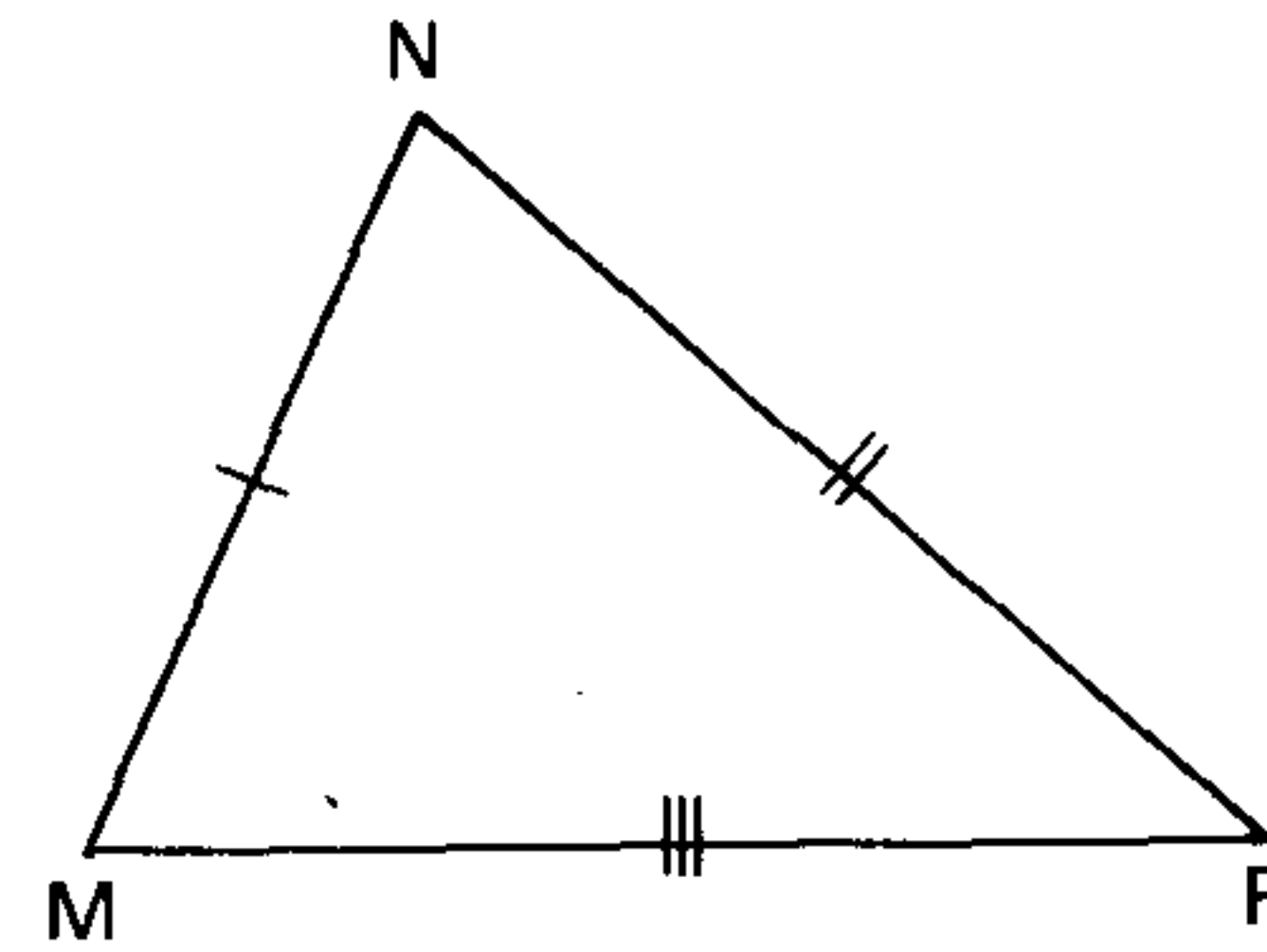
Dado um triângulo ABC, vamos considerar os semiplanos abertos, a saber:

α_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que contém o ponto A,
α_2 oposto a α_1,
β_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{AC}$ e que contém o ponto B,
β_2 oposto a β_1,
γ_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que contém o ponto C,
γ_2 oposto a γ_1.

Interior do $\triangle ABC = \alpha_1 \cap \beta_1 \cap \gamma_1$.
O interior de um triângulo é uma região convexa.
Os pontos do interior do $\triangle ABC$ são pontos *internos* ao $\triangle ABC$.

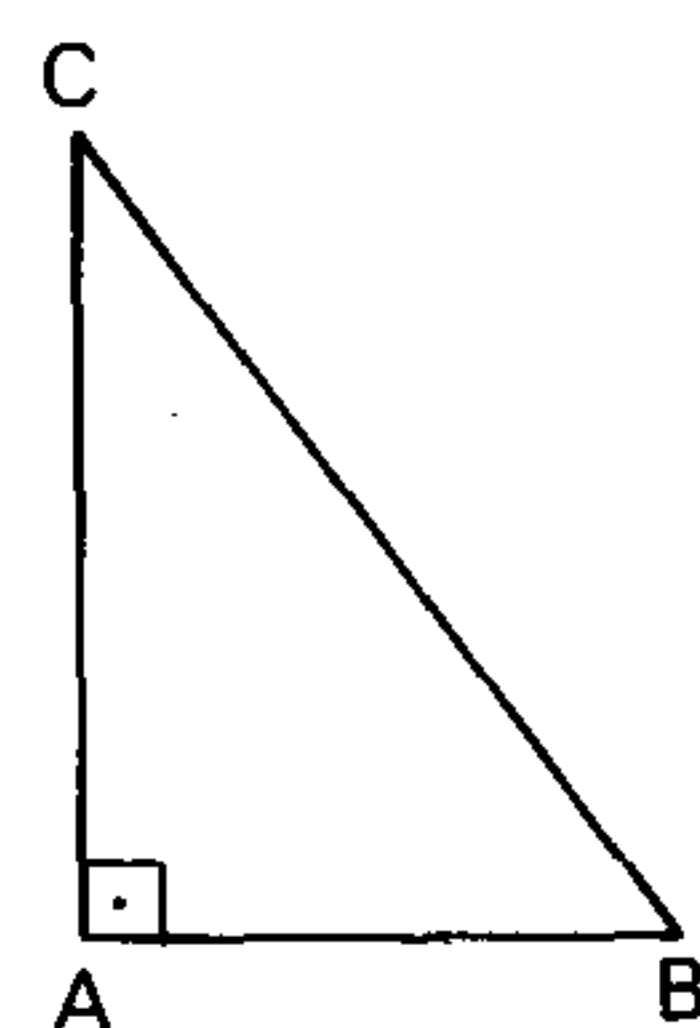
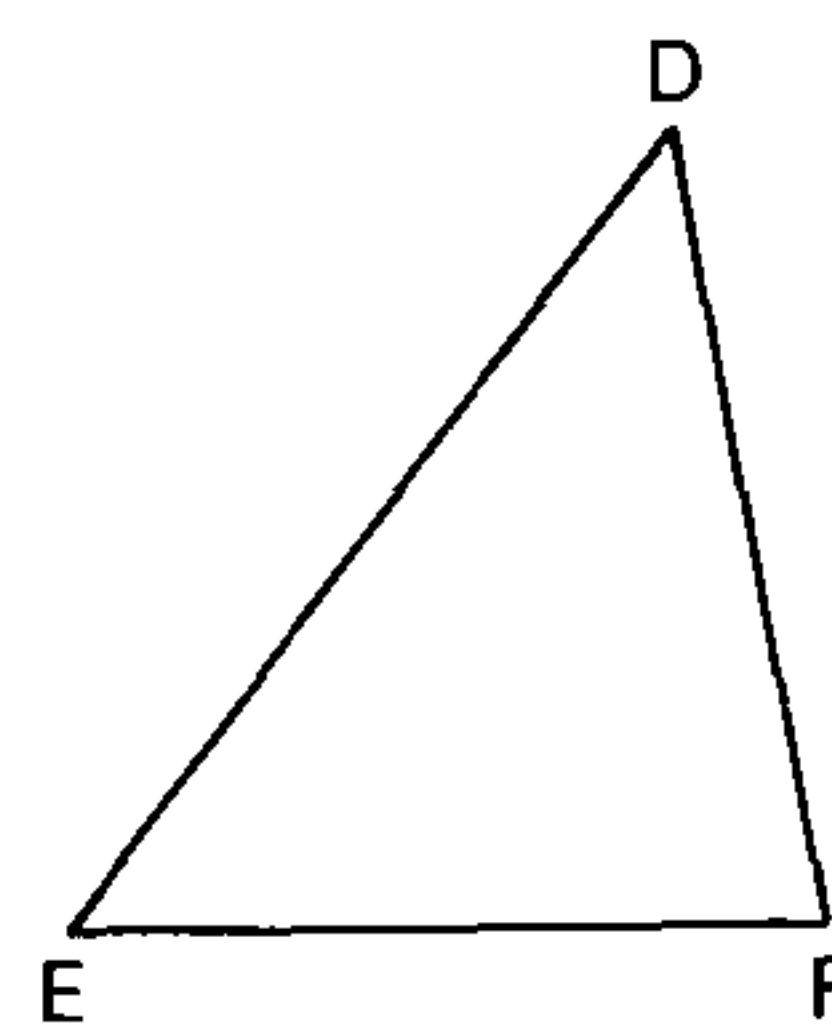
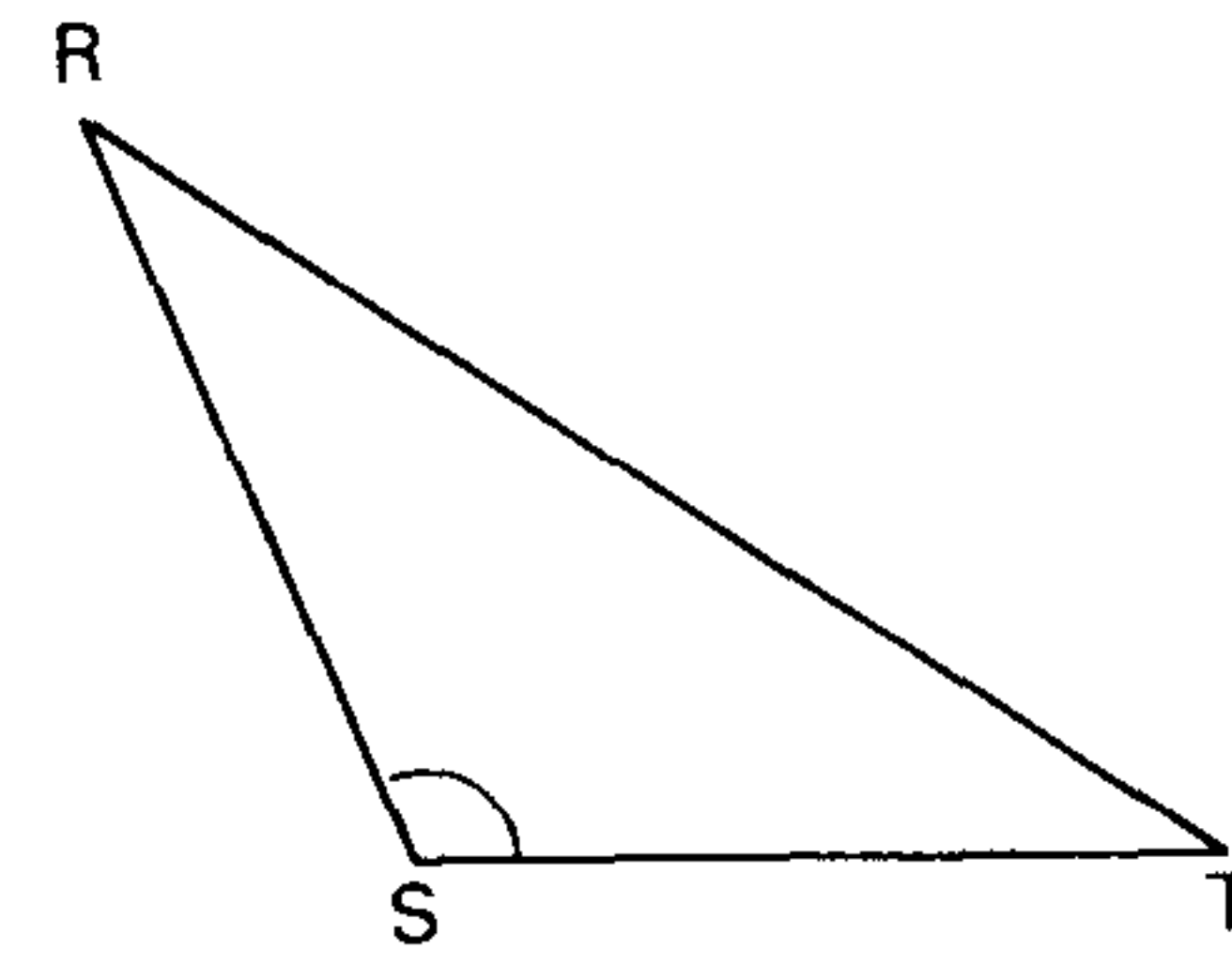
Exterior do $\triangle ABC = \alpha_2 \cup \beta_2 \cup \gamma_2$.
O exterior de um triângulo é uma região côncava.
Os pontos do exterior do $\triangle ABC$ são pontos *externos* ao $\triangle ABC$.

A reunião do triângulo com seu interior é uma *superfície triangular* (ou superfície do triângulo).

48. *Classificação*

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:
equiláteros se, e somente se, têm os três lados congruentes;
isósceles se, e somente se, têm dois lados congruentes;
escalenos se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes.

$\triangle ABC$ equilátero $\triangle RST$ isósceles $\triangle MNP$ escaleno

Um triângulo com dois lados congruentes é isósceles; o outro lado é chamado *base* e o ângulo oposto à base é o *ângulo do vértice*.

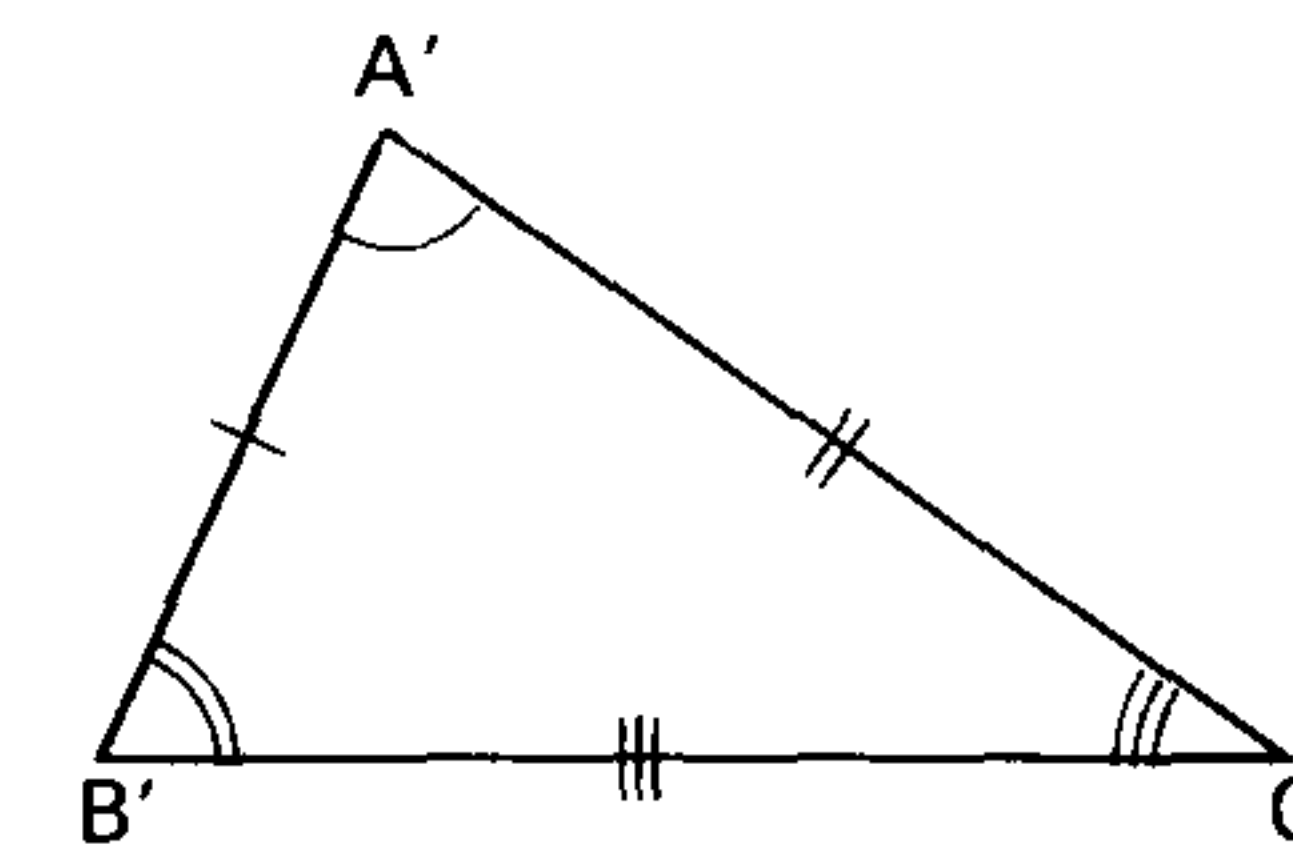
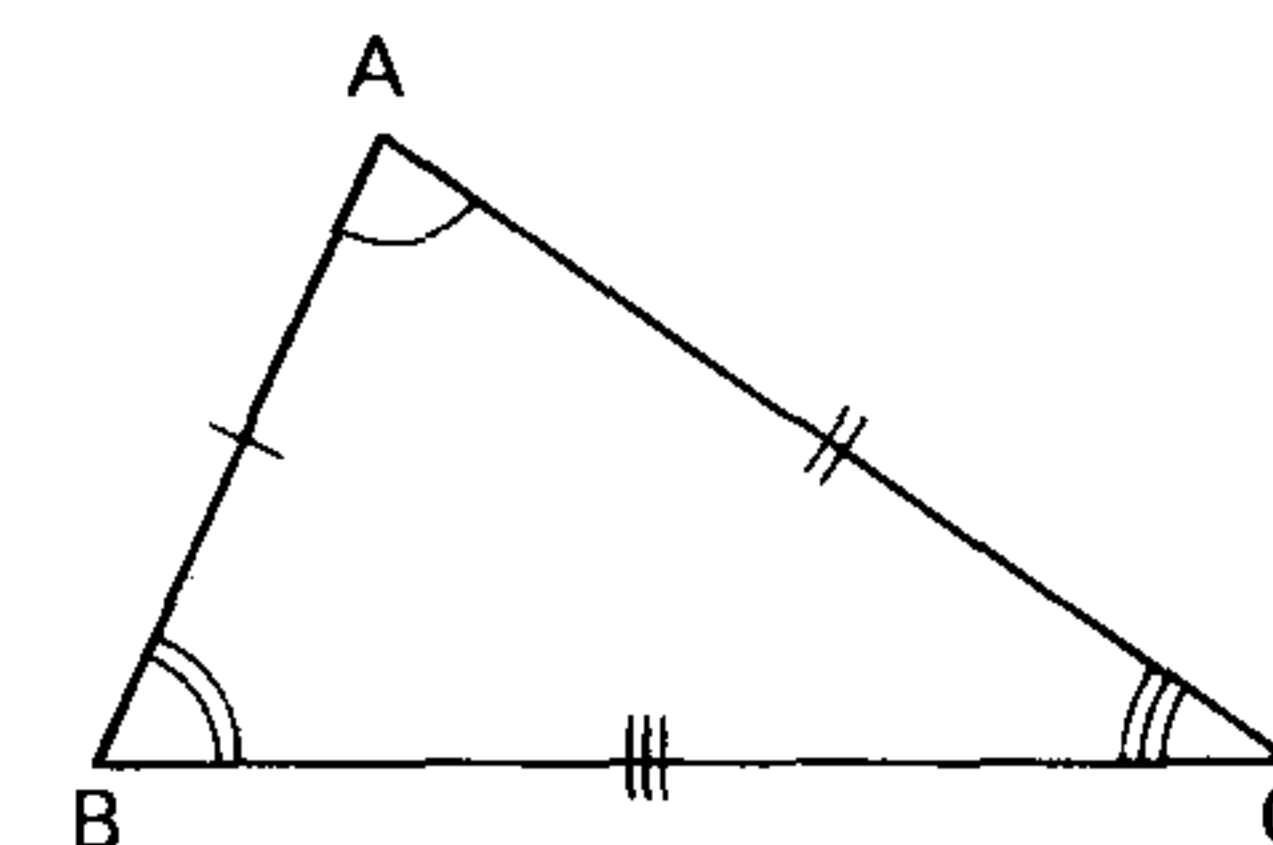
Notemos que todo triângulo equilátero é também triângulo isósceles.

Quanto aos *ângulos*, os triângulos se classificam em:
retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto;
acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos;
obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso.

$\triangle ABC$ retângulo em A $\triangle DEF$ acutângulo $\triangle RST$ obtusângulo em S

O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é sua *hipotenusa* e os outros dois são os *catetos* do triângulo.

II. Congruência de triângulos

49. *Definição*

Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \iff \begin{pmatrix} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & & \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & \text{e} & \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & & \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{pmatrix}$$

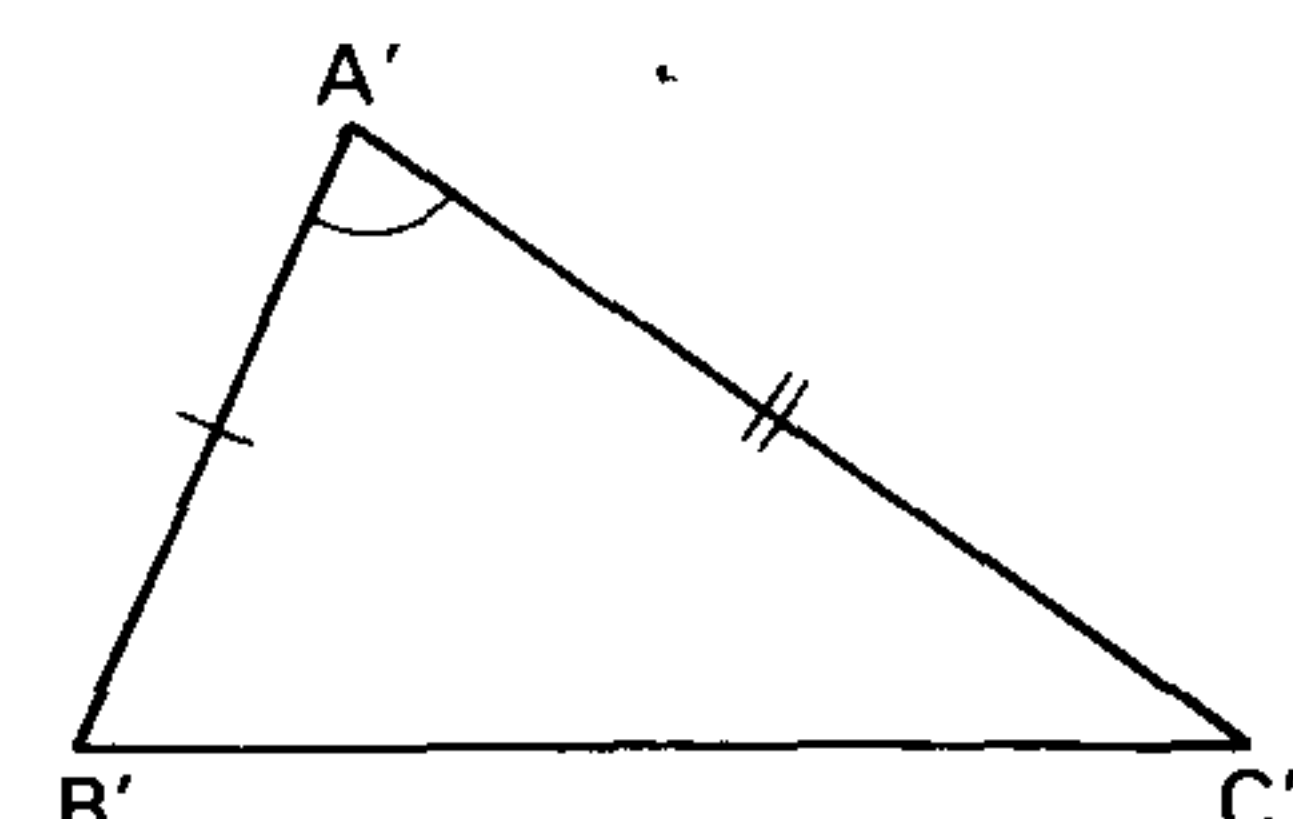
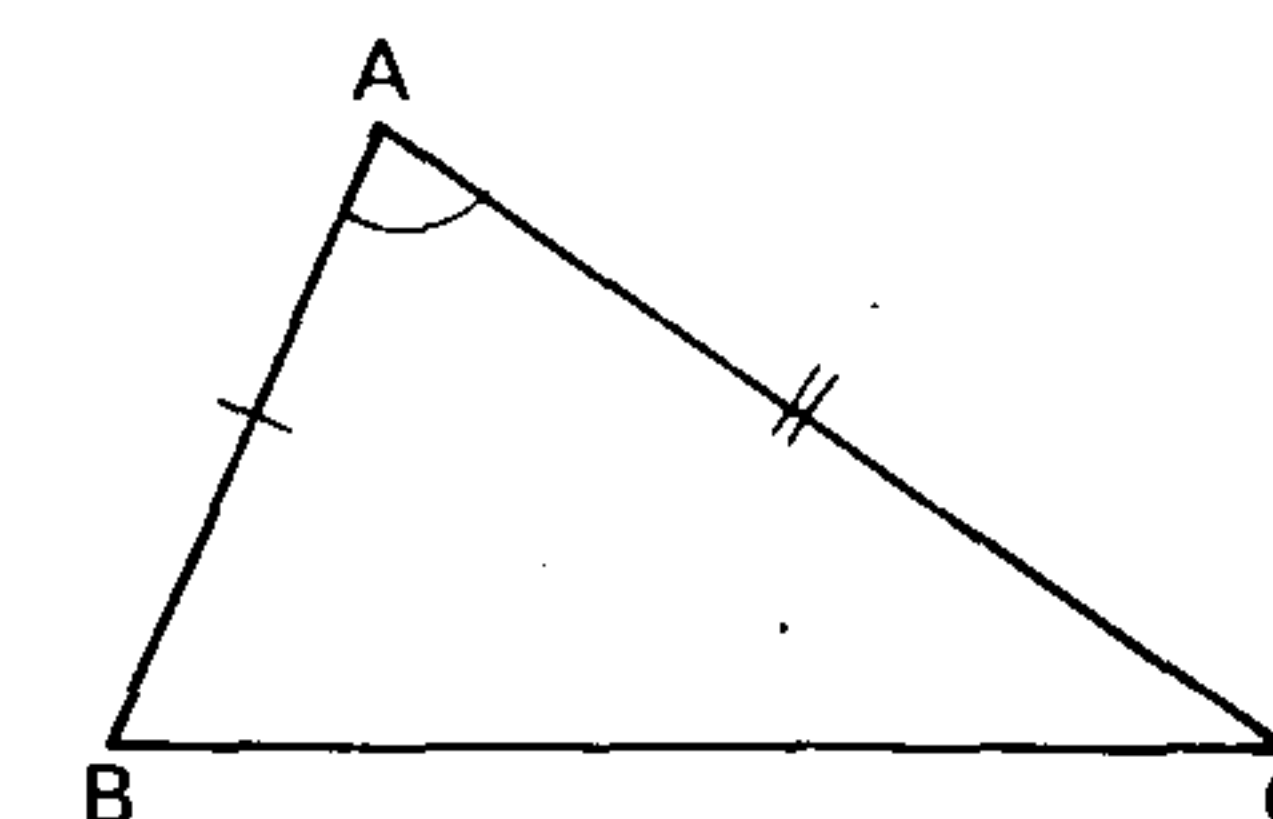
A congruência entre triângulos é *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

50. *Casos de congruência*

A definição de congruência de triângulos dá *todas* as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem *condições mínimas* para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados *casos* ou *critérios* de congruência.

51. *1º caso — LAL — postulado*

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

Esta proposição é um *postulado* e indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.

Esquema do 1º caso:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array}\right.$$

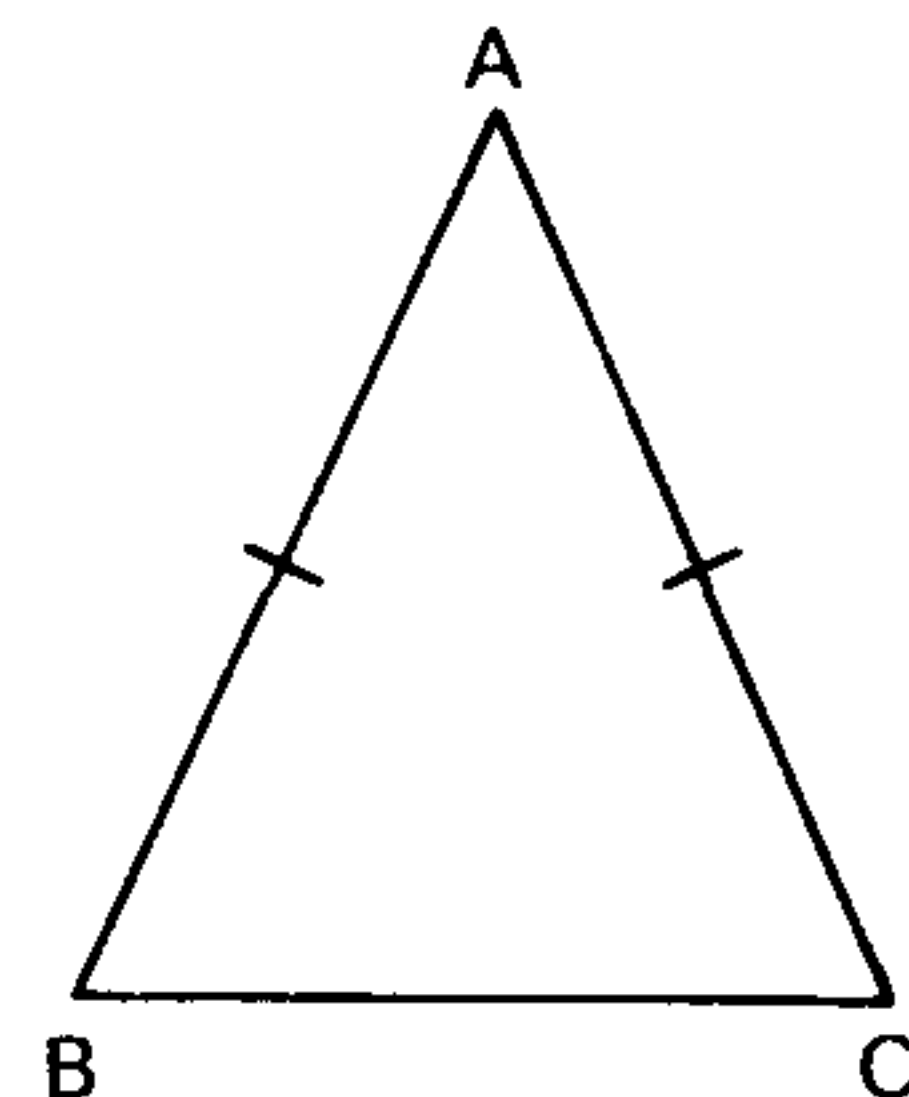
52. Teorema do triângulo isósceles

"Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes."

ou

"Se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes."

"Todo triângulo isósceles é isoângulo."

ou ainda

Hipótese	*Tese*
$(\triangle ABC,\ \overline{AB} \equiv \overline{AC}) \Longrightarrow$	$\hat{B} \equiv \hat{C}$

Demonstração

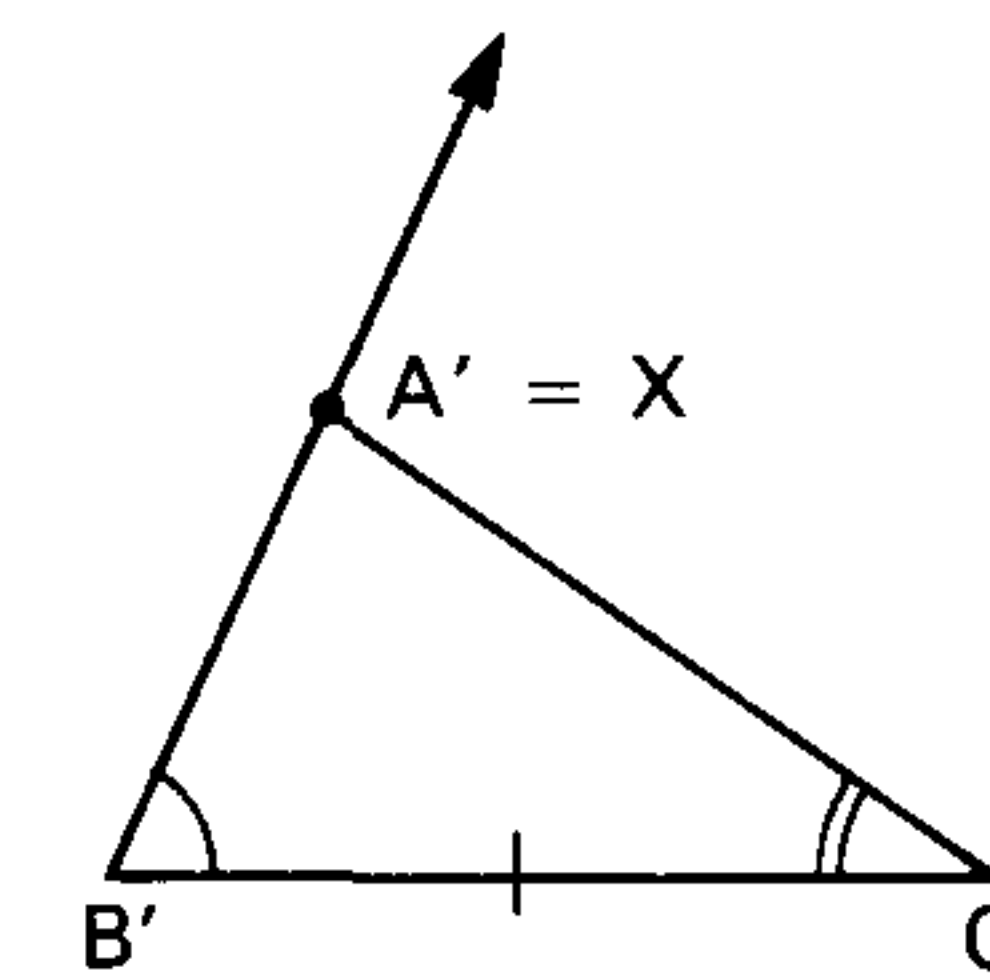
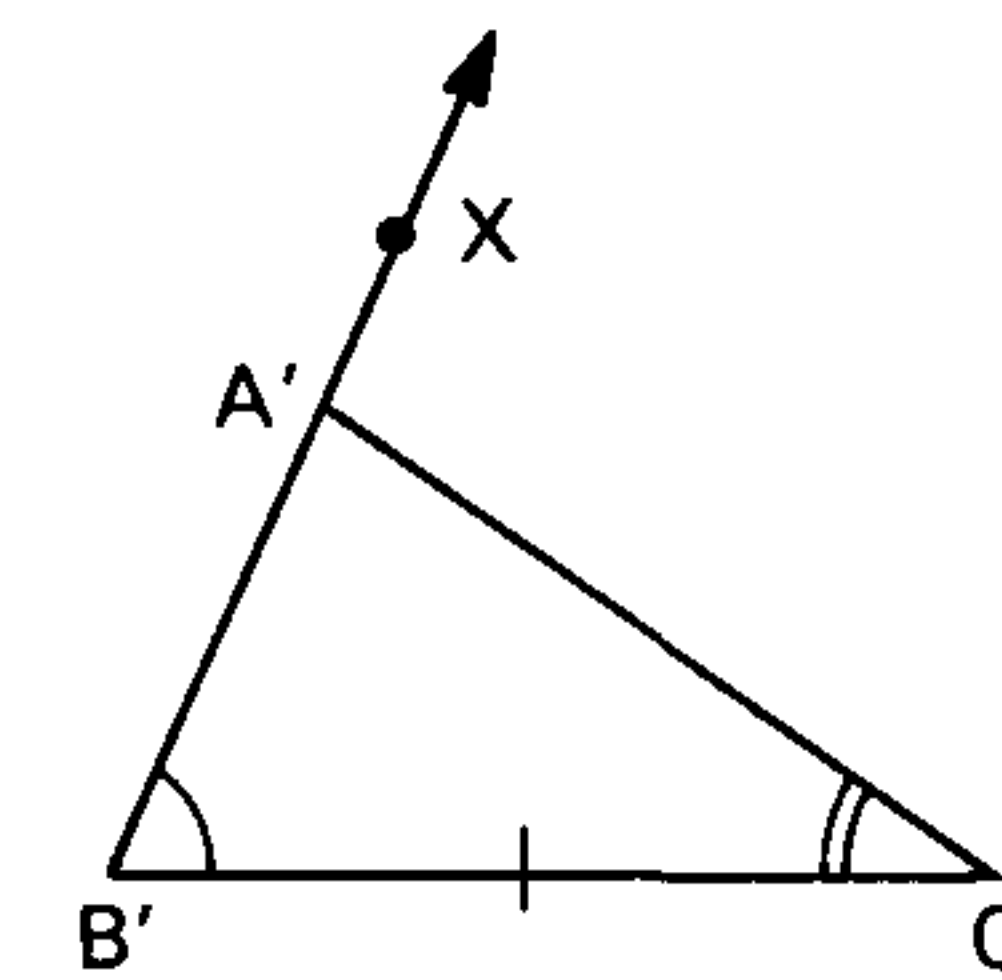
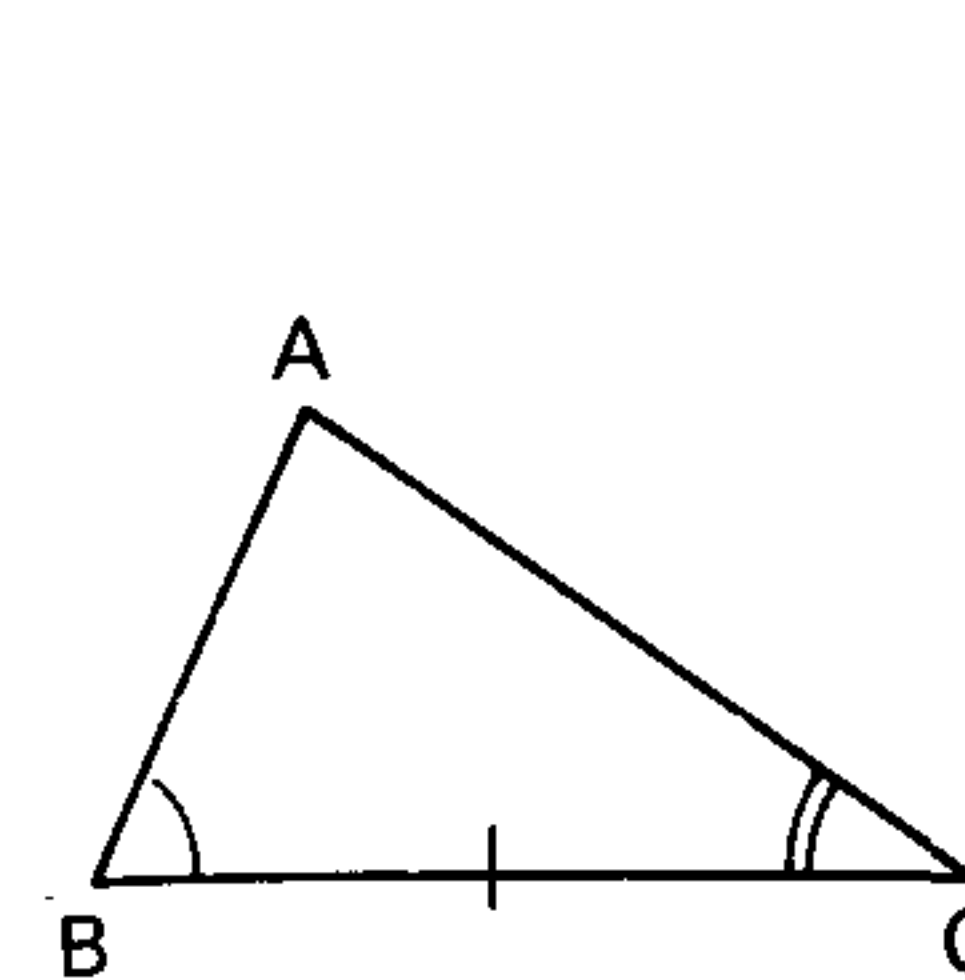
Consideremos os triângulos *ABC* e *ACB*, isto é, associemos a *A*, *B* e *C*, respectivamente, *A*, *C* e *B*.

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Hipótese} \Rightarrow & \overline{AB} & \equiv & \overline{AC} \\ & B\hat{A}C & \equiv & C\hat{A}B \\ \text{Hipótese} \Rightarrow & \overline{AC} & \equiv & \overline{AB} \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle ACB \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

↑ do △ABC ↑ do △ACB

53. 2º caso — ALA

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes."

Os ângulos adjacentes ao lado $\overline{BC}$ são $\hat{B}$ e $\hat{C}$; os adjacentes ao lado $\overline{B'C'}$ são $\hat{B}'$ e $\hat{C}'$.

Hipótese	*Tese*
$(\hat{B} \equiv \hat{B}'\ (1);\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}\ (2);\ \hat{C} \equiv \hat{C}'\ (3)) \Longrightarrow$	$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Demonstração

Vamos provar que $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$, pois com isso recairemos no 1º caso.

Pelo postulado do transporte de segmentos (item 18), obtemos na semi-reta $\overrightarrow{B'A'}$ um ponto X tal que $\overline{B'X} \equiv \overline{BA}$. *(4)*

$$\left.\begin{array}{lrcl} (2) & \overline{BC} & \equiv & \overline{B'C'} \\ (1) & \hat{B} & \equiv & \hat{B}' \\ (4) & \overline{BA} & \equiv & \overline{B'X} \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle XB'C' \rightarrow B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'X \quad (5)$$

Da hipótese (3) $B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'A'$, com (5) $B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'X$ e com o postulado do transporte de ângulos (item 35), decorre que $\overleftrightarrow{B'A'}$ e $\overleftrightarrow{C'X} = \overleftrightarrow{C'A'}$ interceptam-se num único ponto $X = A'$.

De $X \equiv A'$, com (4), decorre que $\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}$.

Então:

$$(\overline{BA} \equiv \overline{B'A'},\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

54. Notas

1) Esquema do 2º caso

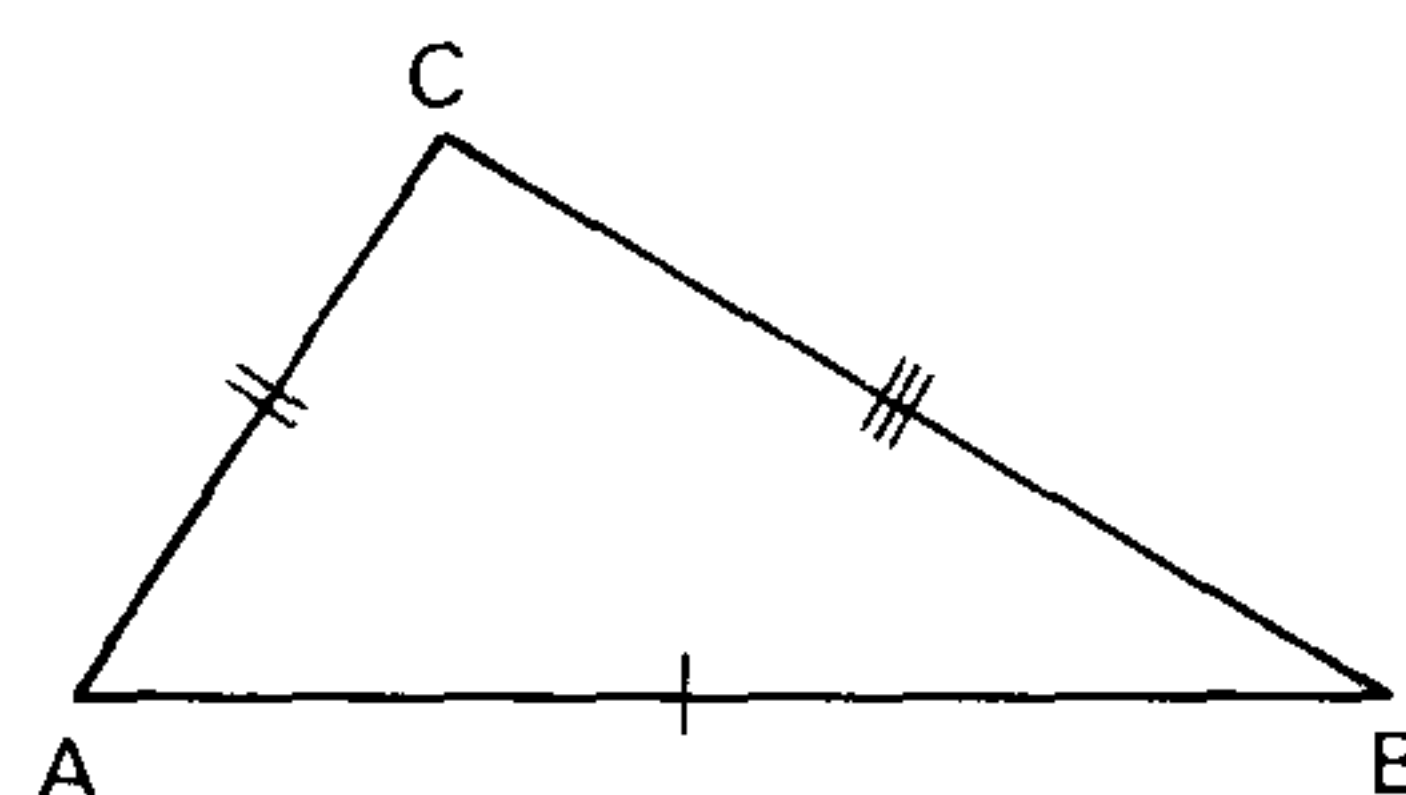
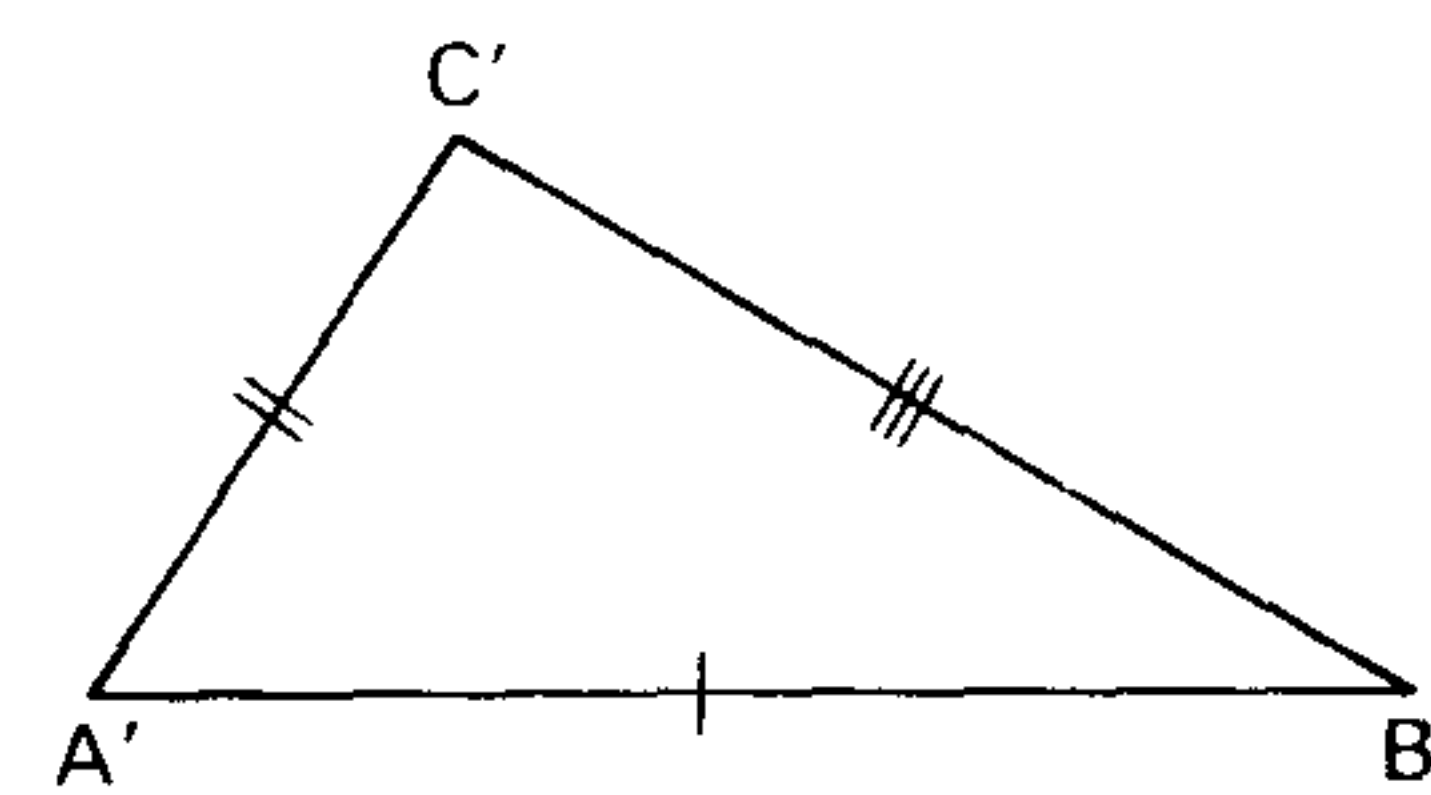
$$\left.\begin{array}{r} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array}\right\} \overset{ALA}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array}\right.$$

2) Com base no 2º caso (ALA), pode-se provar a recíproca do teorema do triângulo isósceles:

> **"Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles."**

Considerando um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, basta observar os triângulos ABC e ACB e proceder de modo análogo ao do teorema direto.

55. *3º caso — LLL*

> **Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.**

Hipótese *Tese*

$$(\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}\ (1),\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}\ (2),\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}\ (3)) \Longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Demonstração

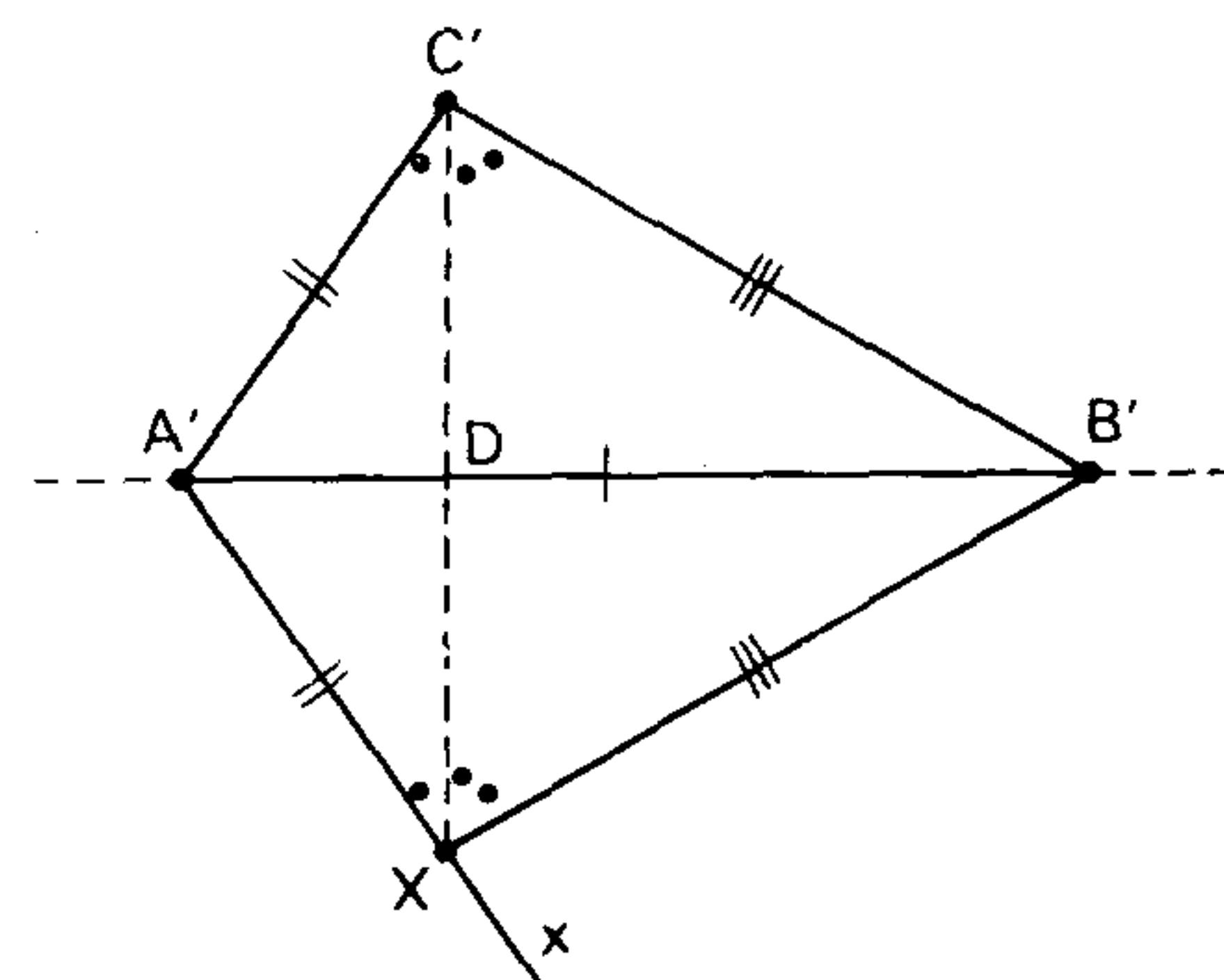
Pelo postulado do transporte de ângulos (item 35) e do transporte de segmentos (item 18) obtemos um ponto X tal que:

$$X\hat{A}'B' \equiv C\hat{A}B \quad (4)$$
$$\overline{A'X} \equiv \overline{AC} \quad (5)$$

estando X no semiplano oposto ao de C' em relação à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

De (5) e (2), vem:

$\overline{A'X} \equiv \overline{A'C'}$. (6)

Seja D o ponto de interseção de $\overline{C'X}$ *com a reta* $\overleftrightarrow{A'B'}$.

$$(1), (4), (5) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'X'\ (7) \Rightarrow \overline{XB'} \equiv \overline{CB} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \overline{XB'} \equiv \overline{C'B'}\ (8)$$
$$(6) \Longrightarrow \triangle A'C'X \text{ é isósceles de base } \overline{C'X} \Rightarrow A'\hat{C}'X \equiv A'\hat{X}C'\ (9)$$
$$(8) \Longrightarrow \triangle B'C'X \text{ é isósceles de base } \overline{C'X} \Rightarrow B'\hat{C}'X \equiv B'\hat{X}C'\ (10)$$

Por soma ou diferença de (9) e (10) (conforme D seja interno ou não ao segmento $\overline{A'B'}$), obtemos:

$$A'\hat{C}'B' \equiv A'\hat{X}B' \quad (11)$$

$$(6), (11), (8) \Longrightarrow \triangle A'B'C' \equiv \triangle A'B'X \overset{(7)}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

56. *Existência do ponto médio*

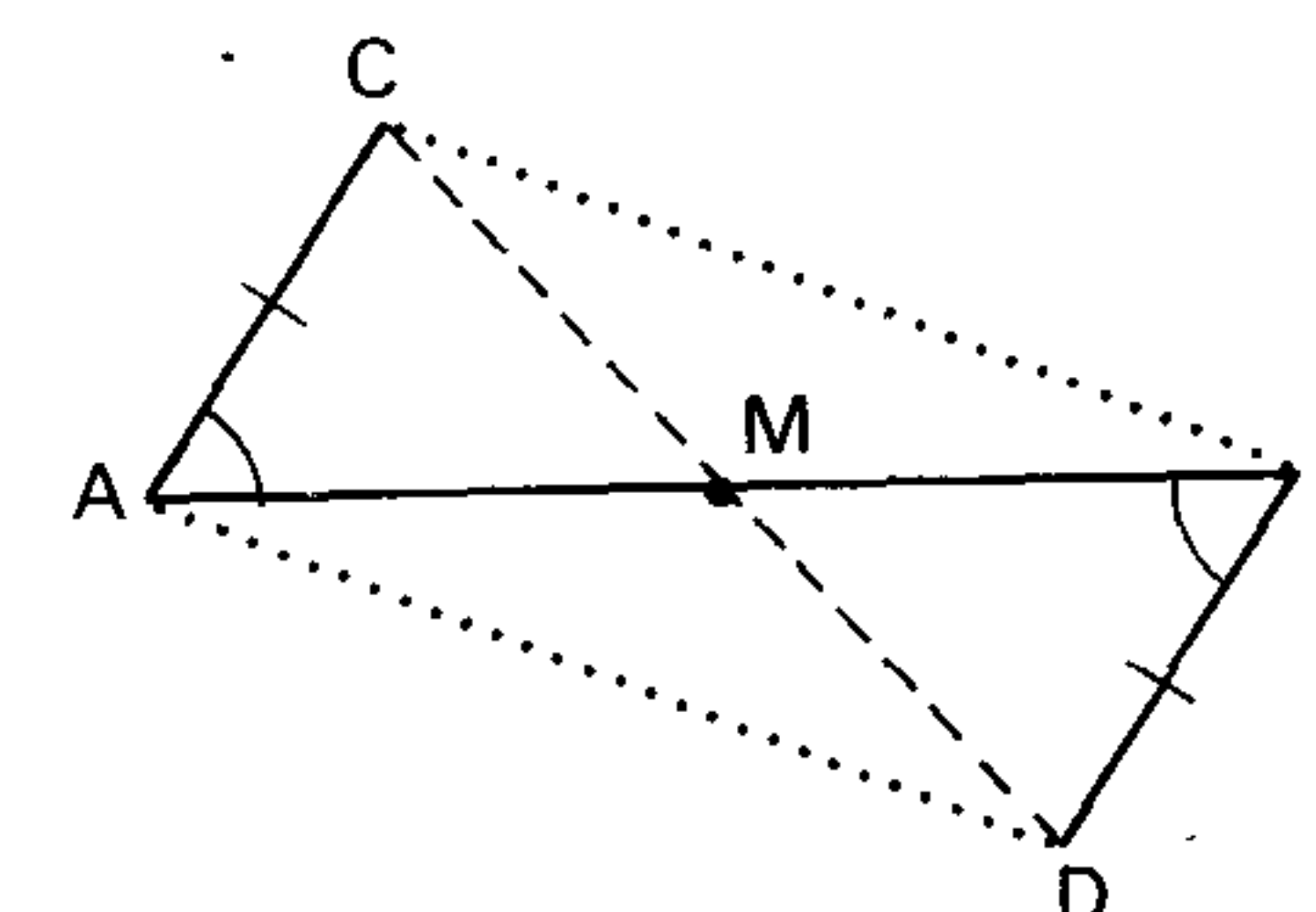
Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, usando os postulados de transporte de ângulos (item 35) e de segmentos (item 18) construímos

$$C\hat{A}B \equiv D\hat{B}A$$
$$\overline{AC} \equiv \overline{DB}$$

com C e D em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

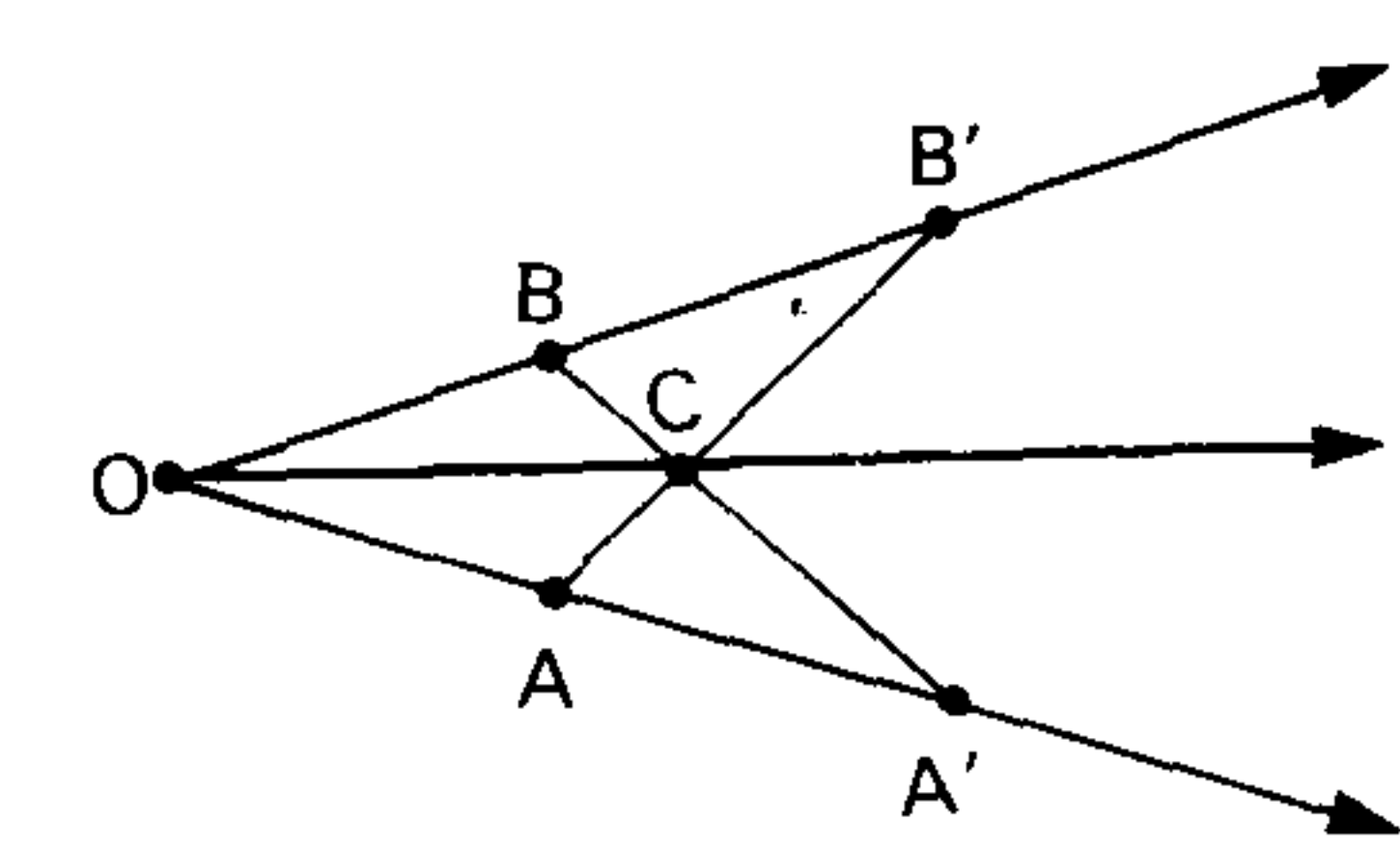
O segmento $\overline{CD}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ num ponto M. Vejamos uma seqüência de congruências de triângulos:

$\triangle CAB \equiv \triangle DBA$ (LAL, $\overline{AB}$ é comum)
$\triangle CAD \equiv \triangle DBC$ (ALA, com soma de ângulos ou pelo caso LLL)
$\triangle AMD \equiv \triangle BMC$ (ALA)

Desta última congruência decorre que $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, ou seja, M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

57. *Existência da bissetriz*

Dado um ângulo $a\hat{O}b$, usando o postulado do transporte de segmentos (item 18) obtemos A e A' em Oa e B e B' em Ob tais que:

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \quad (1)$$
$$\overline{OA'} \equiv \overline{OB'} \quad (2)$$

com $\overline{OA'} > \overline{OA}$ e $\overline{OB'} > \overline{OB}$.

Seja C o ponto de interseção de $\overline{AB'}$ com $\overline{A'B}$ e consideremos a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ = Oc.

Vejamos uma seqüência de congruências de triângulos:

$\triangle AOB' \equiv \triangle BOA'$ (LAL, $a\hat{O}b$ (comum)
$\triangle ACA' \equiv \triangle BCB'$ (ALA, ângulos adjacentes suplementares, diferença de segmentos)
$\triangle OAC \equiv \triangle OBC$ (LAL)

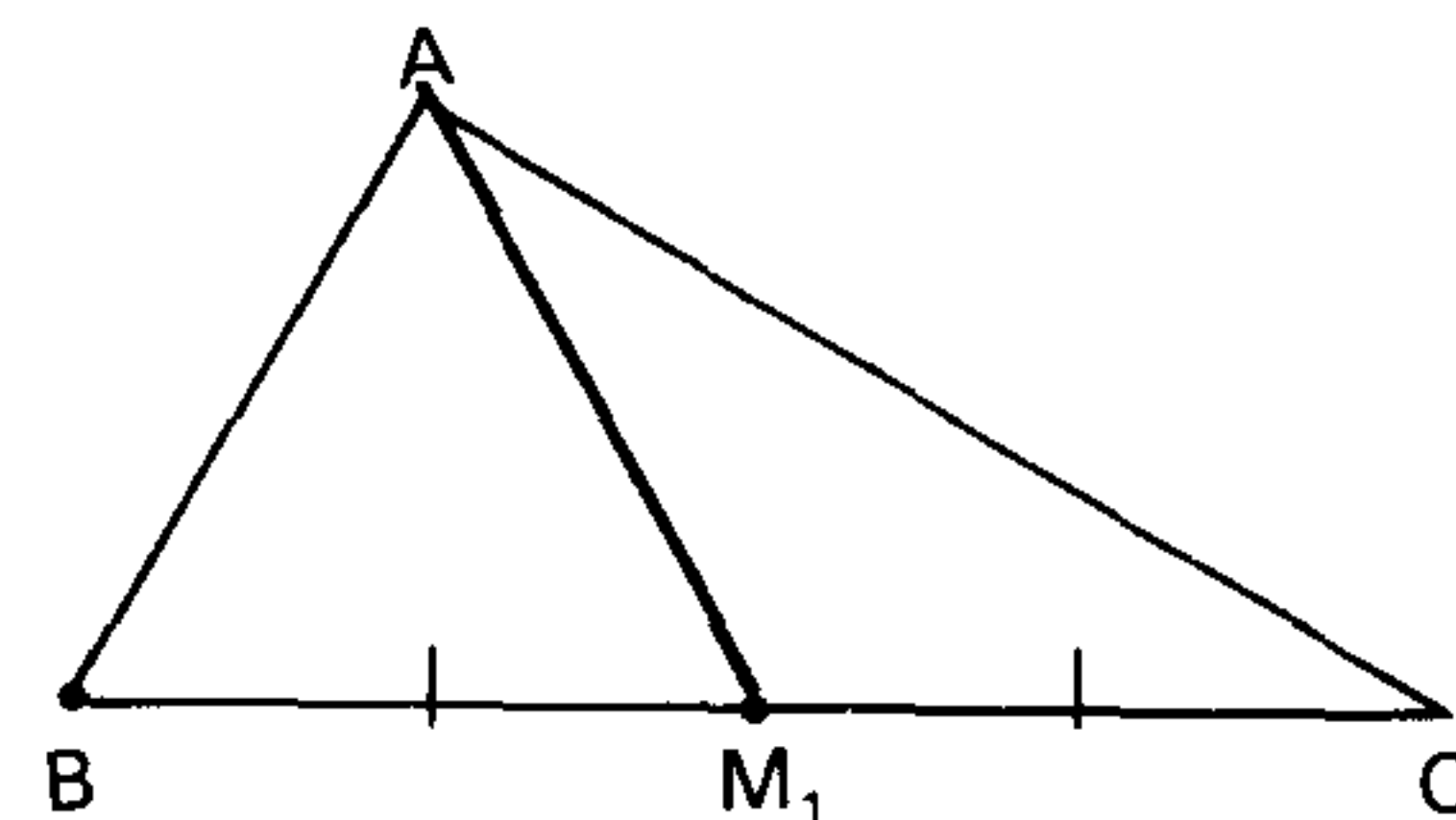
Desta última congruência decorre que $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$, ou seja,
Oc é bissetriz de $a\hat{O}b$.

58. *Mediana de um triângulo — definição*

Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.

M_1 é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.

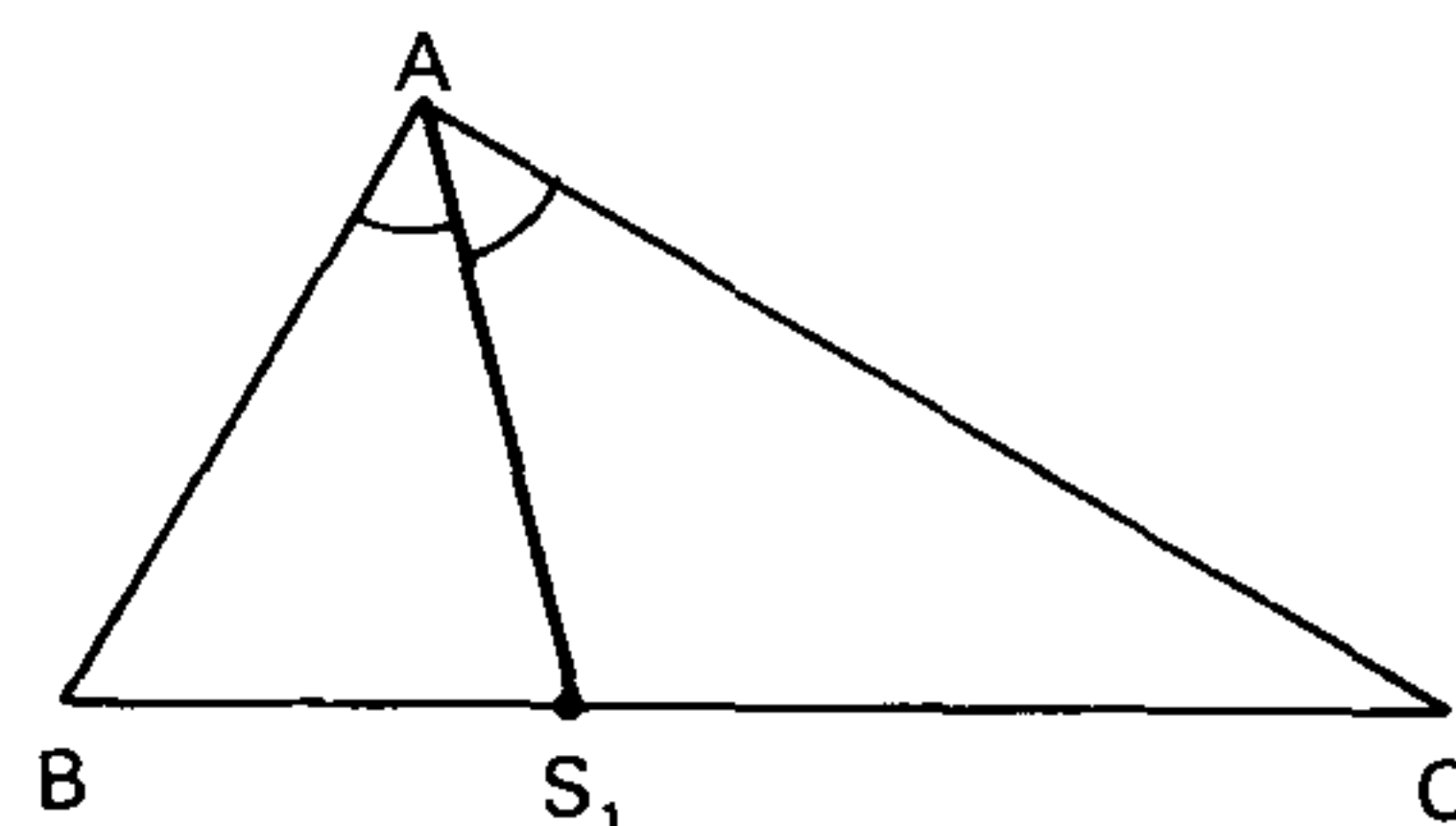
$\overline{AM_1}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

$\overline{AM_1}$ é a mediana relativa ao vértice A.

59. *Bissetriz interna de um triângulo — definição*

Bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

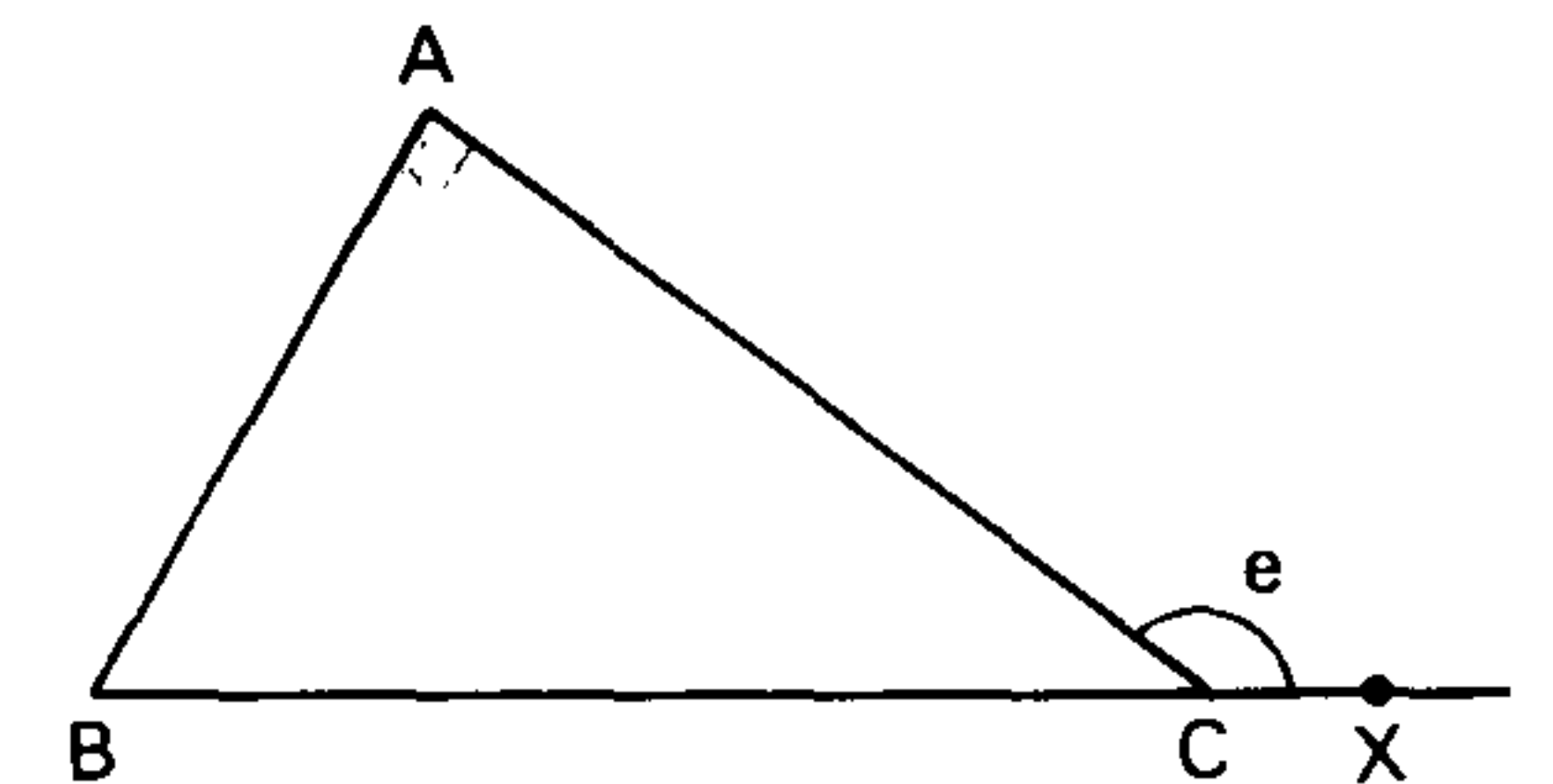
$S_1 \in \overline{BC}$, $S_1\hat{A}B \equiv S_1\hat{A}C$

$\overline{AS_1}$ é a bissetriz relativa ao lado $\overline{BC}$.

$\overline{AS_1}$ é a bissetriz relativa ao vértice A.

60. *Teorema do ângulo externo*

Dado um $\triangle ABC$ e sendo $\overrightarrow{CX}$ a semi-reta oposta à semi-reta $\overrightarrow{CB}$, o ângulo

$$\hat{e} = A\hat{C}X$$

é o ângulo externo do $\triangle ABC$ adjacente a $\hat{C}$ e não adjacente aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

O ângulo $\hat{e}$ é o suplementar adjacente de $\hat{C}$.

Teorema

Um ângulo externo de um triângulo é *maior* que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

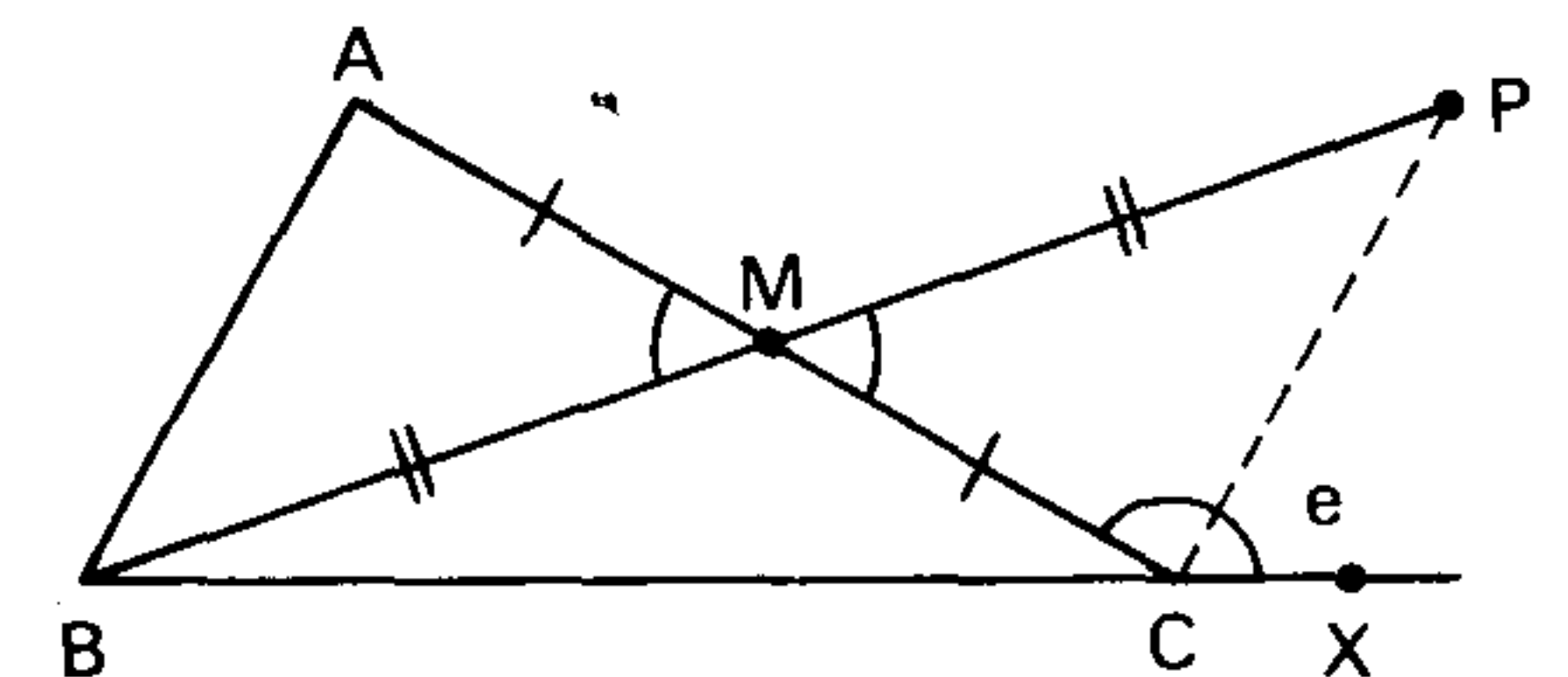
Hipótese		*Tese*
($\triangle ABC$, $\hat{e}$ externo adjacente a $\hat{C}$)	$\Longrightarrow$	($\hat{e} > \hat{A}$ e $\hat{e} > \hat{B}$)

Demonstração

Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$ e P pertencente à semi-reta $\overrightarrow{BM}$ tal que:

$$\overline{BM} \equiv \overline{MP}$$

Pelo caso LAL, $\triangle BAM \equiv \triangle PMC$ e daí:

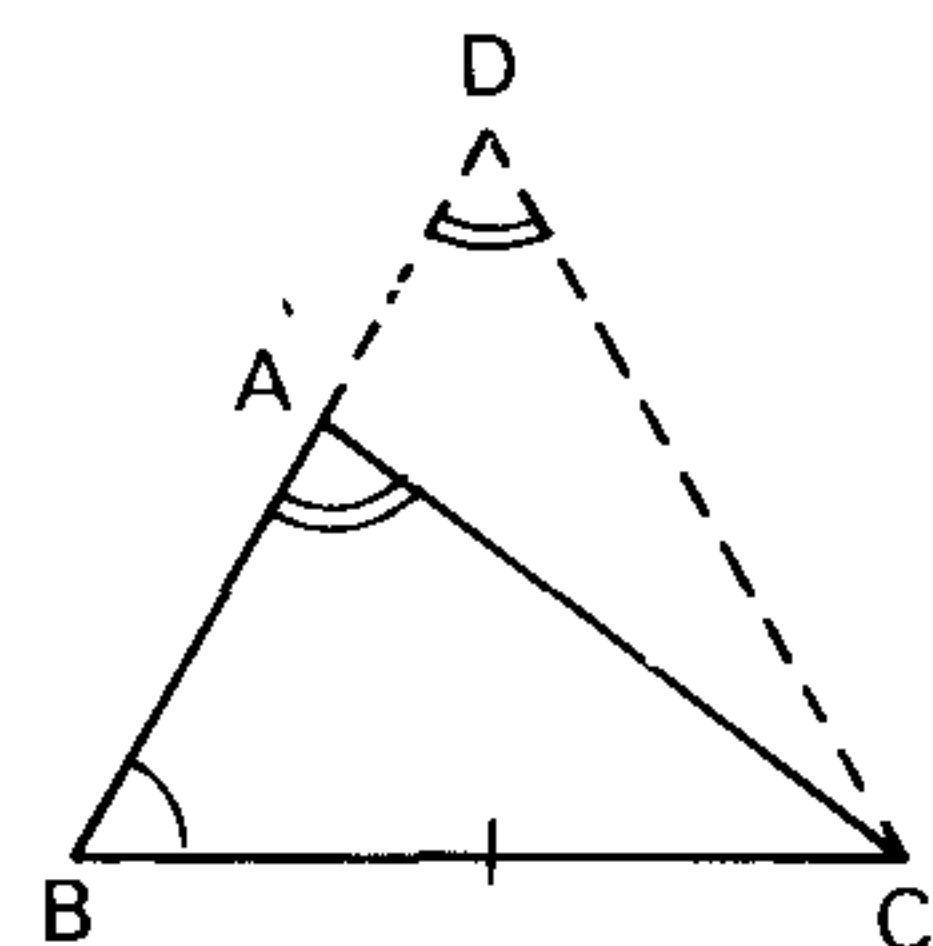
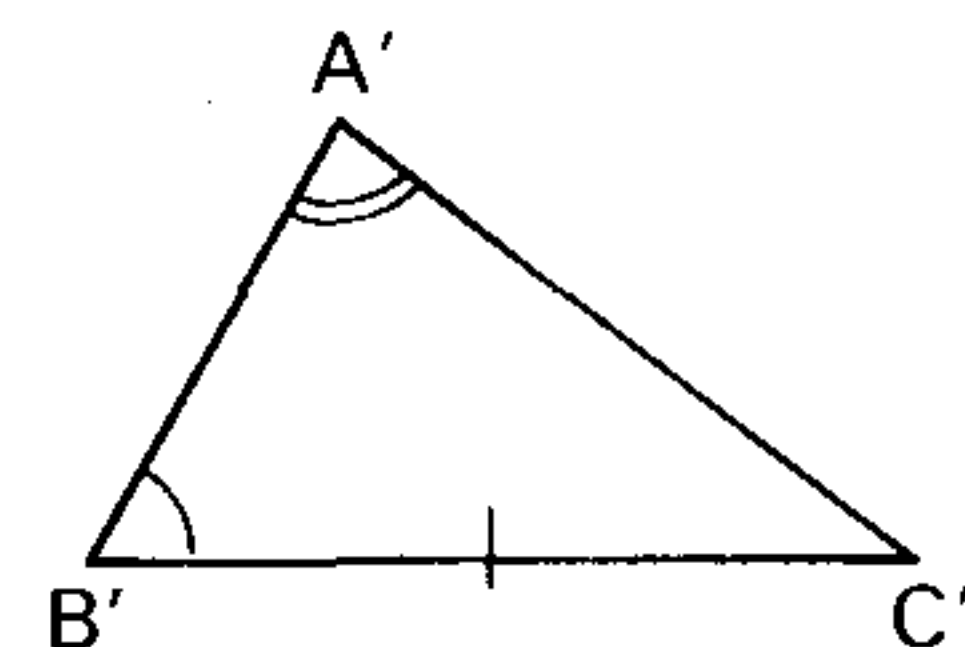
$$B\hat{A}M \equiv P\hat{C}M \quad (1)$$

Como P é interno ao ângulo $\hat{e} = A\hat{C}X$, vem: $\hat{e} > P\hat{C}M$. (2)

De (1) e (2), decorre que $\hat{e} > \hat{A}$.

Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que:

$$\hat{e} > \hat{B}$$

61. 4º caso de congruência — LAA_0

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Hipótese *Tese*

$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (1), $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ (2), $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (3) $\Longrightarrow$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Demonstração

Há três possibilidades para $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$:
1ª) $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ 2ª) $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ 3ª) $\overline{AB} > \overline{A'B'}$
Se a 1ª se verifica, temos:

$$(\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Se a 2ª se verificasse, tomando um ponto D na semi-reta $\overrightarrow{BA}$ tal que $\overline{BD} = \overline{A'B'}$ (postulado do transporte de segmentos — item 18), teríamos:

$$(\overline{DB} \equiv \overline{A'B'},\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{D} \equiv \hat{A} \Rightarrow$$

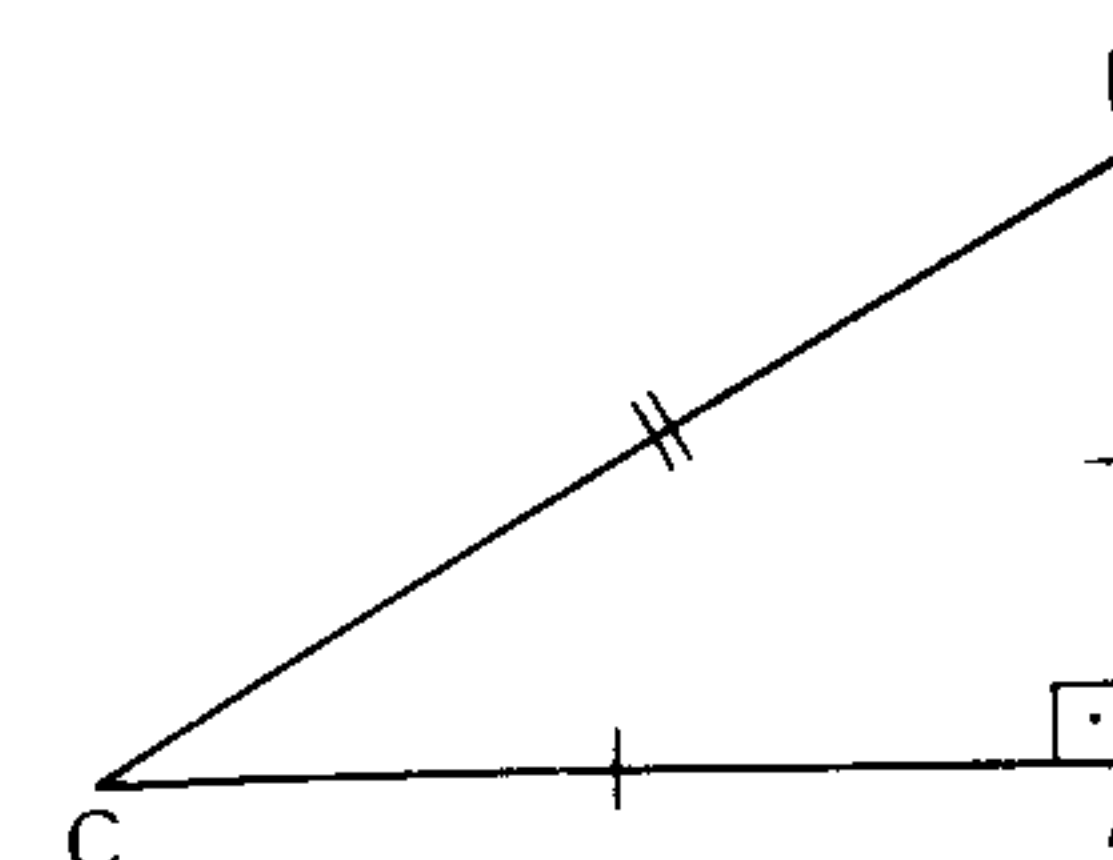
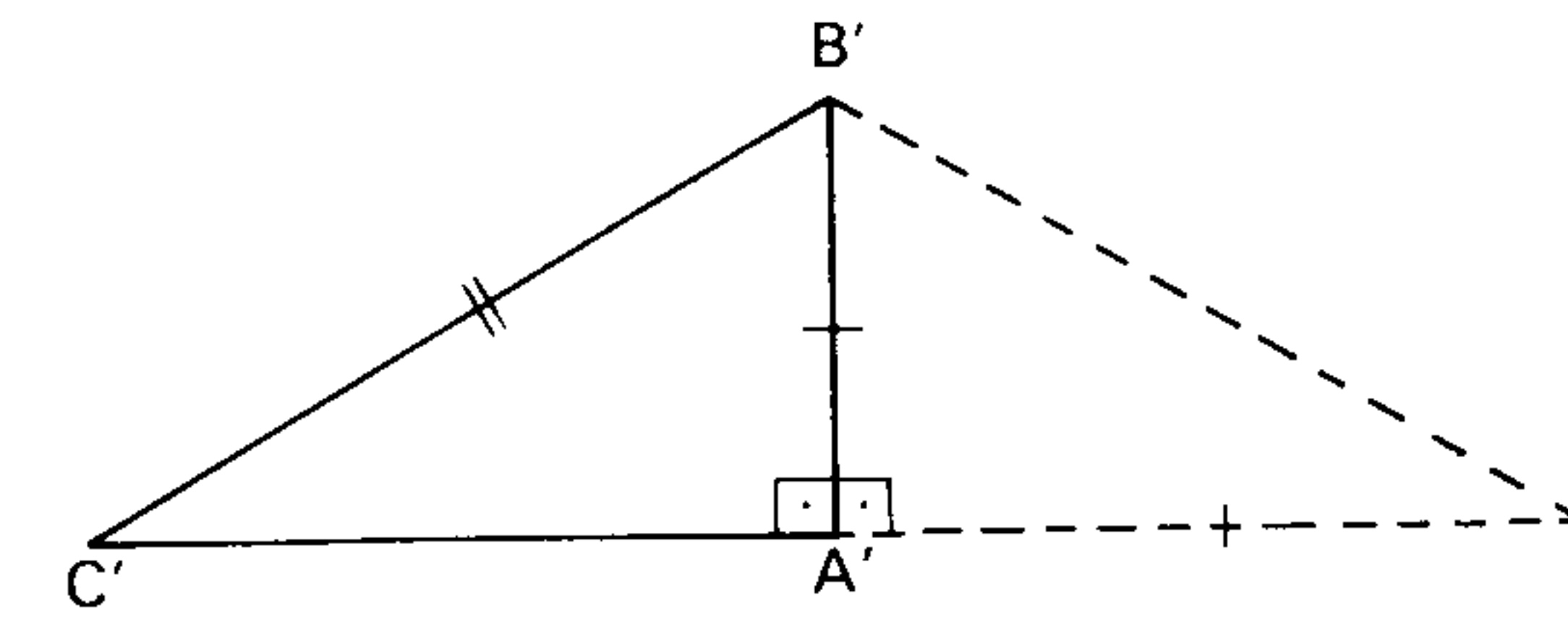
$\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, o que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no $\triangle ADC$. Logo, a 2ª possibilidade não se verifica.

A 3ª possibilidade também não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença que D estaria entre A e B.

Como só pode ocorrer a 1ª possibilidade, temos:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

62. Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Hipótese *Tese*

$\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (retos) (1), $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (2), $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (3) $\Longrightarrow$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Demonstração

Tomemos o ponto D na semi-reta oposta à semi-reta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{A'D} \equiv \overline{AC}$ (postulado do transporte de segmentos — item 18).

$(\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \hat{A} \equiv \hat{A}',\ \overline{AC} \equiv \overline{A'D}) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'D \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{BC} \equiv \overline{B'D}$ (4) e $\hat{C} \equiv \hat{D}$ (5)

(4) e (3) $\Longrightarrow$ $\overline{B'C'} \equiv \overline{B'D}$ $\Longrightarrow$ $\triangle B'C'D$ é isósceles de base $\overline{C'D}$ $\Longrightarrow$ $\hat{C}' \equiv \hat{D}$ (6)

(5) e (6) $\Longrightarrow$ $\hat{C} \equiv \hat{C}'$

Considerando agora os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$(\overline{BC} \equiv \overline{B'C'},\ \hat{C} \equiv \hat{C}',\ \hat{A} \equiv \hat{A}') \overset{LAA_0}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

EXERCÍCIOS

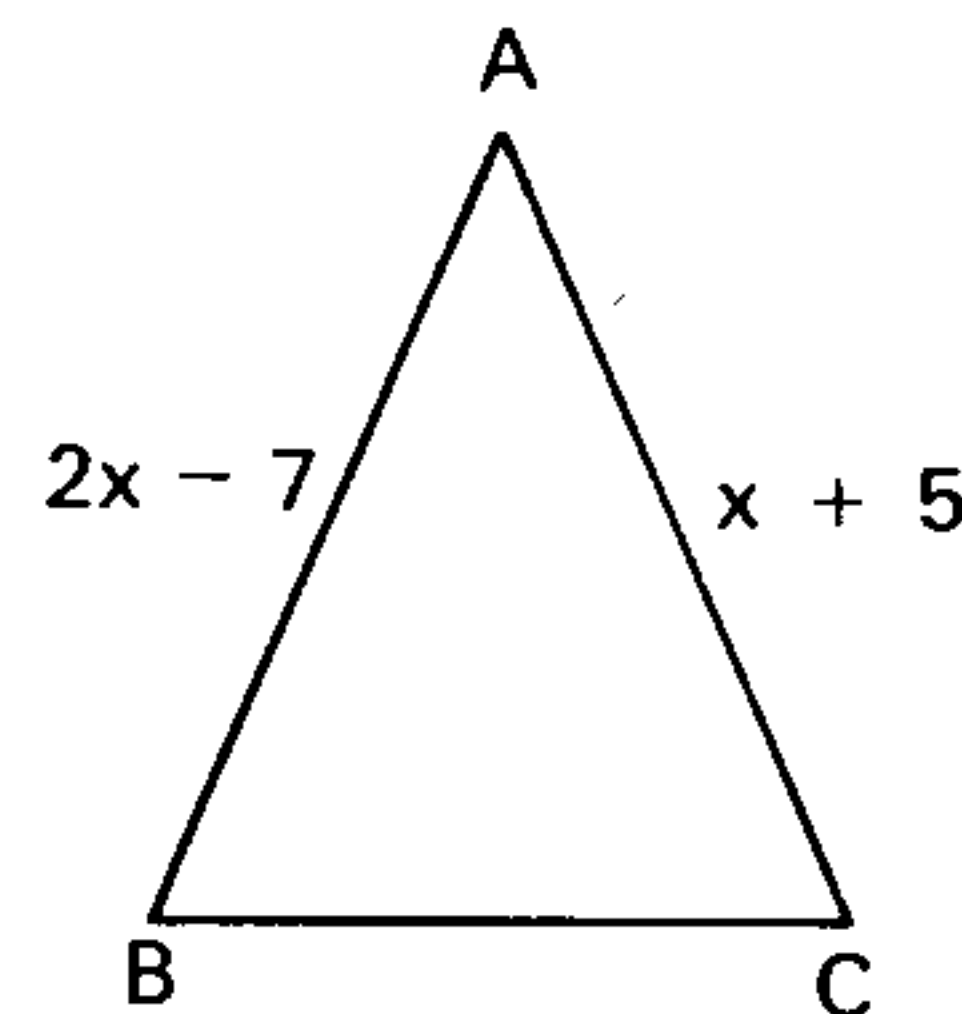
80. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

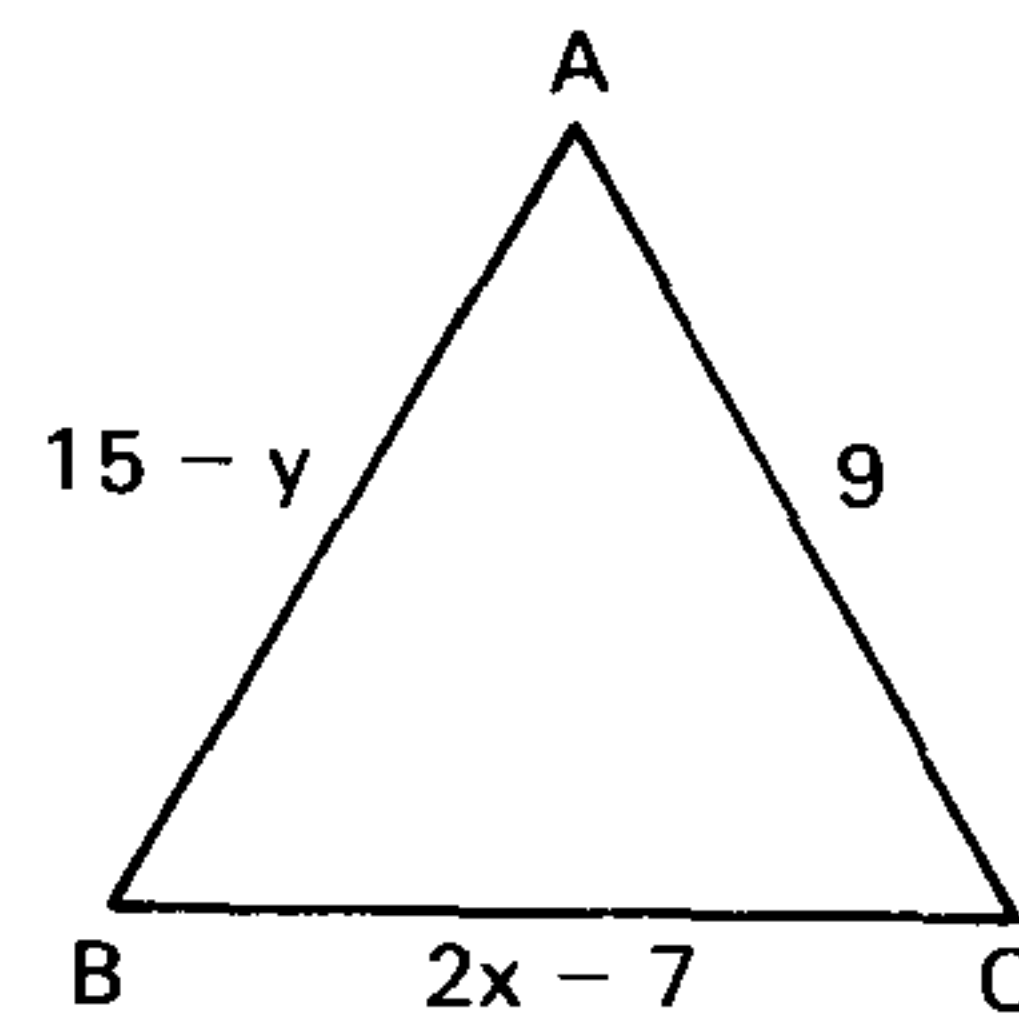
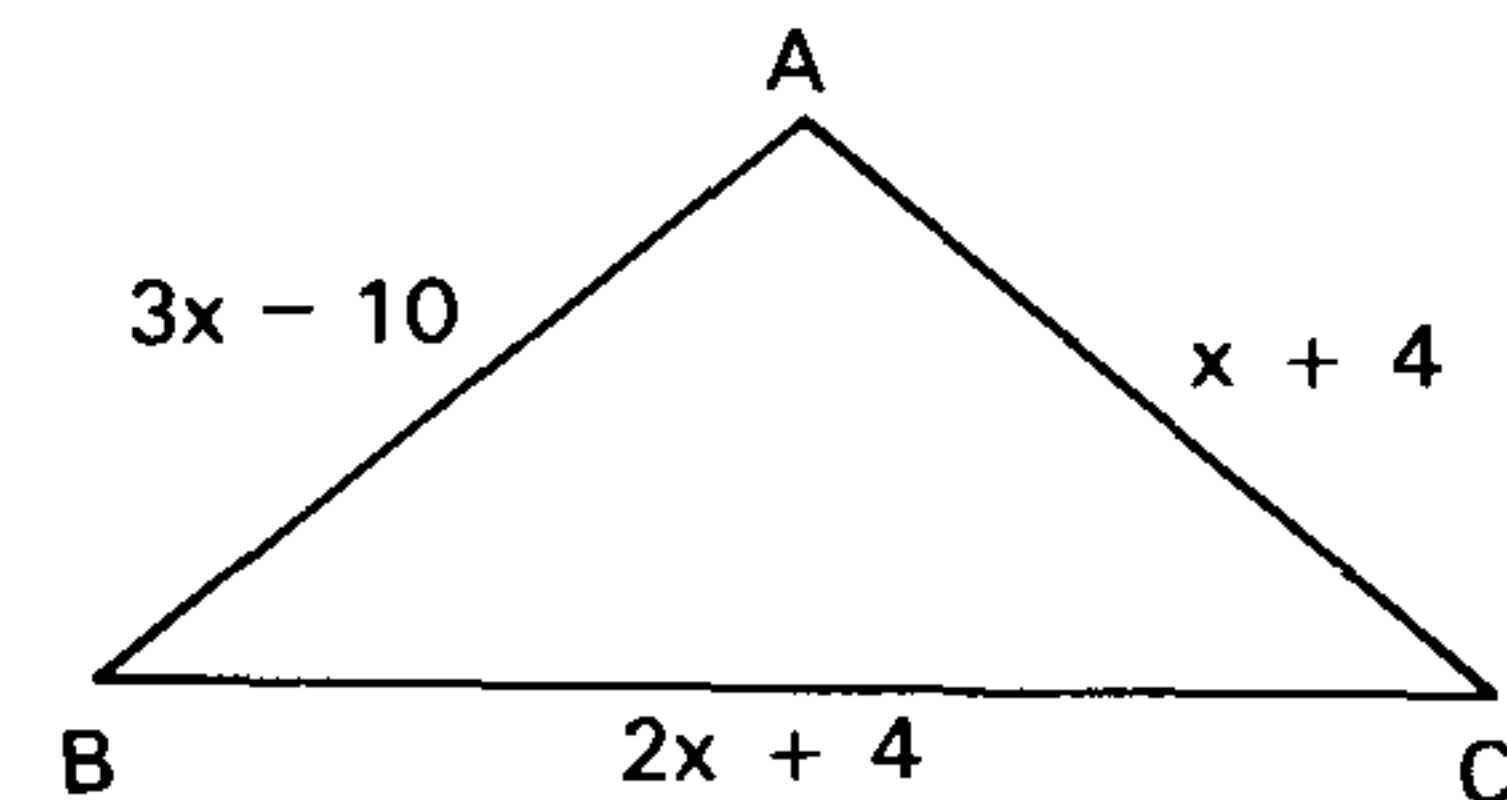
a) Todo triângulo isósceles é equilátero.
b) Todo triângulo equilátero é isósceles.
c) Um triângulo escaleno pode ser isósceles.
d) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.
e) Todo triângulo retângulo é triângulo escaleno.
f) Existe triângulo retângulo e isósceles.
g) Existe triângulo isósceles obtusângulo.
h) Todo triângulo acutângulo ou é isósceles ou é equilátero.

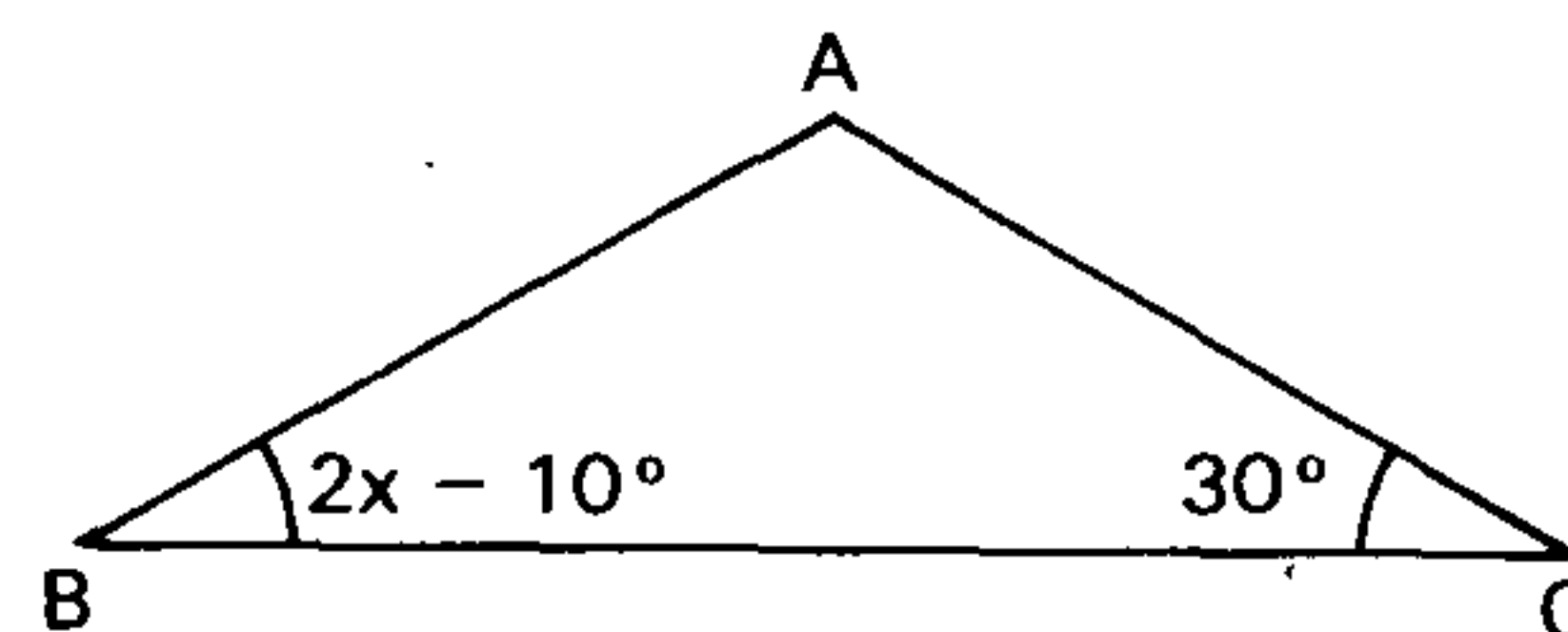
81. Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):

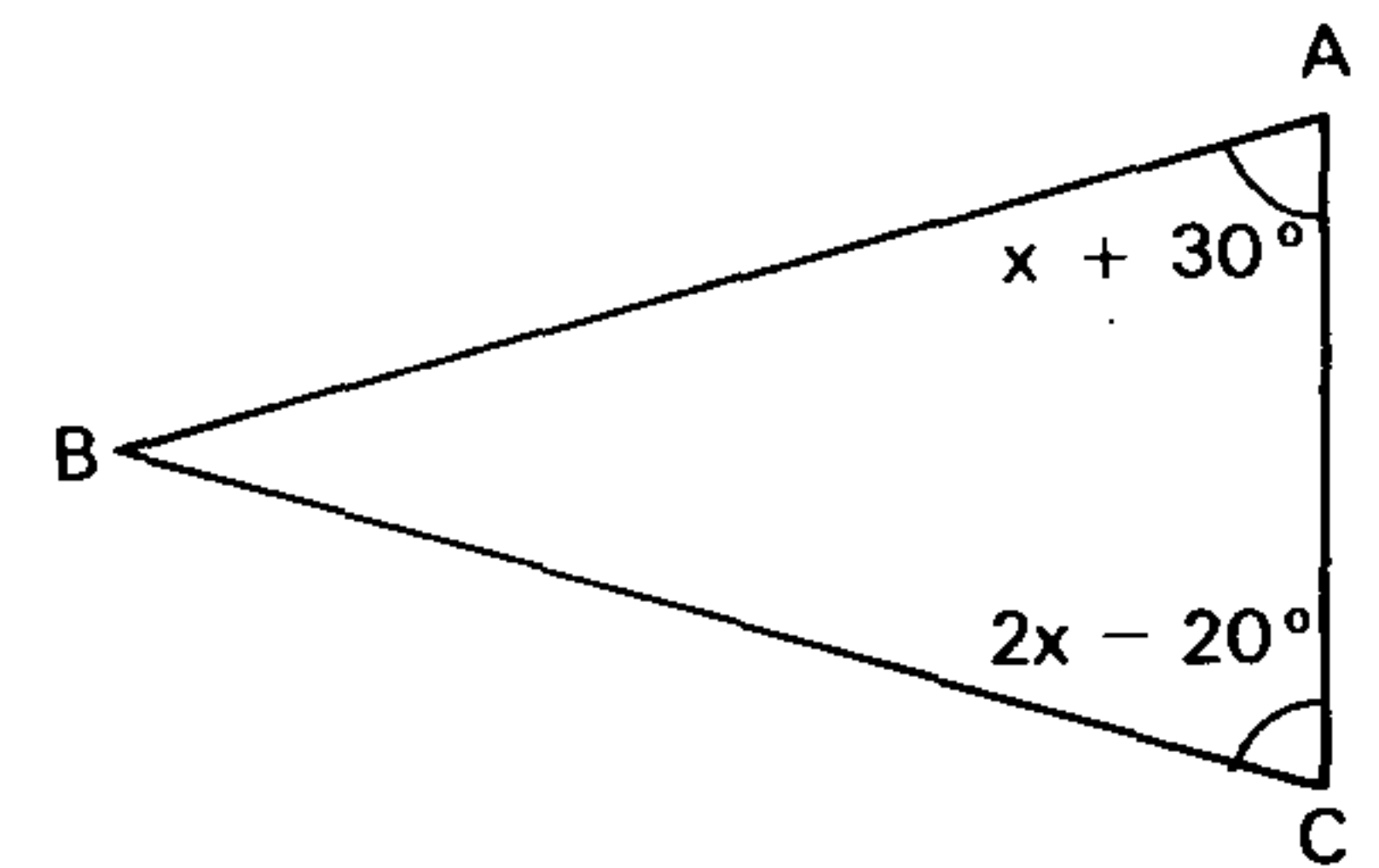
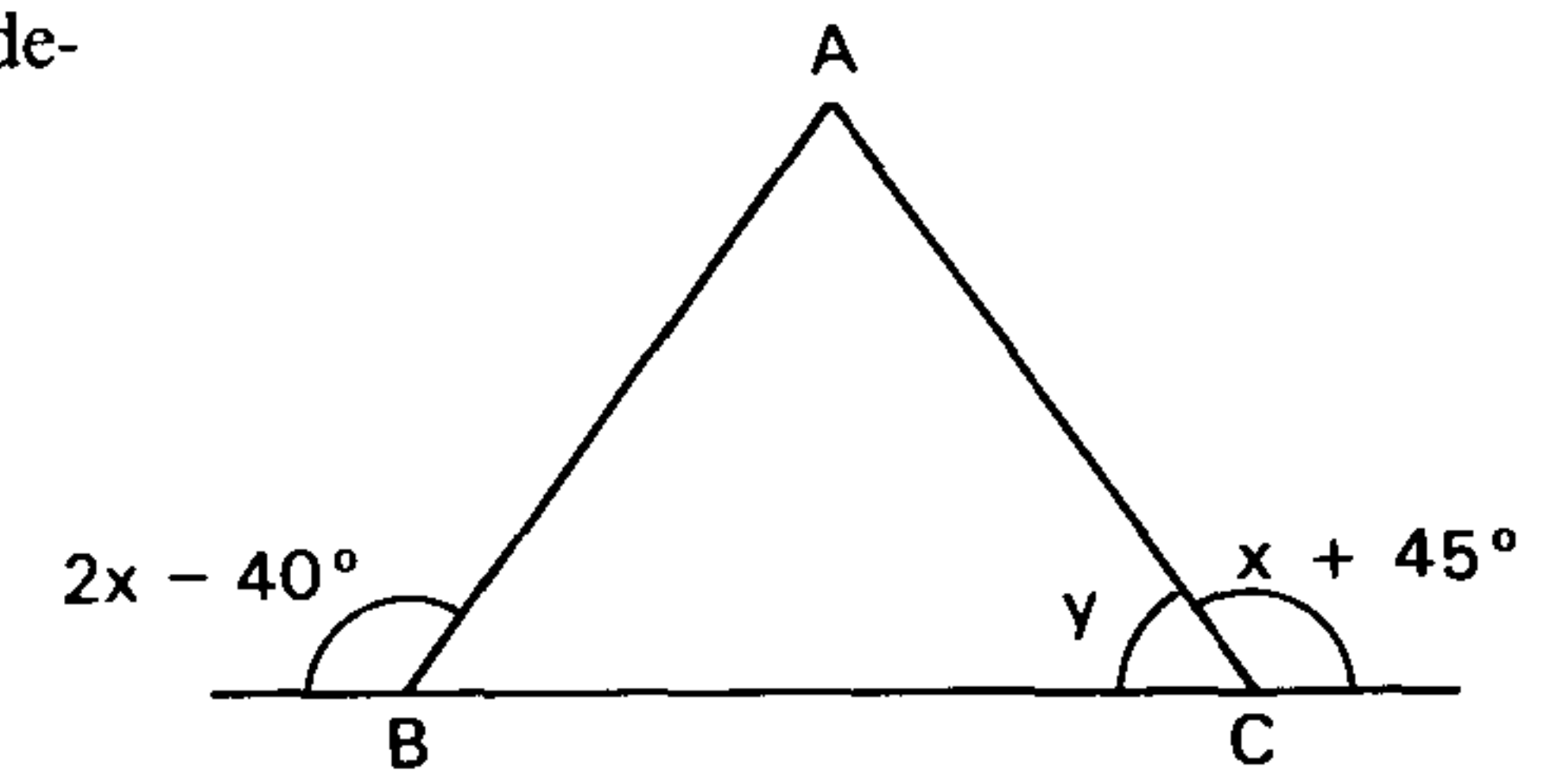
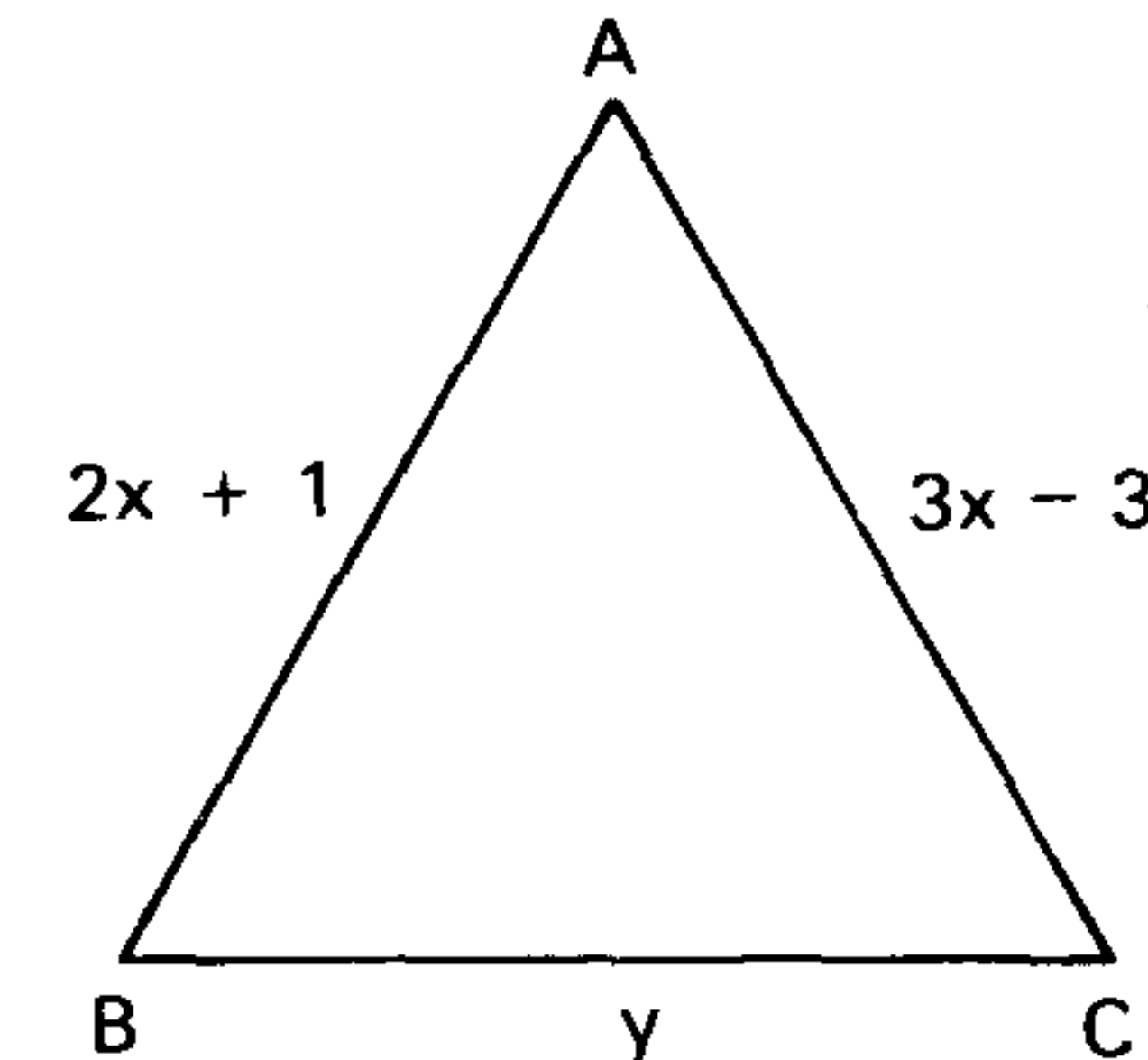
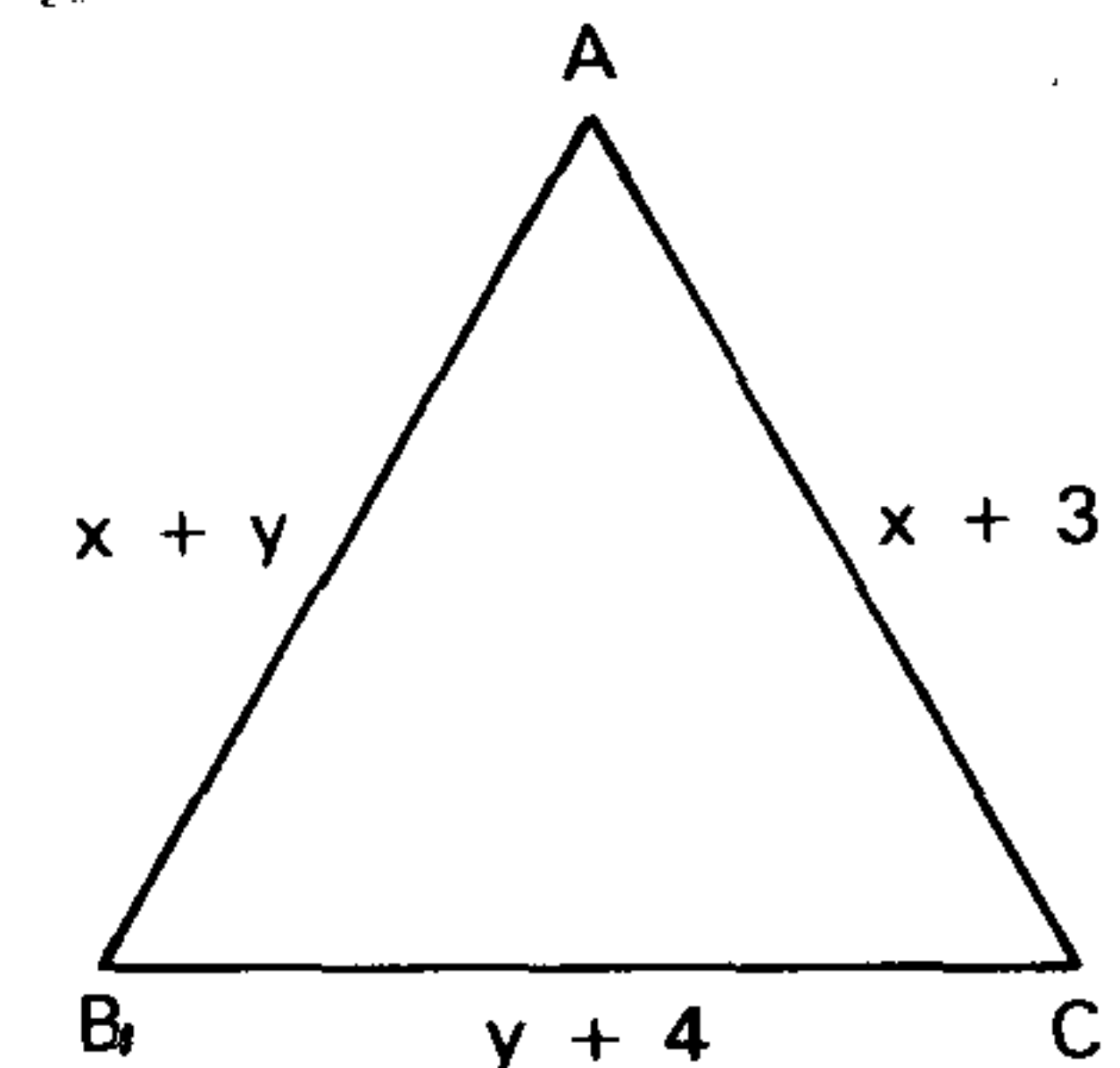
a) Todos os triângulos isósceles são congruentes.
b) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.
c) Todos os triângulos retângulos são congruentes.
d) Todos os triângulos retângulos isósceles são congruentes.
e) Todos os triângulos acutângulos são congruentes.

82. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, determine x.

$AB = 2x - 7 \qquad AC = x + 5$

83. O triângulo ABC é equilátero. Determine x e y.

$AB = 15 - y \qquad BC = 2x - 7$
$AC = 9$

84. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, determine BC.
$AB = 3x - 10 \qquad BC = 2x + 4$
$AC = x + 4$

85. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base BC, determine x.

$\hat{B} = 2x - 10° \qquad \hat{C} = 30°$

86. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{AC}$, determine x.

$\hat{A} = x + 30° \qquad \hat{C} = 2x - 20°$

87. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base BC, determine x e y.

88. Determine x e y, sabendo que o triângulo ABC é equilátero.

a) b)

89. Se o perímetro de um triângulo equilátero é de *75 cm*, quanto mede cada lado?

90. Se o perímetro de um triângulo isósceles é de *100 m* e a base mede *40 m*, quanto mede cada um dos outros lados?

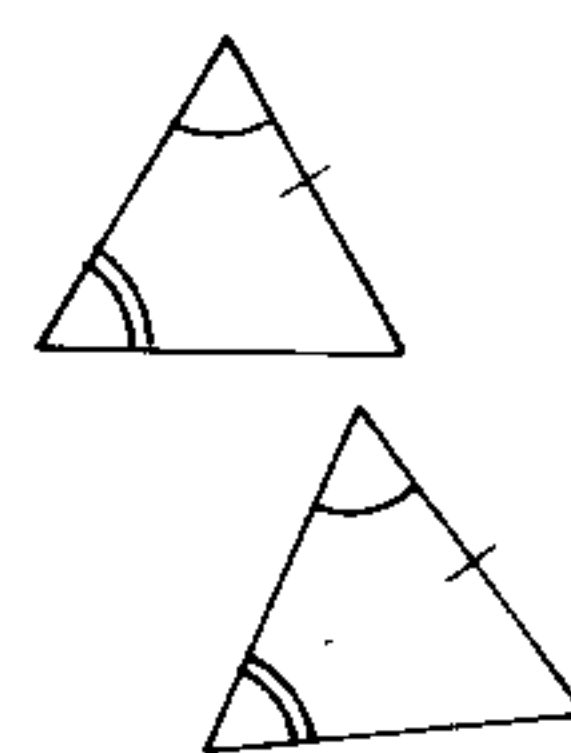
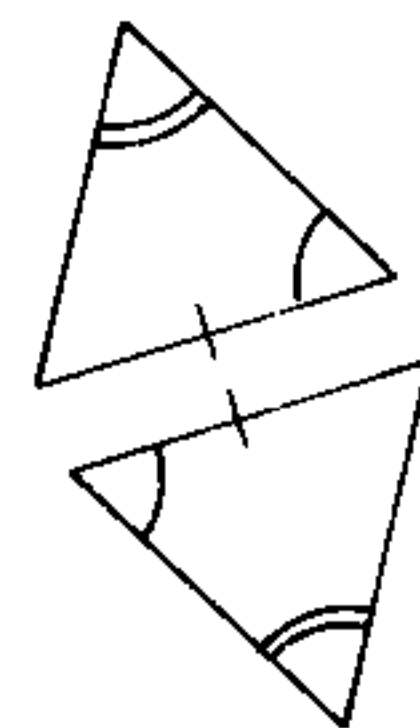
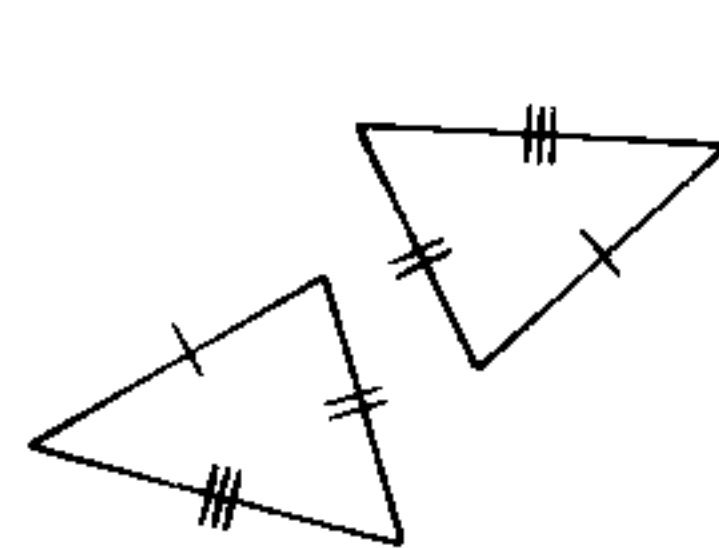
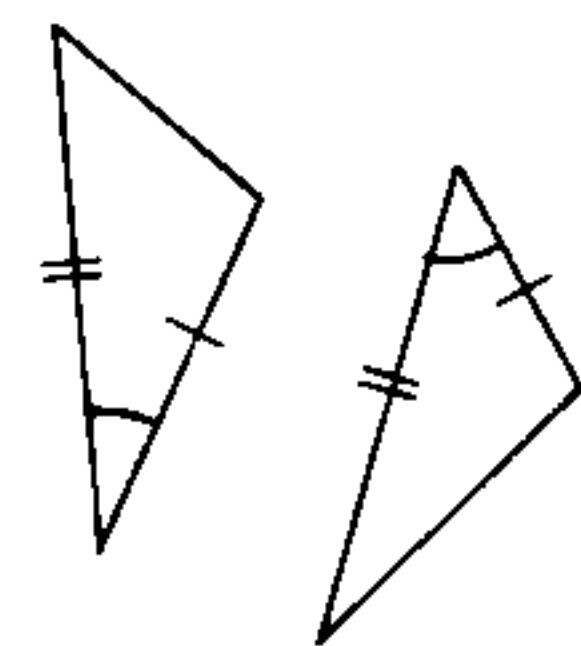
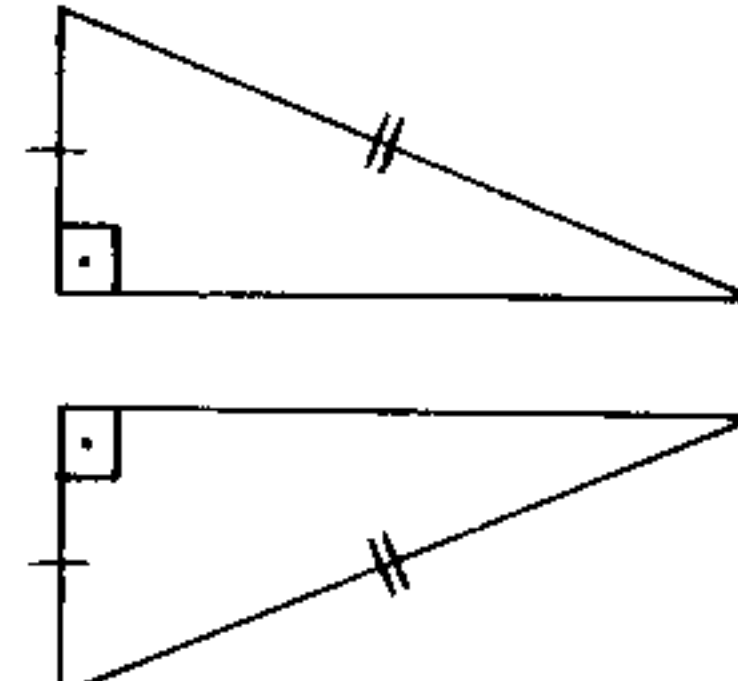
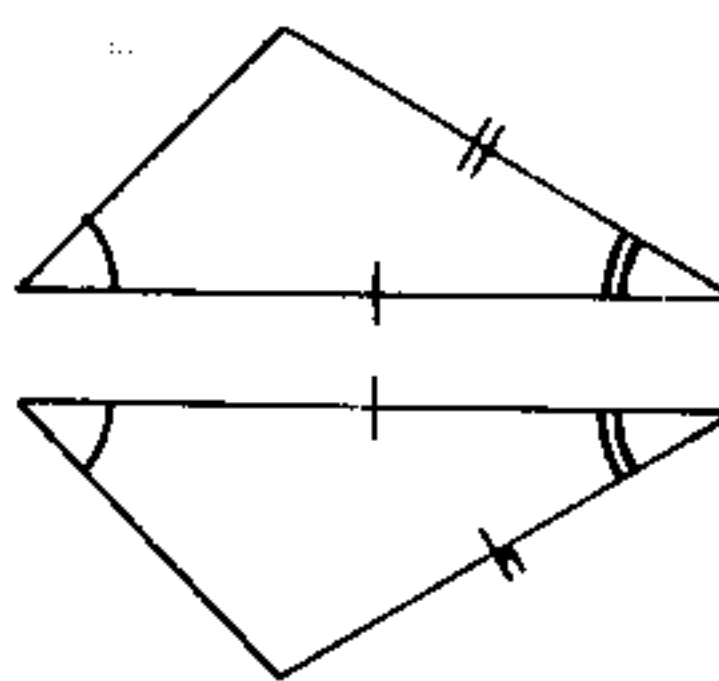
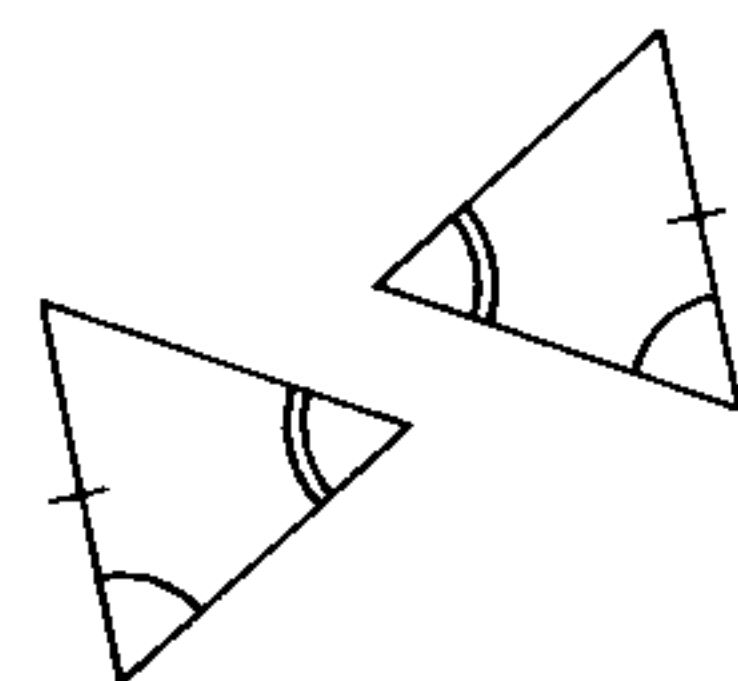
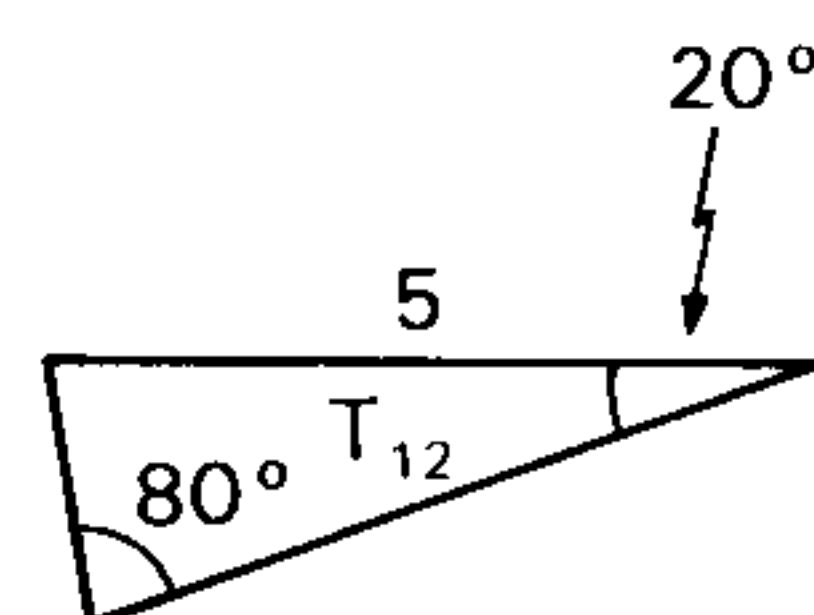
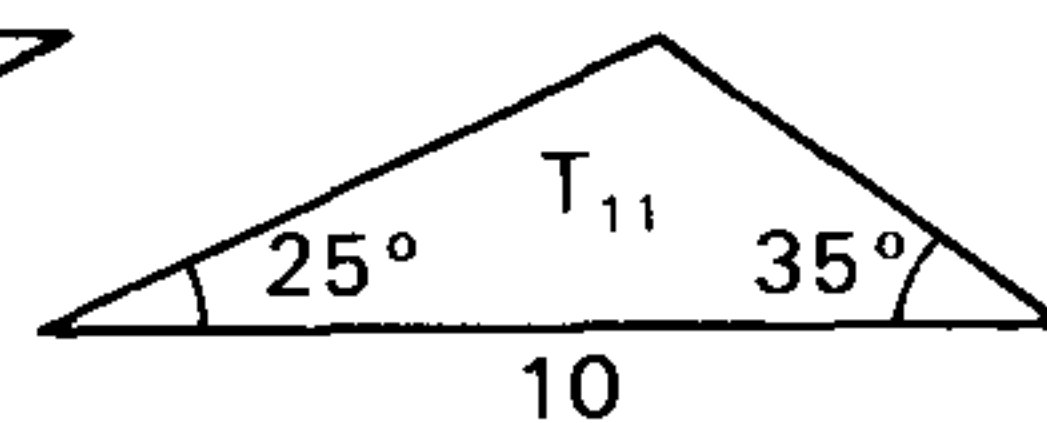
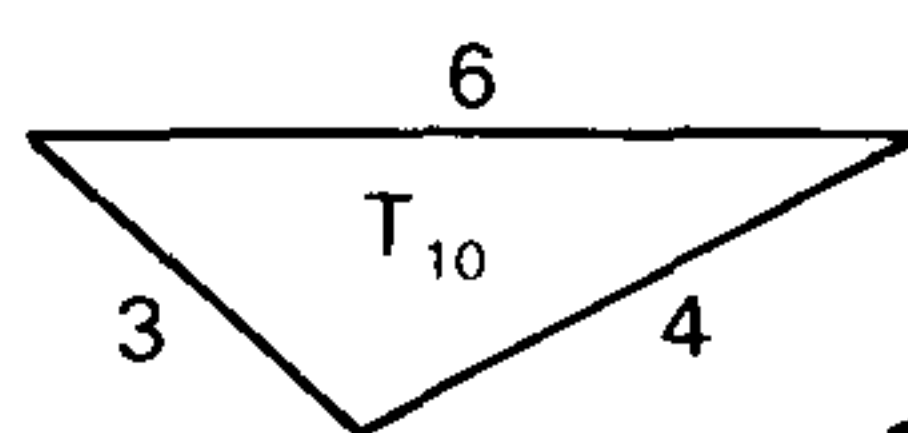
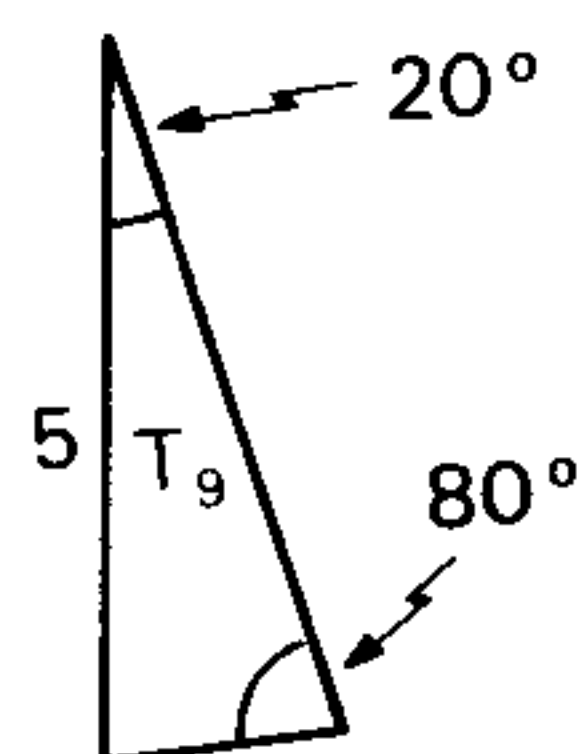
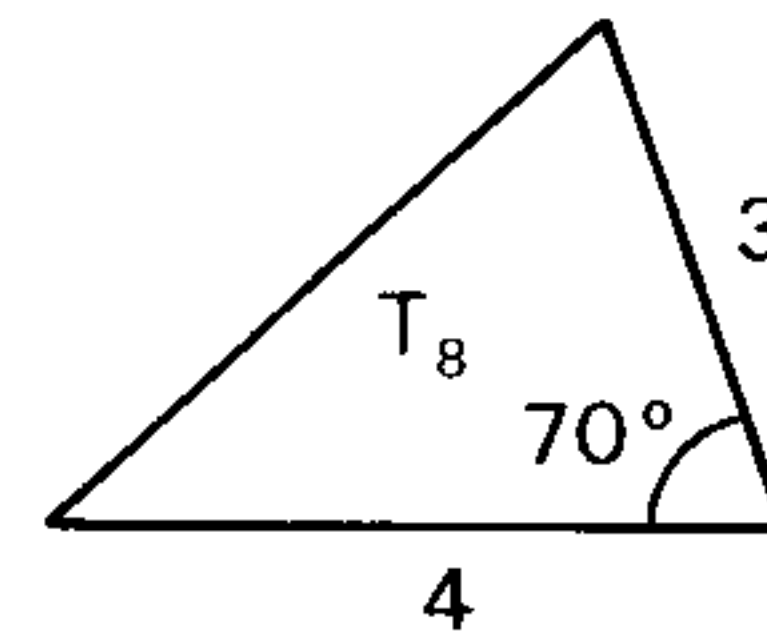
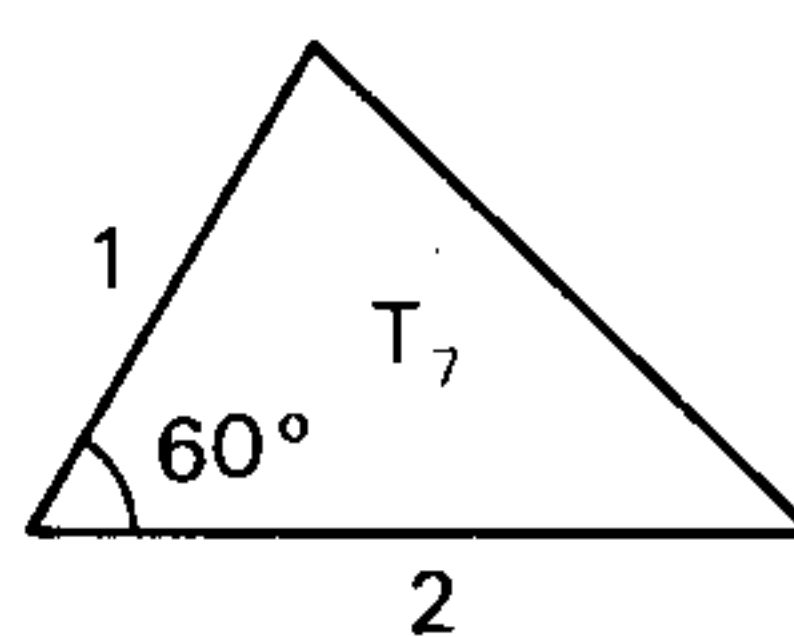
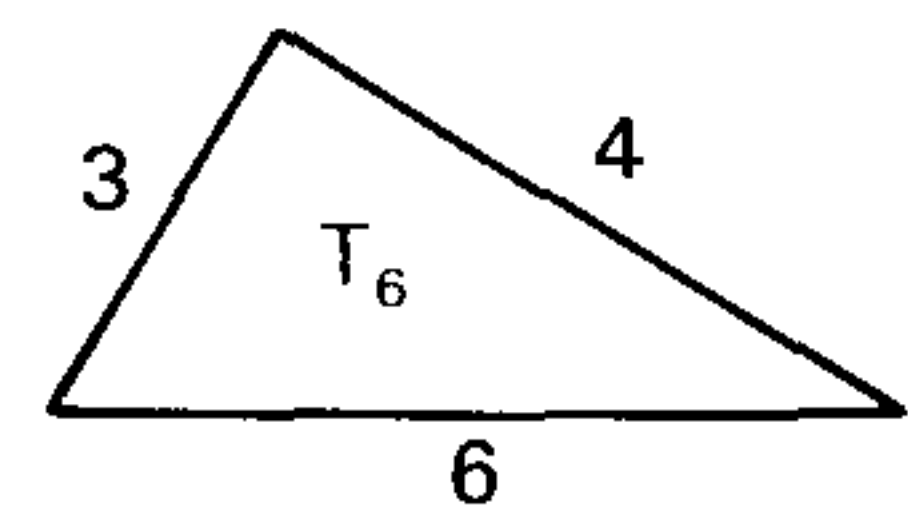
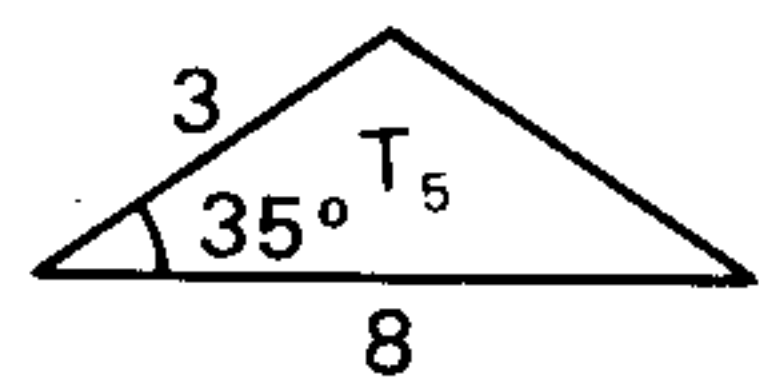
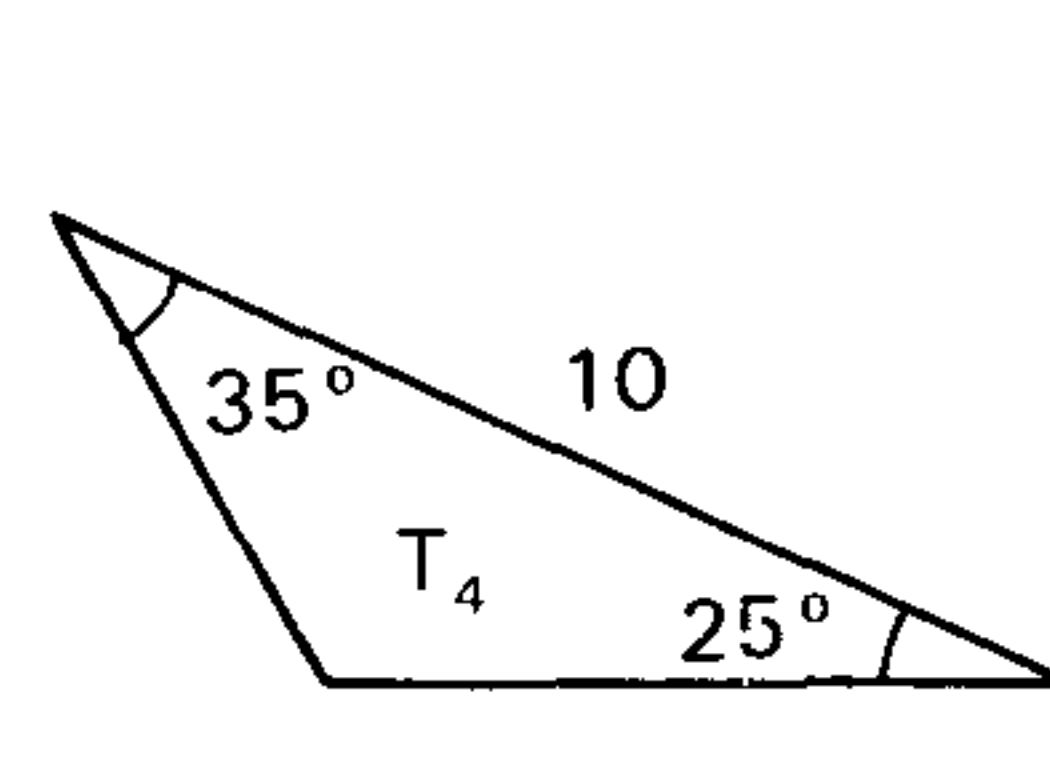
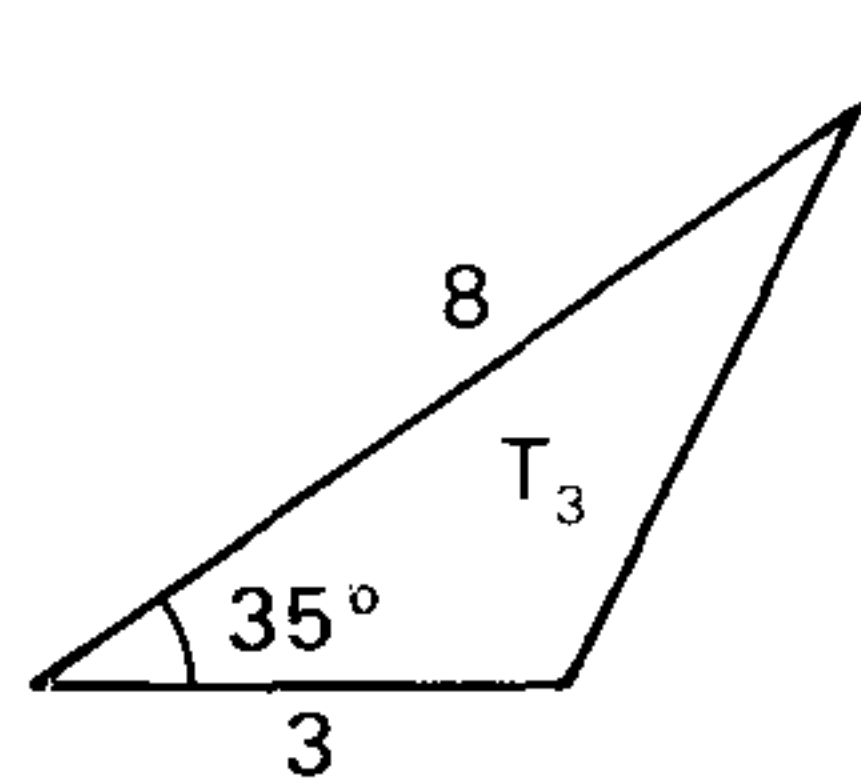
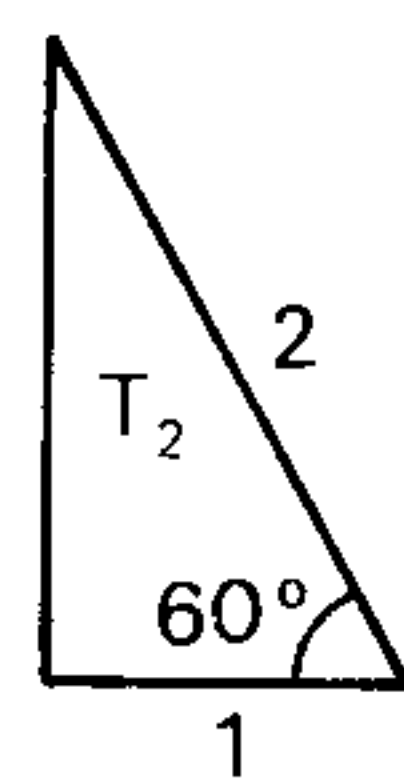
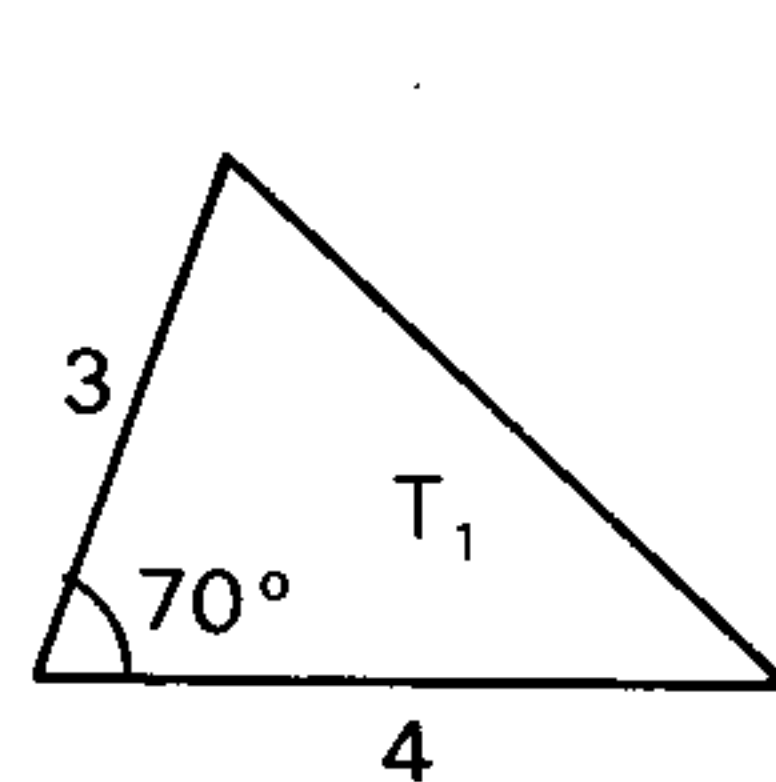
91. Determine o perímetro do triângulo ABC nos casos:

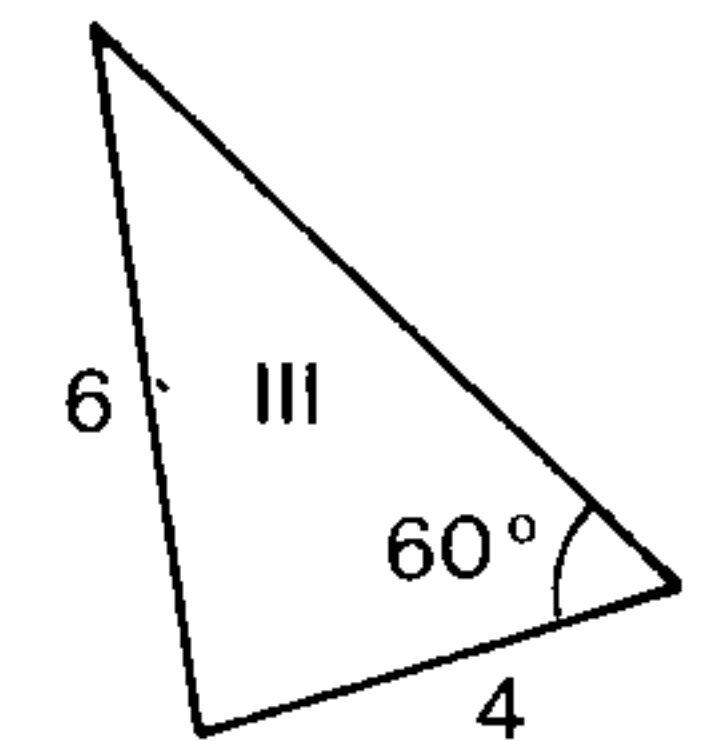
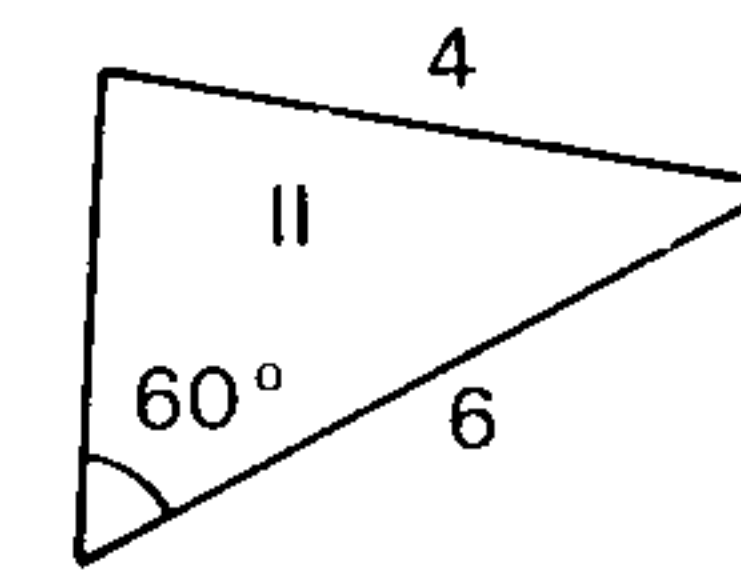
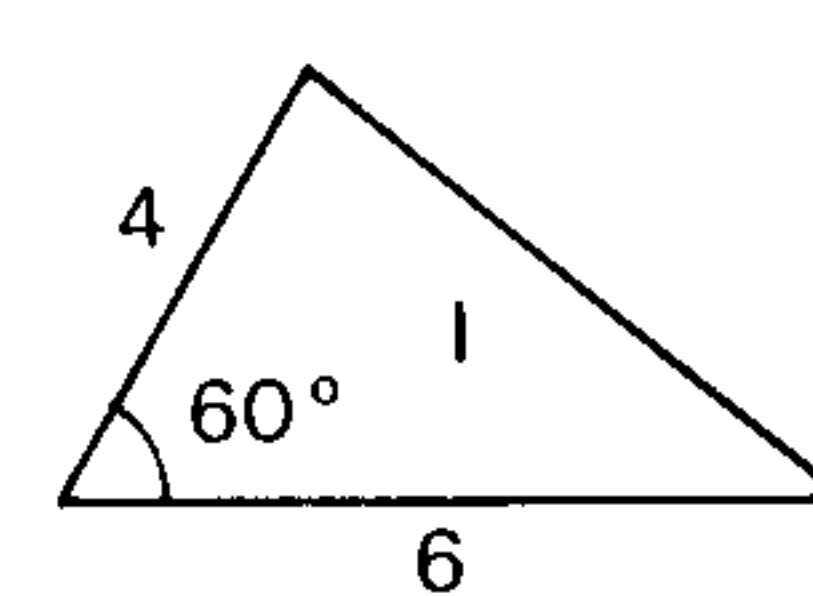
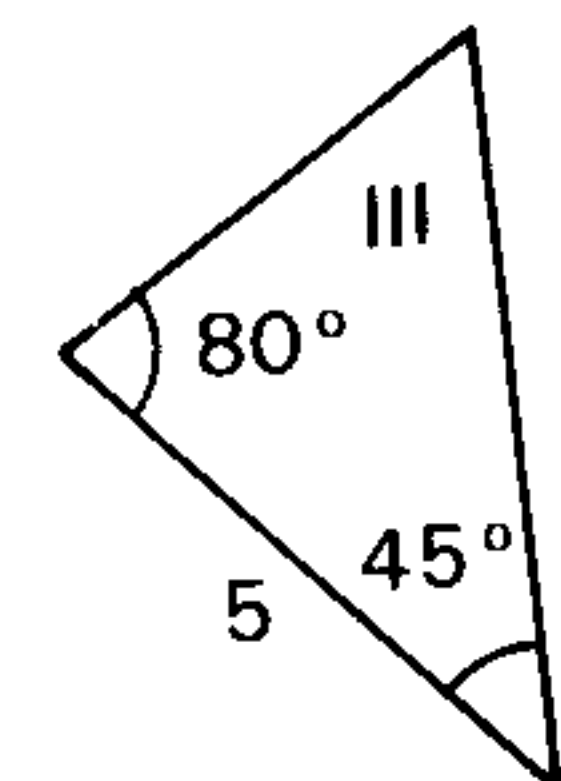
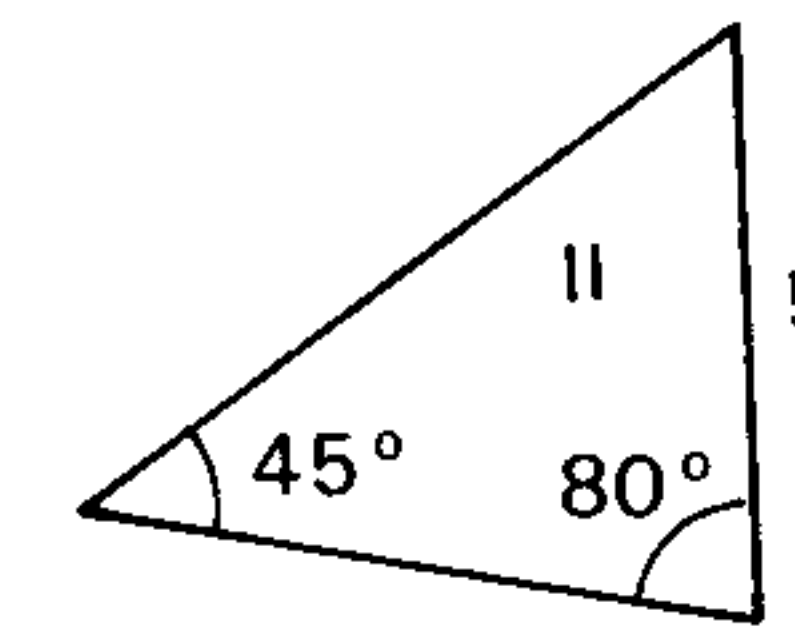
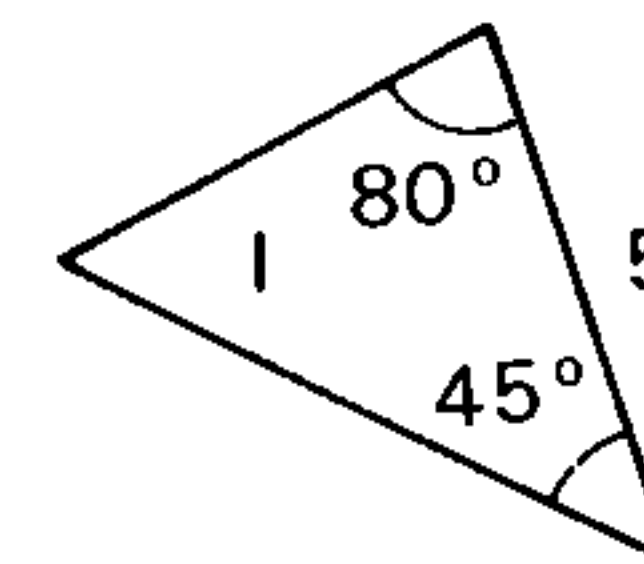
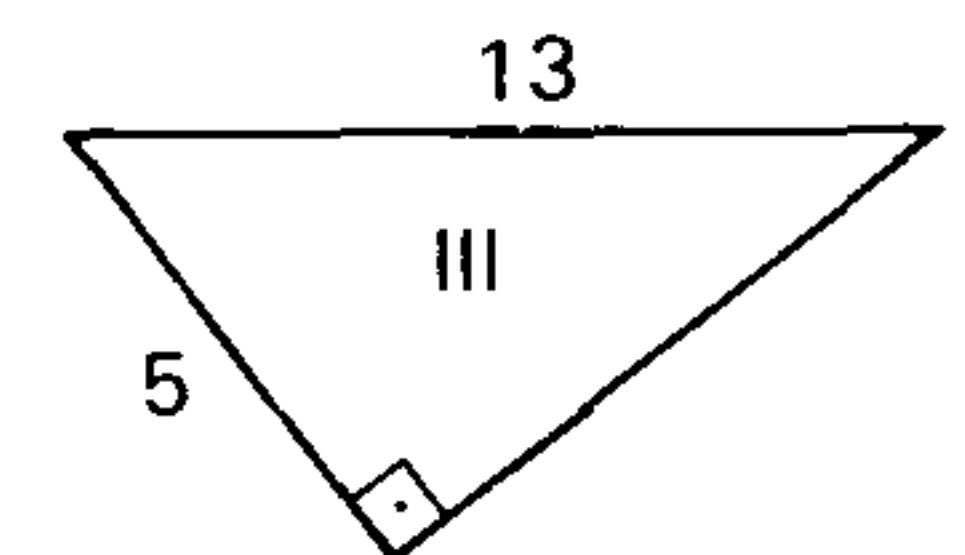
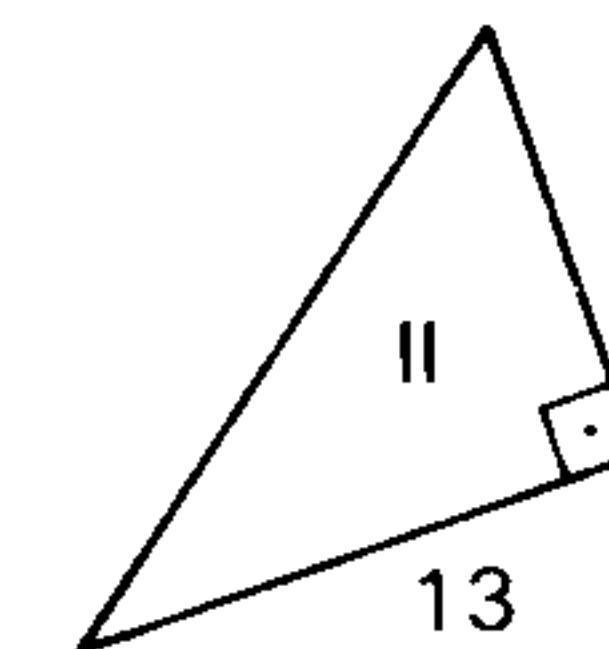
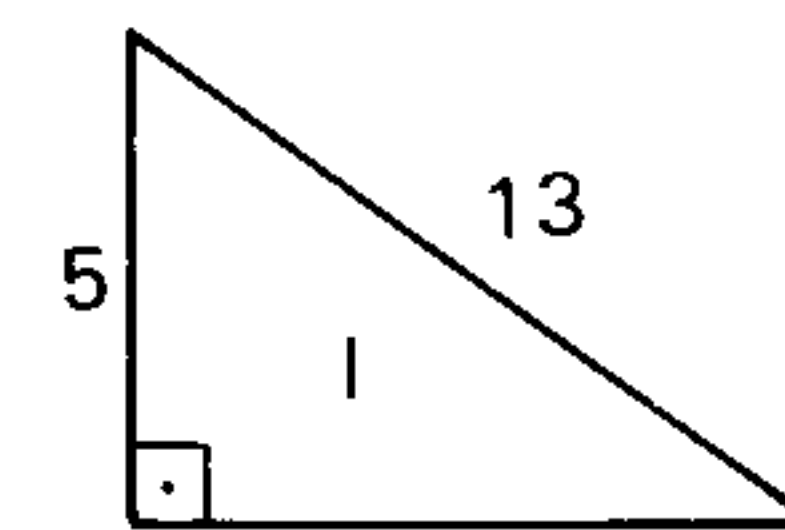
a) Triângulo equilátero com $AB = x + 2y$, $AC = 2x - y$ e $BC = x + y + 3$.
b) Triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ com $AB = 2x + 3$, $AC = 3x - 3$ e $BC = x + 3$.

92. Num triângulo isósceles, o semiperímetro vale *7,5 m*. Calcule os lados desse triângulo, sabendo que a soma dos lados congruentes é o quádruplo da base.

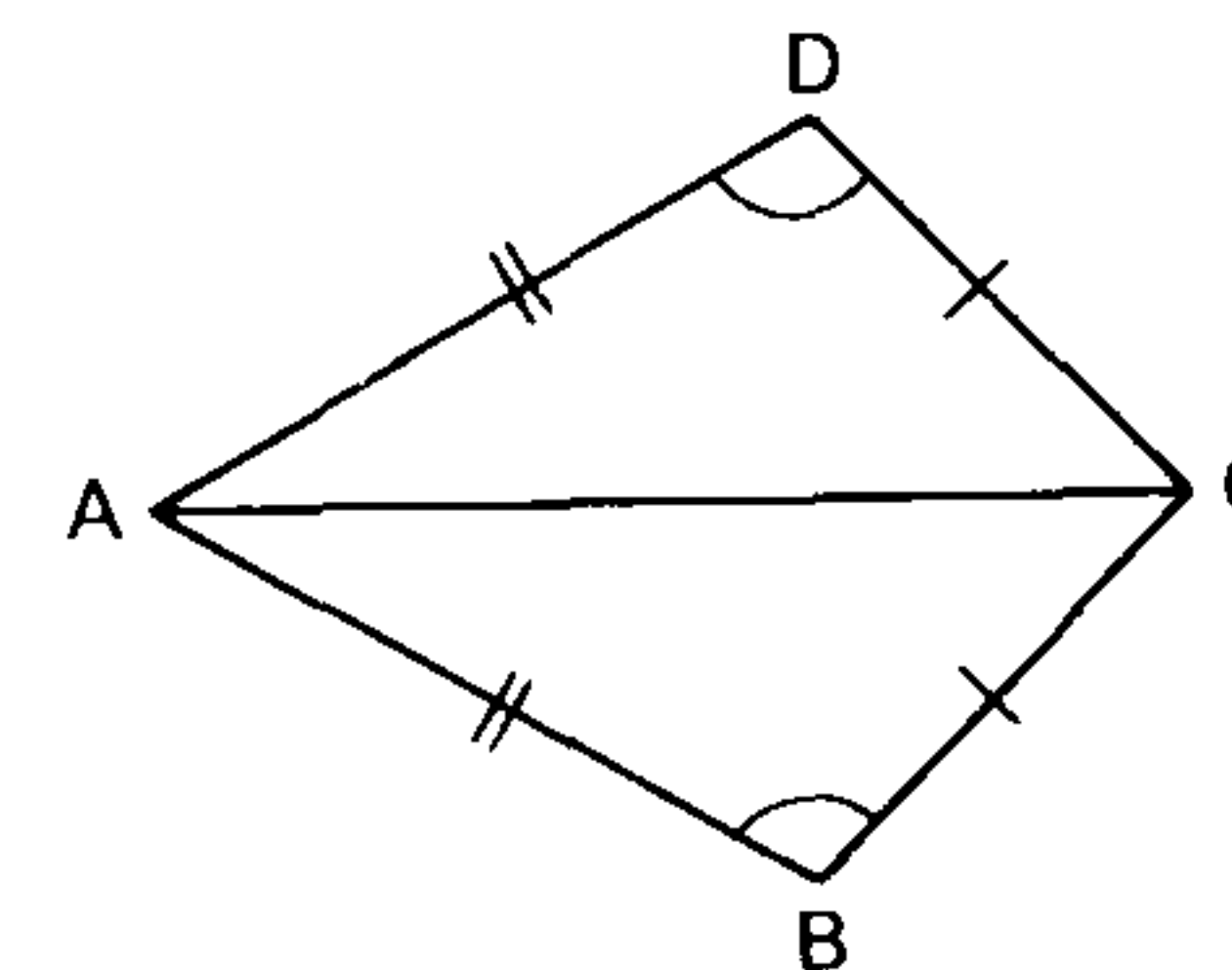
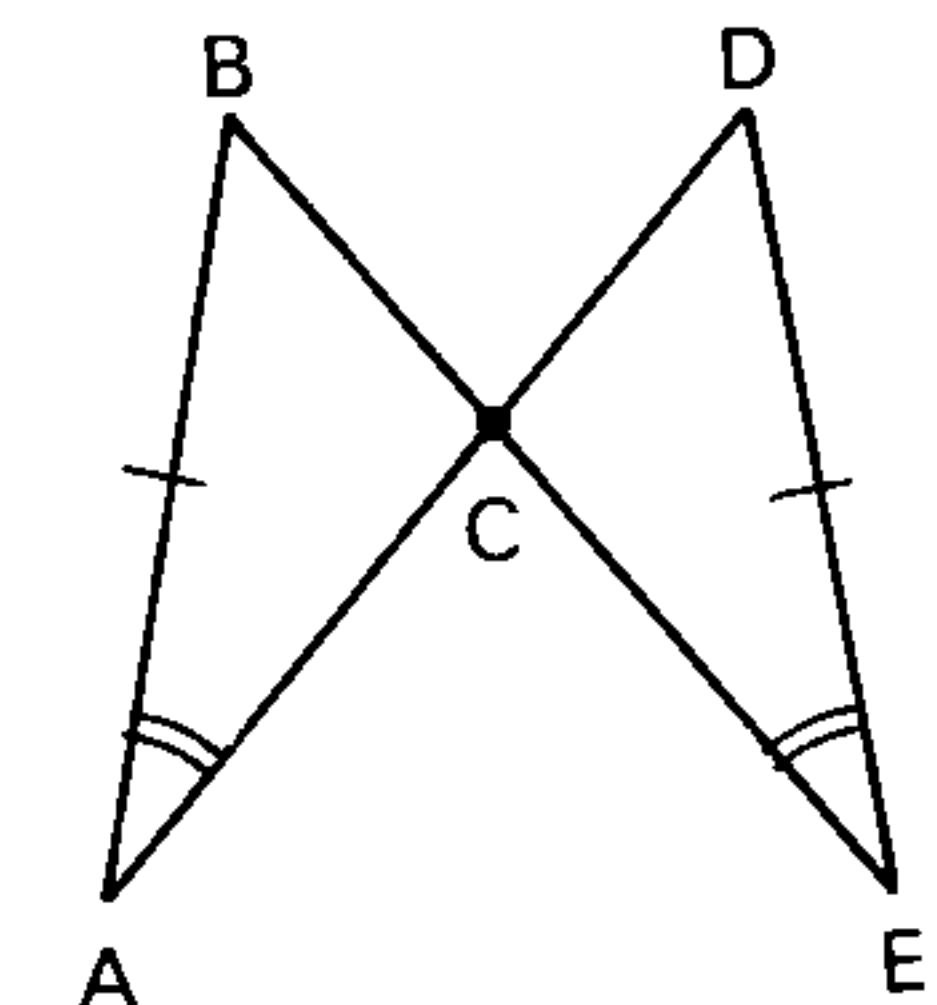
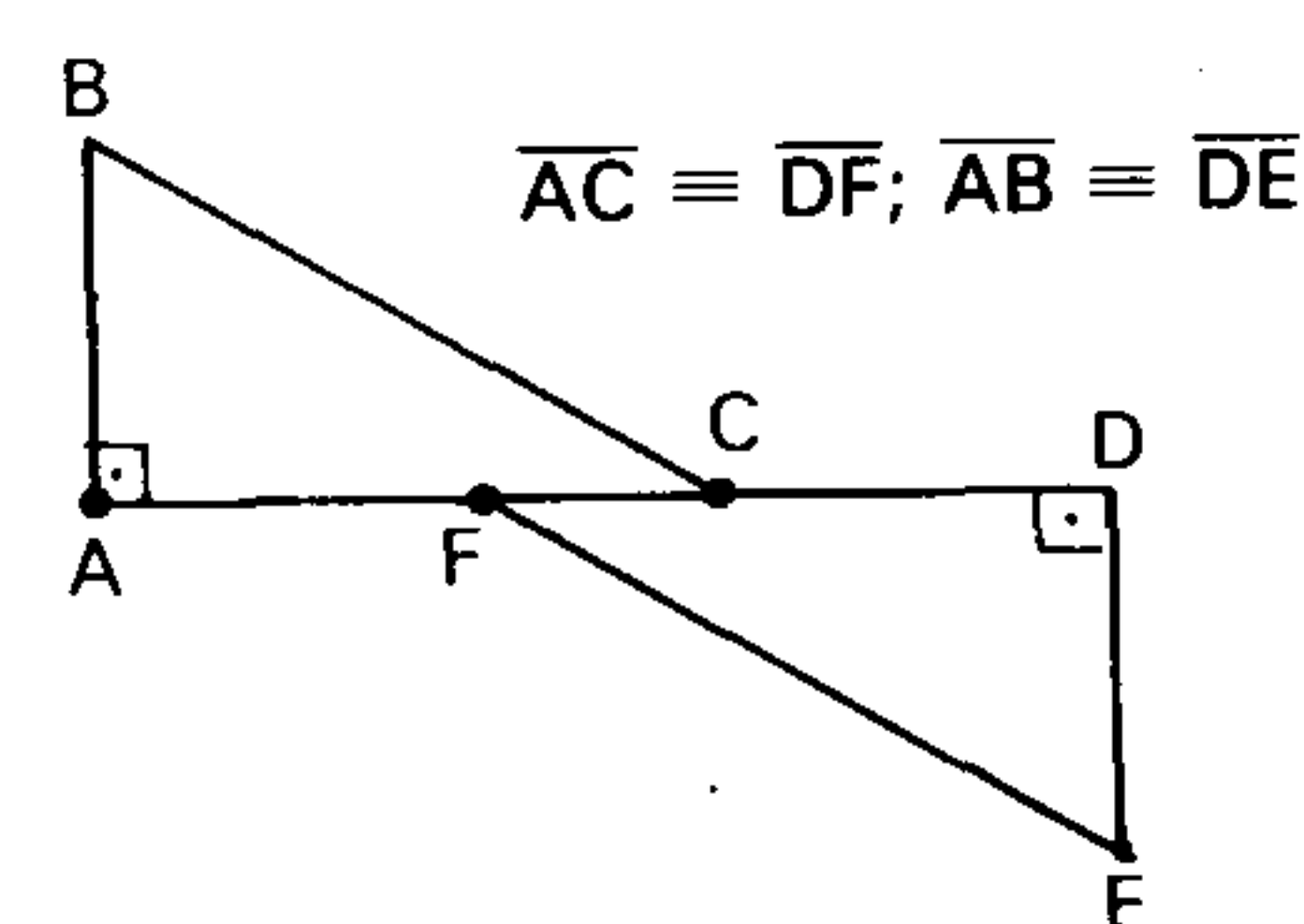
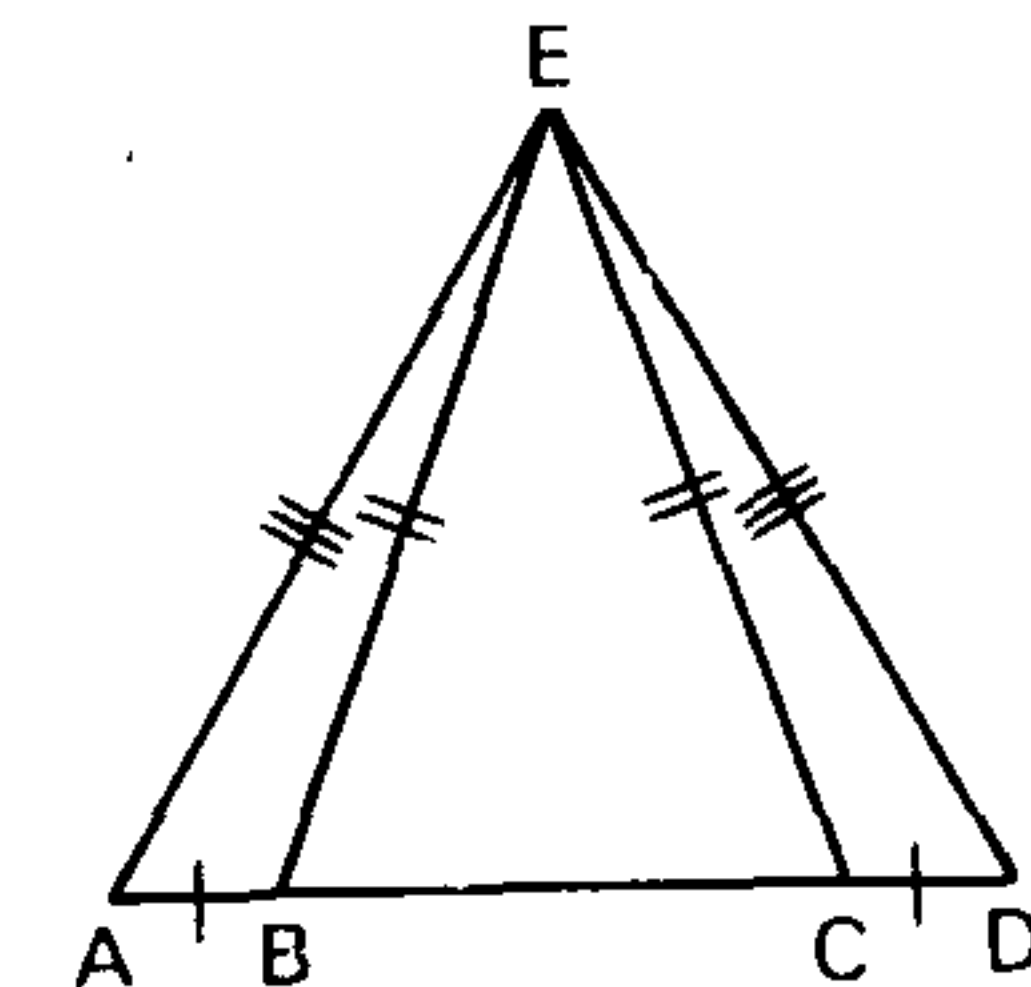
93. Os pares de triângulos abaixo são congruentes. Indique o caso de congruência.

a) b) c) d)

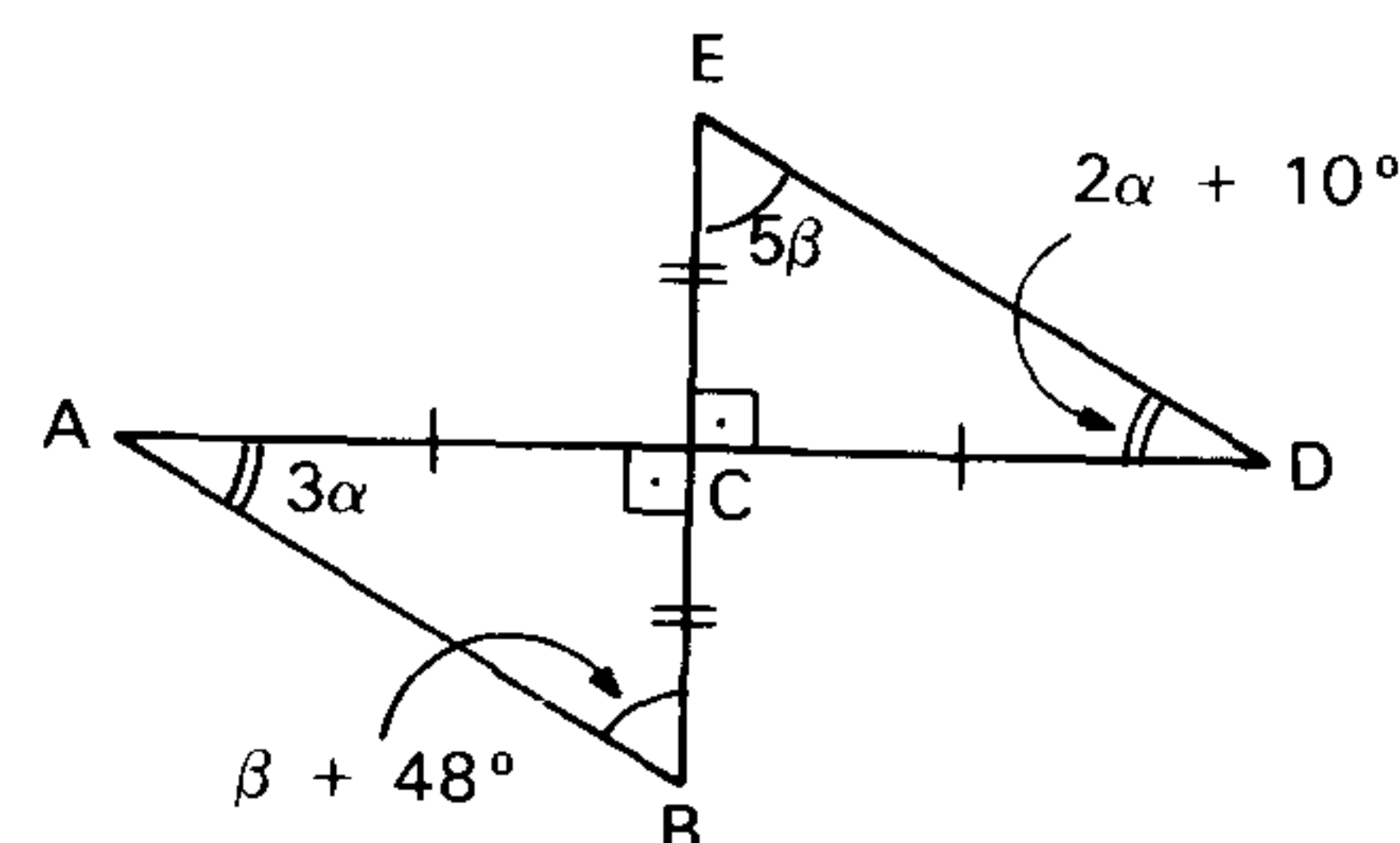
e) f) g)

94. Considere os triângulos T_1, T_2, ..., etc., abaixo. Assinale os pares de triângulos congruentes e indique o caso de congruência.

95. Nos casos a), b) e c) abaixo, selecione os triângulos congruentes e indique o caso de congruência.

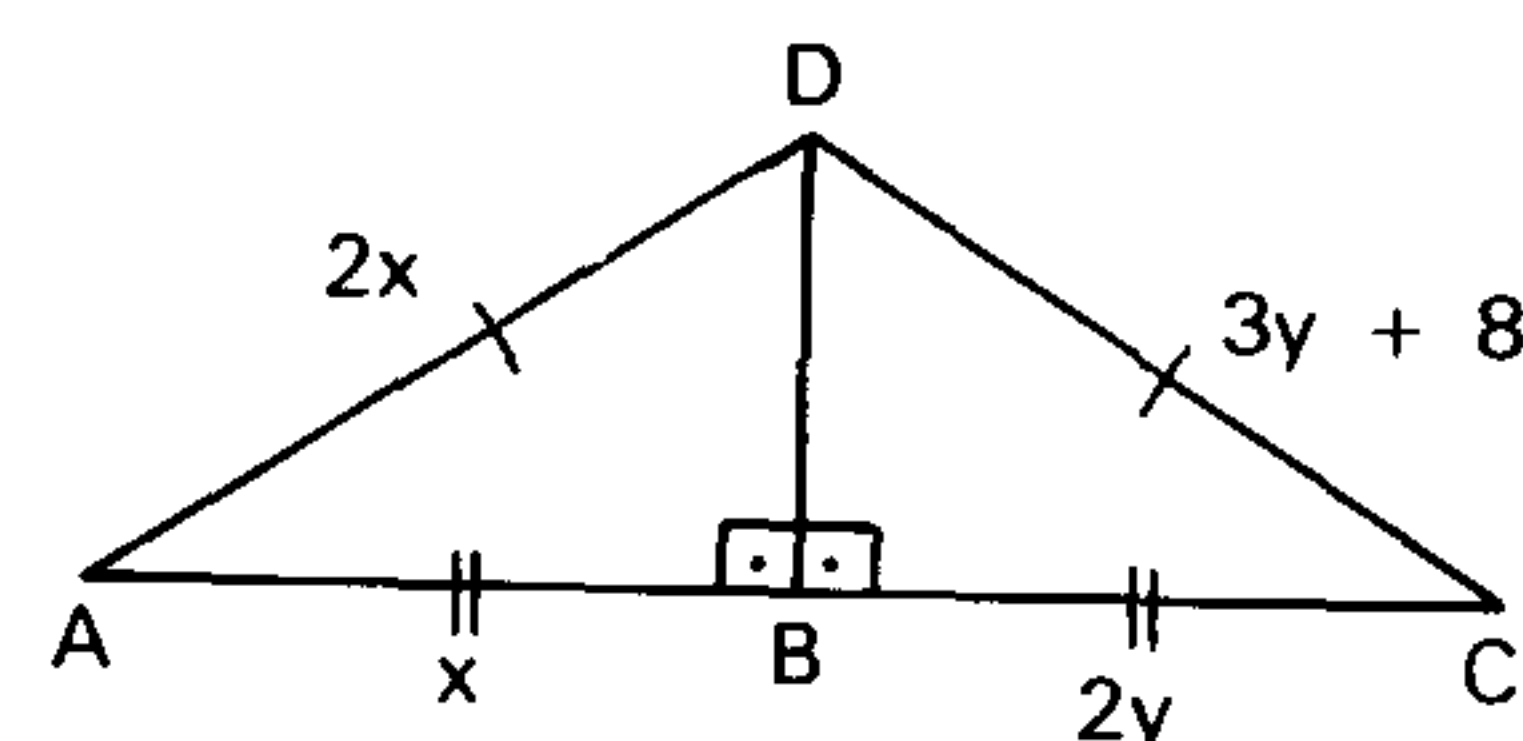
a)

b)

c)

96. Indique nas figuras abaixo os triângulos congruentes, citando o caso de congruência.

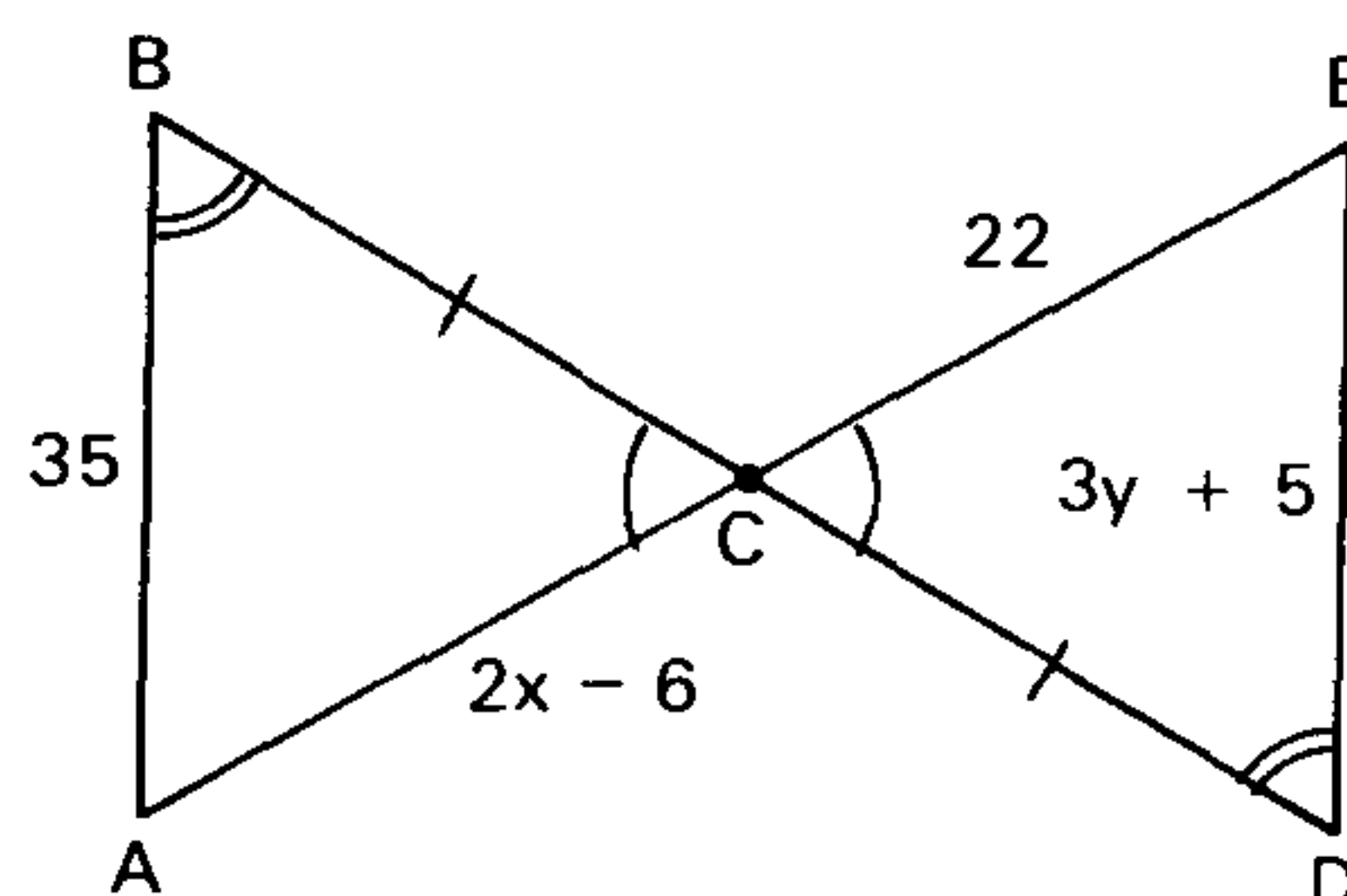
a) b)

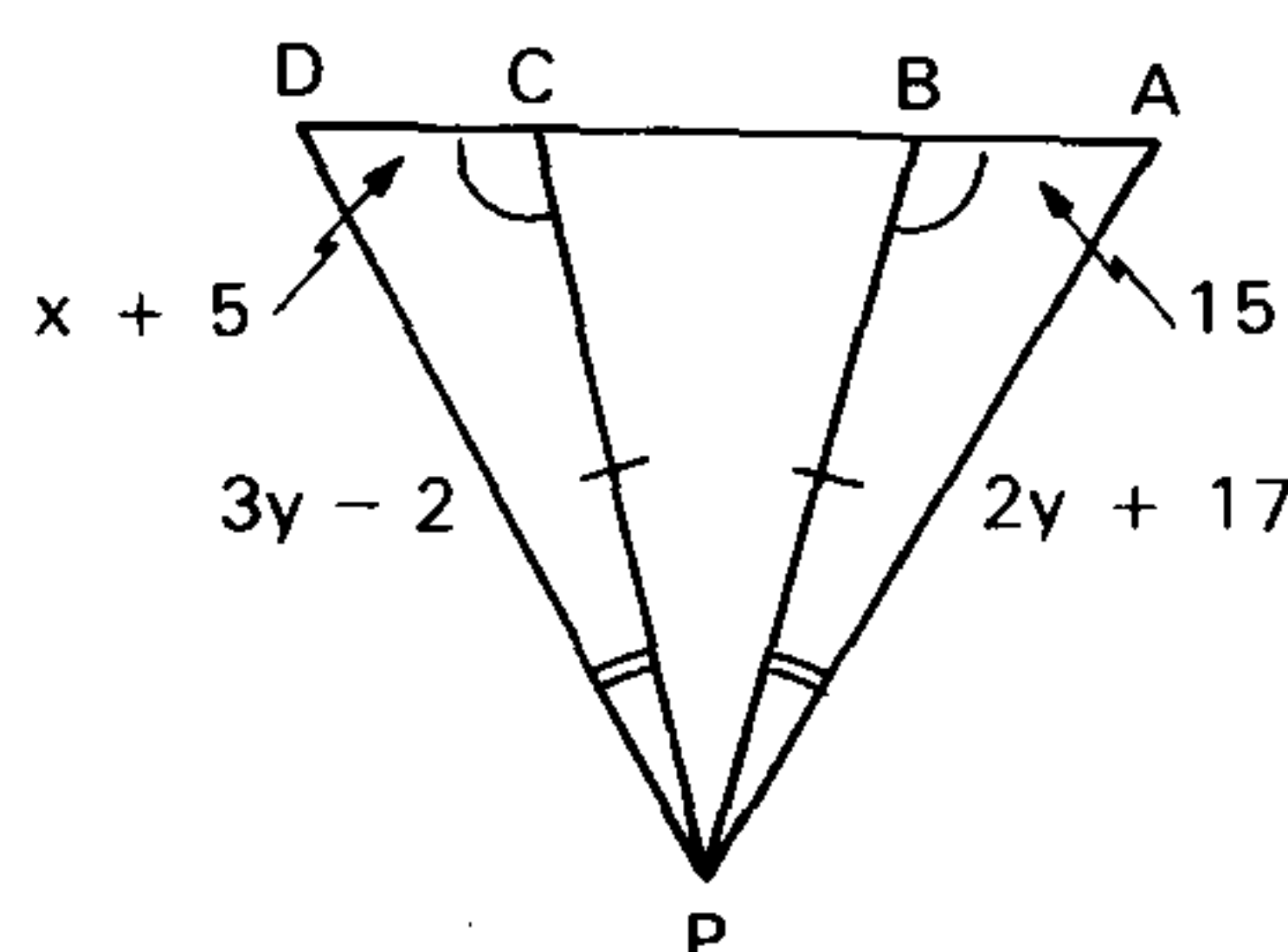
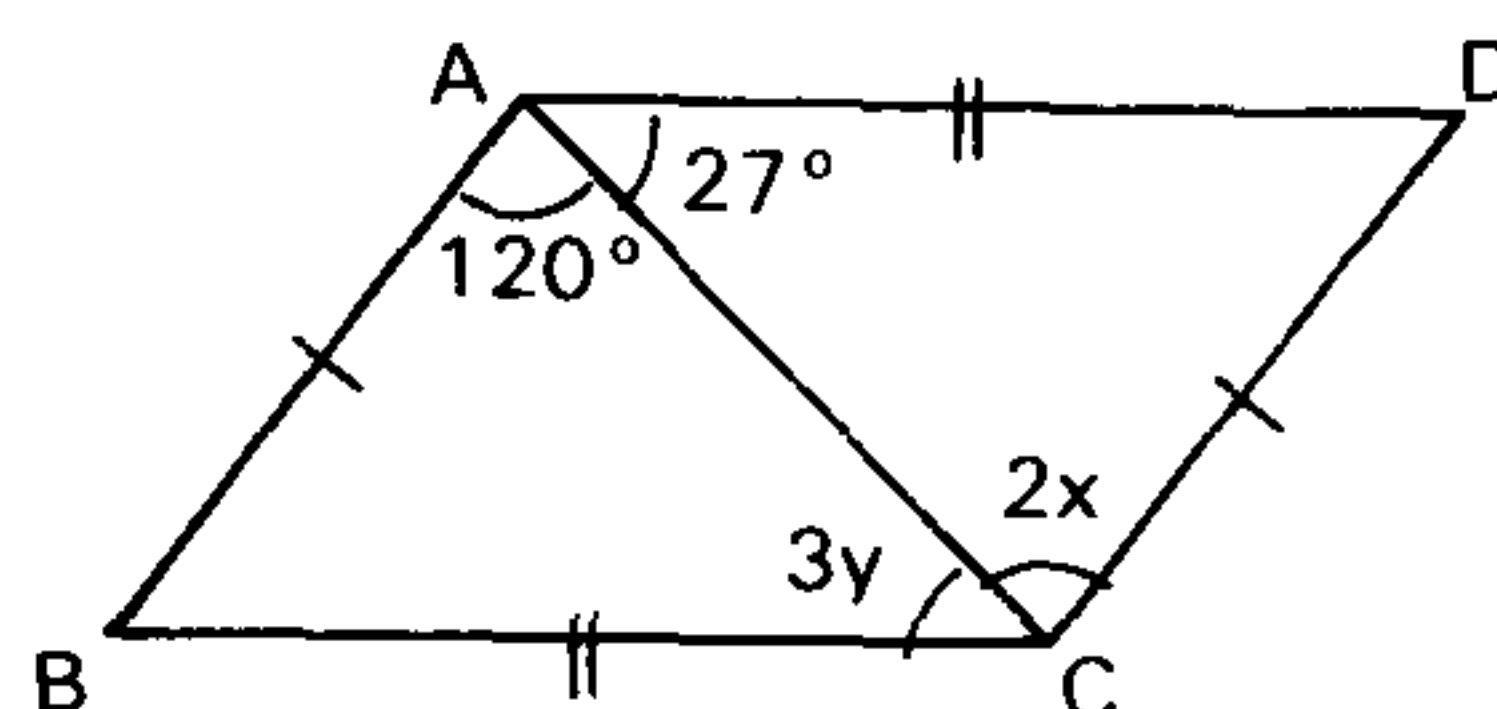
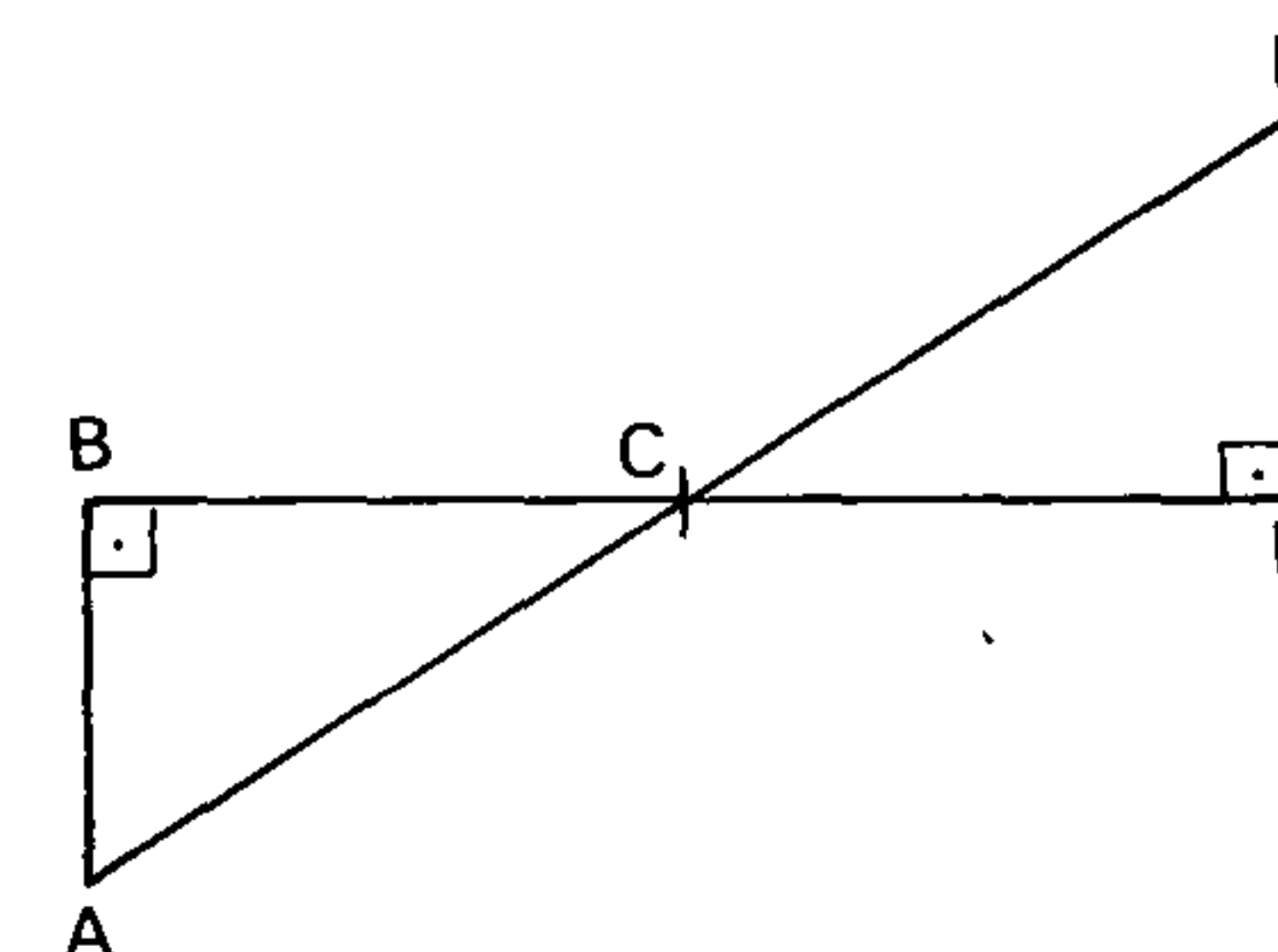
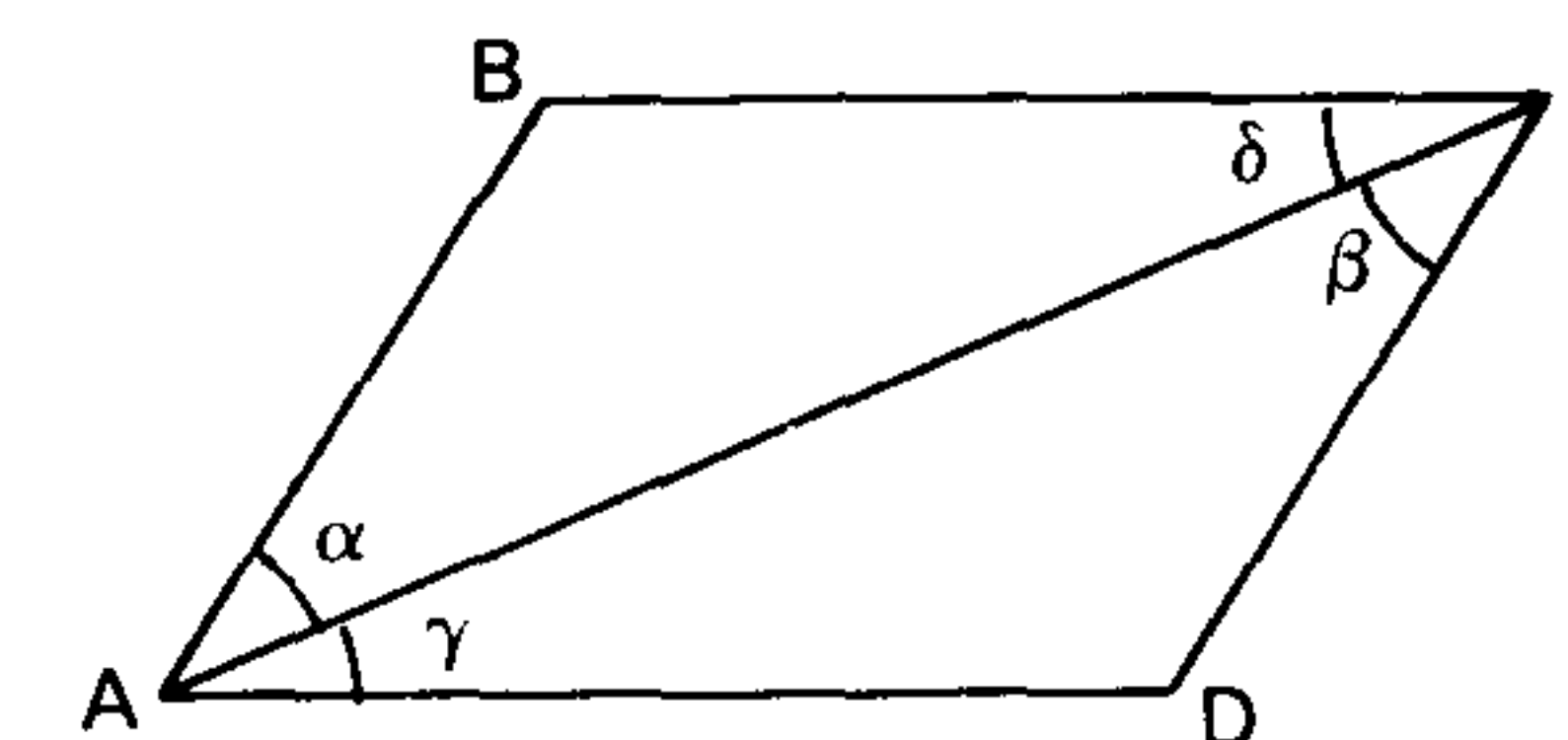
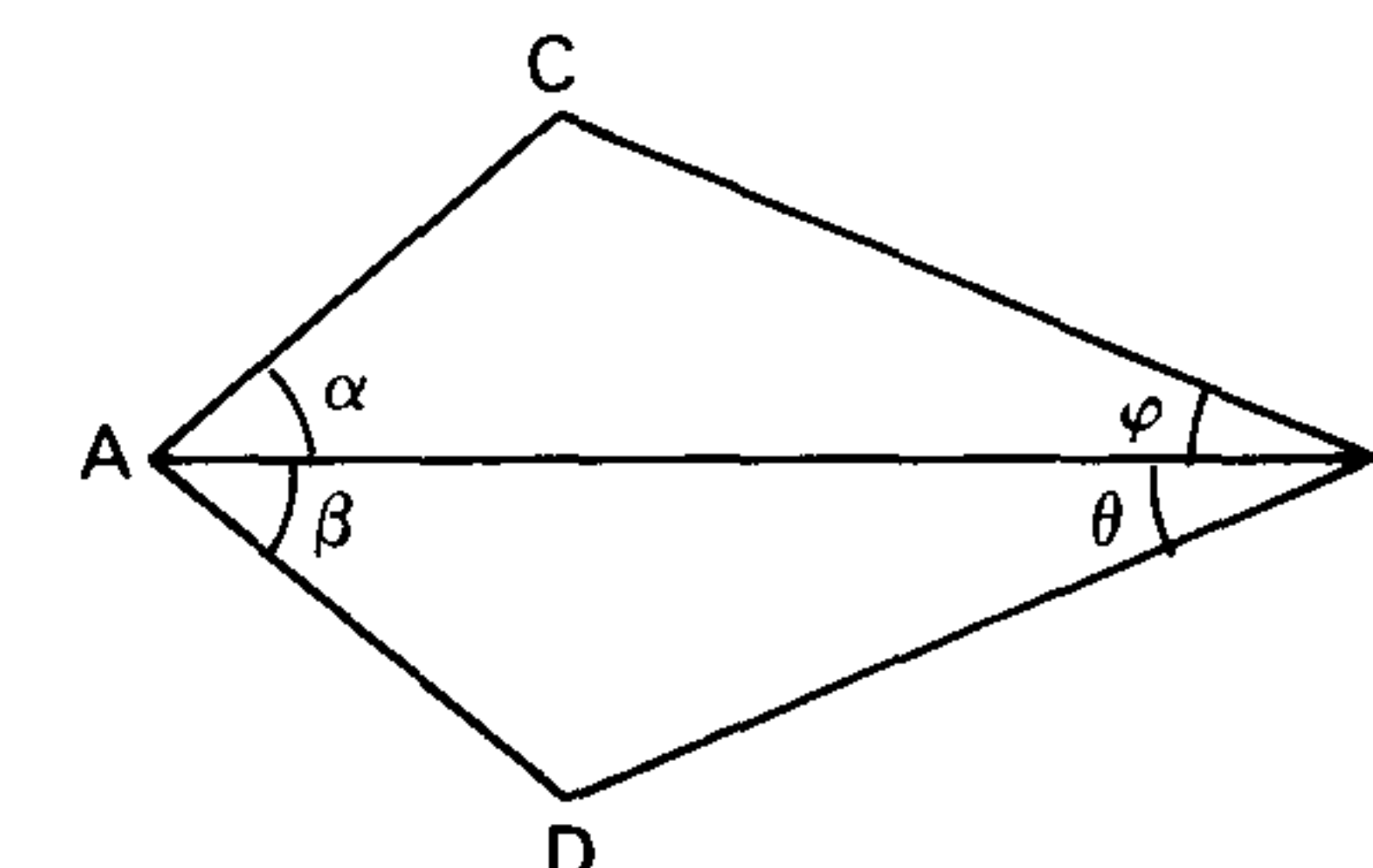
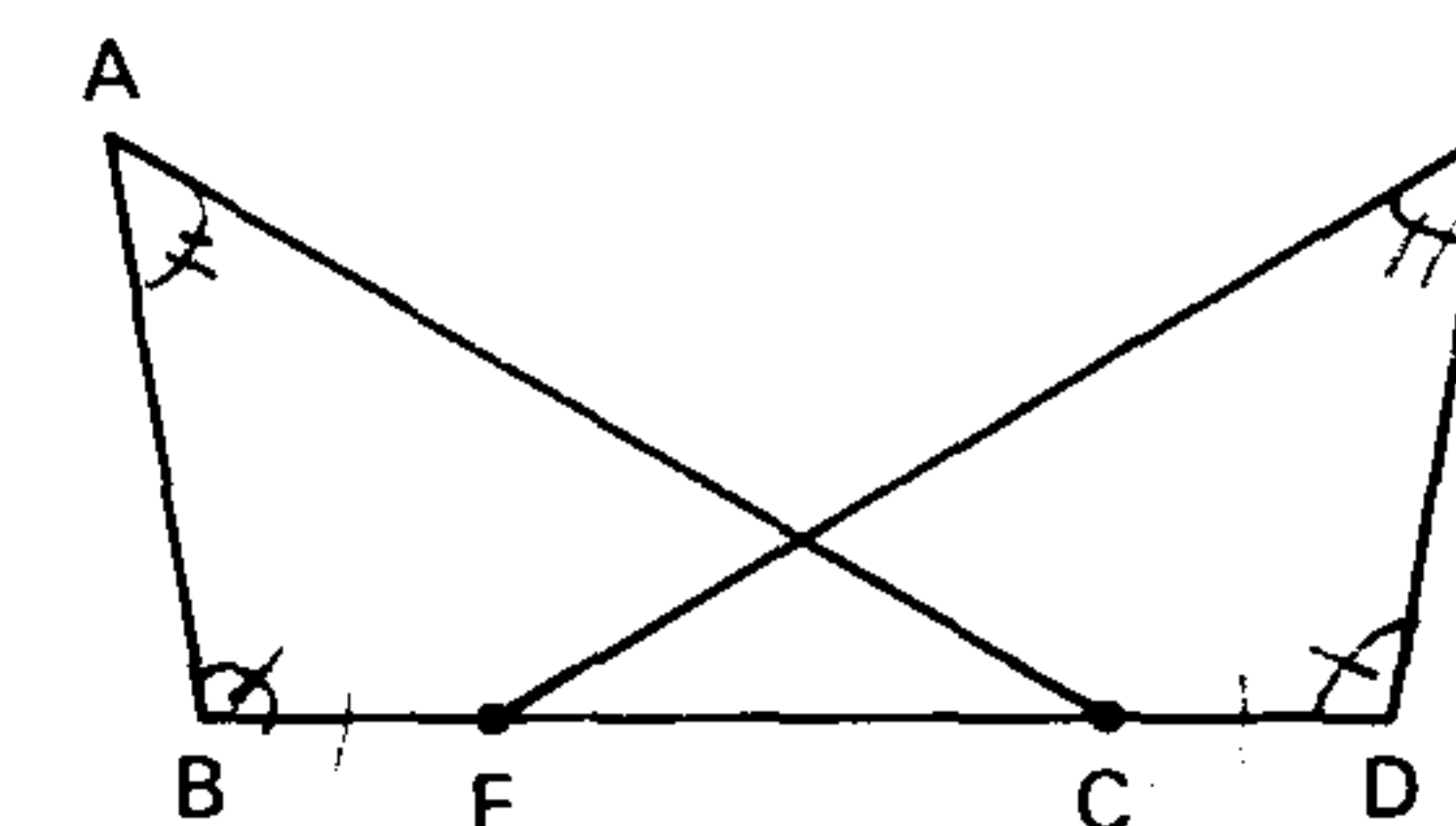
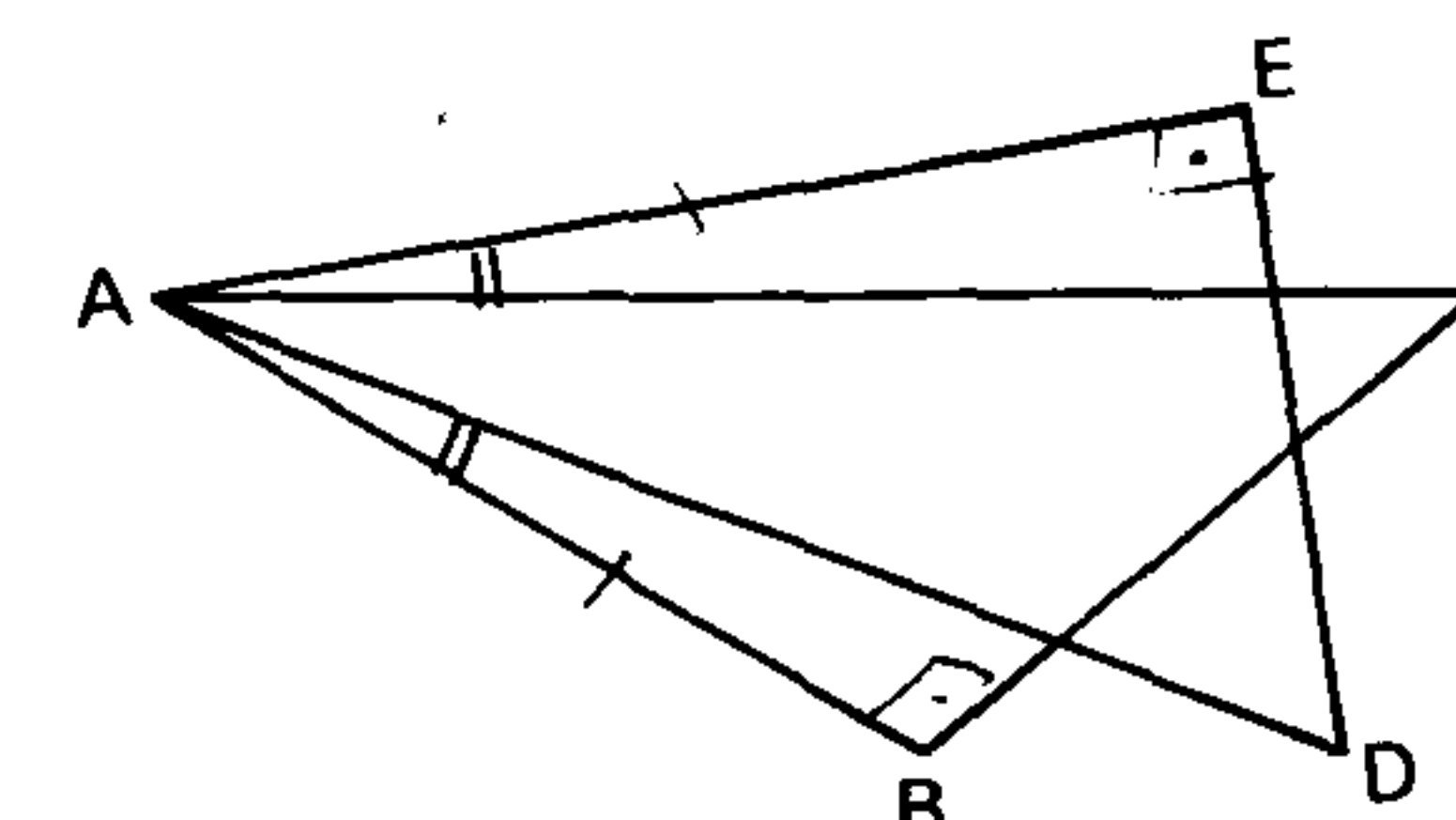
c) $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$; $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$

d)

97. Por que ALL ou LLA não é caso de congruência entre triângulos?

98. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β.

$\hat{A} = 3\alpha$ $\quad \hat{B} = \beta + 48°$
$\hat{E} = 5\beta$ $\quad \hat{D} = 2\alpha + 10°$

99. Na figura ao lado, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. Calcule x e y e os lados do triângulo ACD.

AB = x $\quad$ BC = 2y
CD = 3y + 8 $\quad$ DA = 2x

100. Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.

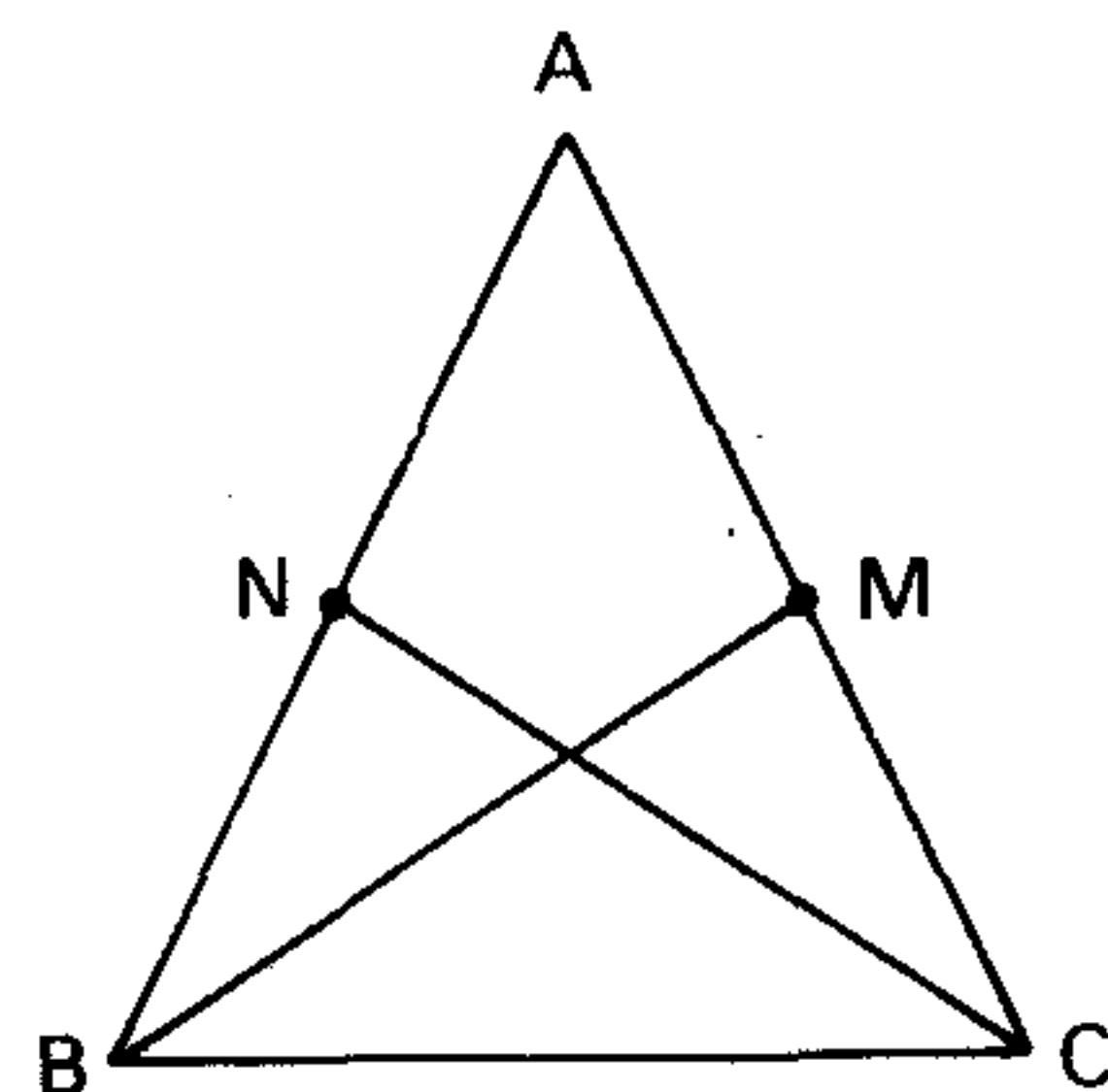
AB = 35 $\quad$ AC = 2x + 6
CE = 22 $\quad$ DE = 3y + 5

101. Na figura, o triângulo PCD é congruente ao triângulo PBA. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros dos triângulos PCA e PBD.

AB = 15, $\quad$ CD = x + 5
AP = 2y + 17 $\quad$ PD = 3y − 2

102. Na figura ao lado, os triângulos ABC e CDA são congruentes. Calcule x e y.

103. Na figura ao lado, sabendo que C é ponto médio de BE, prove que os triângulos ABC e DEC são congruentes.

104. Na figura ao lado, sabendo que $\alpha \equiv \beta$ e $\gamma \equiv \delta$, prove que os triângulos ABC e CDA são congruentes.

105. Se $\alpha \equiv \beta$ e $\varphi \equiv \theta$, demonstre que o triângulo ABC é congruente ao triângulo ABD.

106. Na figura ao lado, sendo $\overline{BF} \equiv \overline{CD}$, $m(A\hat{B}C) = m(F\hat{D}E)$, $m(B\hat{A}C) = m(D\hat{E}F)$, prove que $\overline{AC} \equiv \overline{EF}$.

107. Na figura ao lado, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{AE}$, $m(B\hat{A}D) = m(C\hat{A}E)$, $m(A\hat{B}C) = 90°$ e $m(A\hat{E}D) = 90°$, prove que $\overline{BC} \equiv \overline{DE}$.

108. Demonstre que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles é também bissetriz.

109. Prove que a bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles é também mediana.

110. Prove que as medianas relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

Solução

$H: \begin{cases} AB = AC \\ \overline{BM} \text{ e } \overline{CN} \\ \text{são medianas} \end{cases}$ $\qquad T: BM = CN$

Demonstração

Consideremos os triângulos *BAM* e *CAN*.

$$\left.\begin{array}{r} BA = CA \\ \hat{A} = \hat{A} \\ AM = AN \end{array}\right\} \stackrel{LAL}{\Longrightarrow} \triangle BAM \equiv \triangle CAN \Longrightarrow BM = CN$$

111. Prove que as bissetrizes relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

112. Prove que, se a bissetriz relativa a um lado de um triângulo é também mediana relativa a esse lado, então esse triângulo é isósceles.

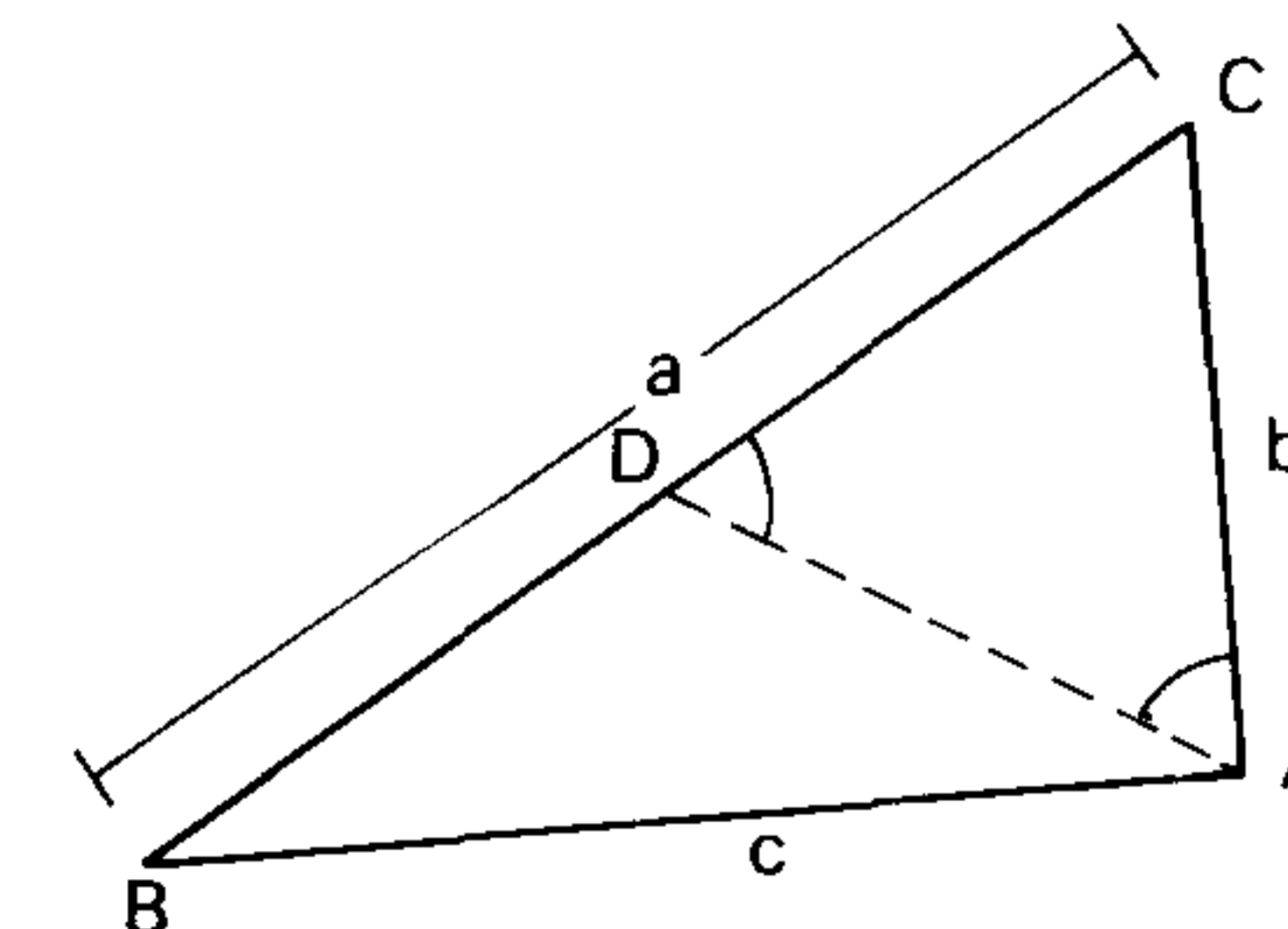
III. Desigualdades nos triângulos

63. Ao maior lado opõe-se o maior ângulo

> **Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o *maior* deles está oposto ao *maior* lado.**

Hipótese $\qquad$ *Tese*

$\overline{BC} > \overline{AC} \Longrightarrow B\hat{A}C > A\hat{B}C$

ou

$a > b \Longrightarrow \hat{A} > \hat{B}$

Demonstração

Consideremos *D* em $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} \equiv \overline{CA}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BC} > \overline{AC} \Longrightarrow D \text{ é interno a } C\hat{A}B \Longrightarrow C\hat{A}B > C\hat{A}D \\ \triangle CAD \text{ isósceles de base } \overline{AD} \Longrightarrow C\hat{A}D \equiv C\hat{D}A \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow C\hat{A}B > C\hat{D}A \quad (1)$

$C\hat{D}A$ é ângulo externo no $\triangle ABD \Longrightarrow C\hat{D}A > A\hat{B}D = A\hat{B}C \quad (2)$

De (1) e (2), vem:

$$C\hat{A}B > A\hat{B}C \quad \text{ou seja} \quad \hat{A} > \hat{B}.$$

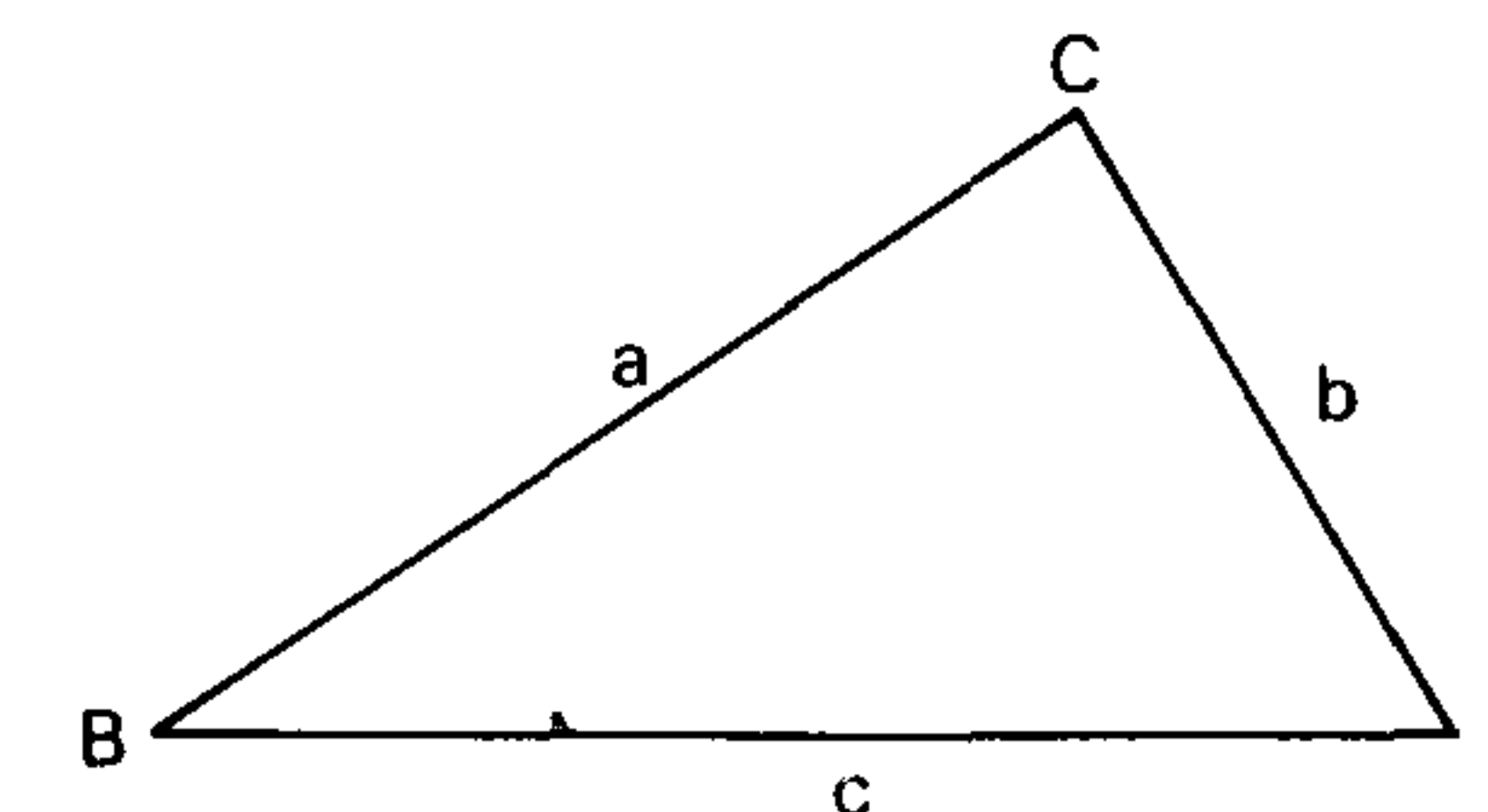
64. Ao maior ângulo opõe-se o maior lado

> **Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o *maior* deles está oposto ao *maior* lado.**

Hipótese $\qquad$ *Tese*

$B\hat{A}C > A\hat{B}C \Longrightarrow \overline{BC} > \overline{AC}$

ou

$\hat{A} > \hat{B} \Longrightarrow a > b$

Demonstração

Há três possibilidades para $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$:

1ª) $\overline{BC} < \overline{AC}$ ou 2ª) $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ ou 3ª) $\overline{BC} > \overline{AC}$

1ª) Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, então, pelo teorema anterior, $\hat{A} < \hat{B}$, o que contraria a hipótese.

2ª) Se $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$, então, pelo teorema do triângulo isósceles, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, o que contraria a hipótese.

Logo, por exclusão, temos:

$$\overline{BC} > \overline{AC}.$$

65. *A desigualdade triangular*

Em todo triângulo, cada lado é *menor* que a *soma* dos outros dois.

Hipótese — *Tese*

A, B e C não colineares $\Longrightarrow$ $\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$

ou

a, b e c lados de um triângulo $\Longrightarrow$ $a < b + c$

Demonstração

Consideremos um ponto D na semi-reta oposta à semi-reta $\overrightarrow{AC}$, tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$ (1).

$$\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AD} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AB} \quad (2)$$

(1) $\Rightarrow \triangle ABD$ isósceles de base $\overline{BD} \Rightarrow A\hat{D}B \equiv A\hat{B}D$
A é interno ao ângulo $C\hat{B}D \Rightarrow C\hat{B}D > A\hat{B}D$
$\Rightarrow C\hat{B}D > A\hat{D}B \equiv C\hat{D}B$ (3)

No triângulo BCD com (3) e o teorema anterior, vem:
$\overline{BC} < \overline{DC}$ e com (2) $\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$, ou ainda:

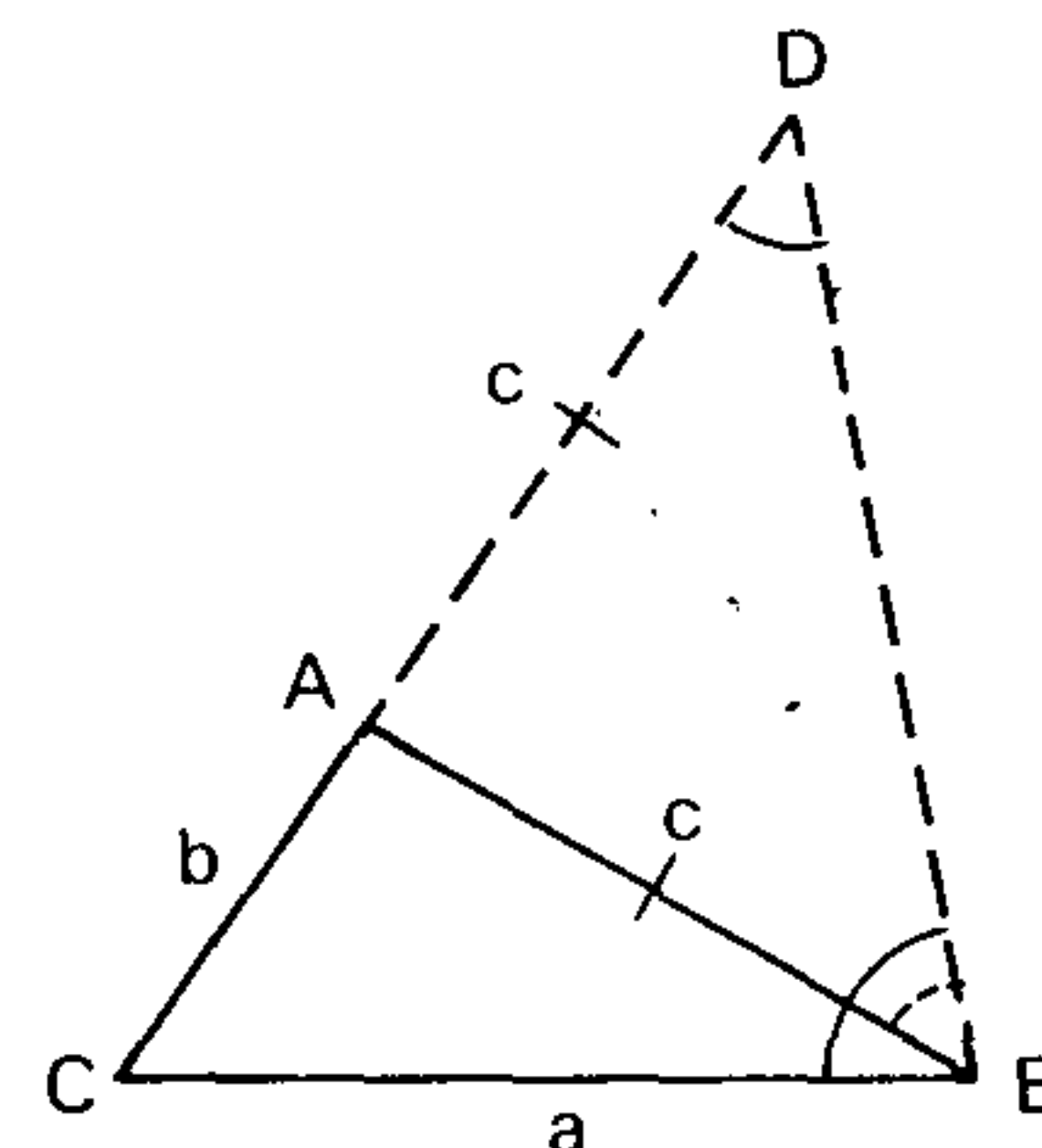
$$a < b + c$$

66. *Notas*

1ª) A desigualdade triangular também pode ser enunciada como segue:

Em todo triângulo, cada lado é *maior* que a *diferença* dos outros dois.

2ª) Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, devemos ter as três condições abaixo:

$a < b + c$ $\qquad$ $b < a + c$ $\qquad$ e $\qquad$ $c < a + b$

Estas relações podem ser resumidas como segue:

$$\left.\begin{array}{l} a < b + c \\ b < a + c \iff b - c < a \\ c < a + b \iff c - b < a \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{l} a < b + c \\ |b - c| < a \end{array}\right\} \iff$$

$$\iff \boxed{|b - c| < a < b + c}$$

EXERCÍCIOS

113. Com segmentos de $8\ cm$, $5\ cm$ e $18\ cm$ pode-se construir um triângulo? Por quê?

114. Dois lados, AB e BC, de um triângulo ABC medem respectivamente $8\ cm$ e $21\ cm$. Quanto poderá medir o terceiro lado, sabendo que é múltiplo de 6?

115. Determine o intervalo de variação x, sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 10$, $2x + 4$ e $20 - 2x$.

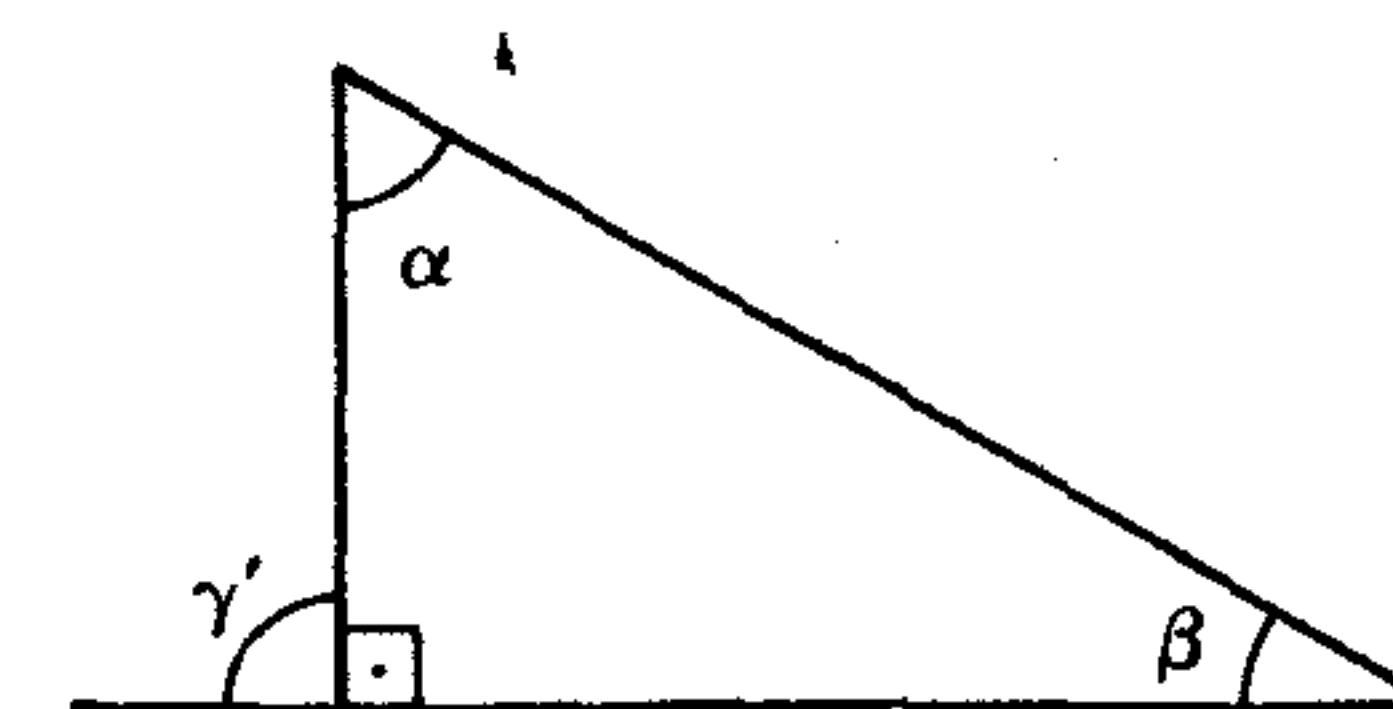
116. Se dois lados de um triângulo isósceles medem $38\ cm$ e $14\ cm$, qual poderá ser a medida do terceiro lado?

117. O lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC é expresso por um número inteiro. Determine o seu valor máximo, sabendo que os lados AC e BC medem respectivamente $27\ cm$ e $16\ cm$ e que $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$.

118. Mostre que o triângulo retângulo tem dois ângulos agudos.

Solução

Considere o ângulo externo adjacente ao ângulo reto do triângulo retângulo. Note que $\gamma' = 90°$.

Sendo α e β os ângulos internos não retos do triângulo, de acordo com o teorema do ângulo externo, temos:
$\gamma' > \alpha$ e $\gamma' > \beta$.
E como $\gamma' = 90°$, obtemos:
$\alpha < 90°$ e $\beta < 90°$. Então o triângulo tem dois ângulos agudos.

119. Mostre que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que cada um dos catetos.

120. Mostre que o triângulo obtusângulo tem dois ângulos agudos.

121. Mostre que o lado oposto ao ângulo obtuso de um triângulo obtusângulo é maior que cada um dos outros lados.

122. Mostre que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que a semi-soma dos catetos.

123. Prove que qualquer lado de um triângulo é menor que o semiperímetro.

124. Se P é um ponto interno de um triângulo ABC, mostre que $B\hat{P}C$ é maior que $B\hat{A}C$.

125. Se P é um ponto interno de um triângulo ABC, mostre que: $PB + PC < AB + AC$.

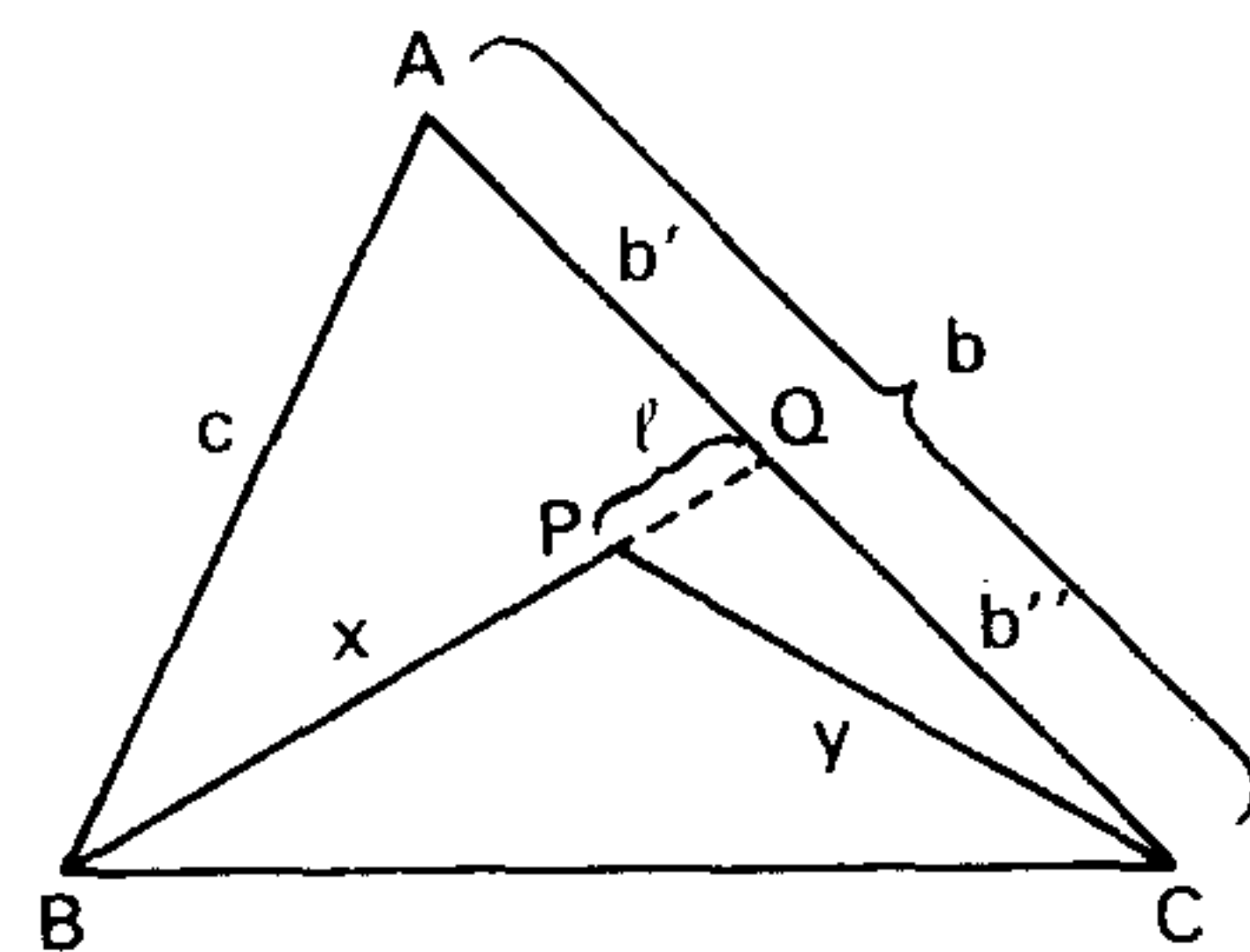
Solução

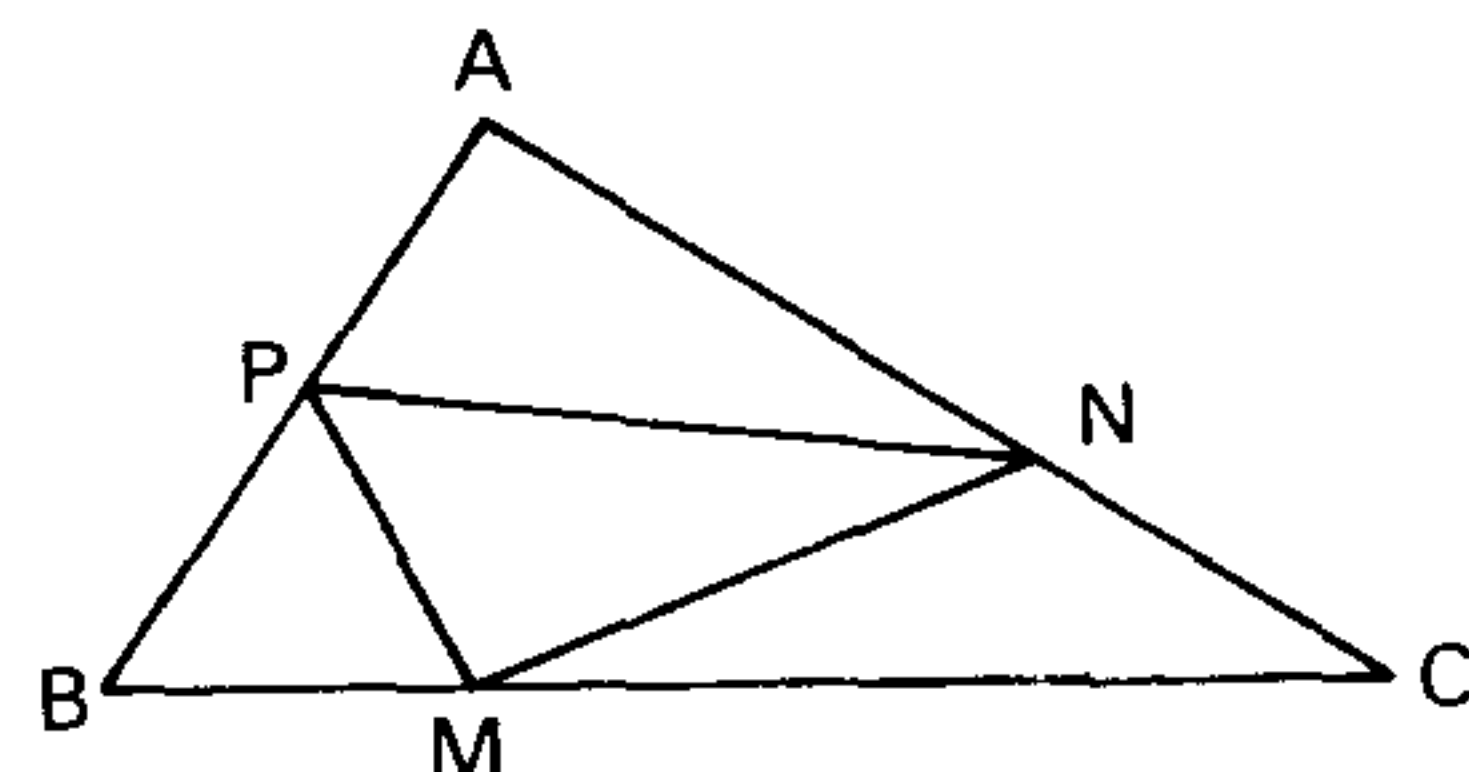
Tese $\{PB + PC < AB + AC$ ou $x + y < b + c$

Demonstração

1) Prolonguemos $\overline{BP}$ até que encontre $\overline{AC}$ num ponto Q.
2) De acordo com a desigualdade triangular, temos:

$$\begin{cases} c + b' > x + \ell \\ \ell + b'' > y \end{cases} \Longrightarrow$$

$$c + \ell + b' + b'' > x + y + \ell \Longrightarrow$$
$$c + b > x + y \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow PB + PC < AB + AC$$

126. Se P é um ponto interno de um triângulo ABC e $x = PA$, $y = PB$ e $z = PC$, mostre que $x + y + z$ está entre o semiperímetro e o perímetro do triângulo.

127. Demonstre que o perímetro do triângulo MNP é menor que o perímetro do triângulo ABC da figura ao lado.

128. Se m_a é a mediana relativa ao lado a de um triângulo de lados a, b e c, então:

$$\left|\frac{b - c}{2}\right| < m_a < \frac{b + c}{2}$$

129. Prove que a soma das medianas de um triângulo é menor que o perímetro e maior que o semiperímetro.

LEITURA

Euclides e a Geometria Dedutiva

Hygino H. Domingues

Derrotada na batalha de Queronéia pelas forças do rei Filipe, a Grécia torna-se parte do império macedônio no ano 338 a.C. Dois anos depois, com a morte de Filipe, assume o poder seu filho Alexandre, então com 20 anos de idade. Ao morrer, cerca de 13 anos depois, Alexandre incorporara ao seu império grande parte do mundo civilizado de então. Dessa forma a cultura grega, adotada pelos macedônios (em cuja formação populacional predominava o elemento grego), foi estendida ao Oriente antigo. Em sua arrancada expansionista, Alexandre fundou muitas cidades. Uma delas, em especial, teria um papel extraordinário na história da Matemática: Alexandria, no Egito.

Com a morte de Alexandre, o domínio sobre o Egito passou às mãos de Ptolomeu, um de seus líderes militares. E uma das primeiras e talvez mais importante obra de Ptolomeu foi criar em Alexandria, junto ao Museu (templo às musas), o primeiro modelo do que viriam a ser as universidades, séculos depois. Nesse centro, intelectuais do mundo inteiro, trabalhando ali em tempo integral, dedicavam-se às pesquisas e ao ensino às expensas dos cofres do Estado. Ponto alto da instalação era uma biblioteca, que chegou a ter, no auge de seu esplendor, perto de 700 mil rolos de papiro. Muitos grandes matemáticos trabalharam ou se formaram no Museu. Dentre eles, o primeiro talvez, e um dos mais notáveis, foi Euclides (c. 300 a.C.).

Quase nada se sabe sobre a vida de Euclides, salvo algumas poucas informações esparsas. Mesmo sobre sua formação matemática não há nenhuma certeza: é possível que tenha sido feita em Atenas, na Academia de Platão. Papus de Alexandria (séc. IV) deixou registrados elogios à sua modéstia e consideração para com os outros. Mas sua

presença de espírito talvez possa ser avaliada pela história segundo a qual, a uma indagação de Ptolomeu sobre se não haveria um caminho mais curto para a geometria (que o proposto por Euclides), teria respondido: "Não há nenhum caminho real na geometria". Ou seja, perante a geometria todos são iguais, até reis poderosos como Ptolomeu.

Embora autor de outros trabalhos, a fama de Euclides praticamente repousa sobre seus *Elementos*, o mais antigo texto da matemática grega a chegar completo a nossos dias. Obra em treze livros, apesar de na sua maior parte ser uma compilação e sistematização de trabalhos anteriores sobre a matemática elementar da época, seu êxito foi enorme. Haja vista suas mais de mil edições impressas em todo o mundo, desde a primeira em 1482, um feito editorial talvez só superado pela Bíblia.

Euclides (séc. III a.C.) em pintura de Juste de Gond (séc. XV).

Os *Elementos* dedicam um bom espaço à teoria dos números (três livros), mas com o enfoque geométrico que permeia toda a obra. Euclides representava os números por segmentos de reta, assim como representava o produto de dois números por um retângulo. Contudo a argumentação usada por ele independe da geometria. Há também no texto um pouco de álgebra geométrica, onde, por exemplo, algumas equações do segundo grau são resolvidas geometricamente, sendo suas raízes dadas na forma de segmentos de retas.

Mas, sem dúvida, o forte dos *Elementos* é a geometria. A partir de cinco noções comuns, cinco postulados específicos e algumas definições, centenas de teoremas (467 em toda a obra) são deduzidos, alguns de grande profundidade. Além de ser o mais antigo texto de matemática na forma axiomático-dedutiva a chegar a nossos dias, nele Euclides foi muito feliz na escolha e no enunciado de seus postulados básicos. E soube usá-los com proficiência. Assim, não é sem motivo que os *Elementos*, por dois milênios, além de texto fundamental de geometria, foi o modelo de boa matemática.

Falhas em sua estruturação lógica foram sendo achadas ao longo do tempo. Por exemplo, a questão da continuidade não foi focalizada, o que levava Euclides a usar pressupostos não explicitados sobre o assunto. Tudo isso porém chega a ser irrelevante em face da grandiosidade da obra e de sua inigualável influência científica.

CAPÍTULO V

Paralelismo

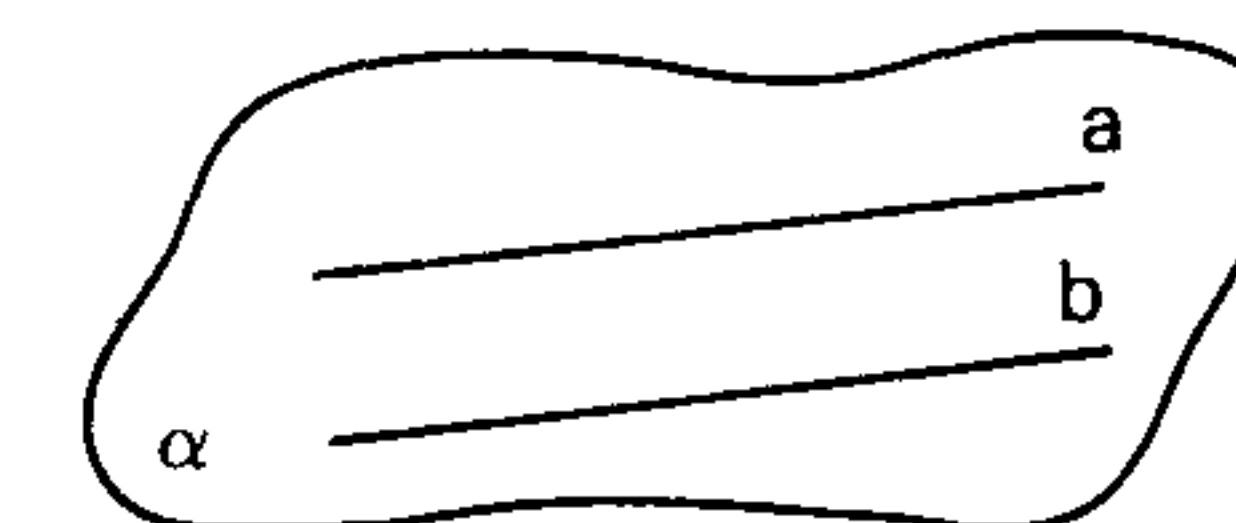
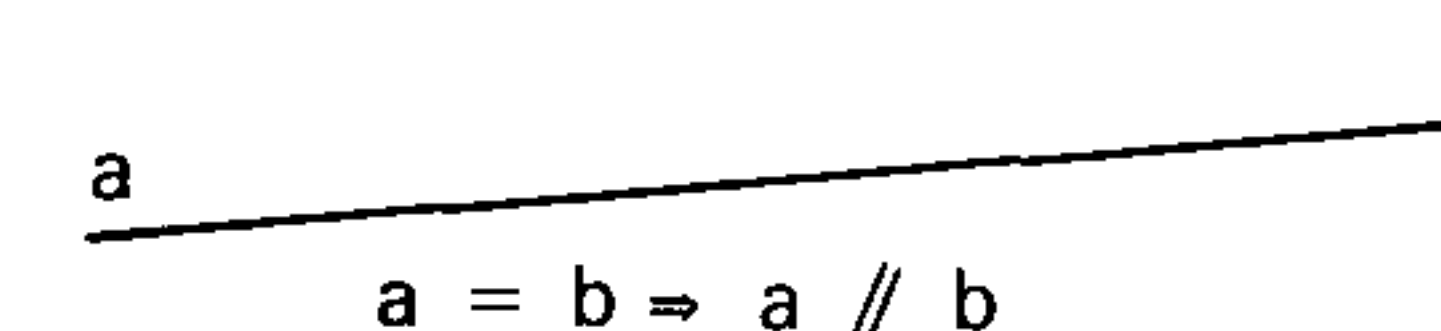
Conceitos e propriedades

67. *Retas paralelas — definição*

Duas retas são paralelas (símbolo: //) se, e somente se,
são coincidentes (iguais)
ou
são coplanares e não têm nenhum ponto comum

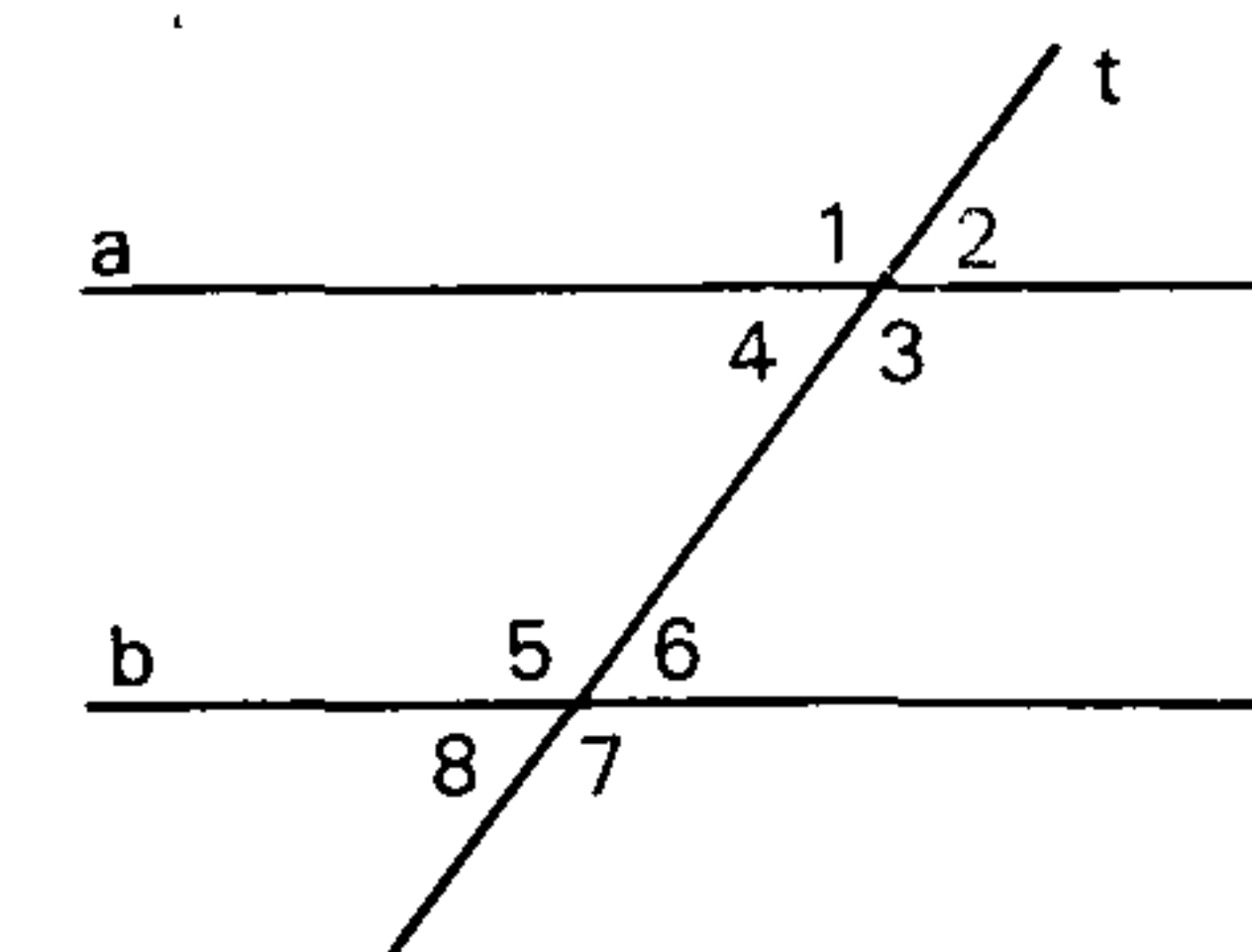
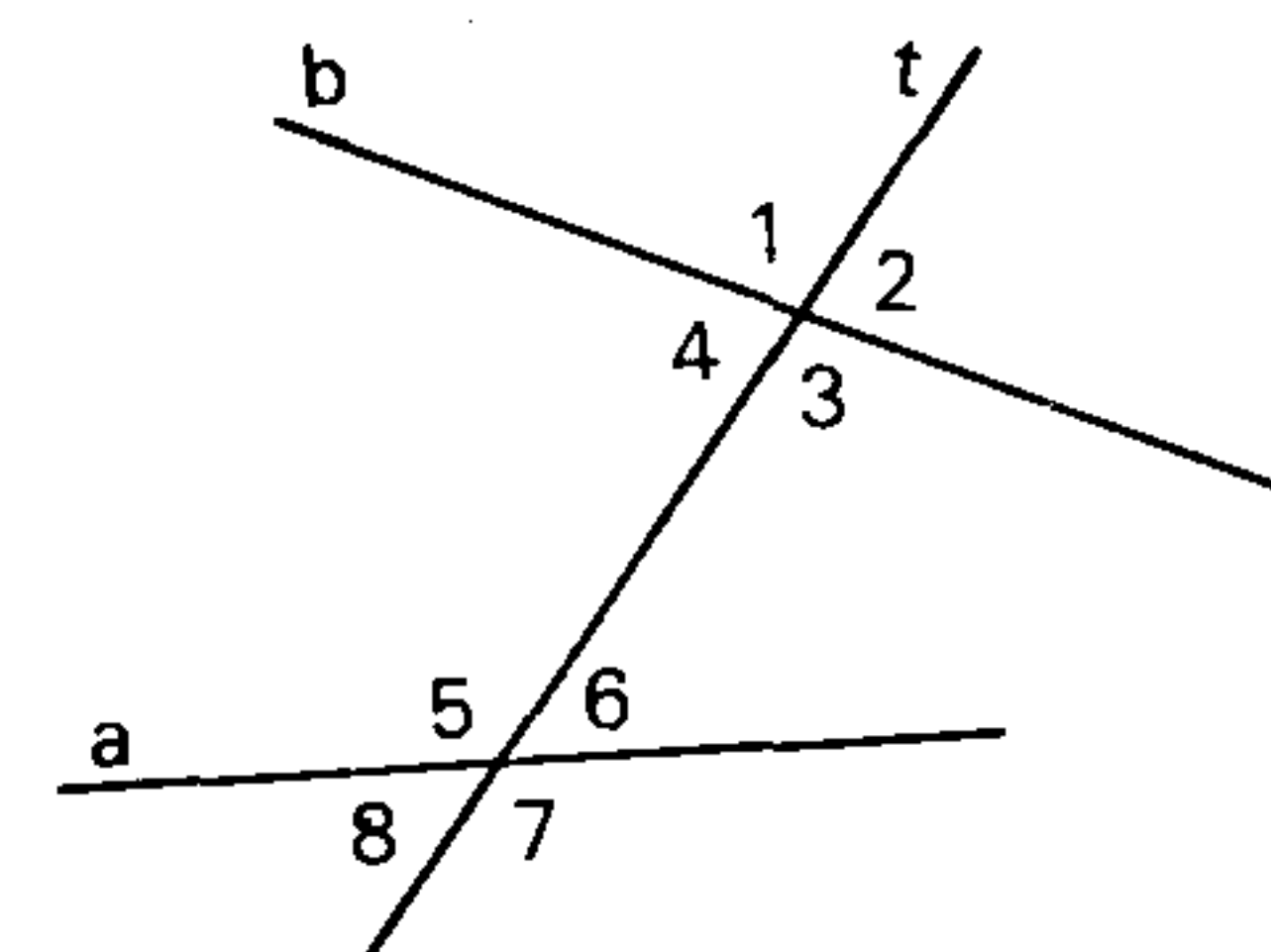
a, b
$a = b \Rightarrow a \parallel b$

a, b, α

$(a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \cap b = \emptyset) \Longrightarrow a \parallel b$

68. Sejam a e b duas retas distintas, paralelas ou não, e t uma reta concorrente com a e b:

1) t é uma *transversal* de a e b;

b, t, 1, 2, 4, 3, a, 5, 6, 8, 7

a, t, 1, 2, 4, 3, b, 5, 6, 8, 7

2) dos oito ângulos determinados por essas retas indicados nas figuras acima, chamam-se ângulos

alternos: $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{8}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$

correspondentes: $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$

colaterais: $\hat{1}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{7}$, $\hat{3}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{5}$

69. Notas

1ª) Com mais detalhes podemos ter:

alternos {
- alternos internos: $\hat{3}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$
- alternos externos: $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{8}$

colaterais {
- colaterais internos: $\hat{3}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{5}$
- colaterais externos: $\hat{1}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{7}$

2ª) A *congruência* de dois ângulos alternos de um dos pares
(por exemplo, $\hat{1} \equiv \hat{7}$)
equivale

a) à congruência dos ângulos de todos os pares de ângulos alternos
($\hat{2} \equiv \hat{8}$, $\hat{3} \equiv \hat{5}$, $\hat{4} \equiv \hat{6}$);

b) à congruência dos ângulos de todos os pares de ângulos correspondentes
($\hat{1} \equiv \hat{5}$, $\hat{2} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{7}$, $\hat{4} \equiv \hat{8}$); e

c) à suplementaridade dos ângulos de todos os pares de colaterais
($\hat{1} + \hat{8} = \hat{2} + \hat{7} = \hat{3} + \hat{6} = \hat{4} + \hat{5} = 180°$).

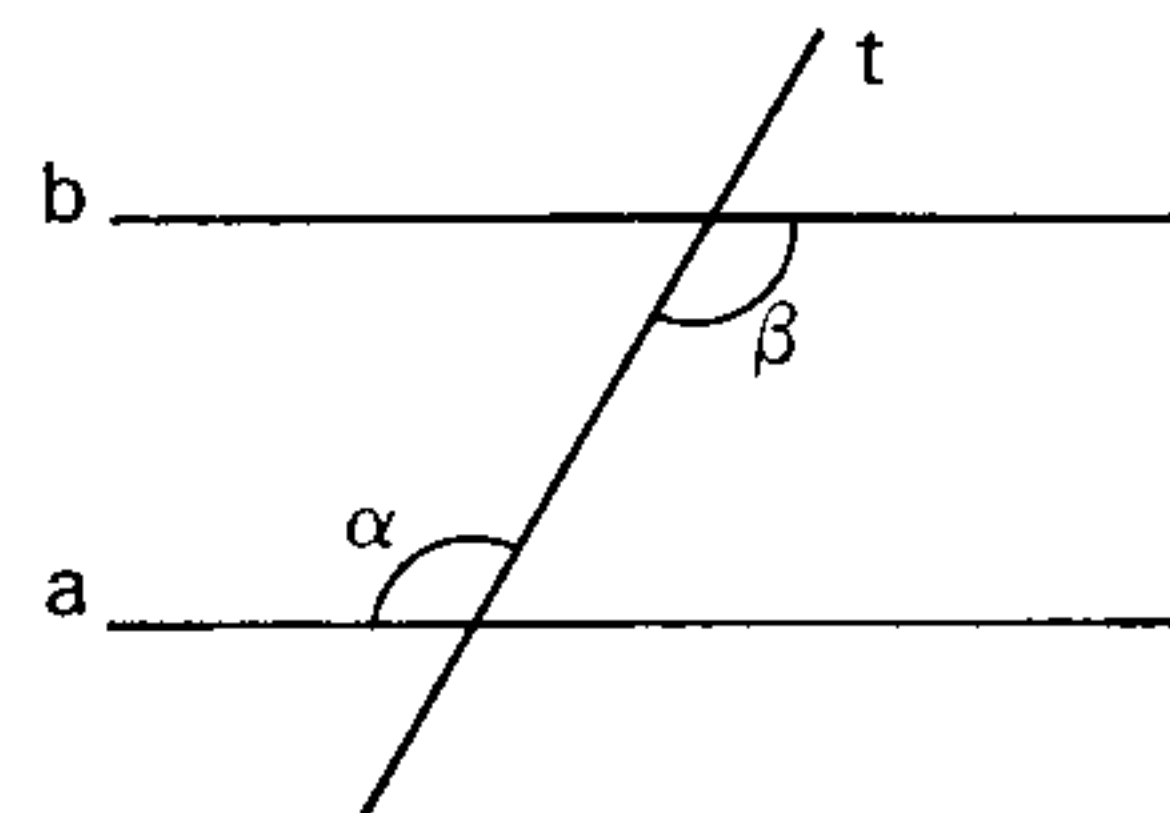
70. Existência da paralela

Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) *congruentes*, então essas duas retas são paralelas.

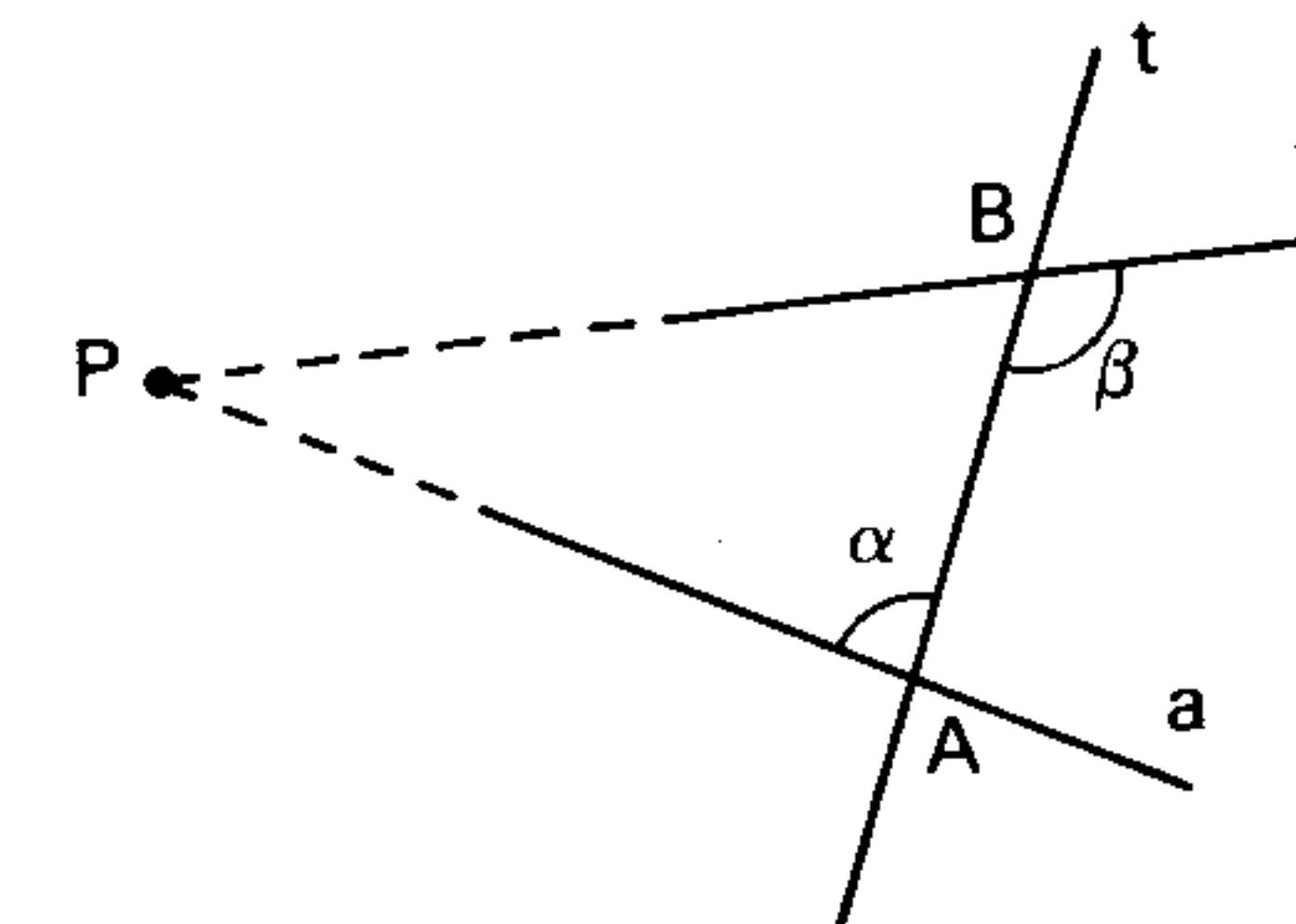
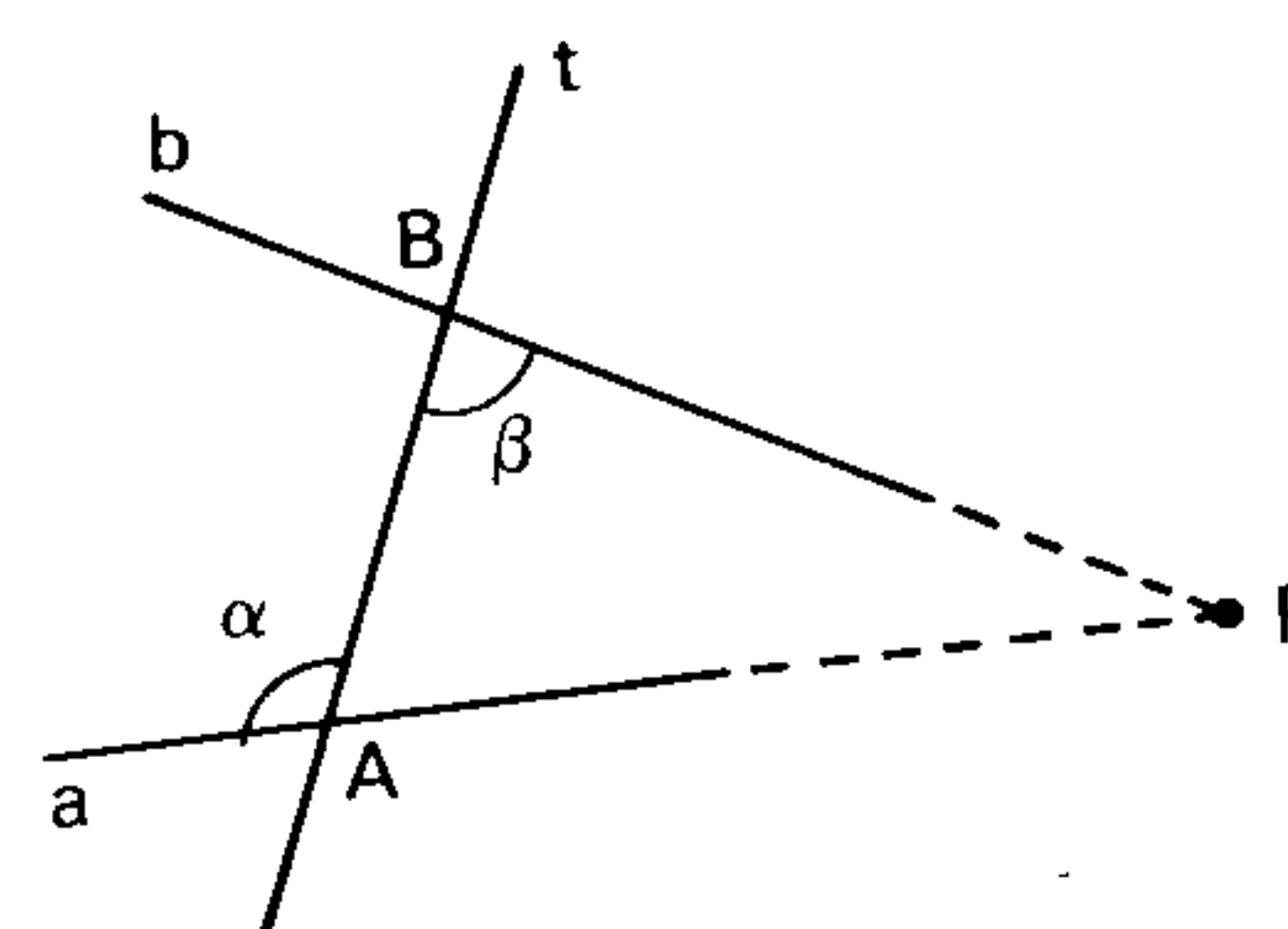
ou

se $\alpha = \beta$, então $a \parallel b$

ou

Hipótese		*Tese*
$\alpha \equiv \beta$	$\Longrightarrow$	$a \parallel b$

Demonstração

Se a e b não fossem paralelas, teriam um ponto P em comum e $a \cap b = \{P\}$.

Sendo
$$a \cap t = \{A\} \text{ e } b \cap t = \{B\},$$
teríamos o triângulo ABP.

Pelo teorema do ângulo externo (item 60) aplicado ao $\triangle ABP$, teríamos:
$$\alpha > \beta \quad \text{ou} \quad \beta > \alpha$$
o que é absurdo, de acordo com a hipótese.

Logo, as retas a e b são paralelas, isto é, $a \parallel b$.

71. Construção da paralela

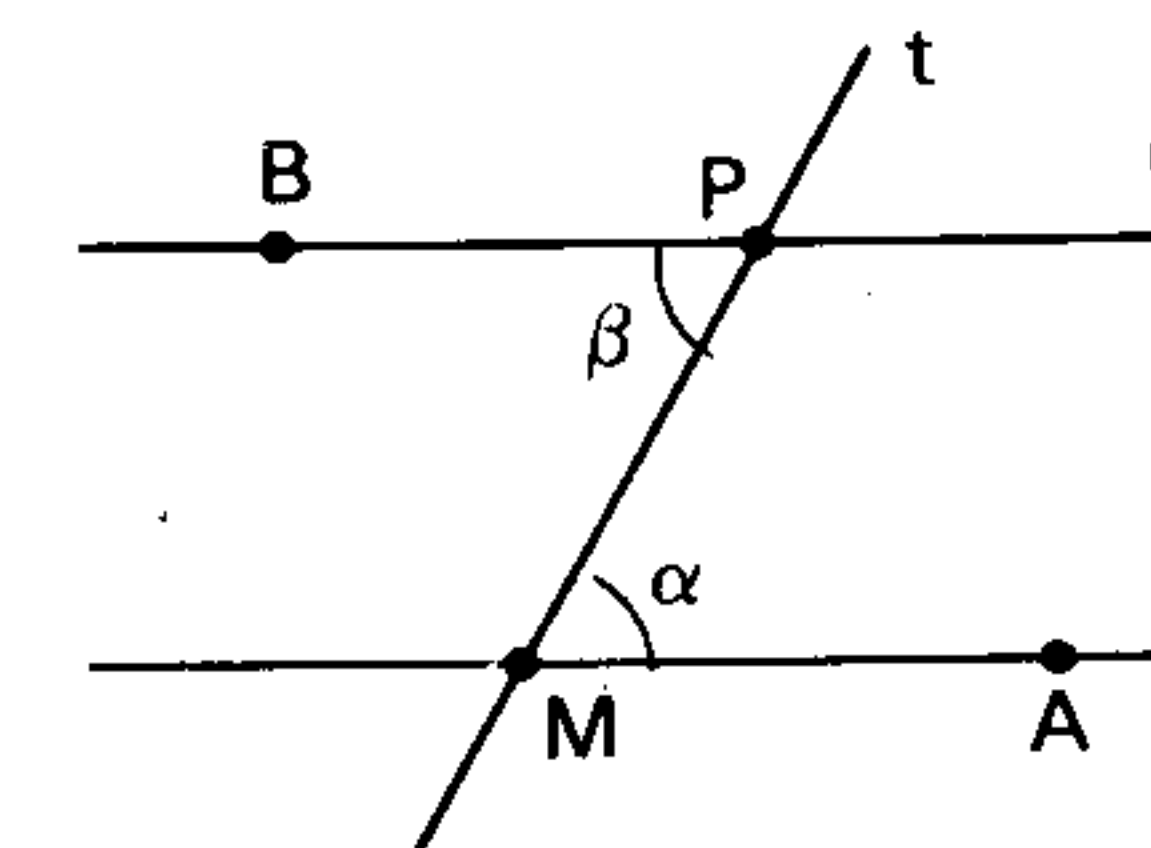
Construir uma reta b, paralela a uma reta a dada, por um ponto P dado fora de a.

Passamos uma reta t por P, que determina um ponto M em a.

Tomamos em a um ponto A distinto de M.

Construímos, com vértice P, com um lado $\overrightarrow{PM}$, um ângulo $M\hat{P}B$ congruente ao ângulo $A\hat{M}P$, estando B no semiplano oposto ao de A em relação à reta $\overrightarrow{PM}$ (transporte de ângulos — item 35).

A reta $\overleftrightarrow{PB}$ é a reta b pedida.

De fato, sendo $A\hat{M}P = \alpha$ e $M\hat{P}B = \beta$, pelo teorema anterior temos:
$$\alpha = \beta \Longrightarrow a \parallel b$$

72. *Unicidade da paralela — postulado de Euclides*

A unicidade da reta paralela a uma reta dada é o postulado de Euclides (300 a.C.) ou postulado das paralelas que caracteriza a Geometria que desenvolvemos: a Geometria Euclidiana.

Por um ponto passa uma *única* reta paralela a uma reta dada.

Com base nesse axioma podemos provar o recíproco do teorema anterior. É o que segue.

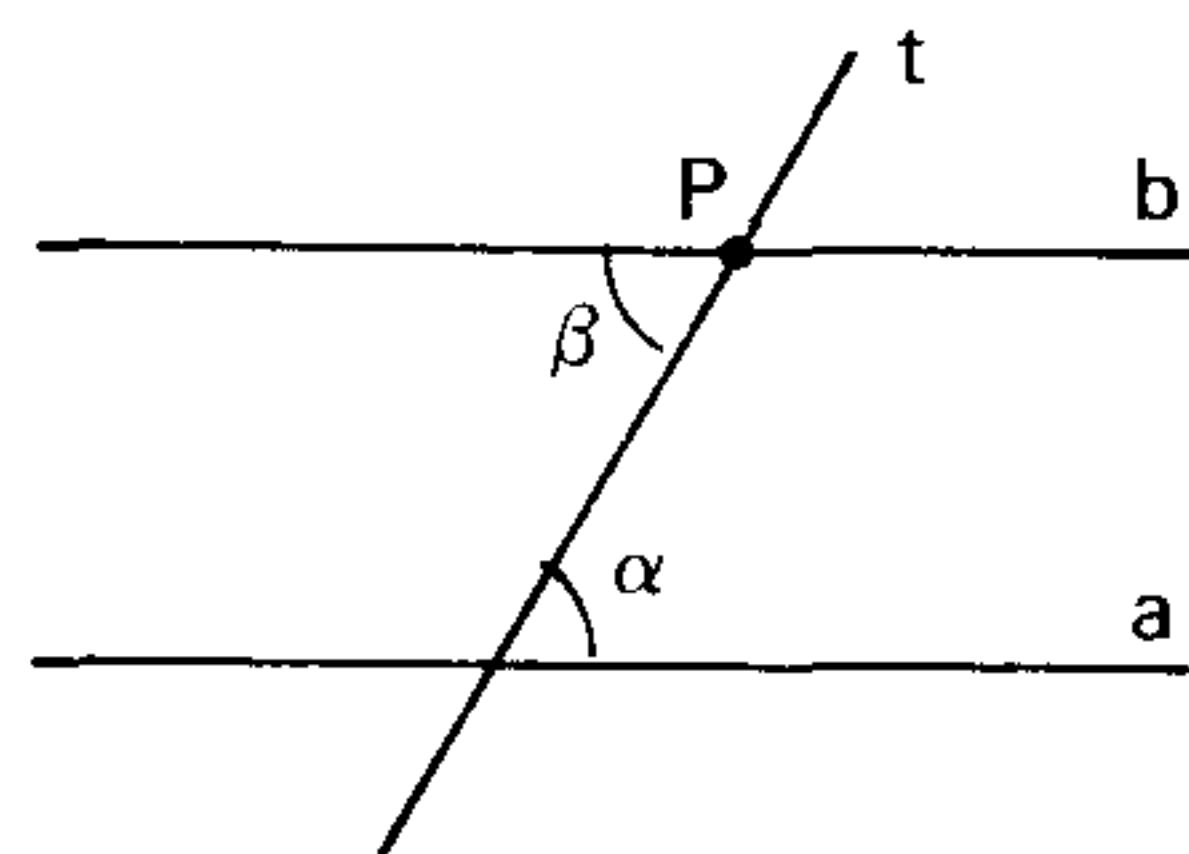
73.

Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.

ou

Se $a \neq b$ e $a \parallel b$, então $\alpha \equiv \beta$

ou

Hipótese		*Tese*
$a \neq b$, $a \parallel b$	$\Longrightarrow$	$\alpha \equiv \beta$

Demonstração

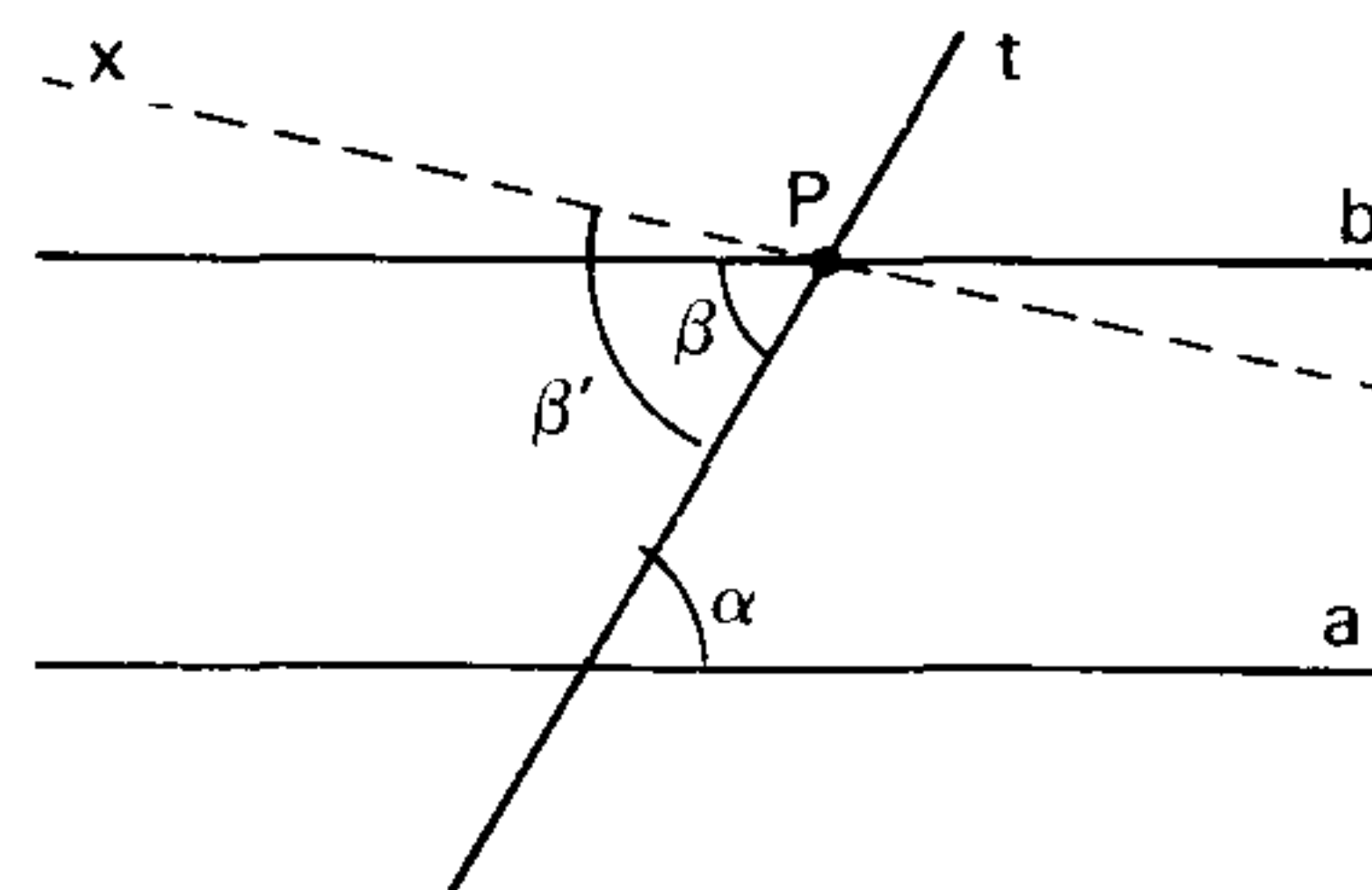
Se α e β não fossem congruentes, existiria uma reta x, distinta de b, passando por P, $\{P\} = b \cap t$, tal que:

$\hat{xt} = \beta'$ alterno de α e $\beta' \equiv \alpha$

Pelo teorema da existência (item 70),

$$\alpha \equiv \beta' \Longrightarrow x \parallel a$$

Por P teríamos duas retas *distintas* x e b, ambas paralelas à reta a, o que é absurdo, pois contraria o postulado das paralelas.

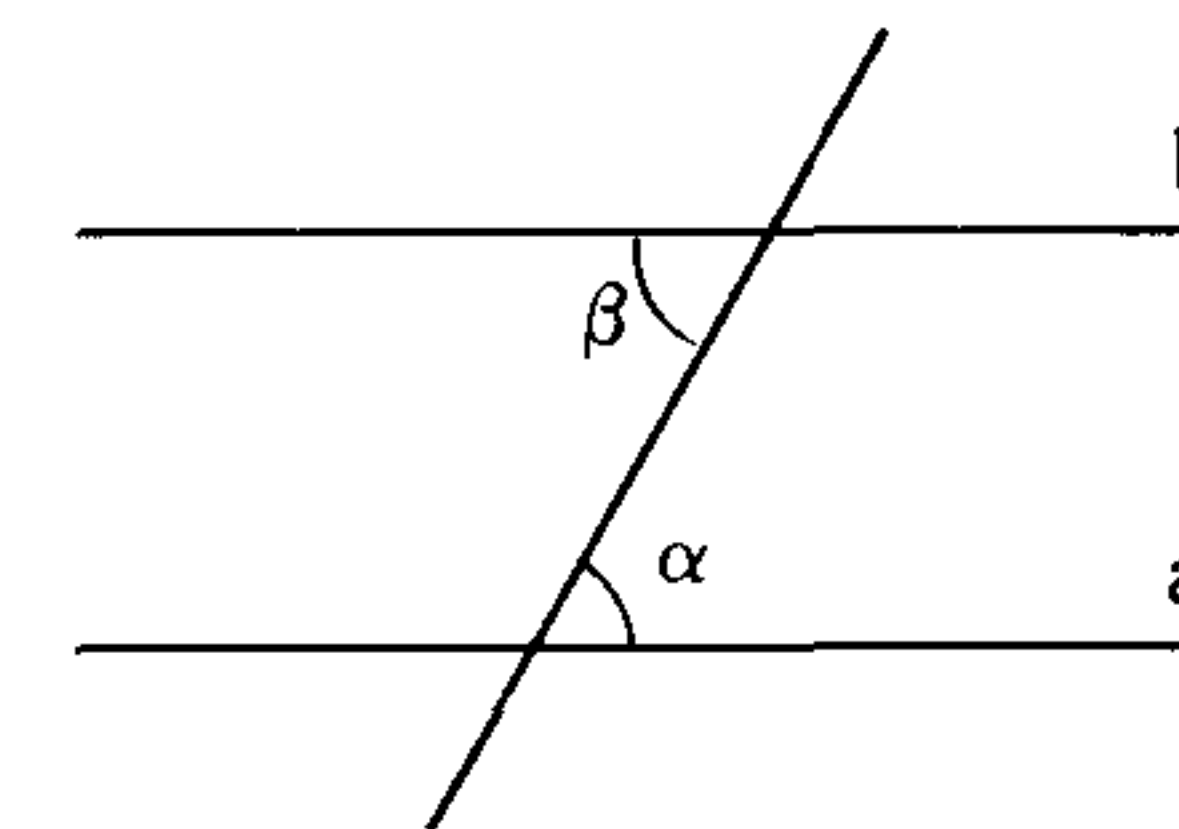
Logo, α é congruente a β, isto é, $\alpha \equiv \beta$.

74. *Condição necessária e suficiente*

Reunindo os resultados dos itens 70 e 73,

$$\alpha \equiv \beta \Longrightarrow a \parallel b \quad \text{e} \quad a \parallel b \Longrightarrow \alpha \equiv \beta$$

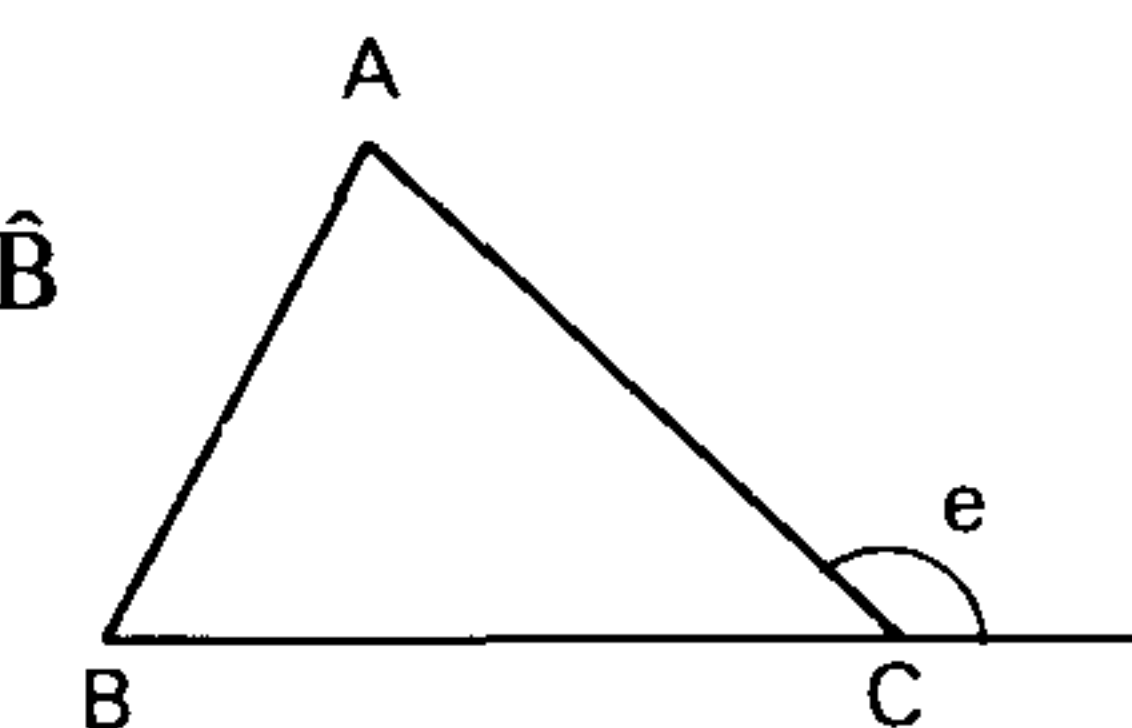
temos o enunciado que segue:

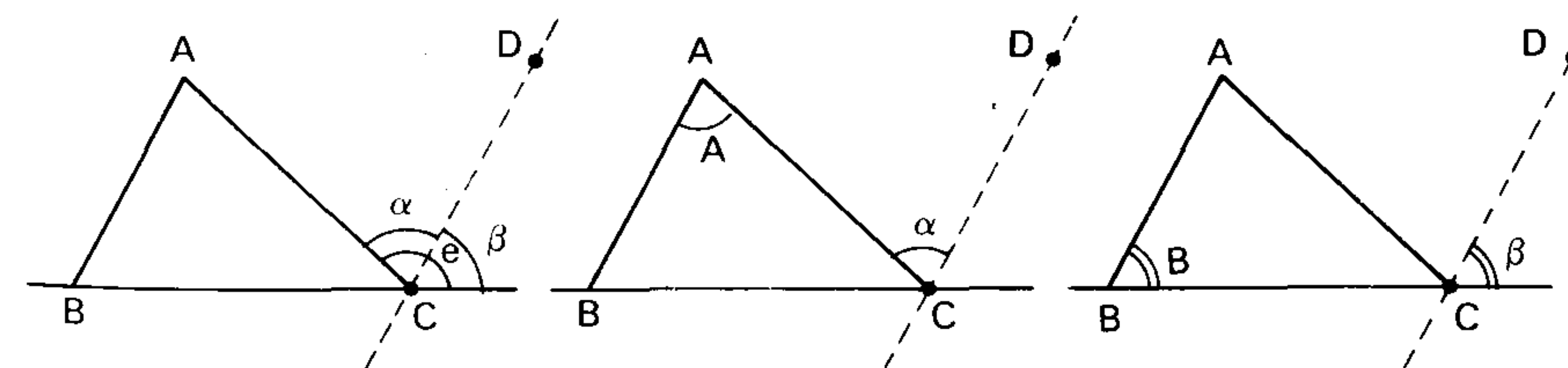
Uma condição necessária e suficiente para duas retas distintas serem *paralelas* é formarem com uma transversal ângulos *alternos* (ou ângulos correspondentes) *congruentes*.

$$\alpha \equiv \beta \Longleftrightarrow a \parallel b$$

75. *Ângulo externo*

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

ou

Hipótese		*Tese*
e é ângulo externo adjacente a $\hat{C}$	$\Longrightarrow$	$\hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$

Demonstração

Por C conduzimos a reta $\overleftrightarrow{CD}$ paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, determinando os ângulos α e β caracterizados na figura:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow \alpha \equiv \hat{A}$ (alternos)

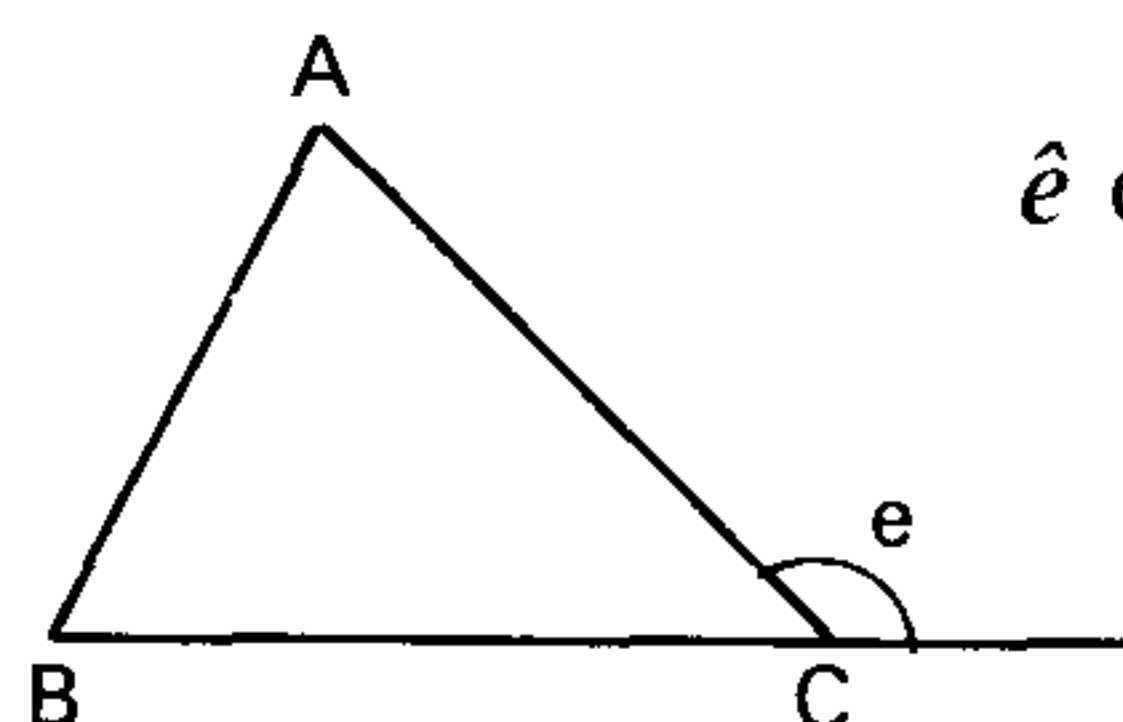
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow \beta \equiv \hat{B}$ (correspondentes)

Somando as duas relações acima, vem:

$$\underbrace{\alpha + \beta} = \hat{A} + \hat{B}$$

ou seja: $\hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$

76. Soma dos ângulos de um triângulo

A soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.

Hipótese — *Tese*

$\triangle ABC$ é um triângulo $\Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2$ retos

Demonstração

Sendo e o ângulo externo adjacente a C e aplicando o item anterior, vem:

A, B, C, e

$$\left.\begin{array}{l} \hat{e} \text{ e } \hat{C} \text{ são suplementares} \Longrightarrow \hat{e} + \hat{C} = 2 \text{ retos} \\ \text{teorema anterior} \Longrightarrow \hat{e} = \hat{A} + \hat{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ retos.}$$

Considerando as medidas dos ângulos, temos:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$$

que representaremos simplesmente por:

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$$

77. Notas

1ª) *Ângulos de lados paralelos*

Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares.

Demonstração

Consideremos os ângulos de medidas α e α' adjacentes suplementares e β e β' adjacentes suplementares (vide figura).

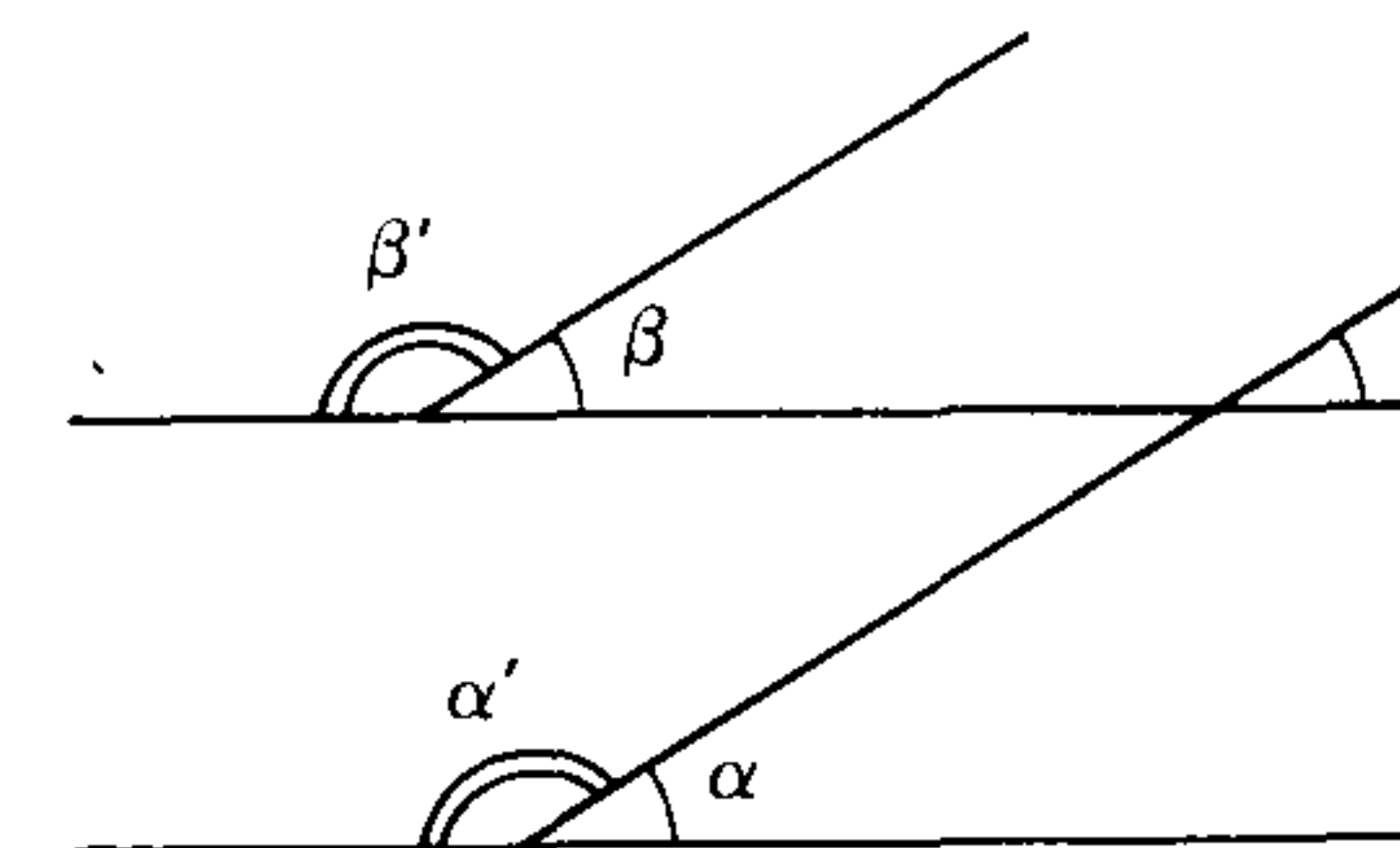
β', β, γ, α', α

Pelo paralelismo, considerando o ângulo auxiliar γ, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = \beta$$

Daí, vem: $\alpha' = \beta'$

$\alpha + \beta' = 180°$

$\alpha' + \beta = 180°$

2ª) *Triângulo equilátero*

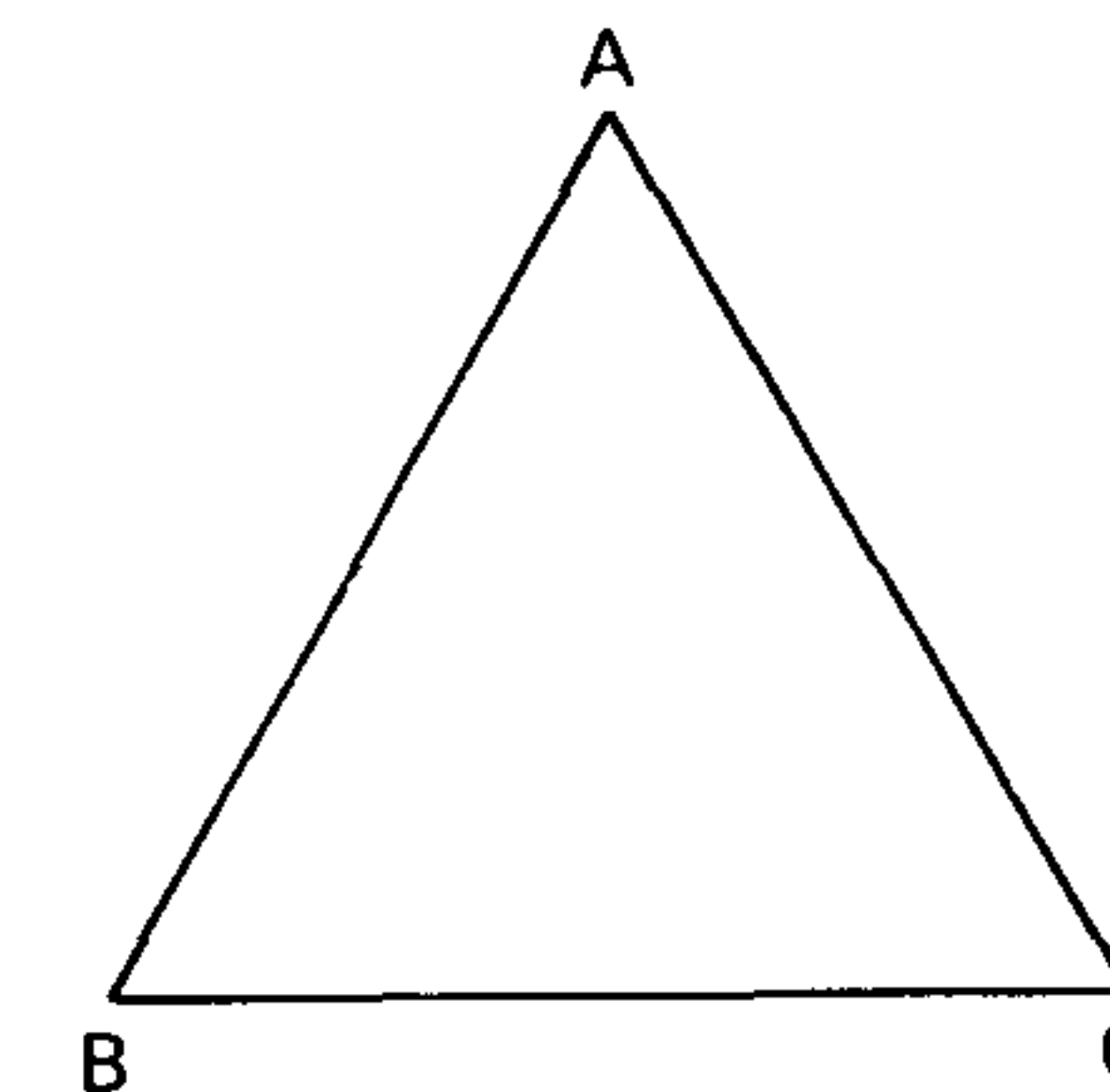
Num triângulo equilátero cada ângulo mede 60°.

Demonstração

Seja ABC o triângulo equilátero:

A, B, C

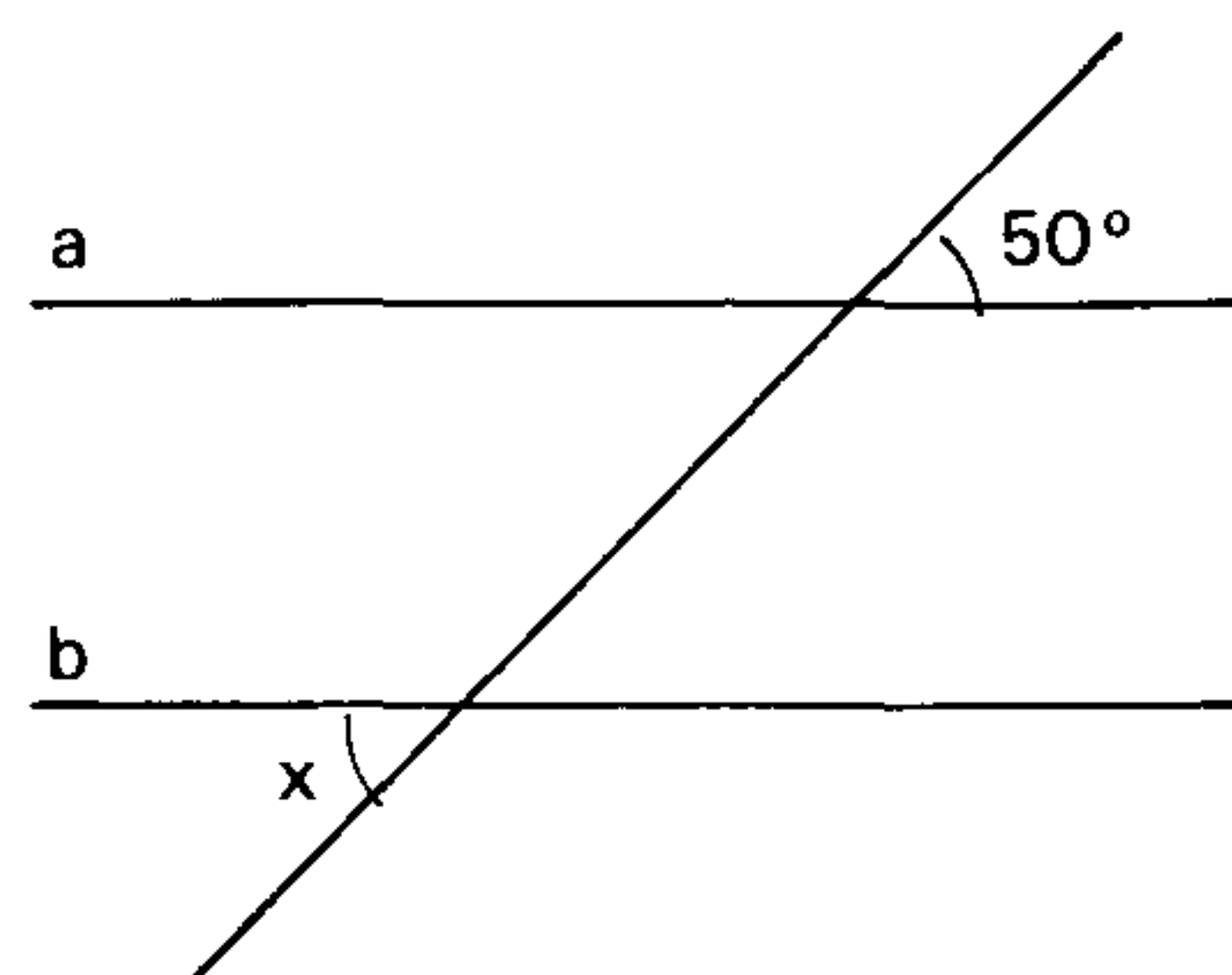
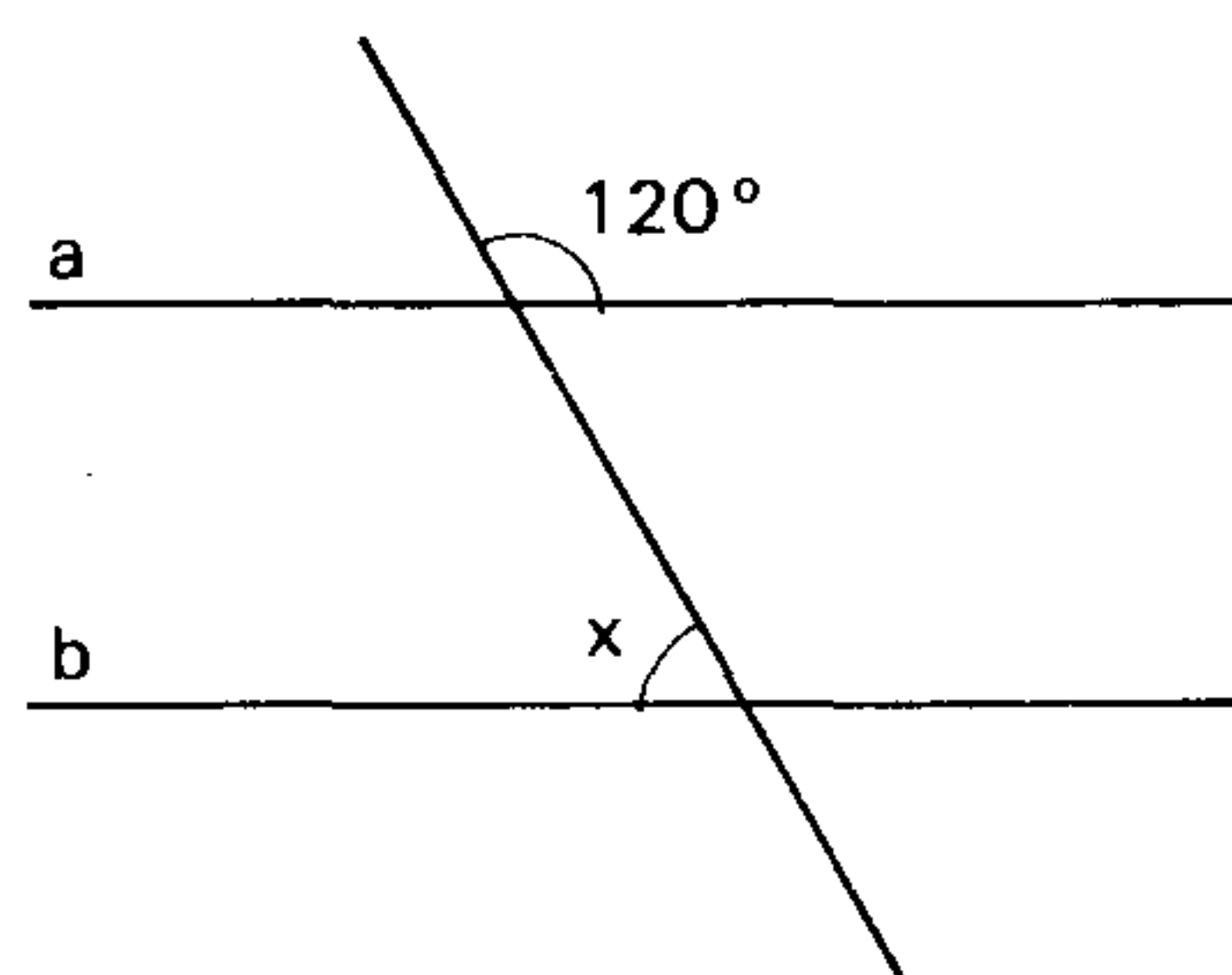
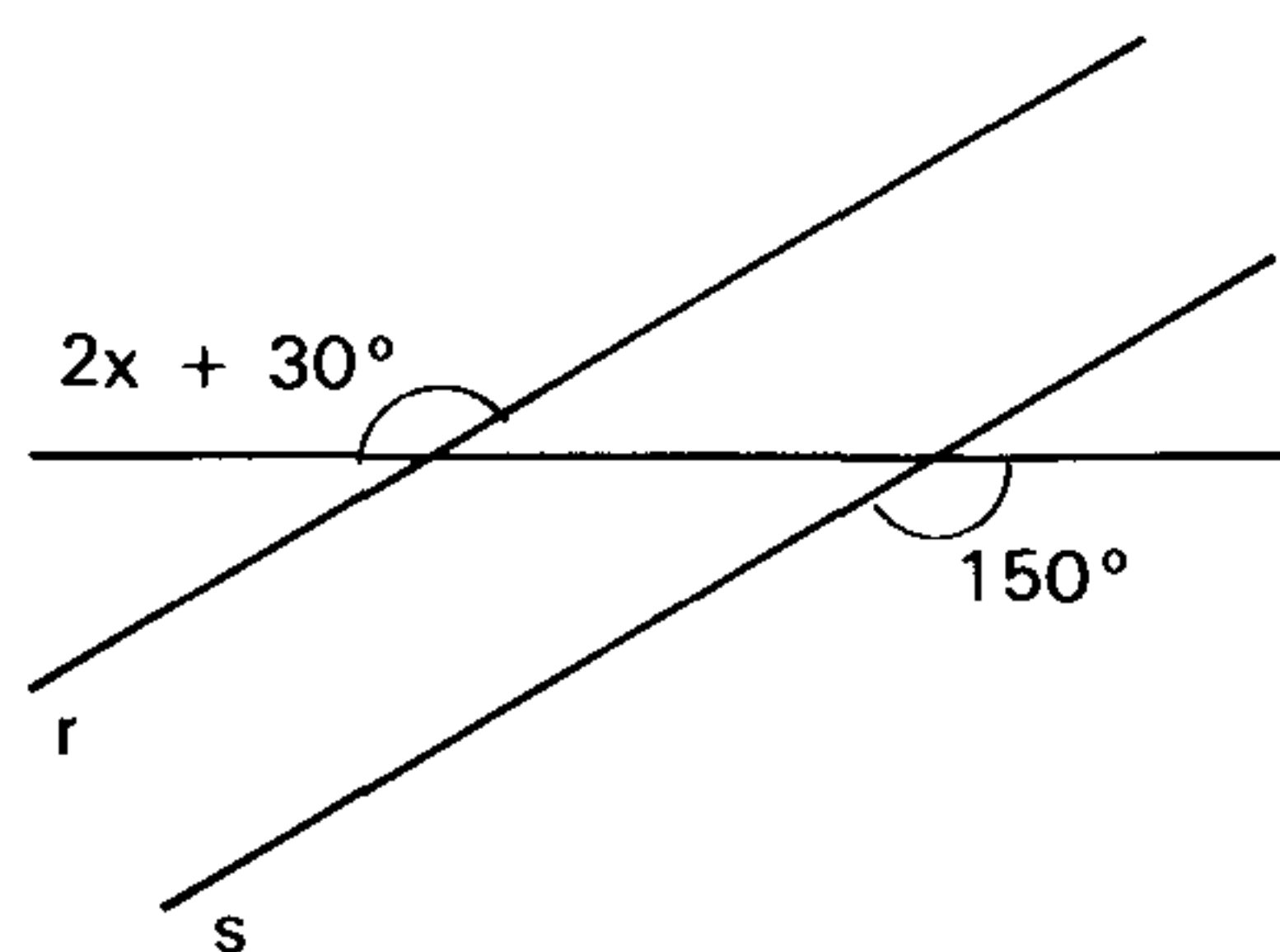
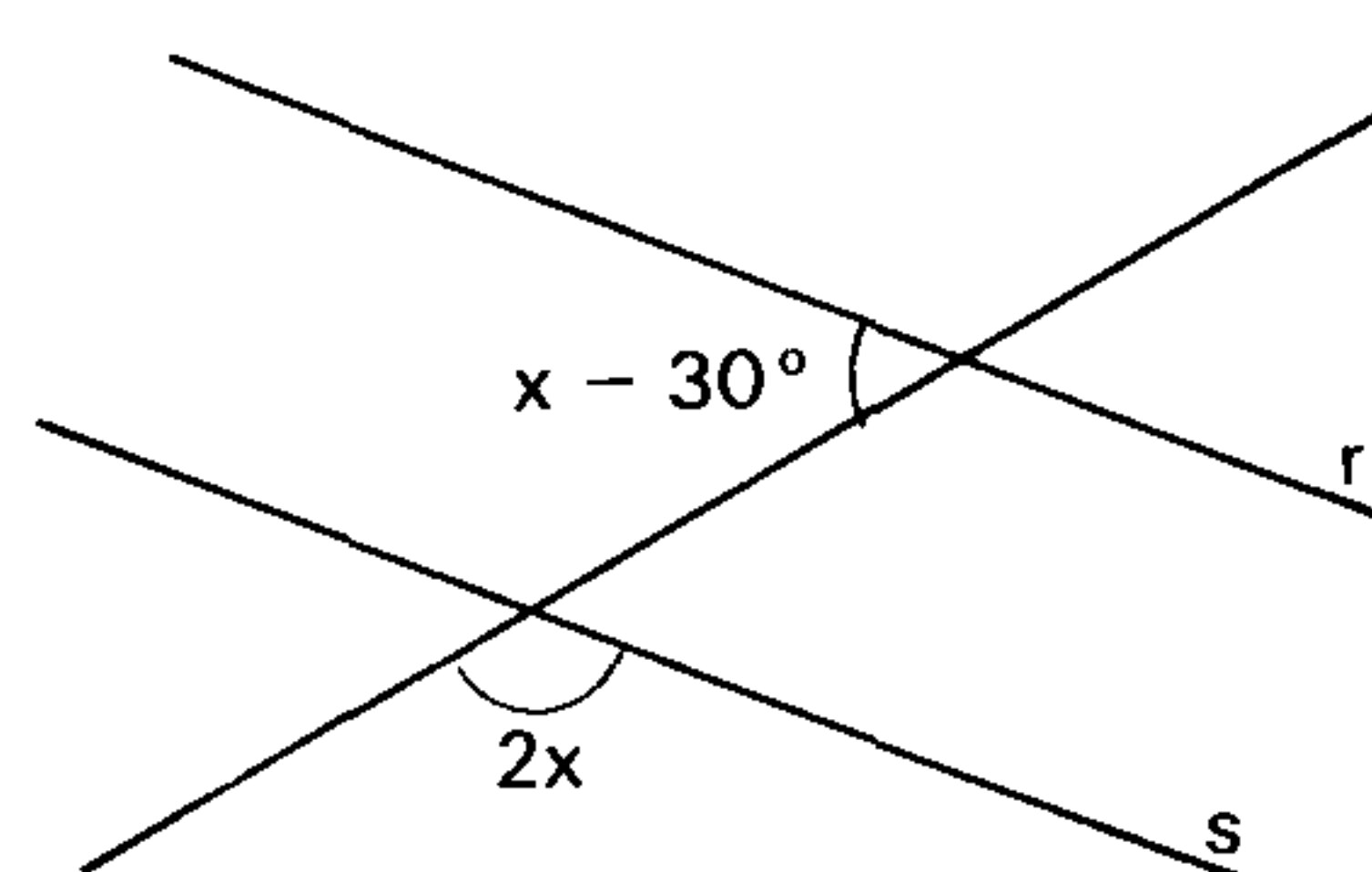
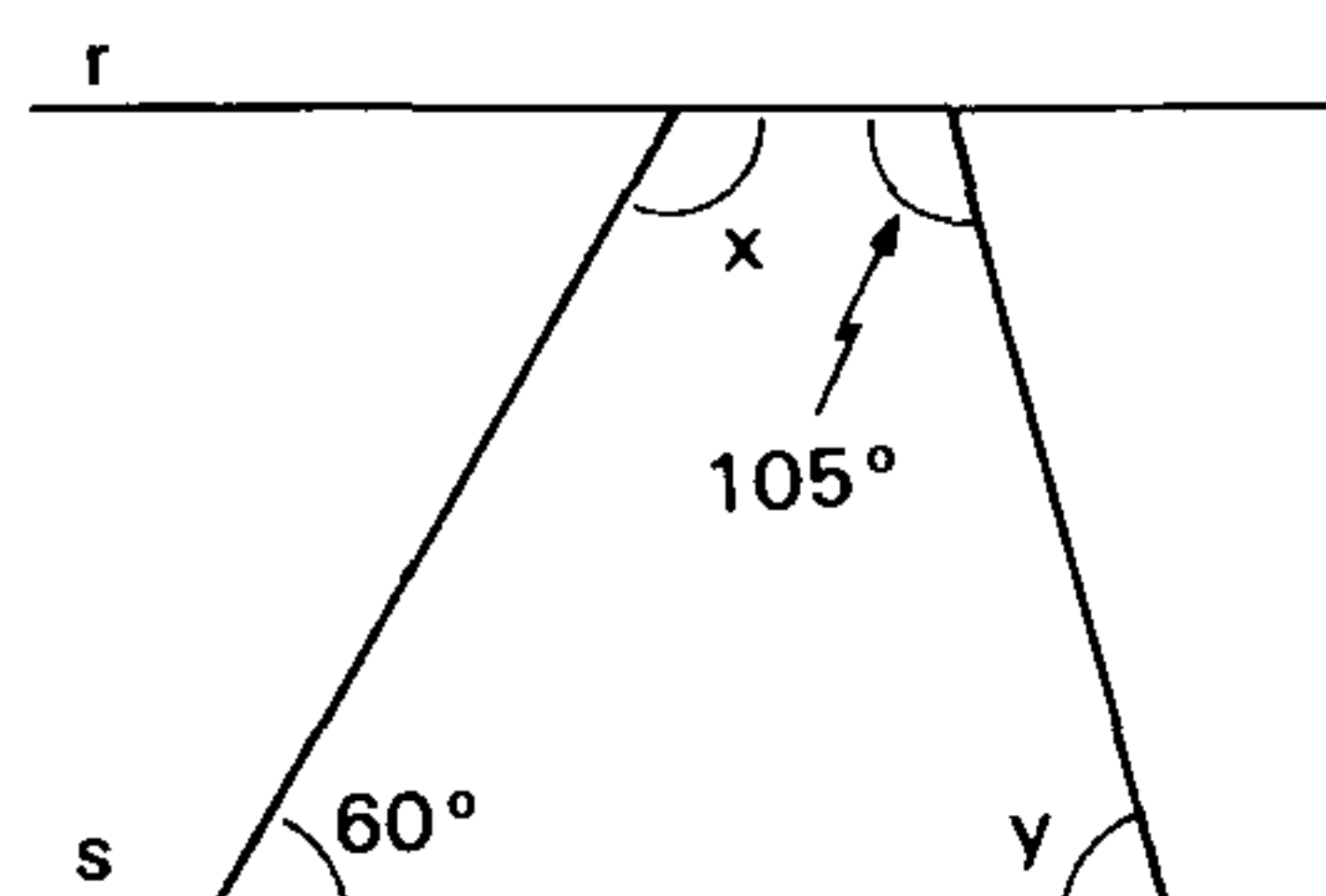
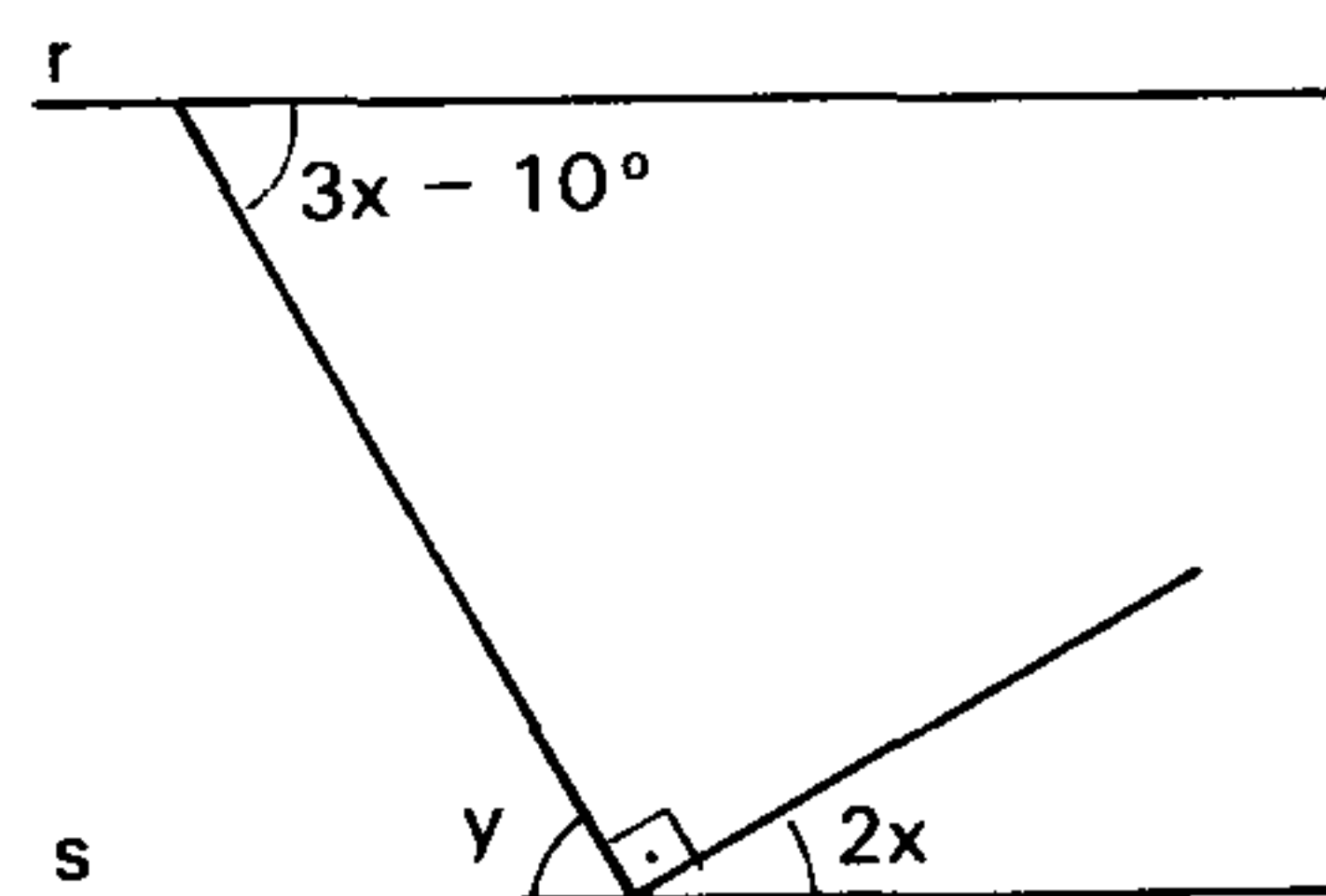
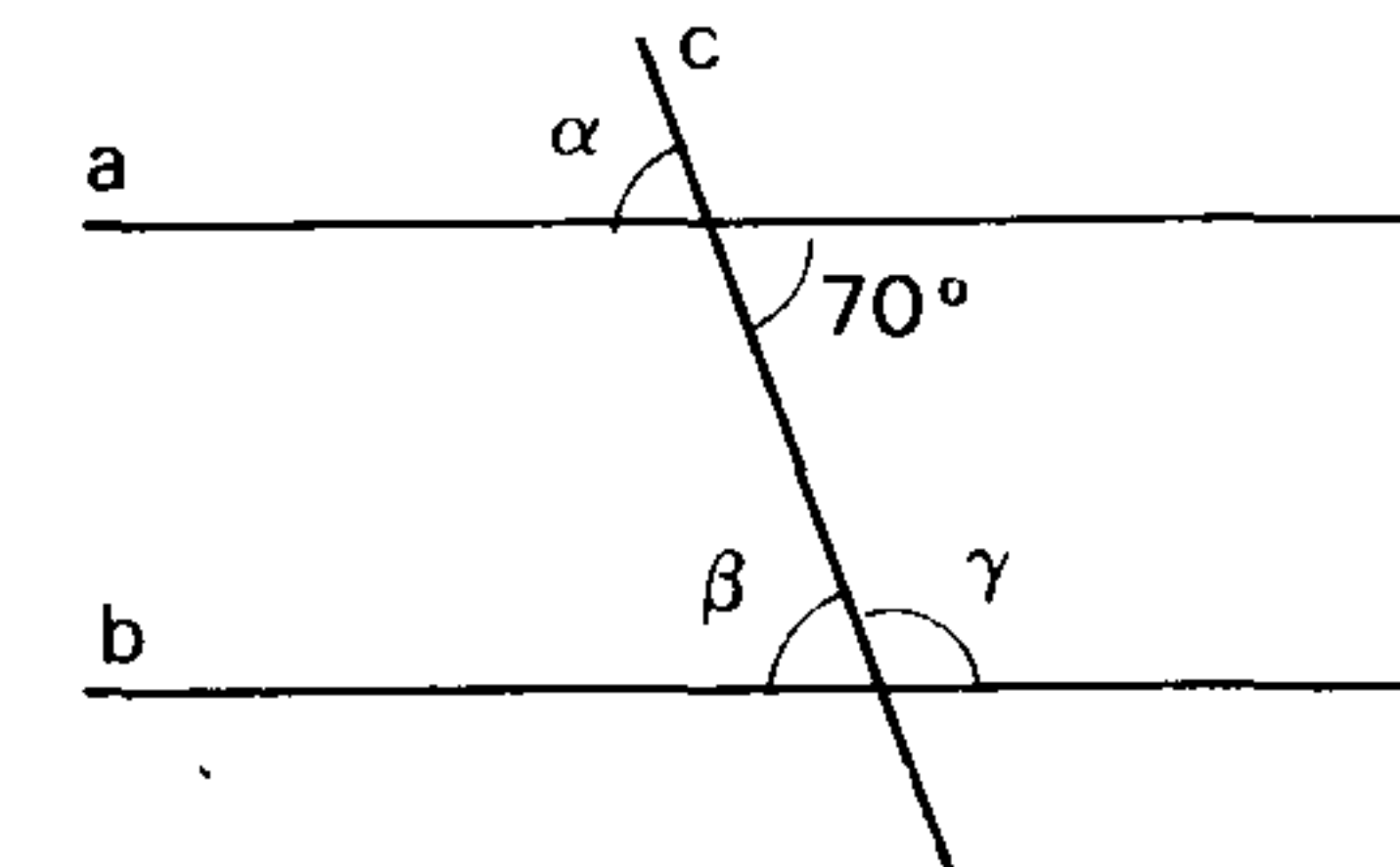
$$AB = AC = BC$$

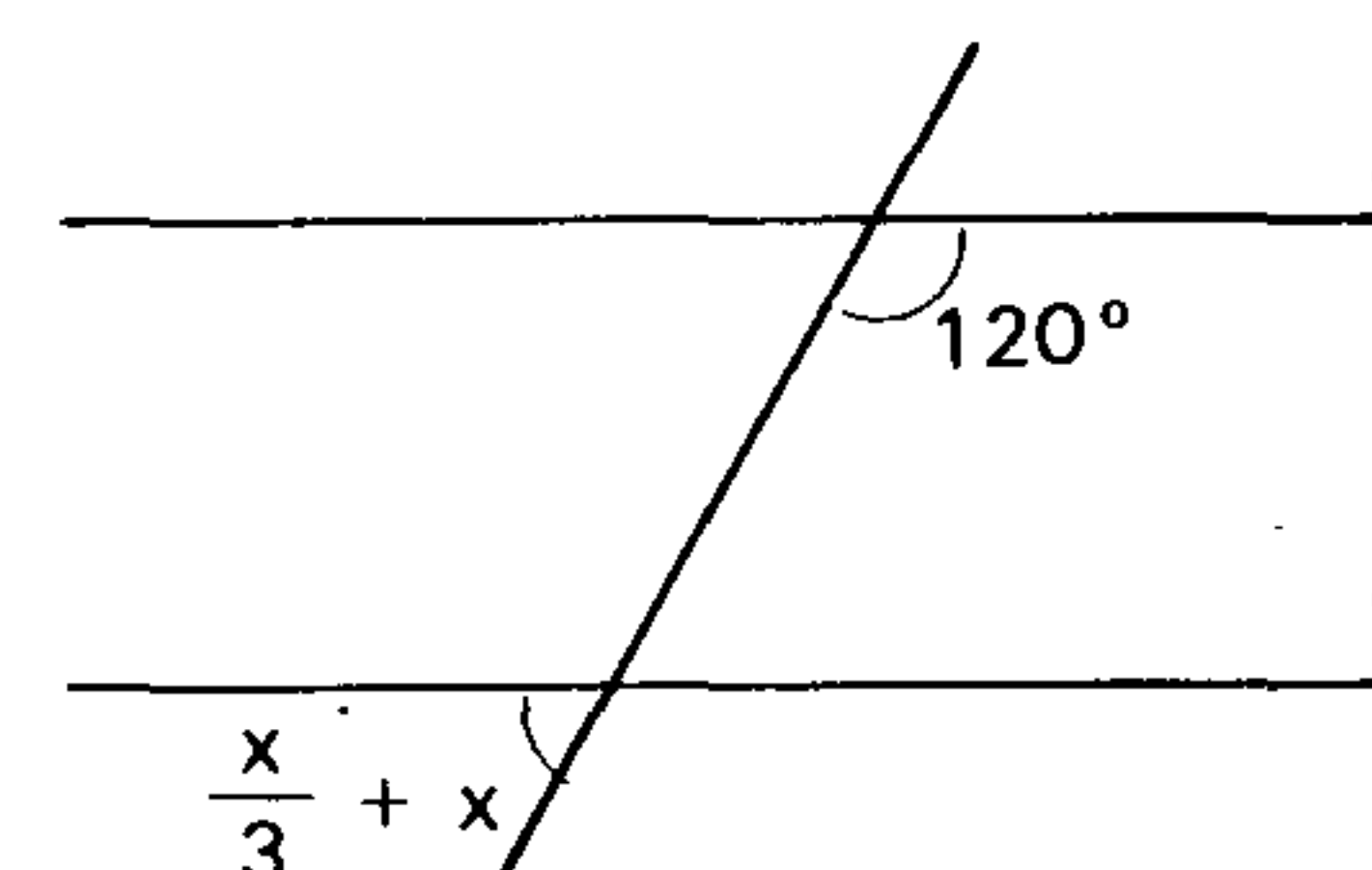
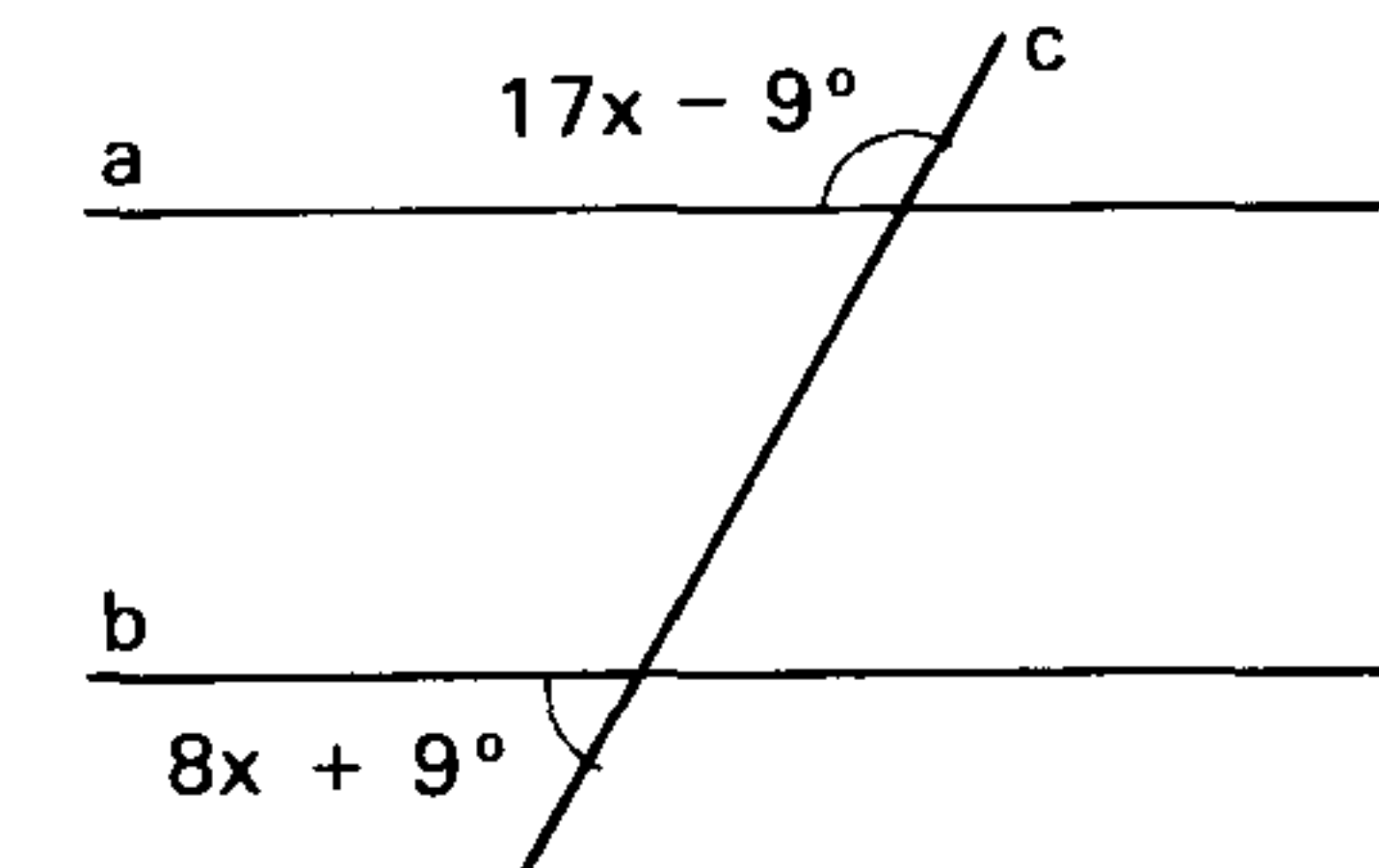
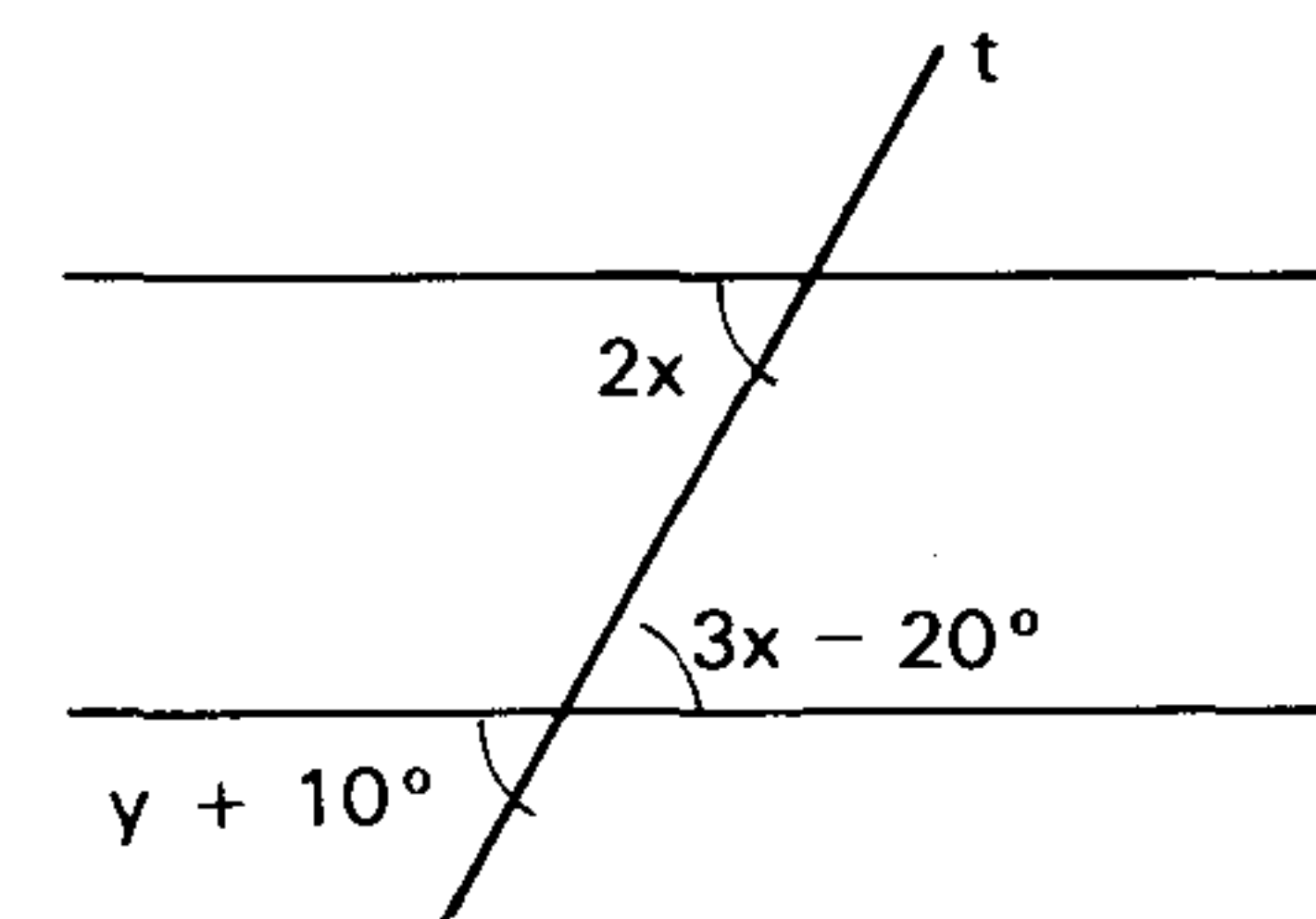
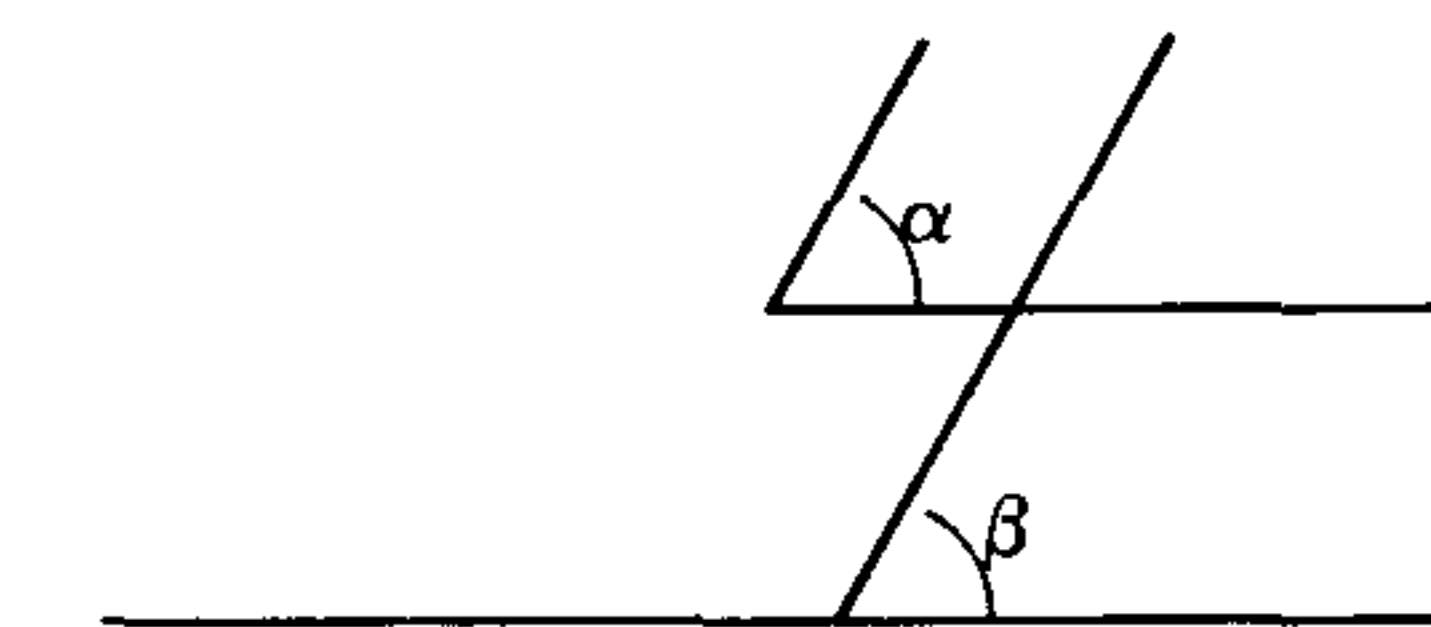
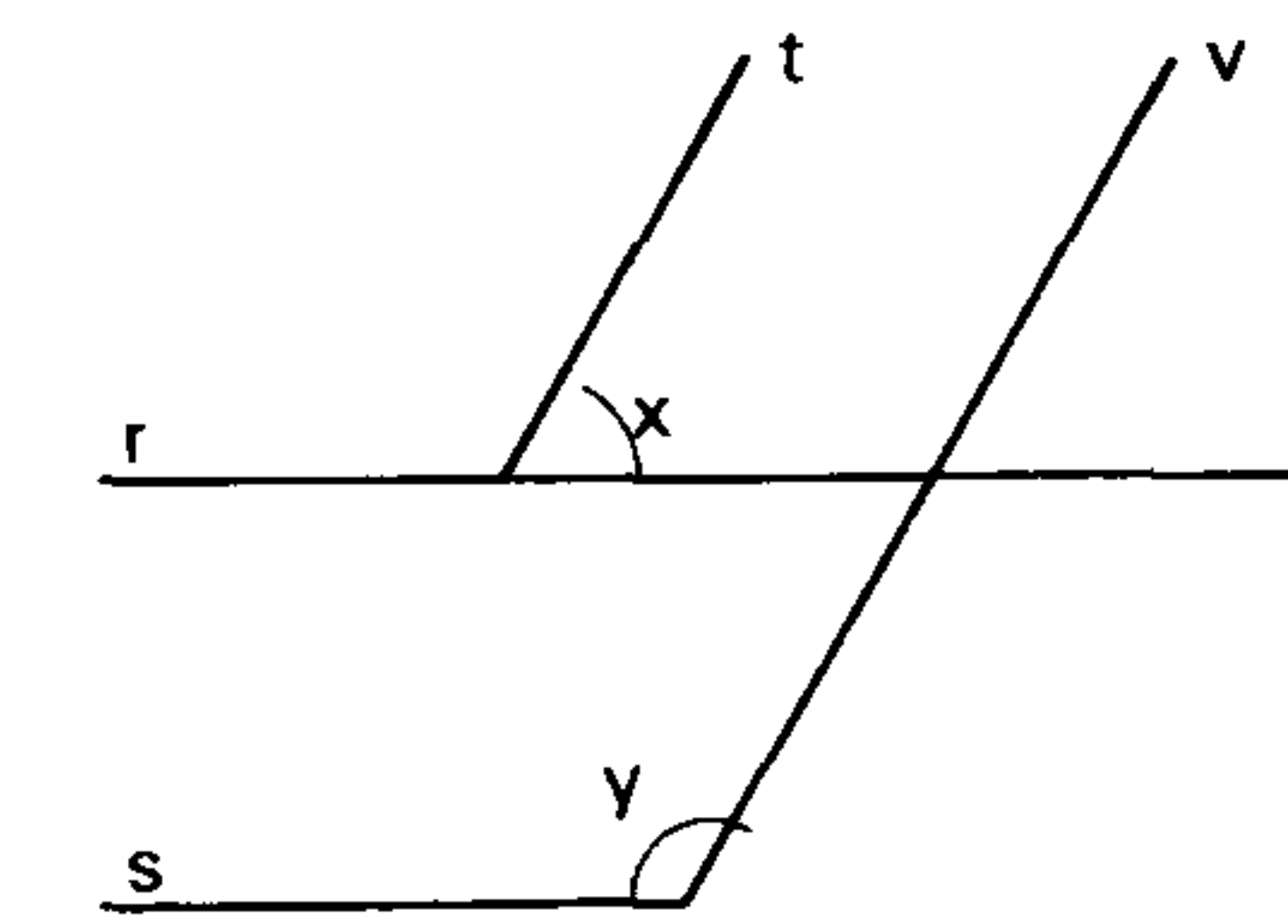
Usando o teorema do triângulo isósceles (item 52), temos:

$$\left.\begin{array}{l} CA = CB \Longrightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ AB = AC \Longrightarrow \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

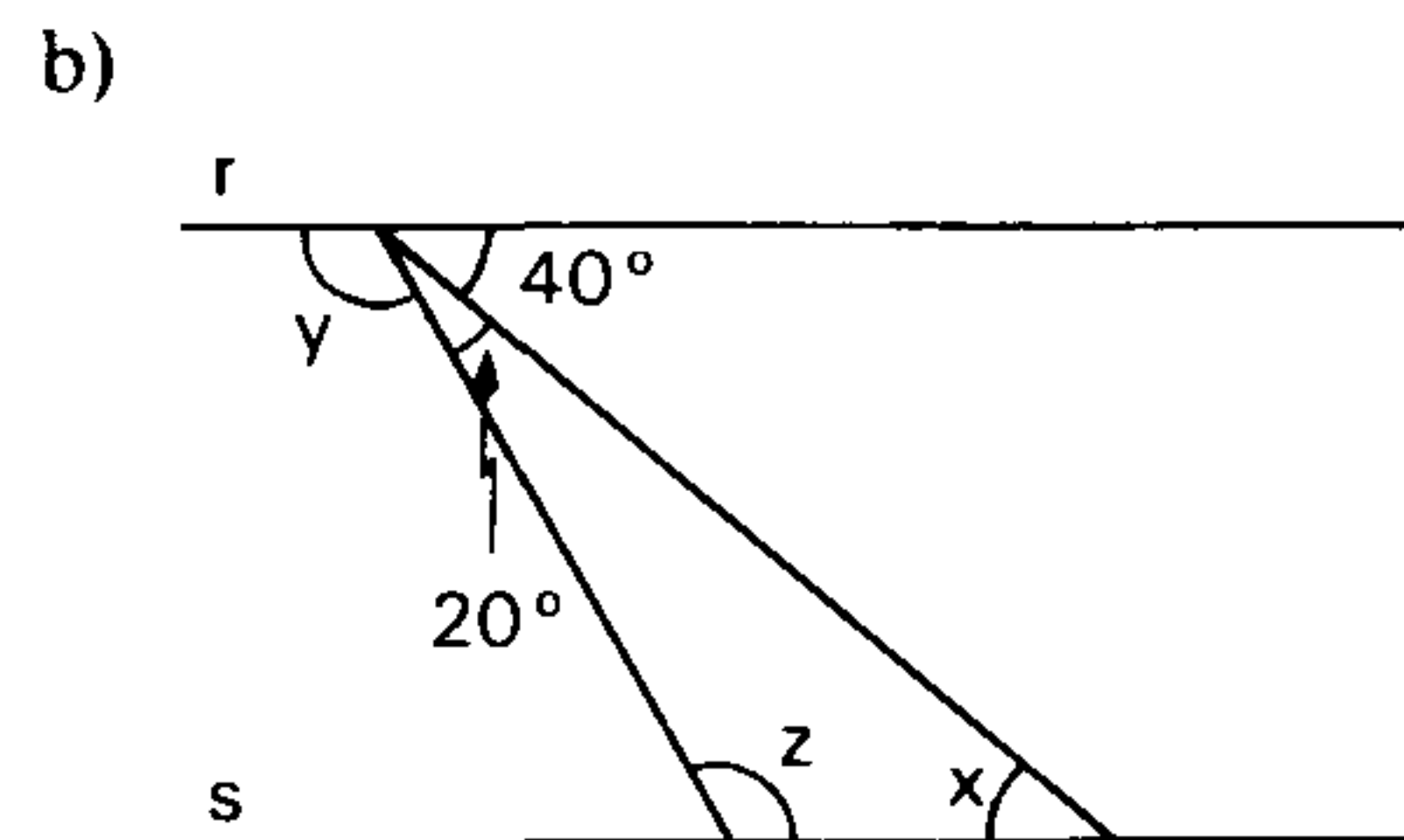
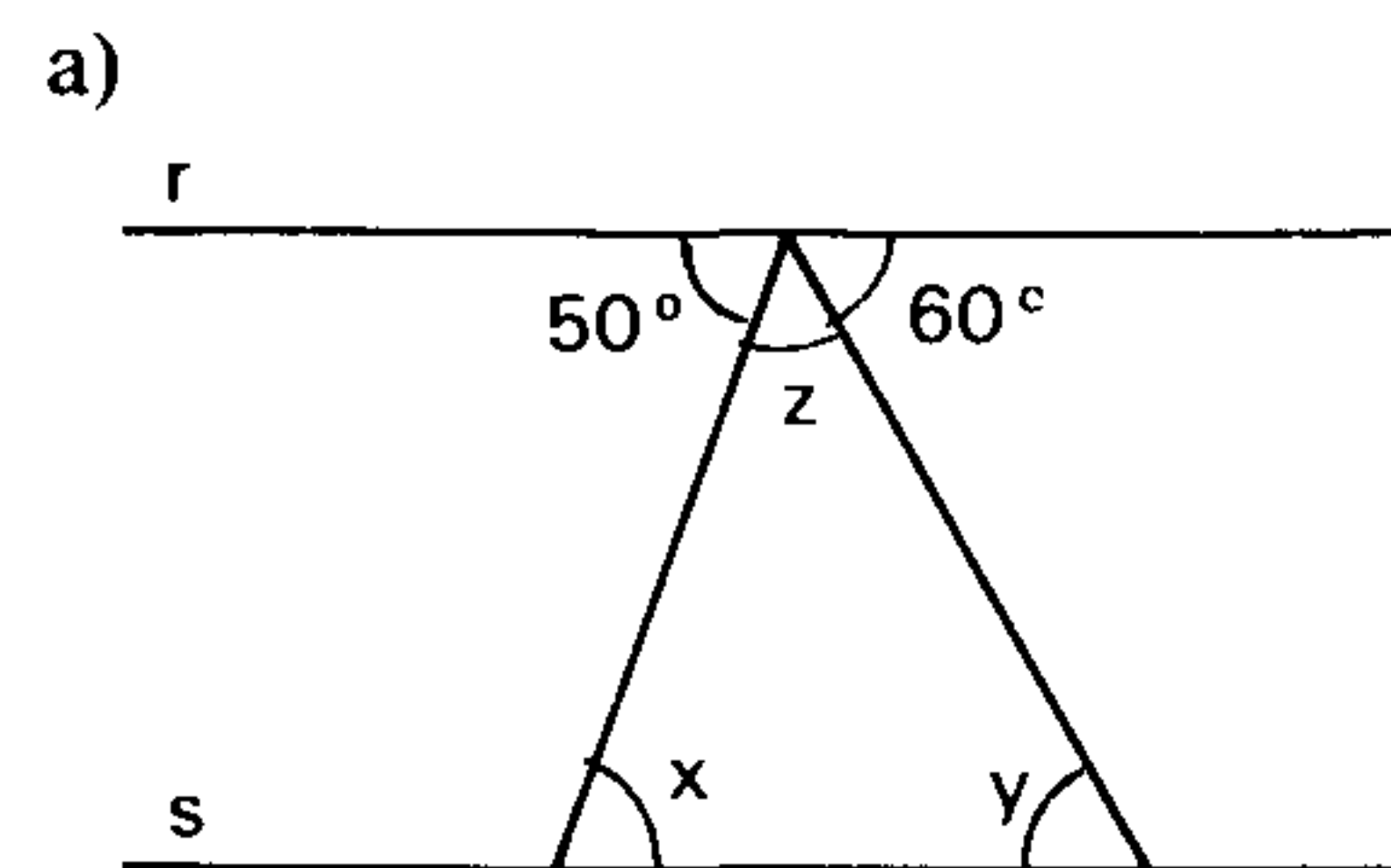
Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (item 76), vem: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$.
Ou seja:

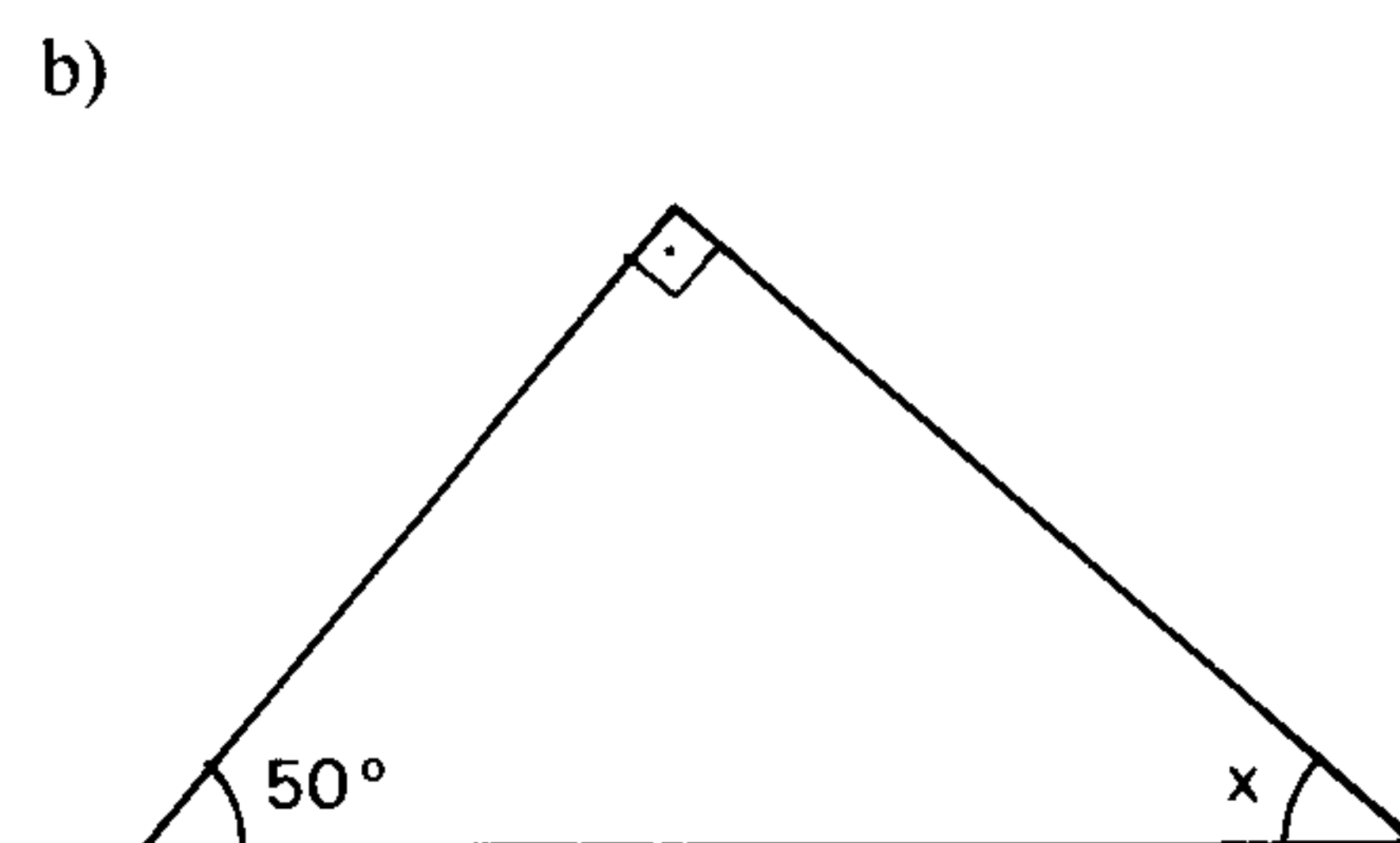
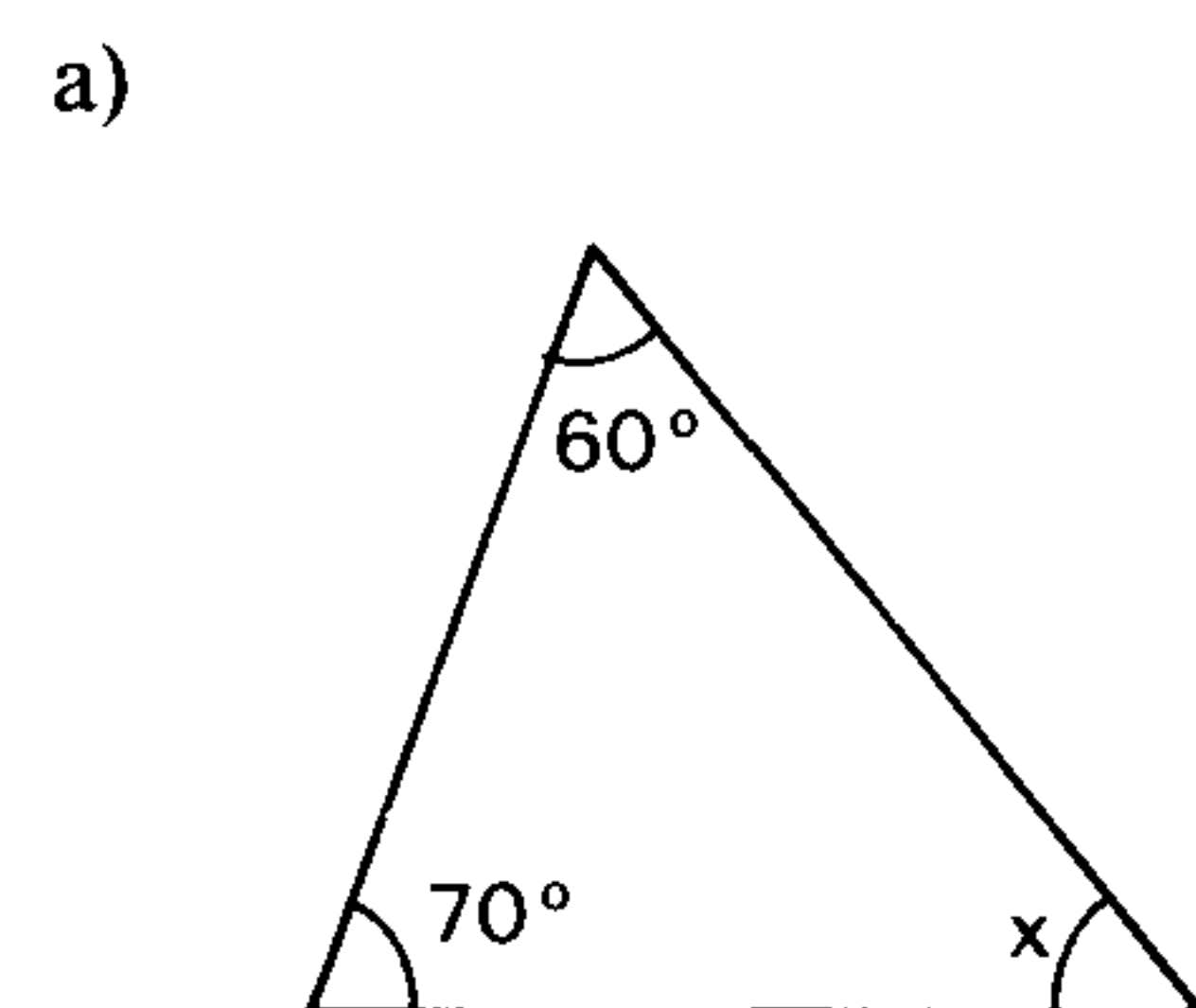
Todo triângulo equilátero é equiângulo e cada ângulo mede 60°.

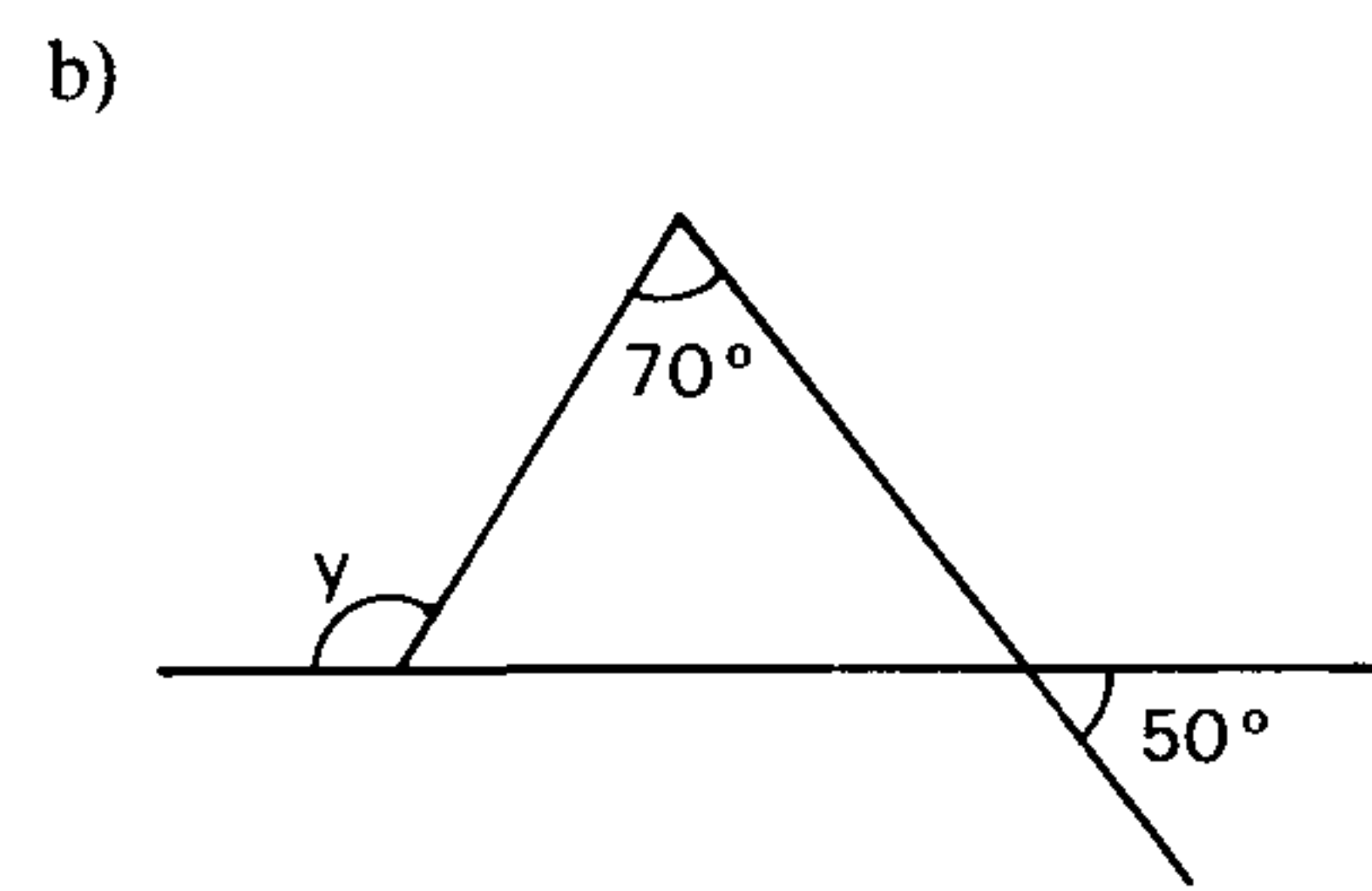
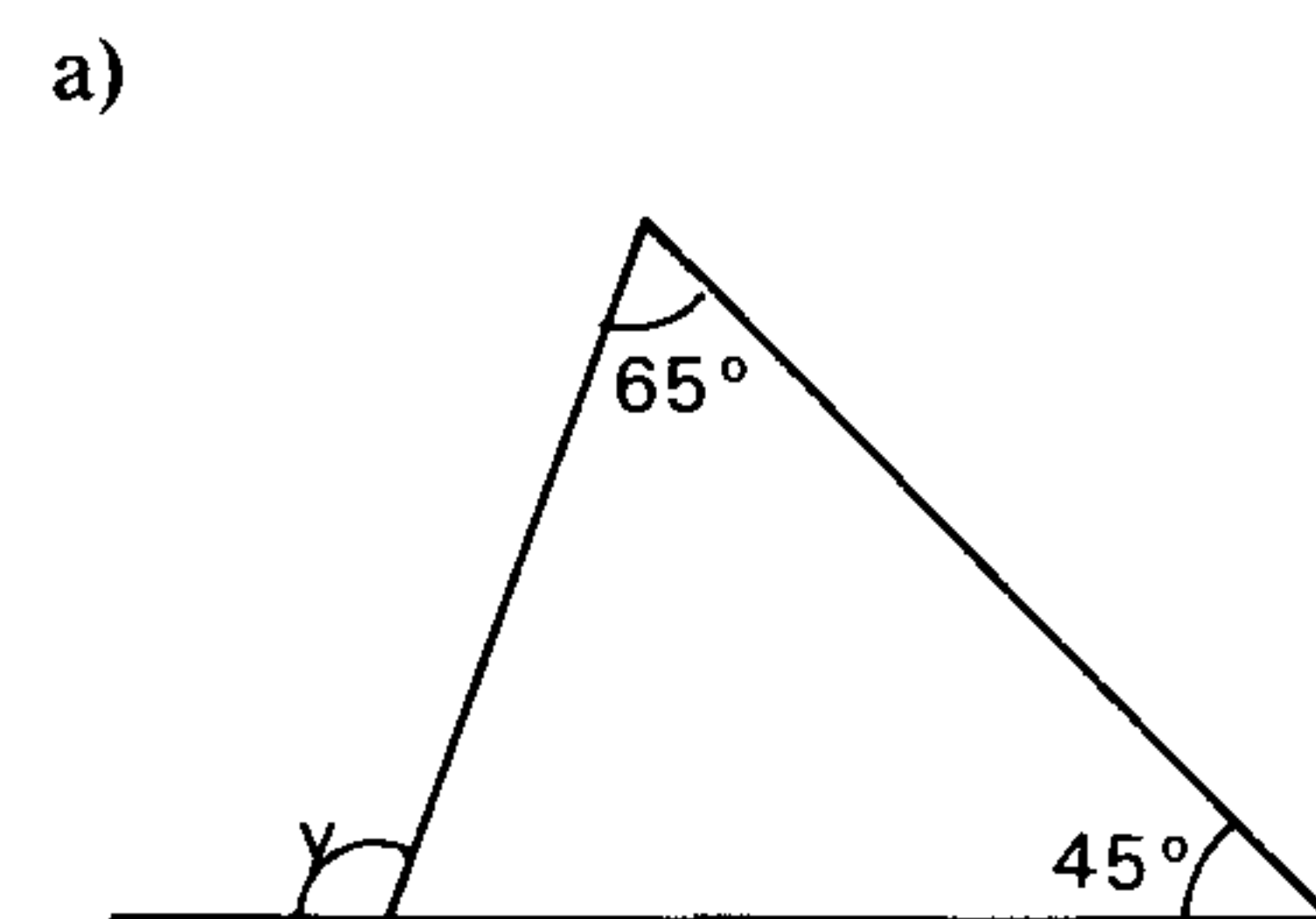
EXERCÍCIOS

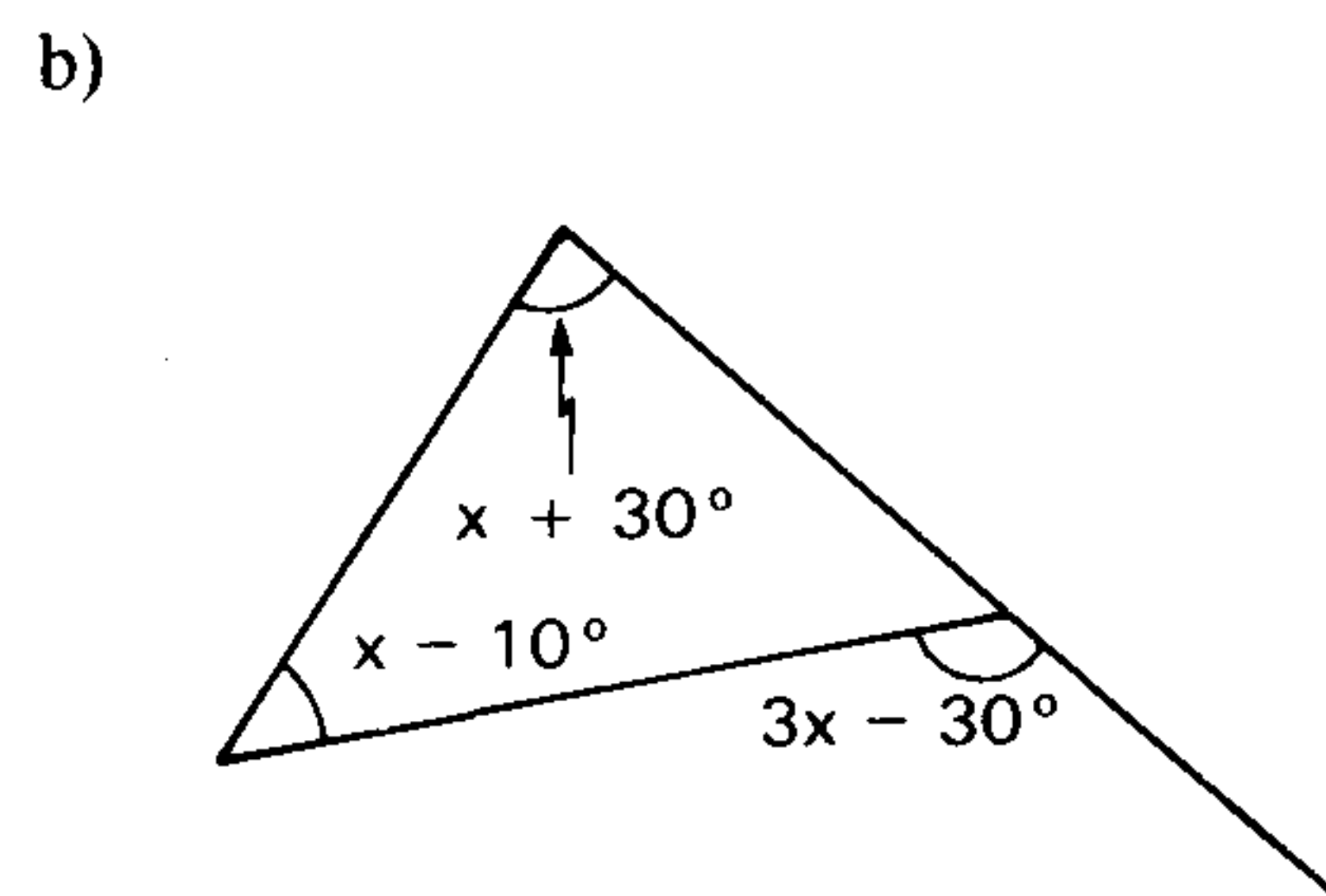
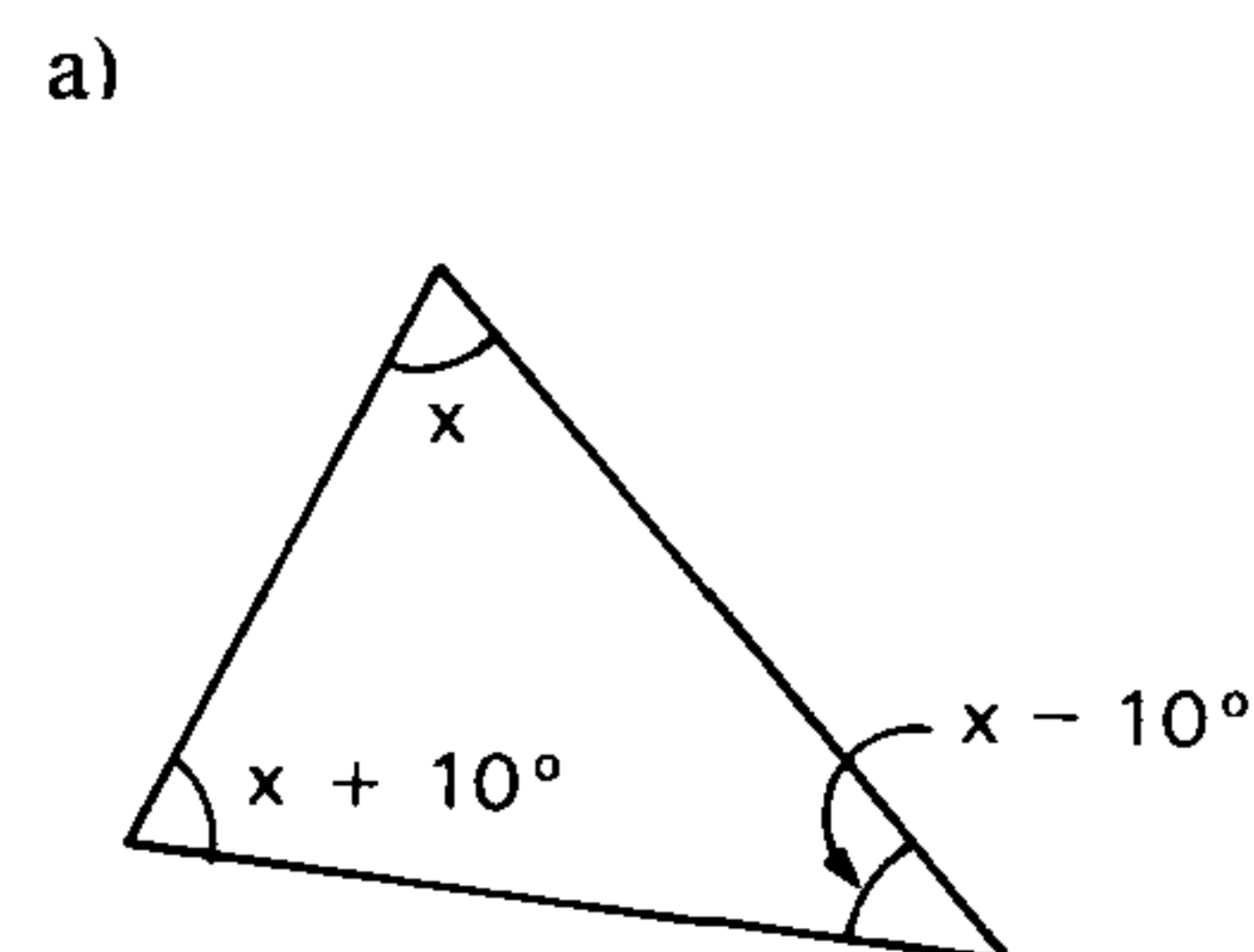
130. Sendo a reta a paralela à reta b, determine x nos casos:

a) b)

131. Se as retas r e s são paralelas, determine x nos casos:

a) b)

132. As retas r e s da figura são paralelas. Determine x e y.

a) b)

133. Na figura, sendo $a \parallel b$, calcule $\alpha + \beta - \gamma$.

134. A soma dos quatro ângulos agudos formados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal é igual a $80°$. Determine o ângulo obtuso.

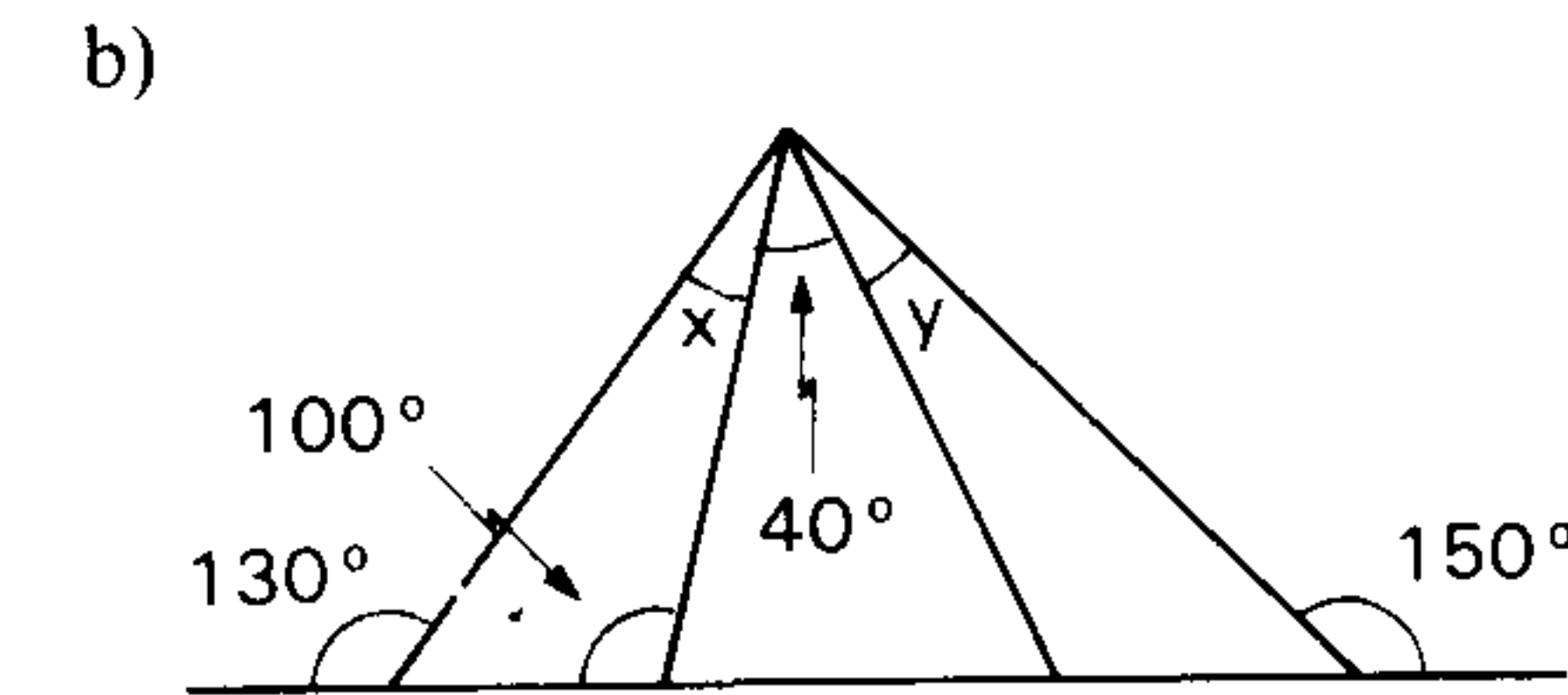
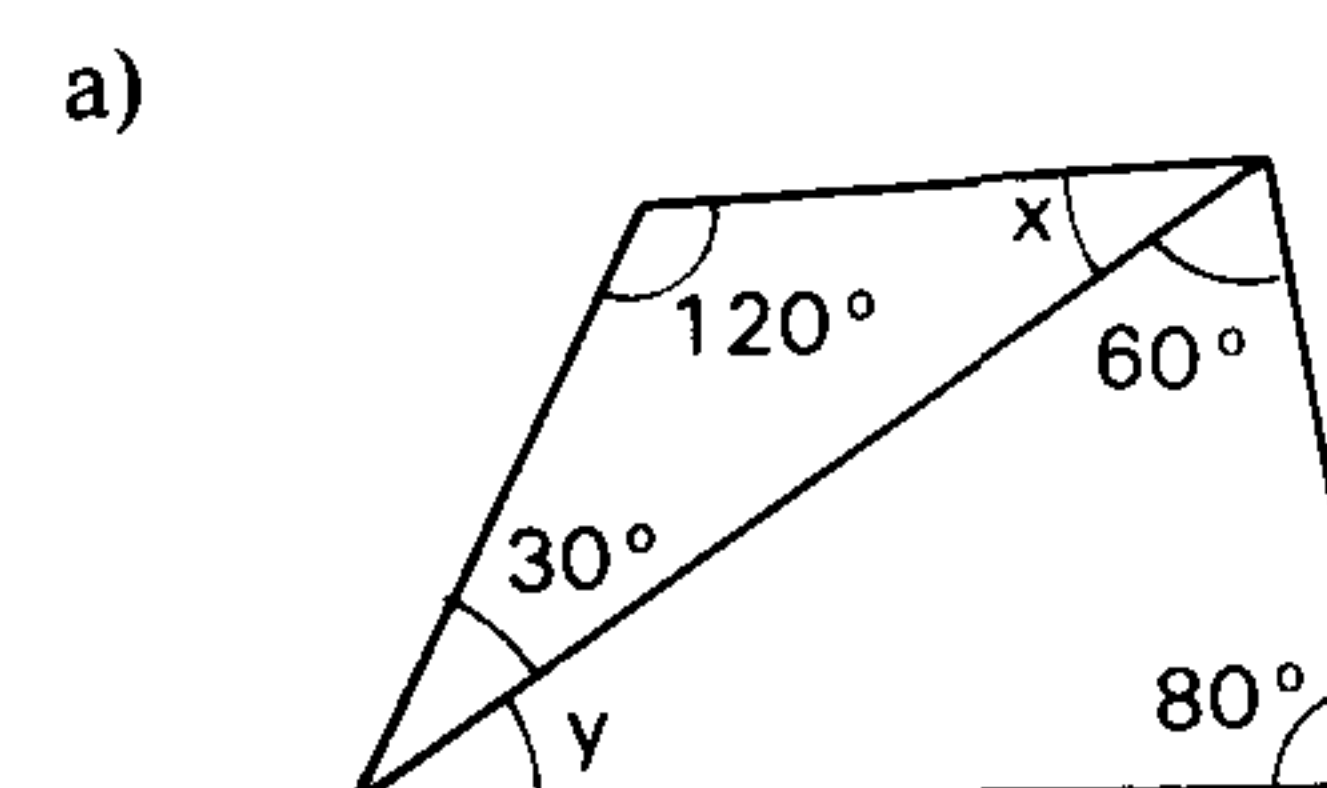
135. Sendo a paralela a b, calcule x.

136. Na figura, sendo $a \parallel b$, calcule x.

137. Na figura abaixo, sendo $r \parallel s$, calcule x e y.

138. Na figura temos os ângulos α e β de lados respectivamente paralelos. Sendo $\alpha = 8x$ e $\beta = 2x + 30°$, determine o suplemento de β.

139. Calcule o valor de $x + y$, sendo $r \parallel s$ e $t \parallel v$.

140. Se as retas r e s são paralelas, determine x, y e z nos casos:

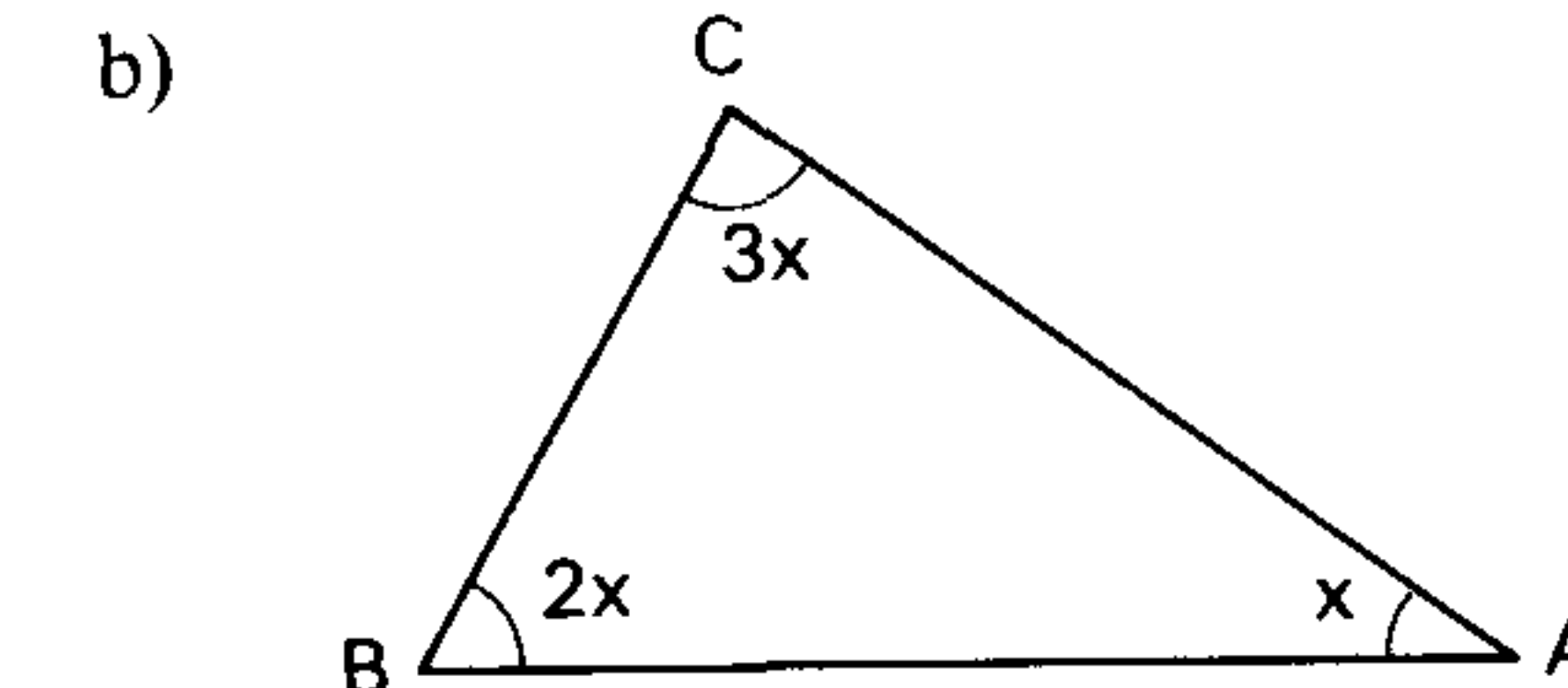
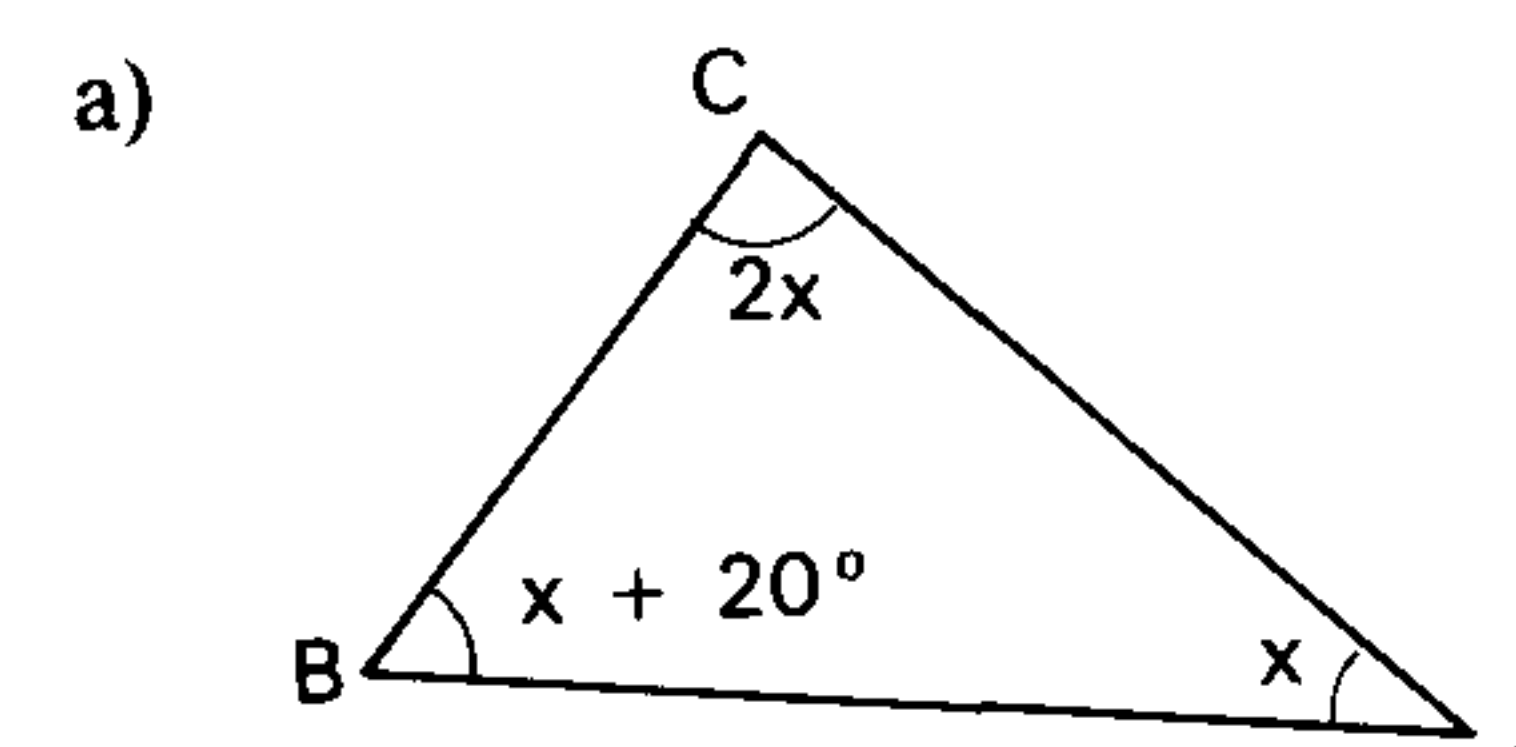
a) b)

141. Determine o valor de x nos casos:

a) b)

142. Determine y nos casos:

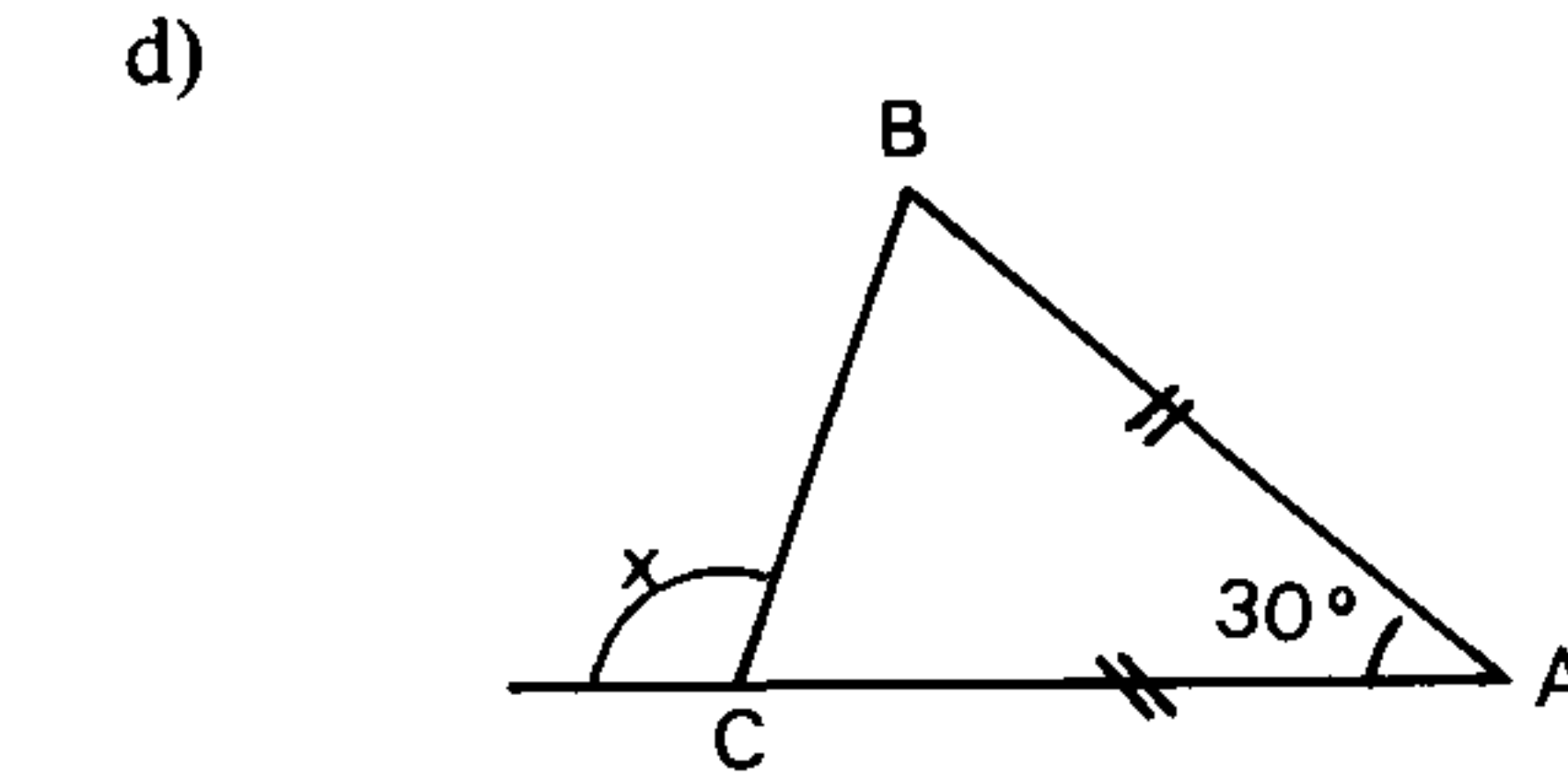
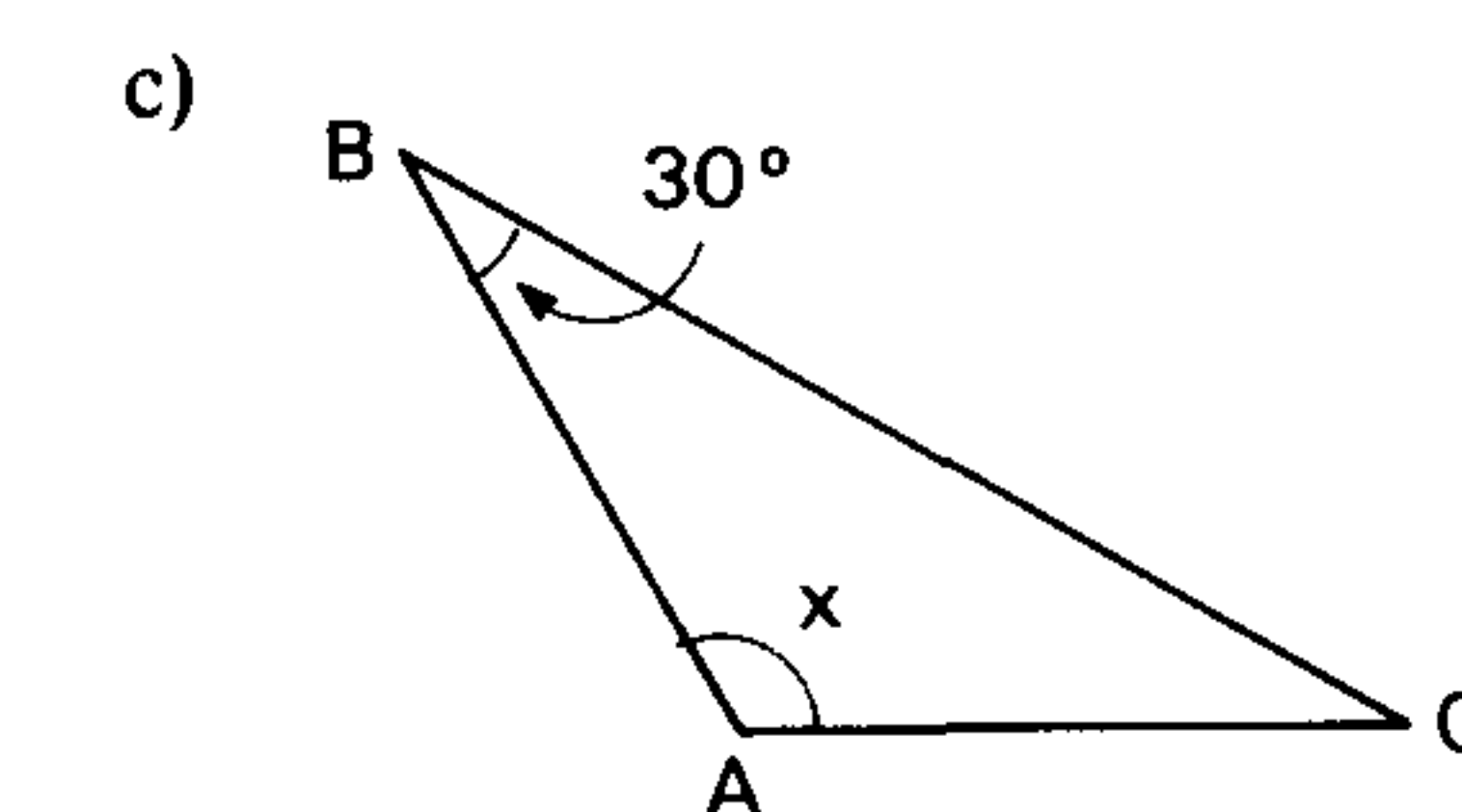
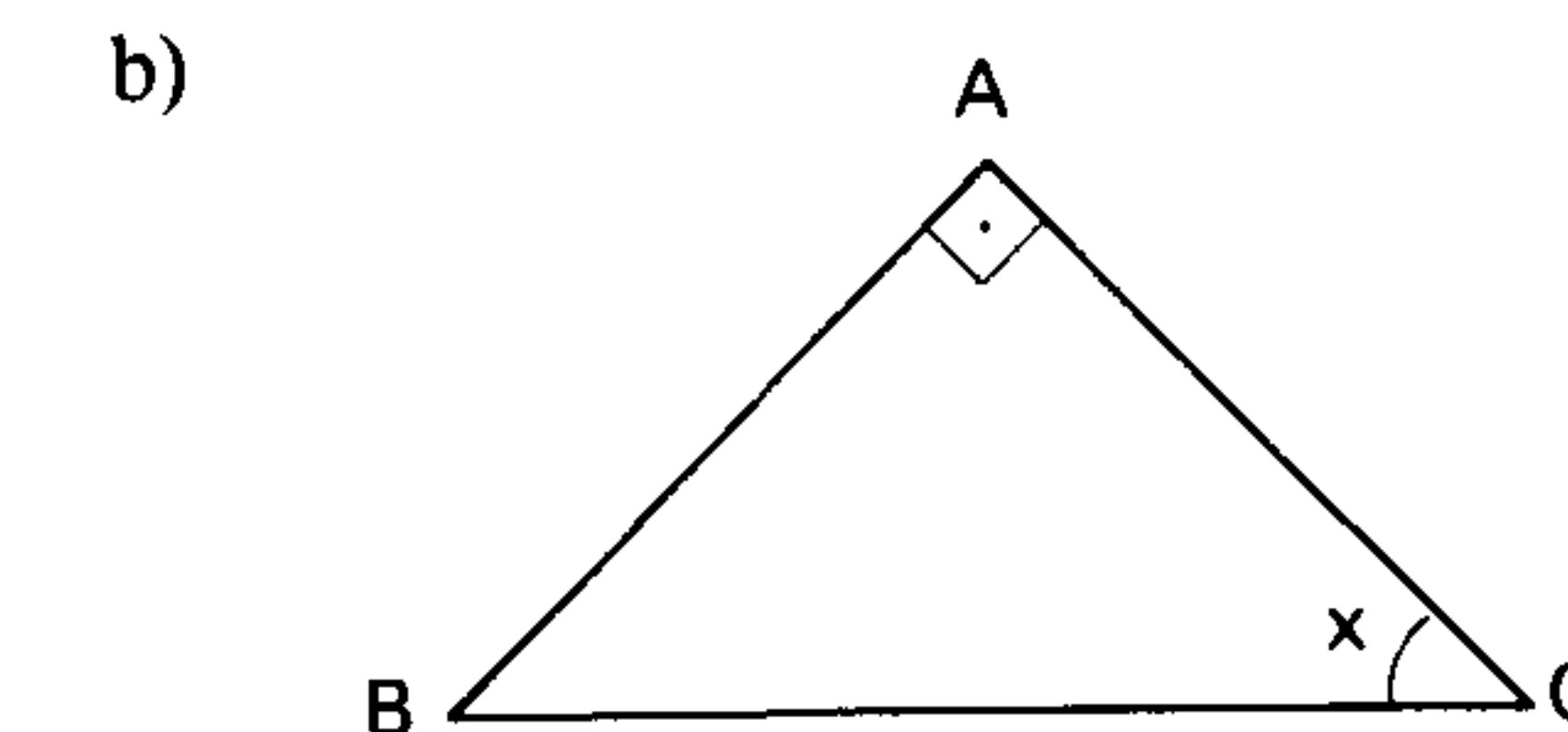
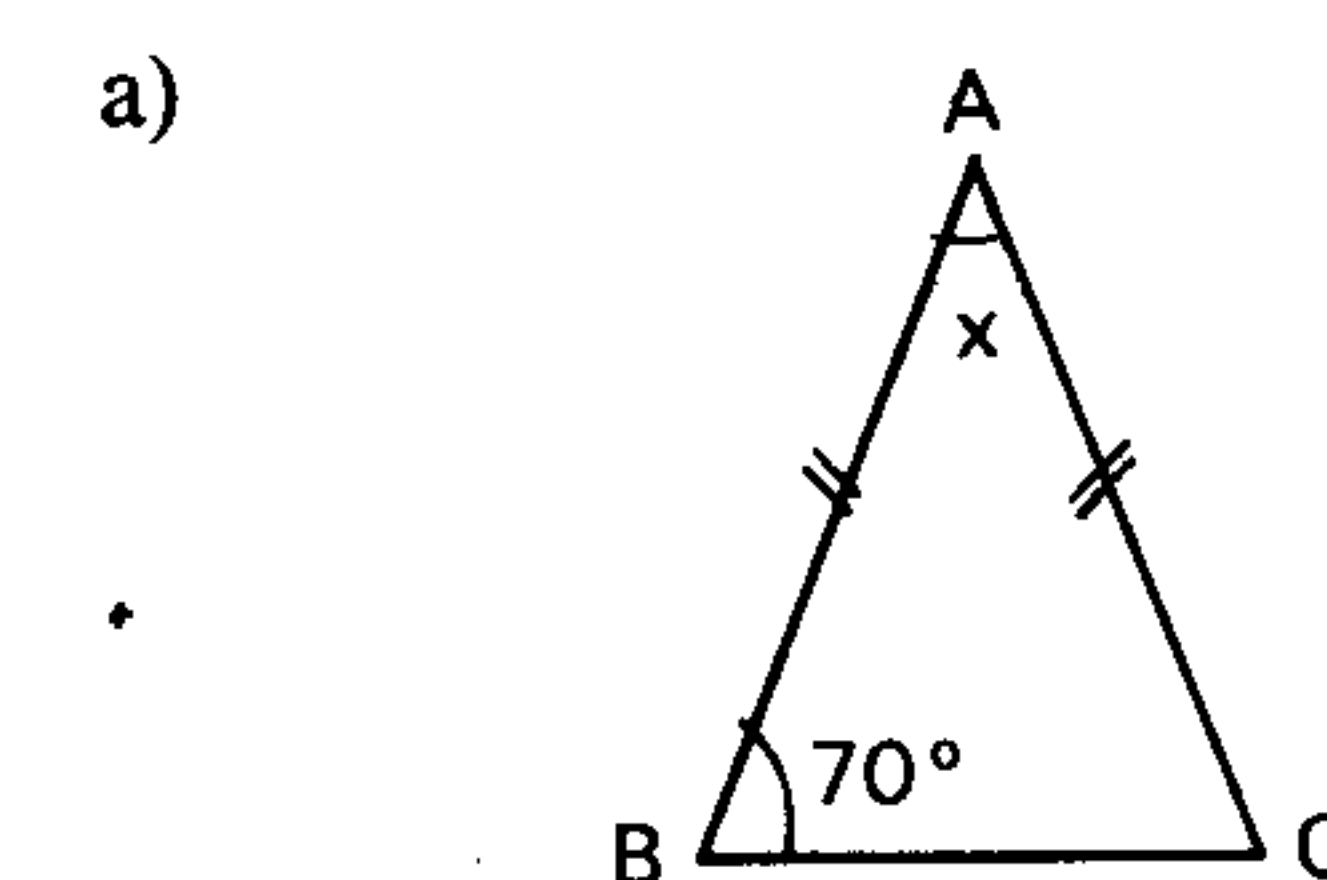
a) b)

143. Determine x nos casos:

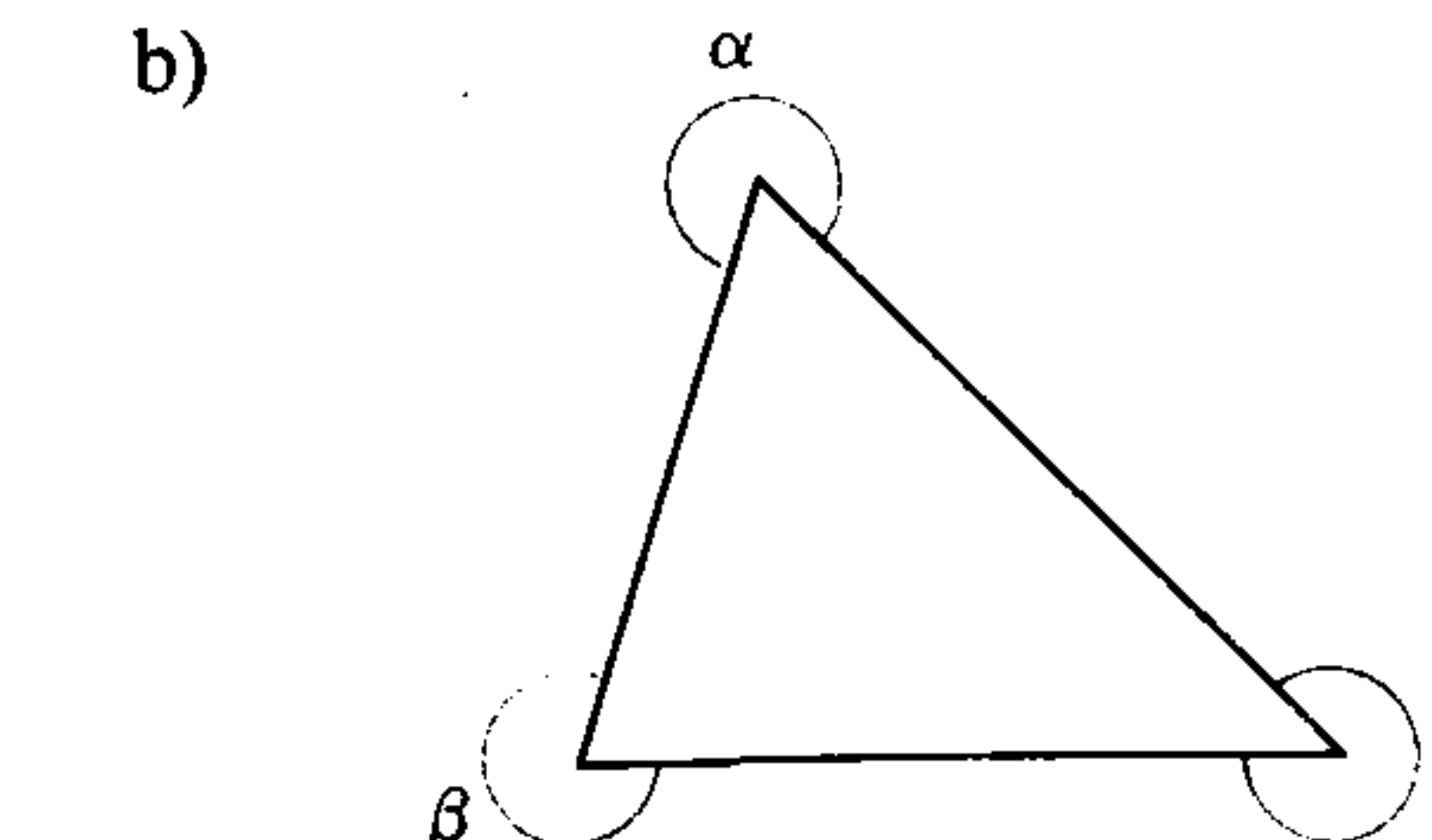
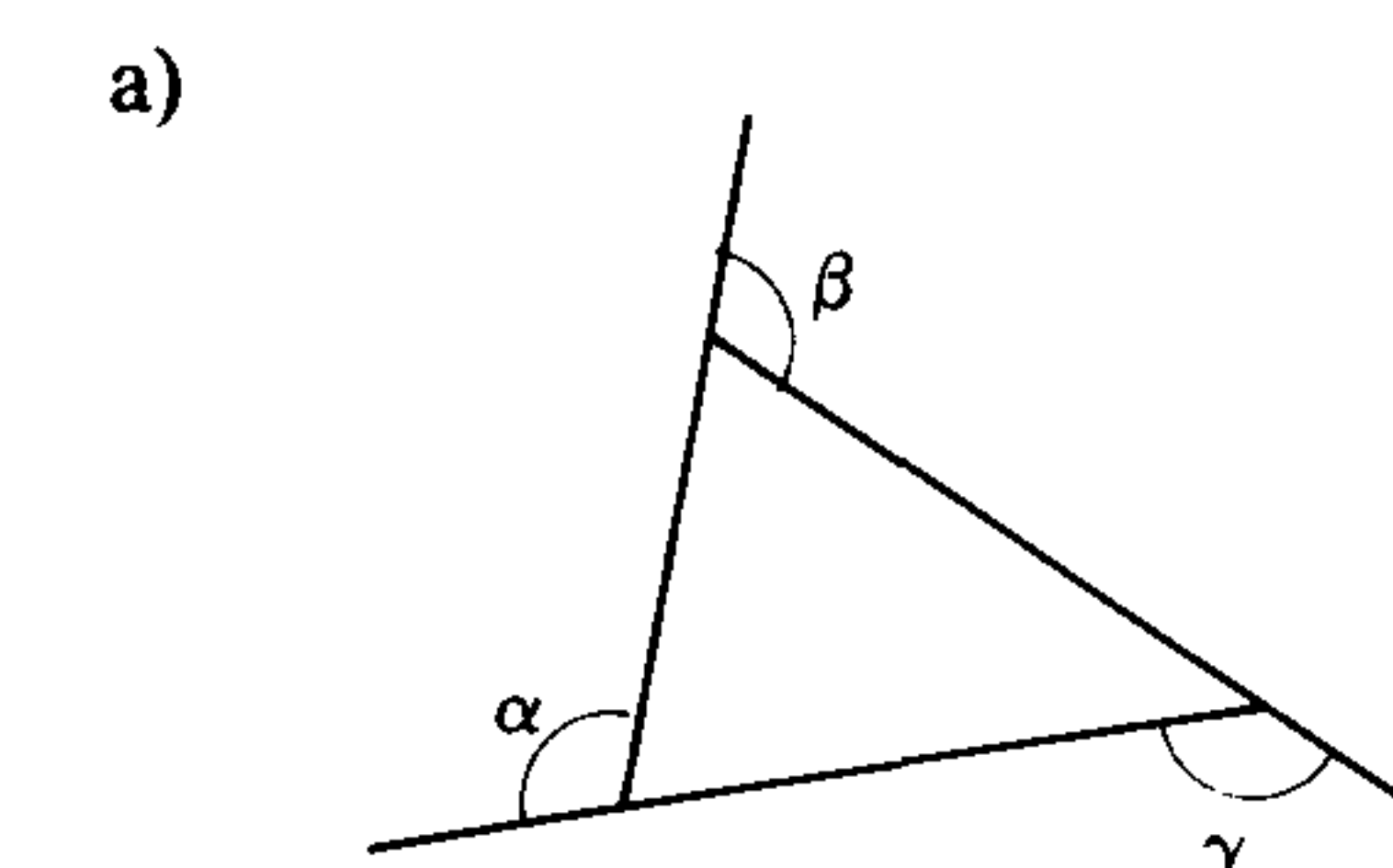
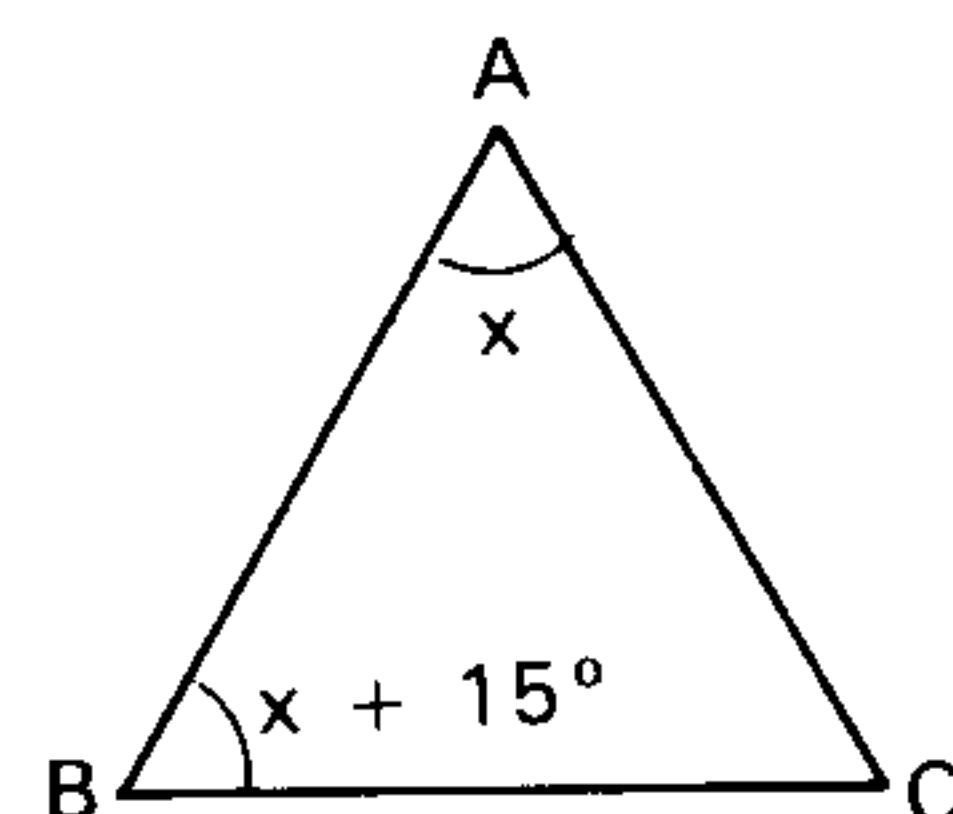
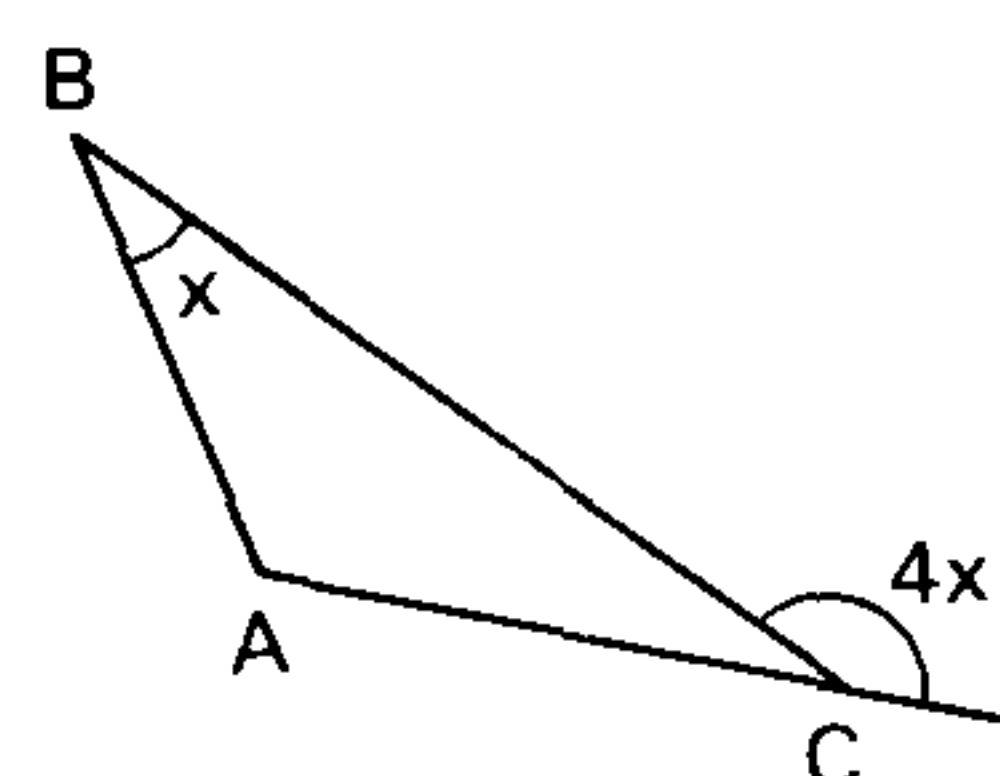
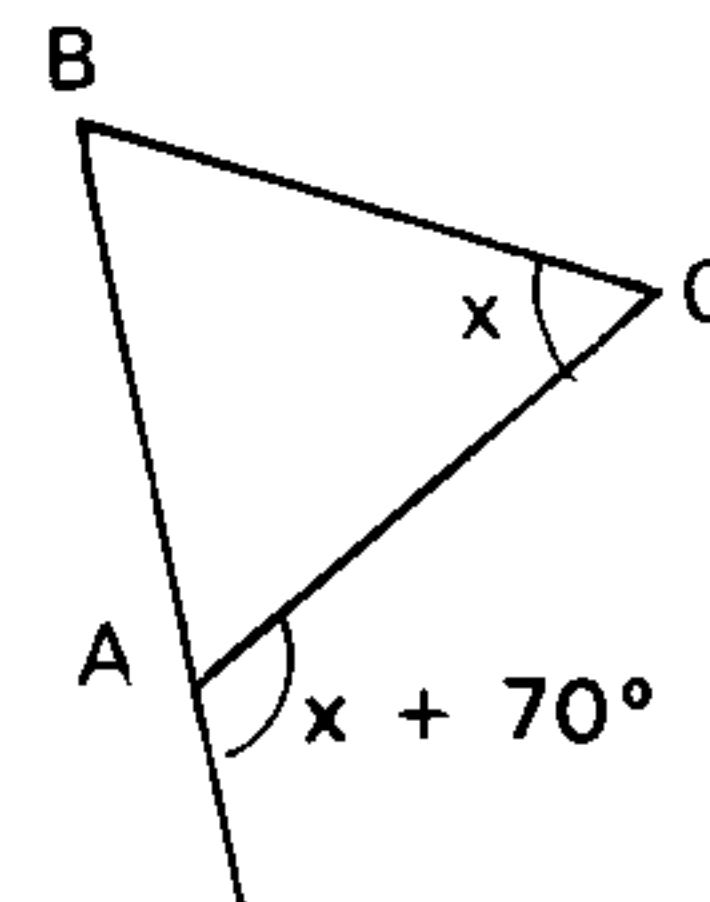
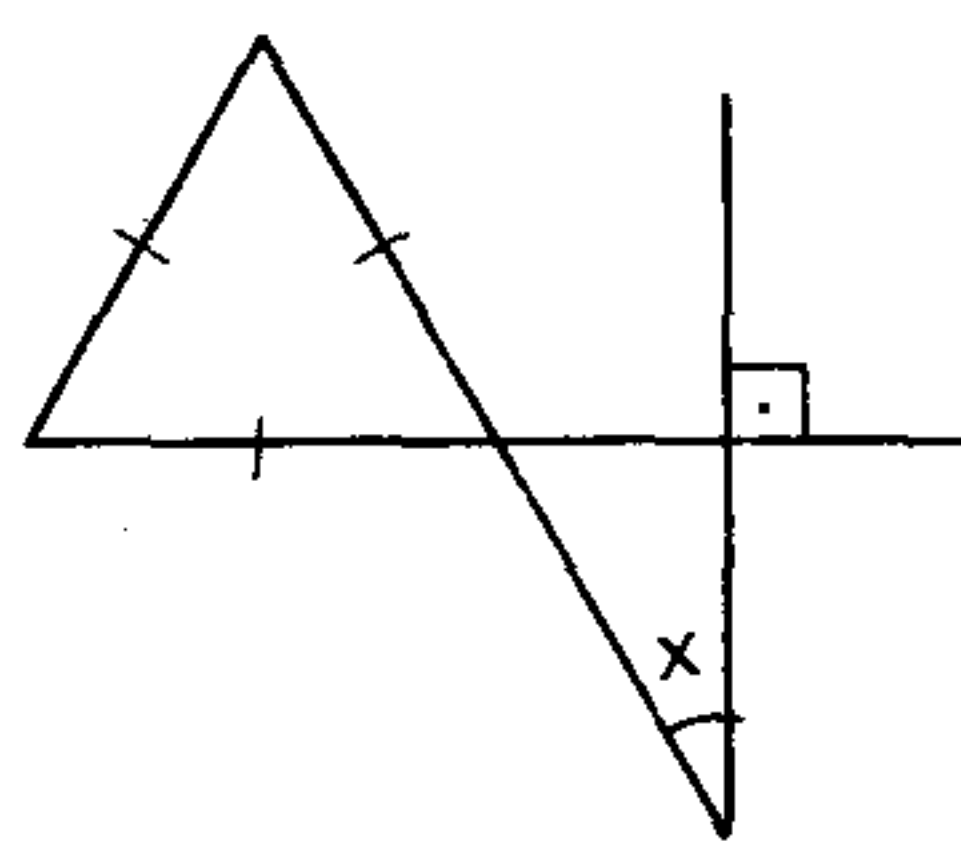
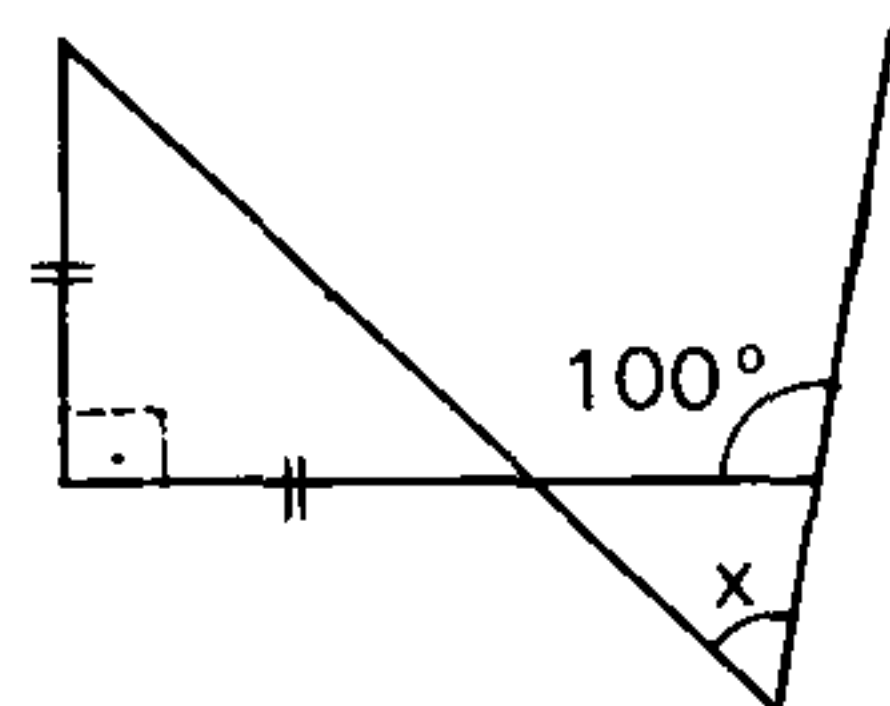
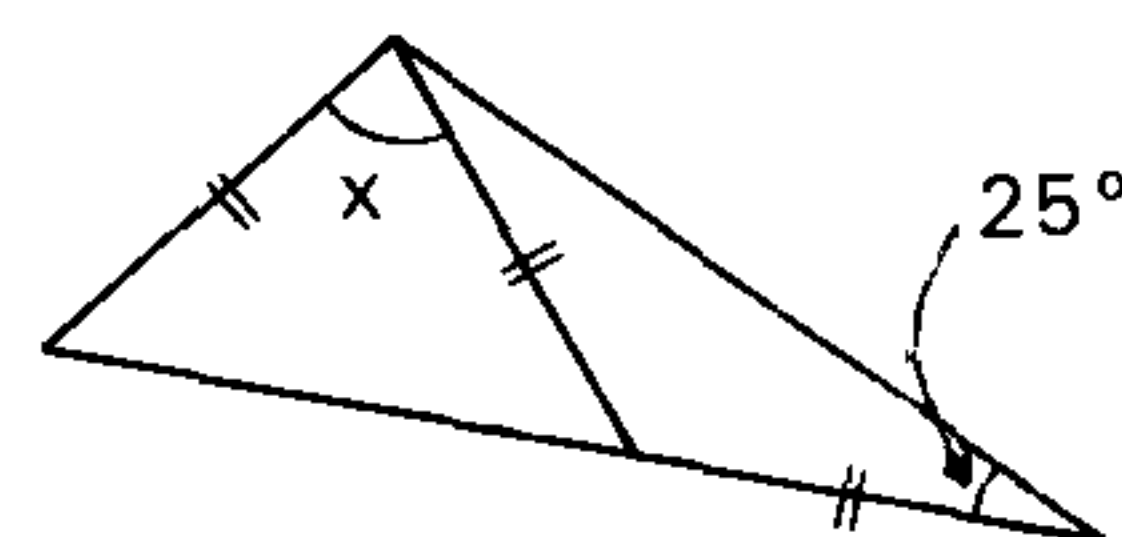
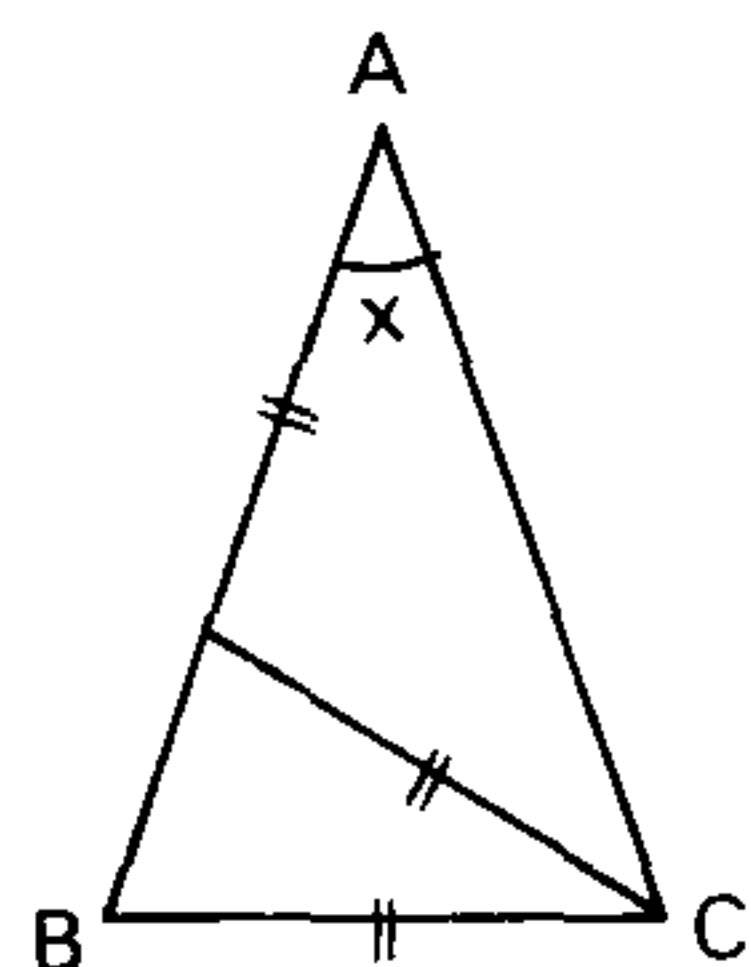
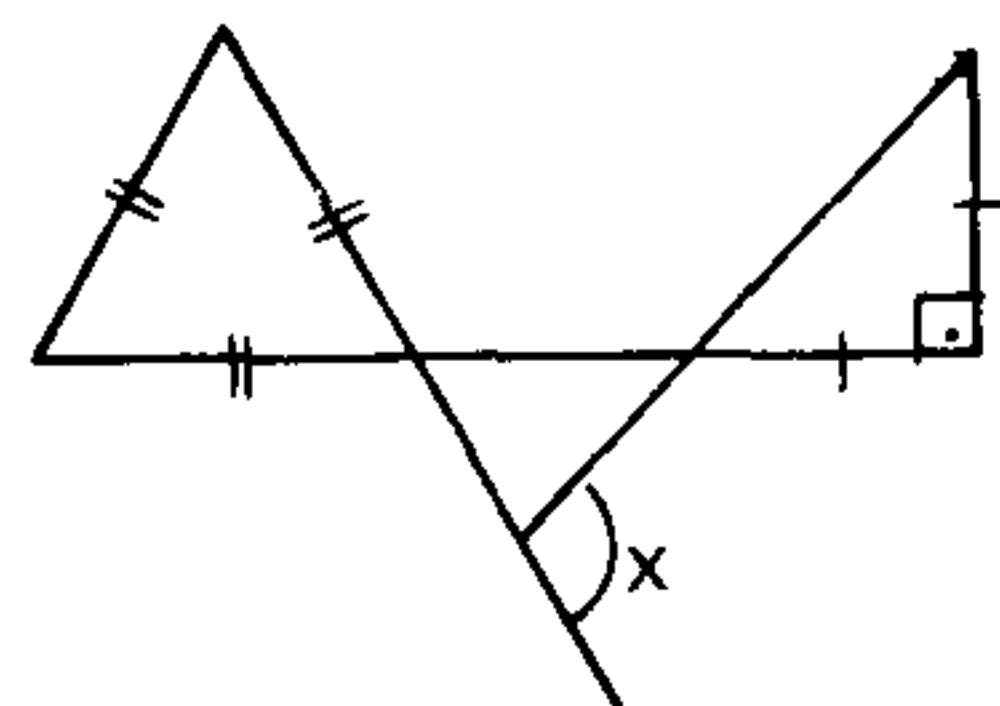
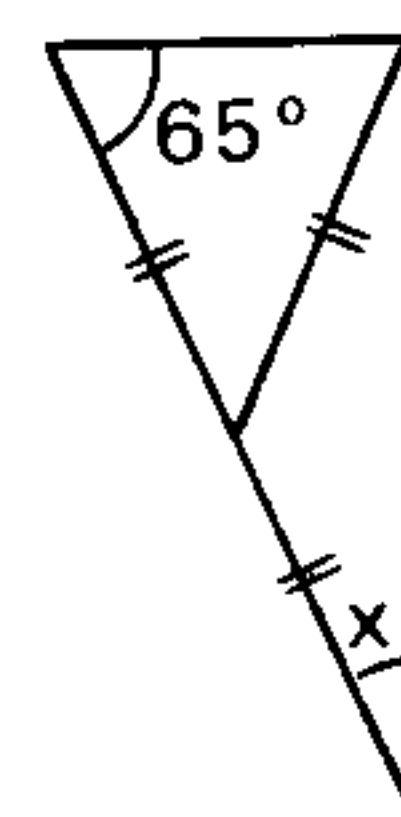
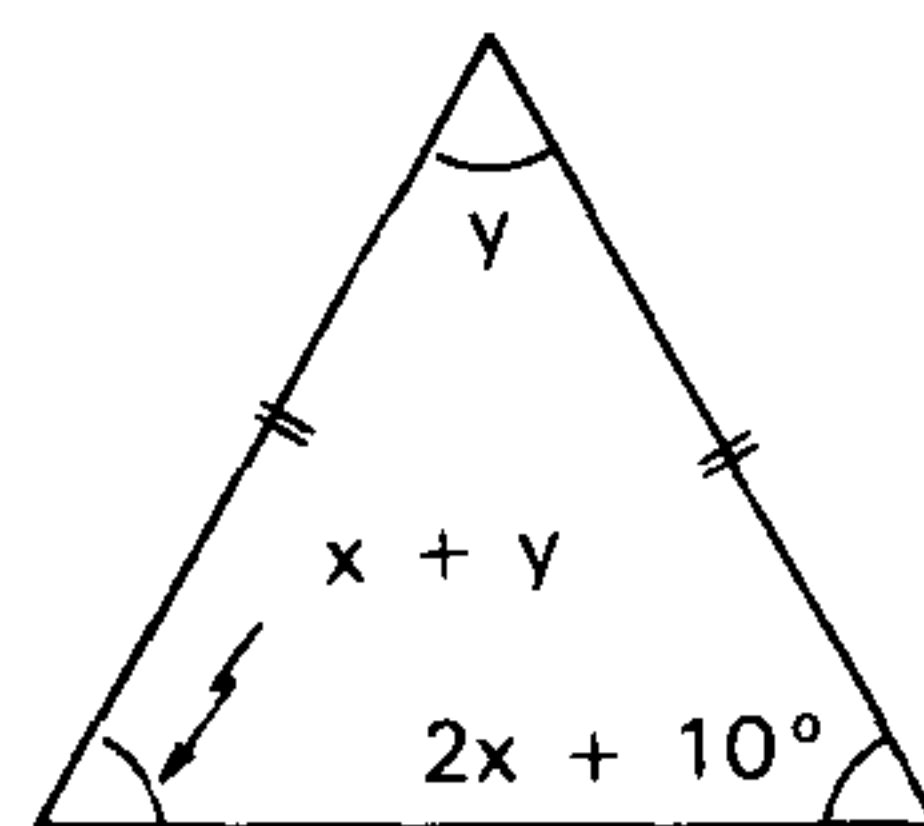
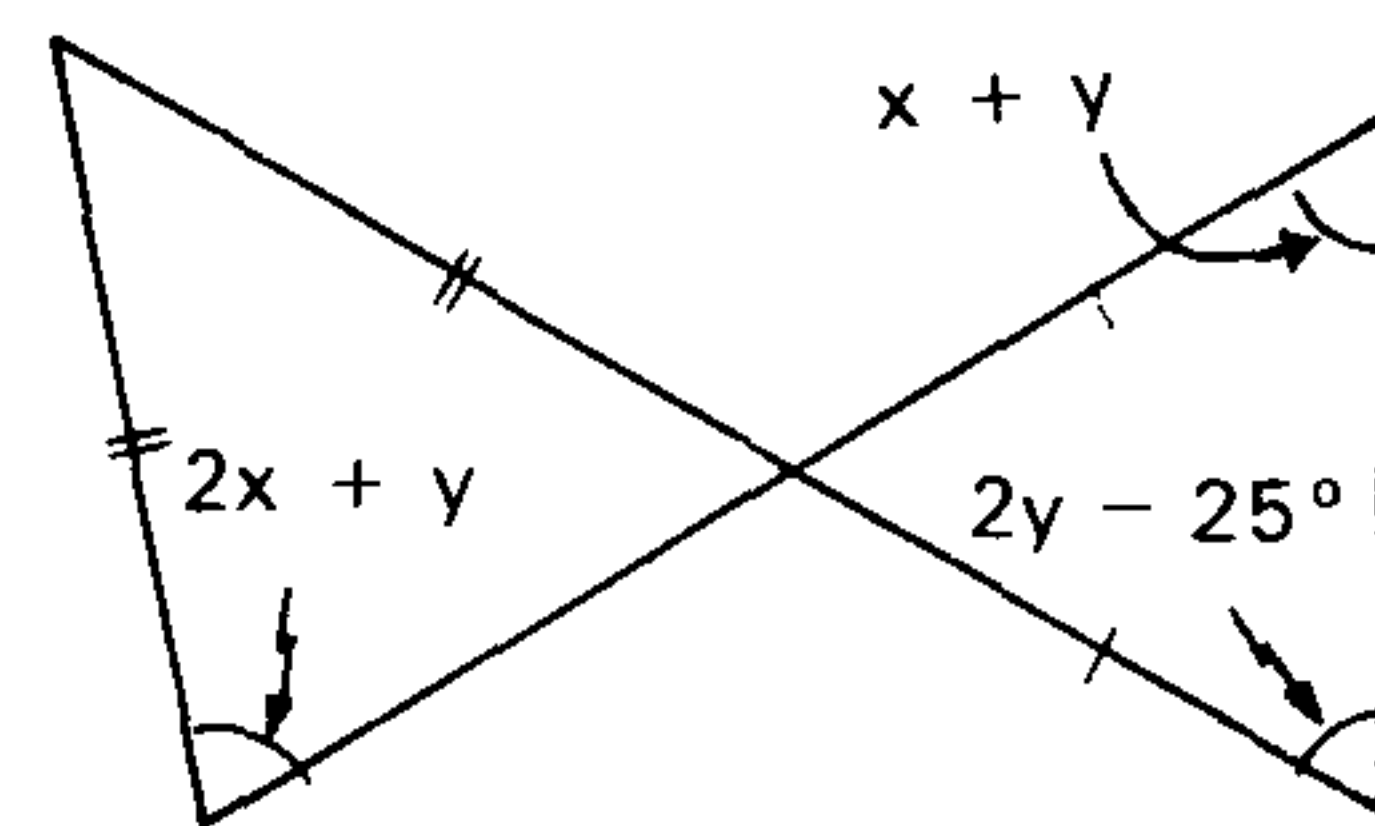
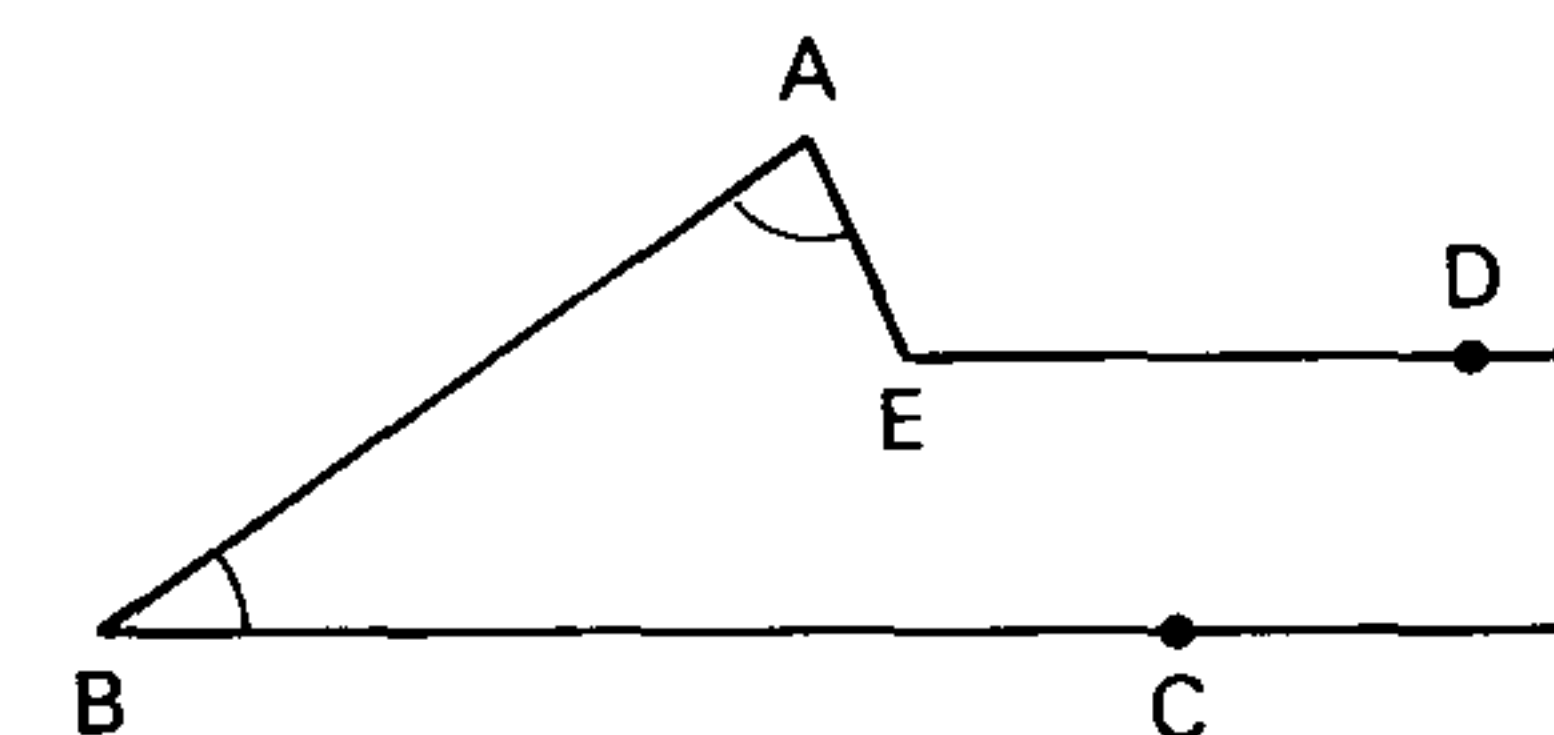
a) b)

144. Determine x e y nos casos:

a) b)

145. Determine os ângulos do triângulo nos casos:

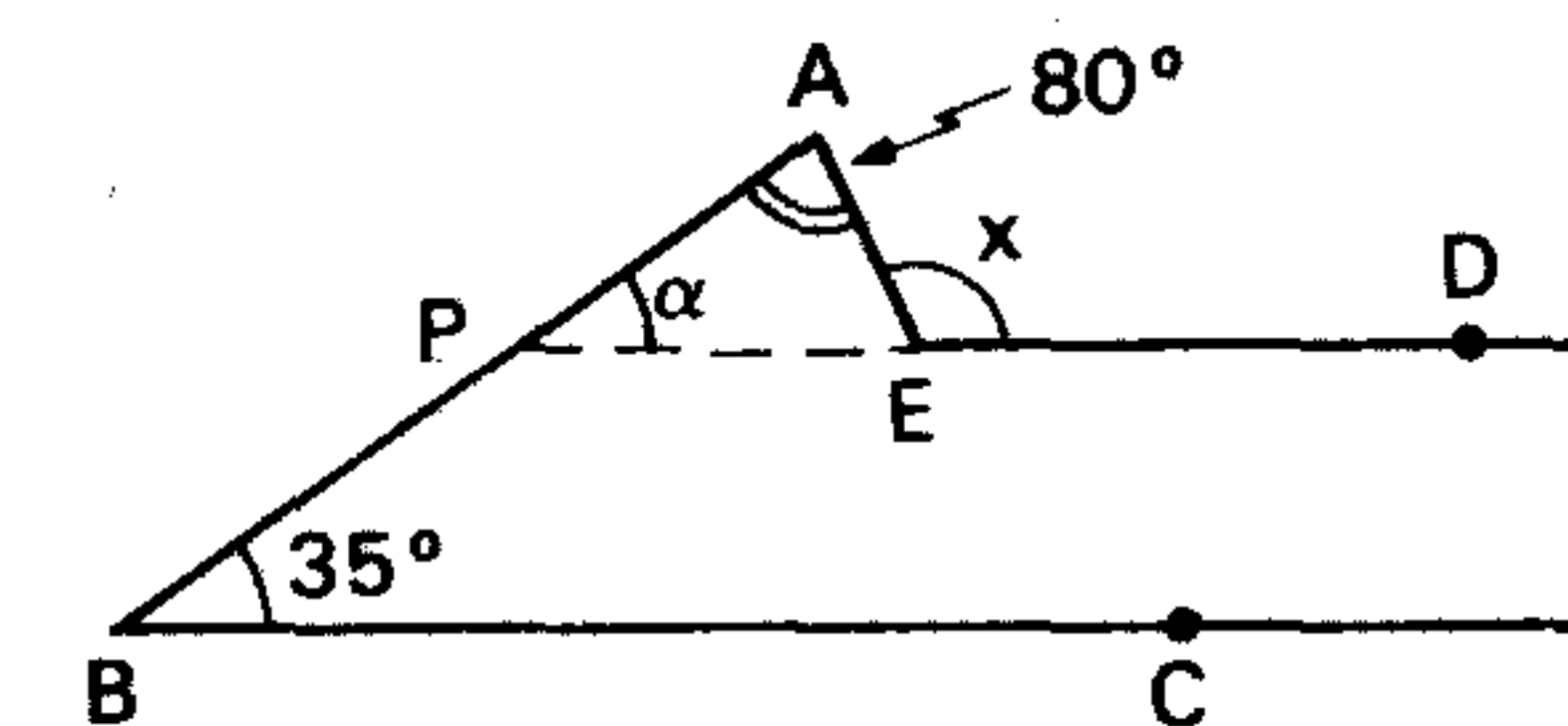
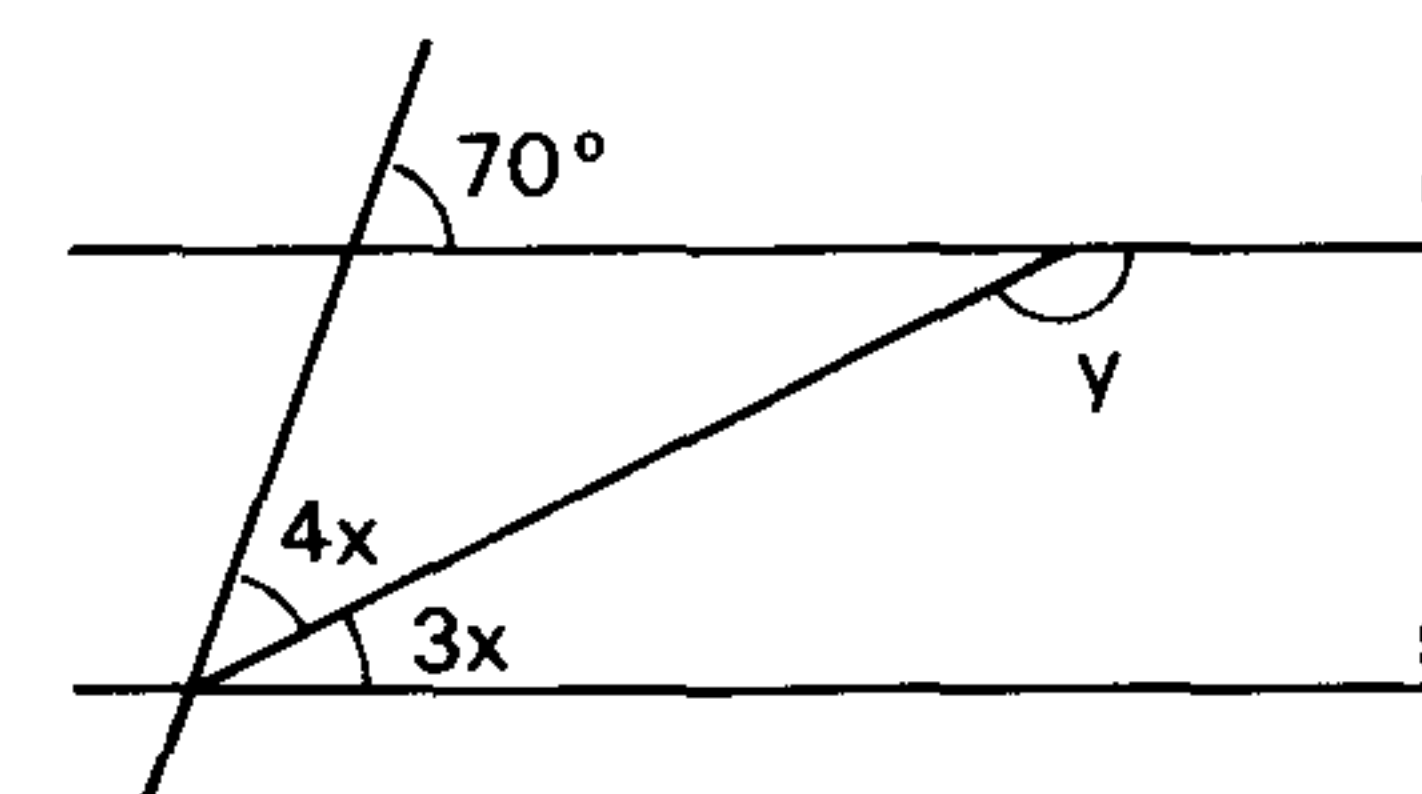
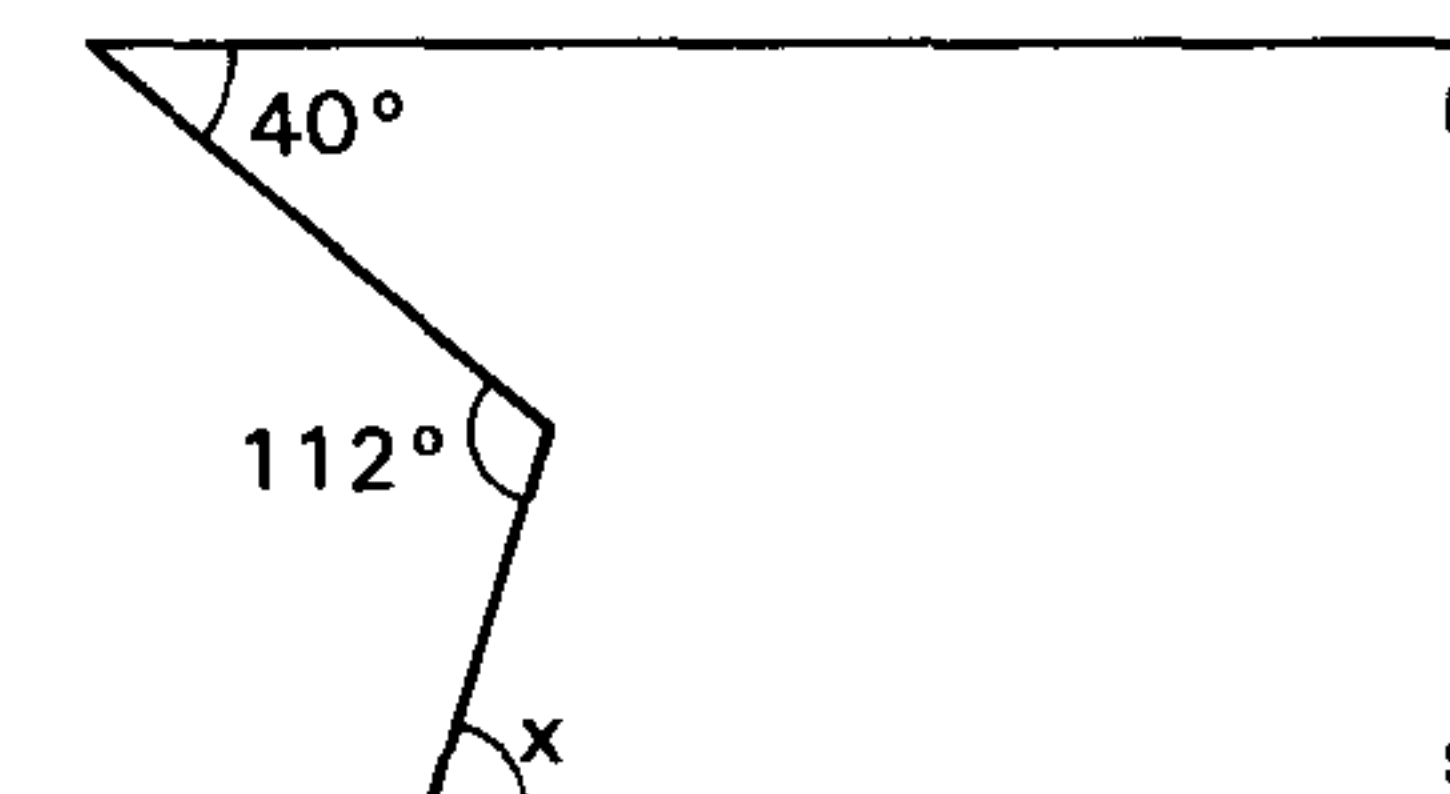
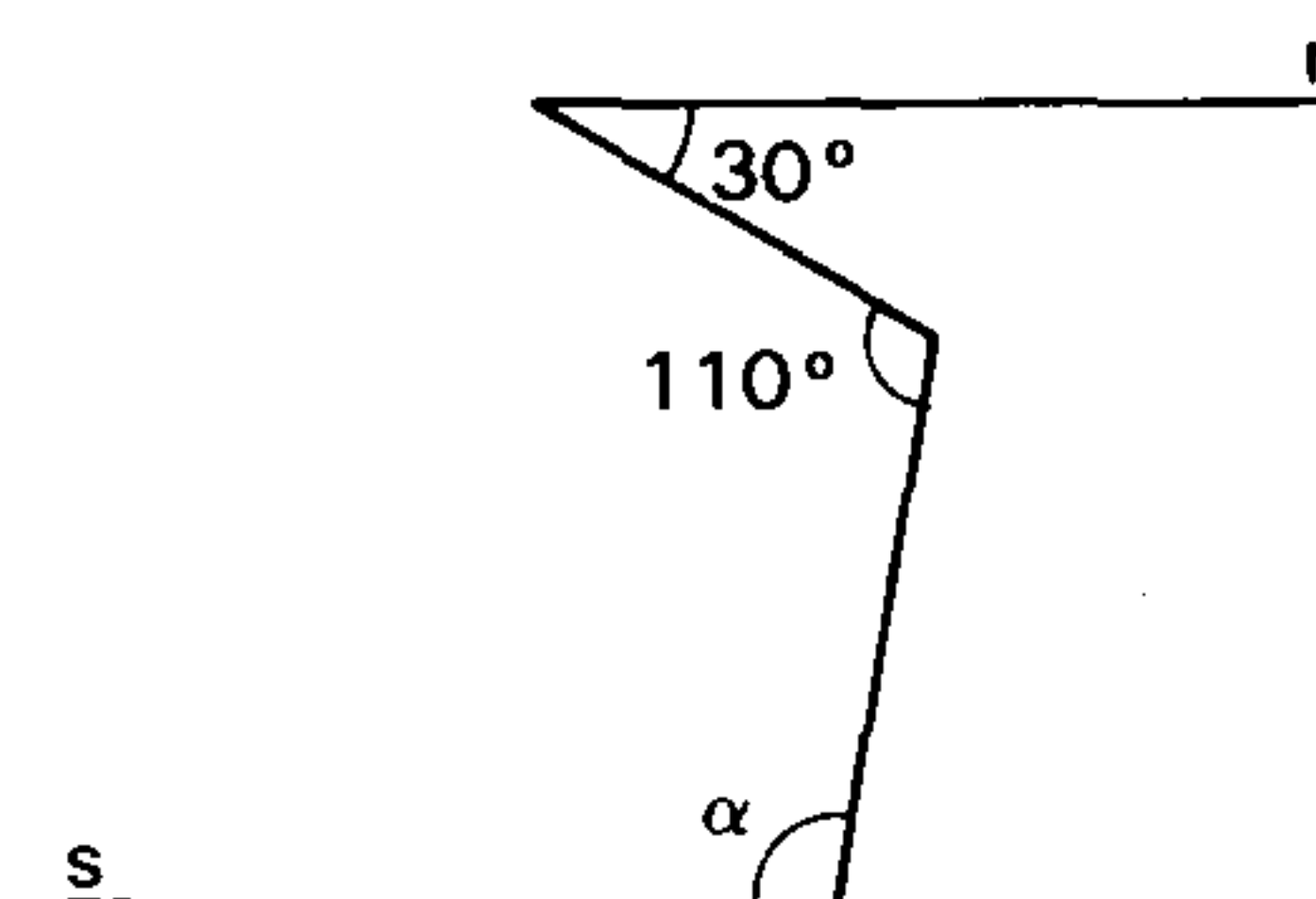
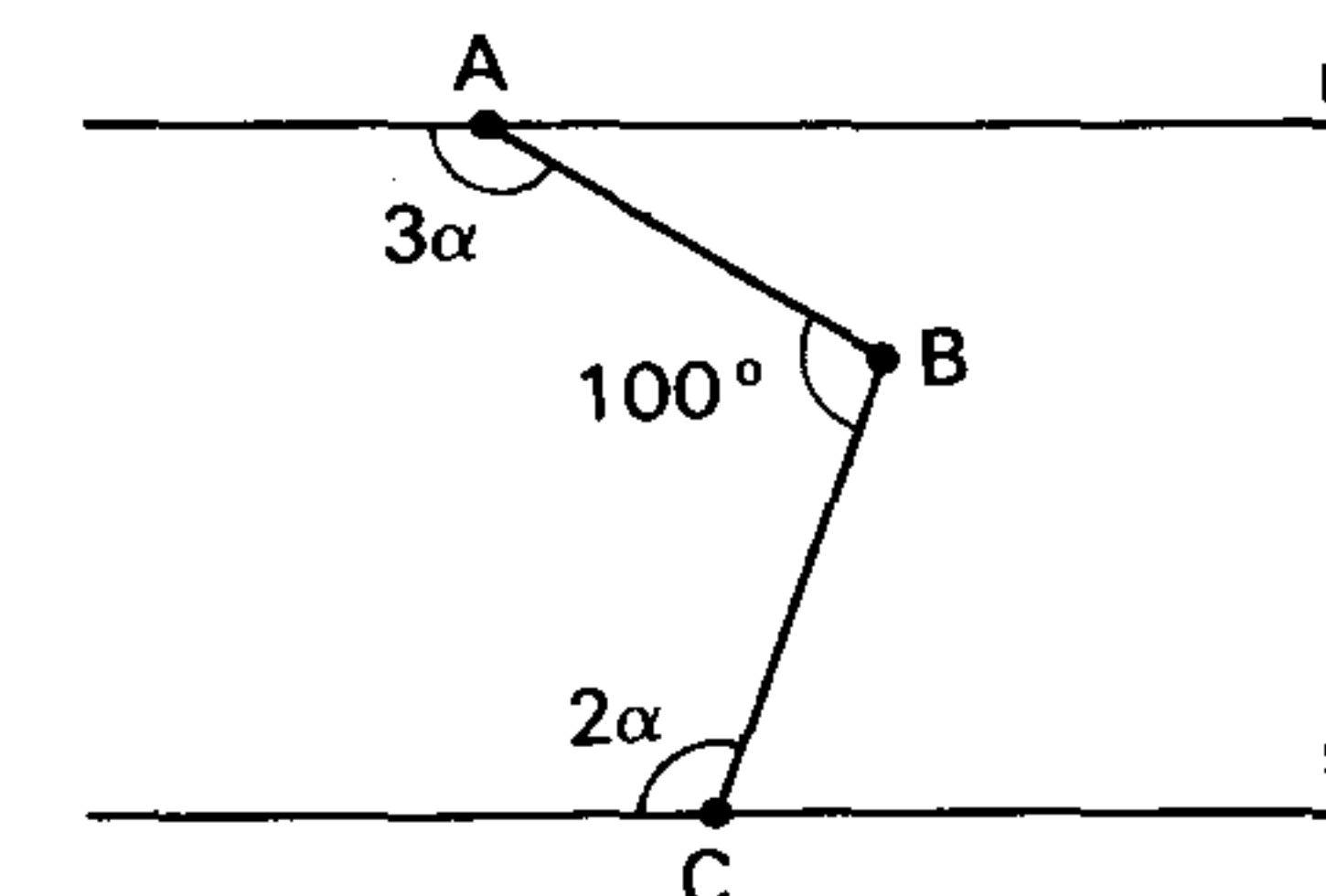
a) b)

146. Se o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, determine x nos casos:

a) b)

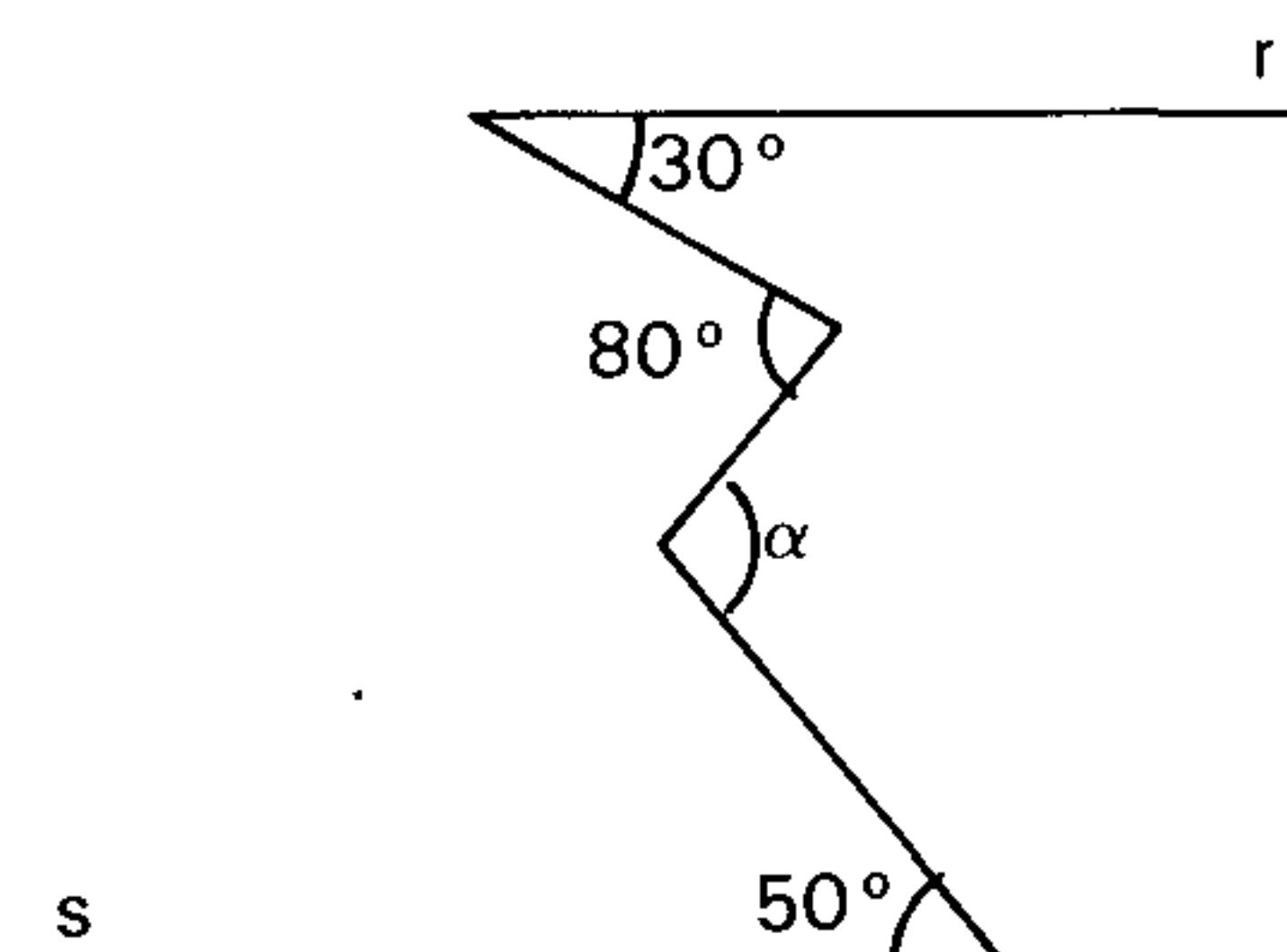
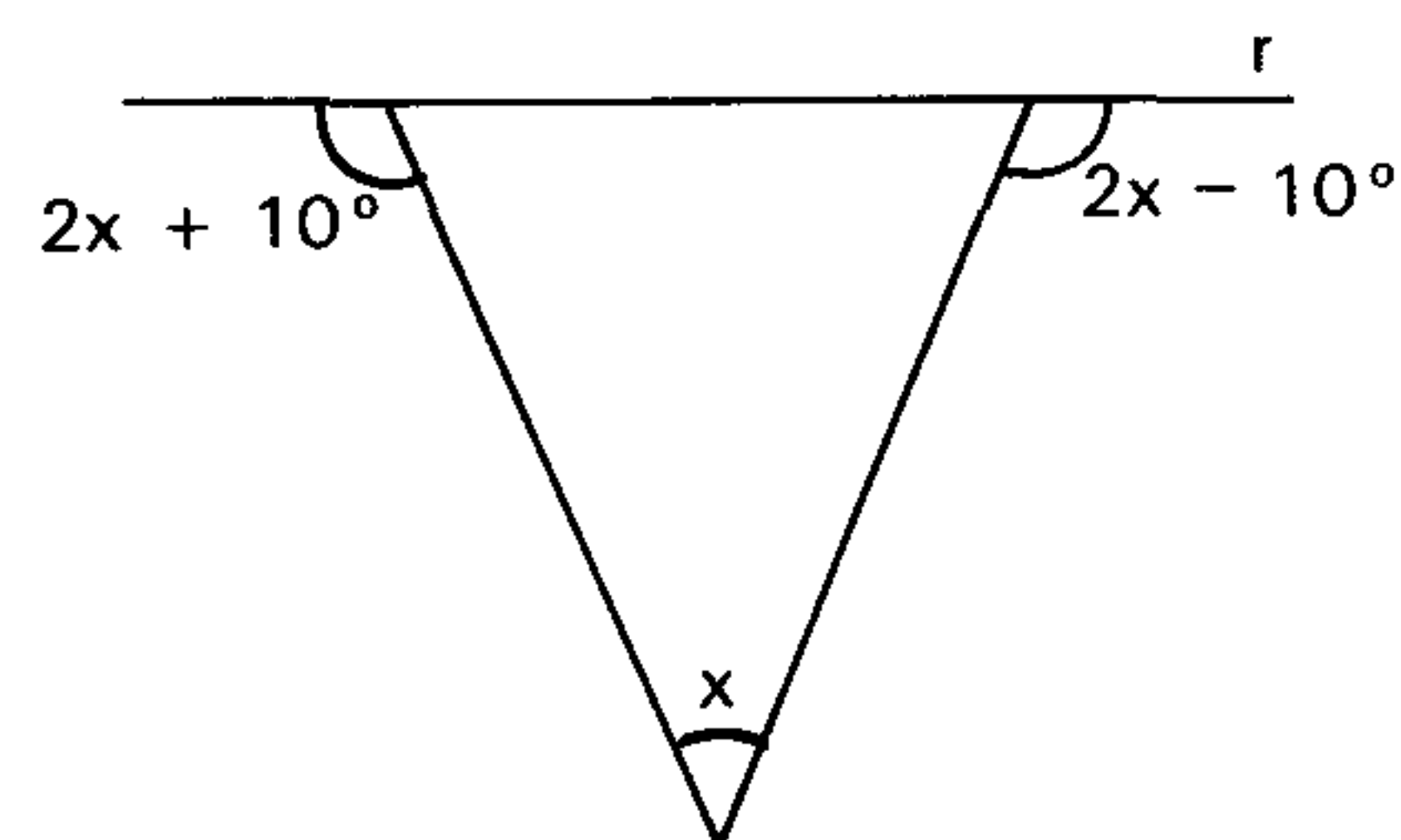
c) d)

147. Determine $\alpha + \beta + \gamma$ nos casos:

a) b)

148. O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Determine o valor de x nos casos:

a) b) c)

149. Determine o valor da incógnita (segmentos com "marcas iguais" são congruentes).

a) b) c)

d) AB = AC e) f)

g) h)

150. Na figura abaixo, $\overline{ED}$ é paralela a $\overline{BC}$. Sendo $B\hat{A}E$ igual a *80°* e $A\hat{B}C$ igual a *35°*, calcule a medida de $A\hat{E}D$.

Solução

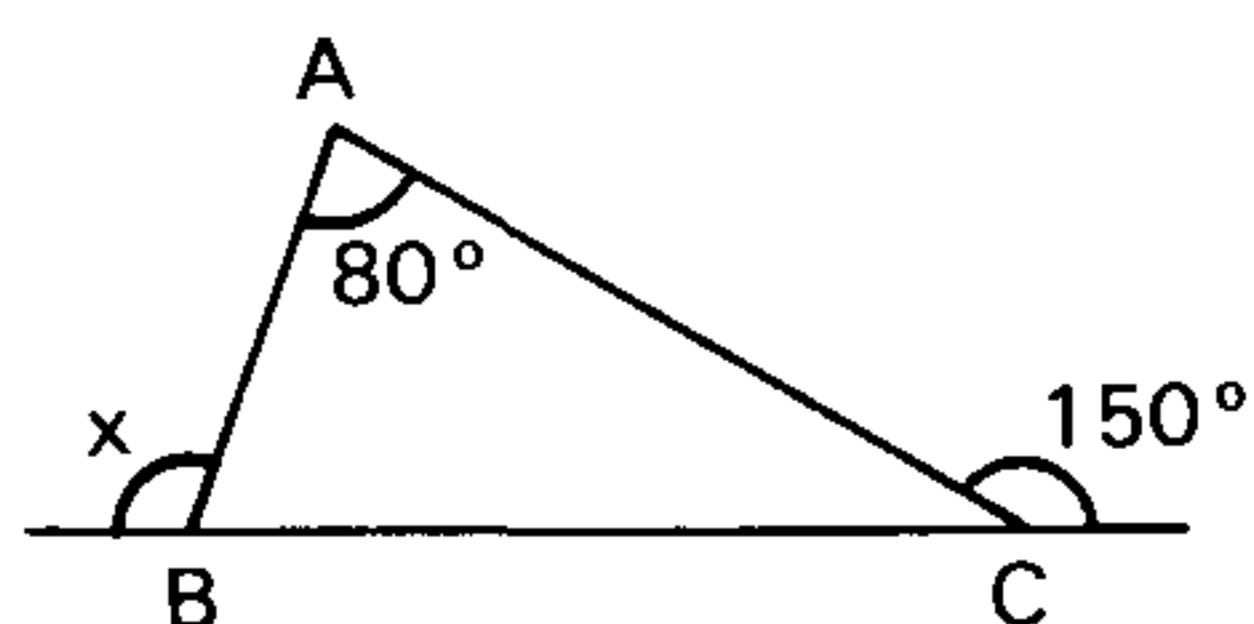
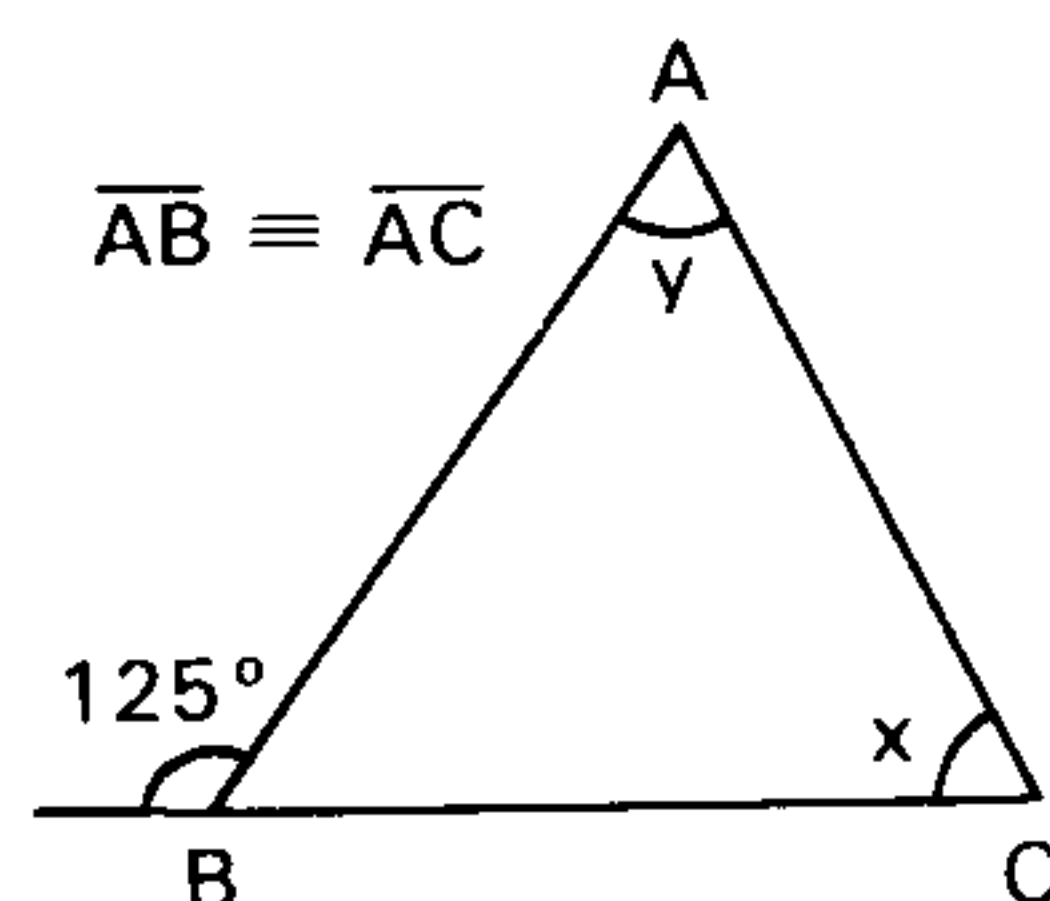
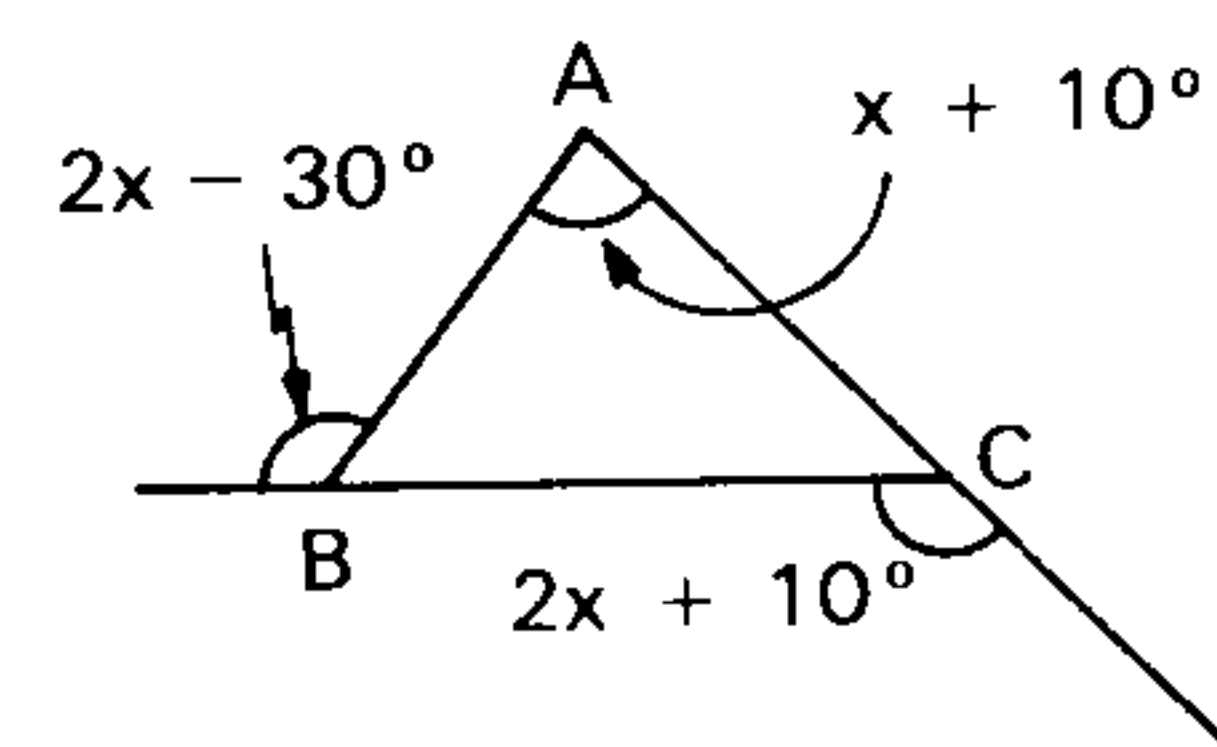
Basta prolongar $\overline{DE}$ até que a reta $\overleftrightarrow{DE}$ encontre $\overline{AB}$.
Note que x é externo do triângulo APE.
Então:

$$\begin{cases} \alpha = 35° \\ x = \alpha + 80° \end{cases} \Longrightarrow x = 115°$$

151. Determine o valor de x e y, sendo $r \parallel s$.

152. Calcule o valor de x, sendo $r \parallel s$.

153. Se $r \parallel s$, calcule α.

154. Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. Calcule α.

155. Na figura, calcule a medida do ângulo α, sendo $r \parallel s$.

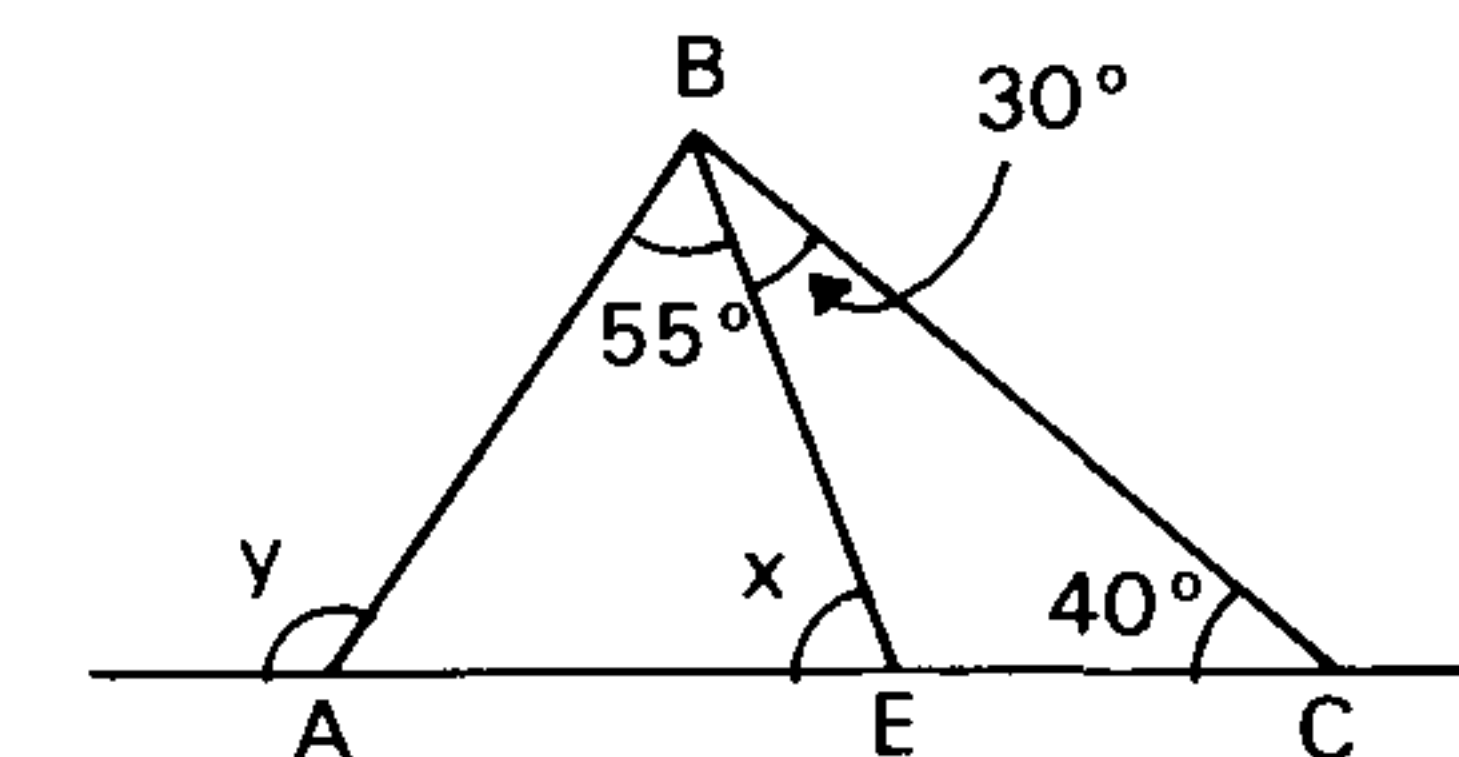
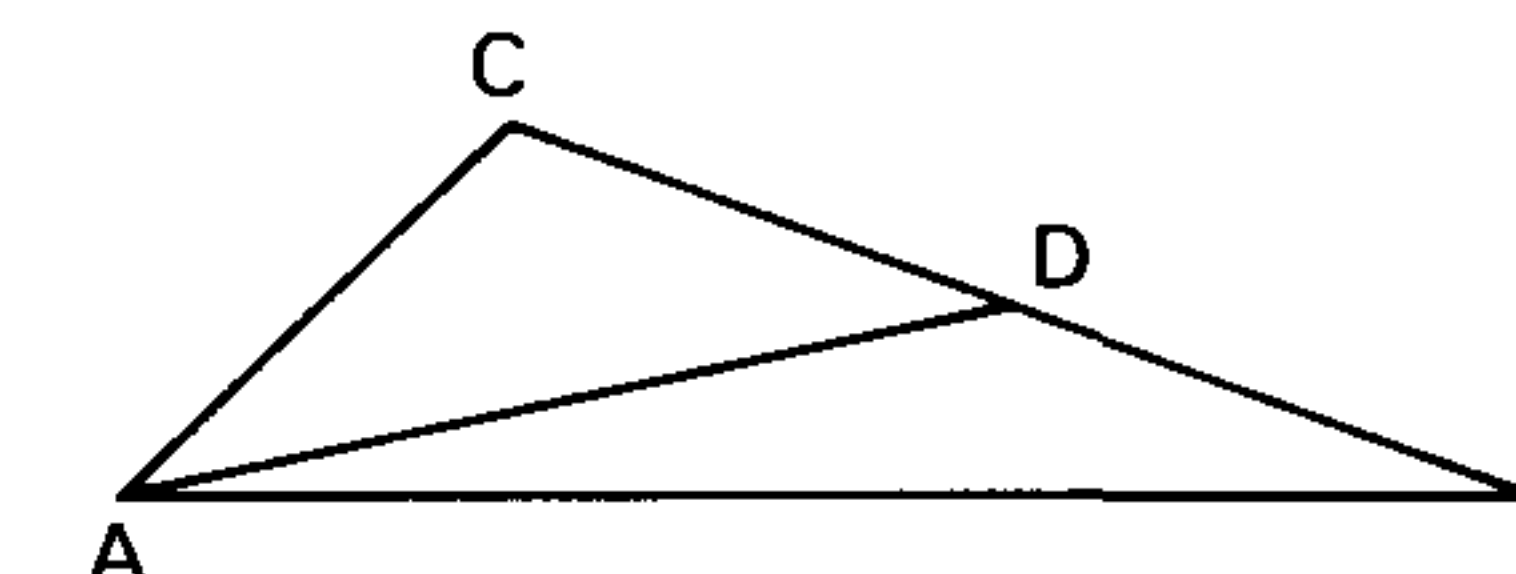
156. Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$. Sendo $C\hat{D}B = 150°$ e $A\hat{B}C = 25°$, calcule $C\hat{B}D$.

157. Determine o valor de x.

158. Calcule x no triângulo ABC da figura.

159. Os ângulos internos de um triângulo são proporcionais a 2, 3 e 4, respectivamente. Determine a medida do maior deles.

Nos exercícios 160, 161, 162, no triângulo ABC, calcule a(s) incógnita(s).

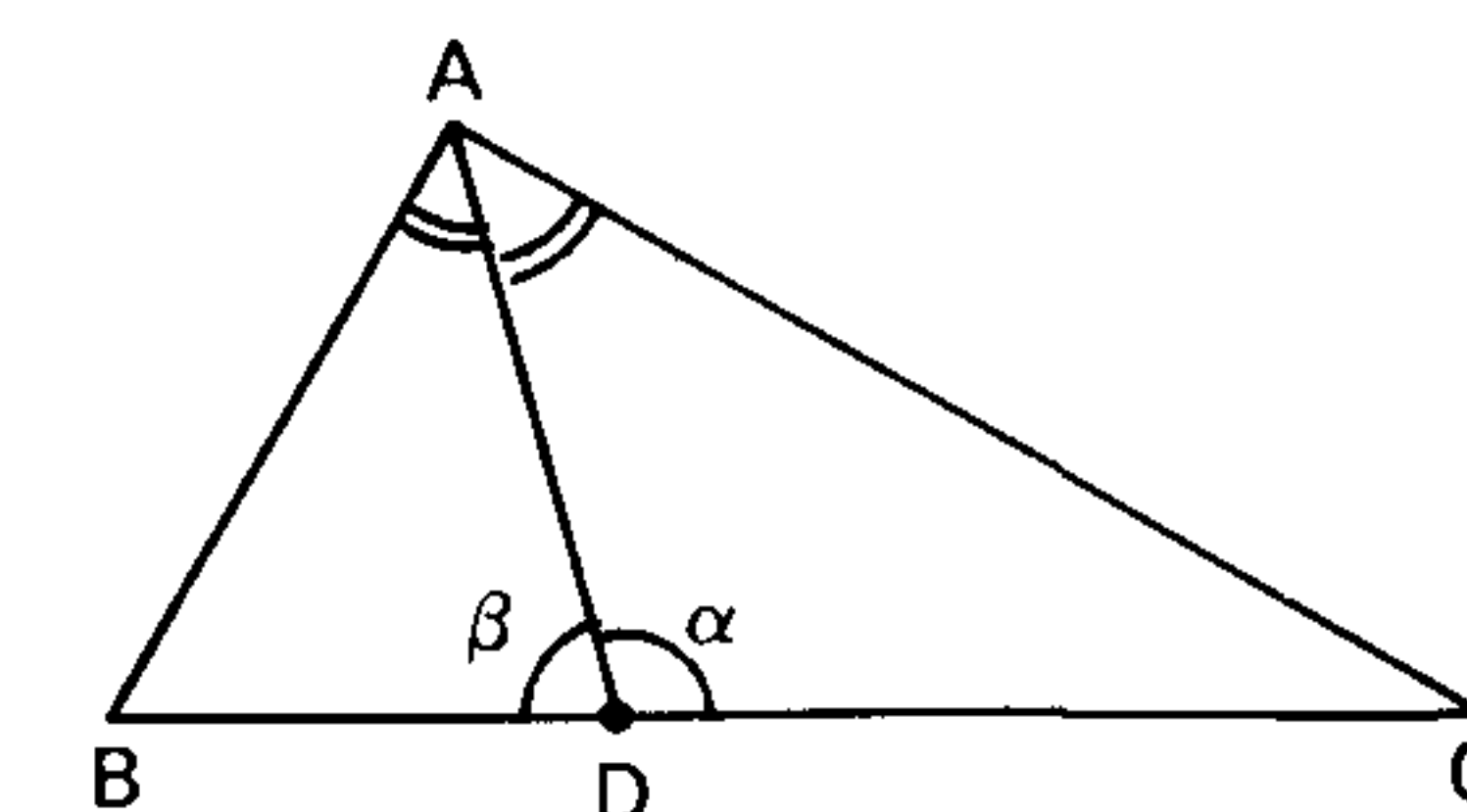
160.

161.

162.

163. Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Calcule o valor de x.

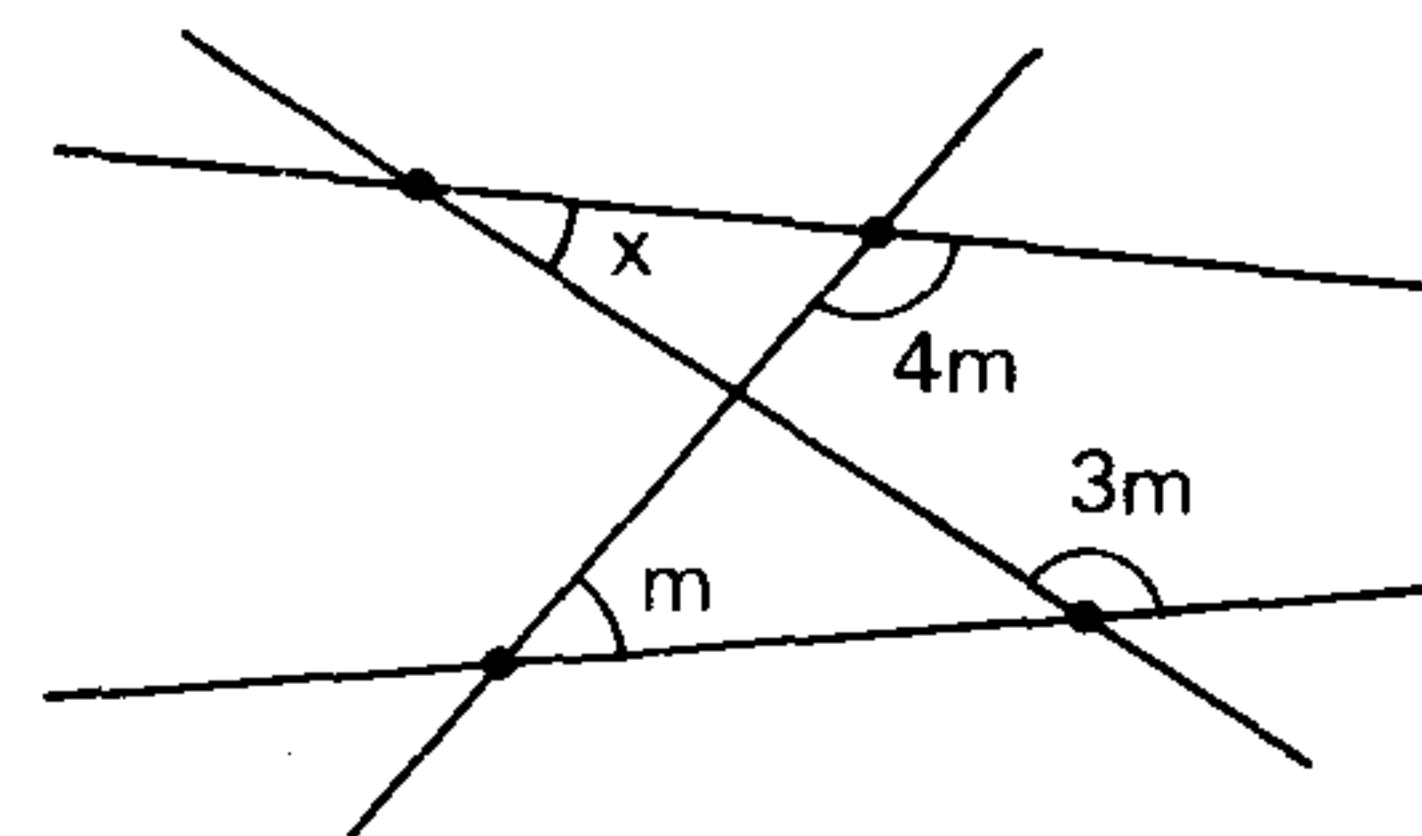
164. Calcule x e y indicados na figura abaixo.

165. A figura mostra um triângulo ABC, isósceles, de base $\overline{BC}$. Sendo $\overline{BD}$ bissetriz de $A\hat{B}C$ e $\overline{CD}$ bissetriz de ACB, calcule o valor de x.

166. O triângulo ACD da figura é isósceles de base $\overline{AD}$. Sendo 12° a medida do ângulo $B\hat{A}D$ e 20° a medida do ângulo $A\hat{B}C$, calcule a medida do ângulo $A\hat{C}D$.

167. Um ângulo externo da base de um triângulo isósceles é os $\frac{5}{4}$ do ângulo do vértice. Calcule os ângulos desse triângulo.

168. Num triângulo isósceles ABC, o ângulo do vértice A vale $\frac{1}{10}$ da soma dos ângulos externos em B e C. Sendo $\overline{BC}$ a base do triângulo, determine o ângulo $\hat{A}$.

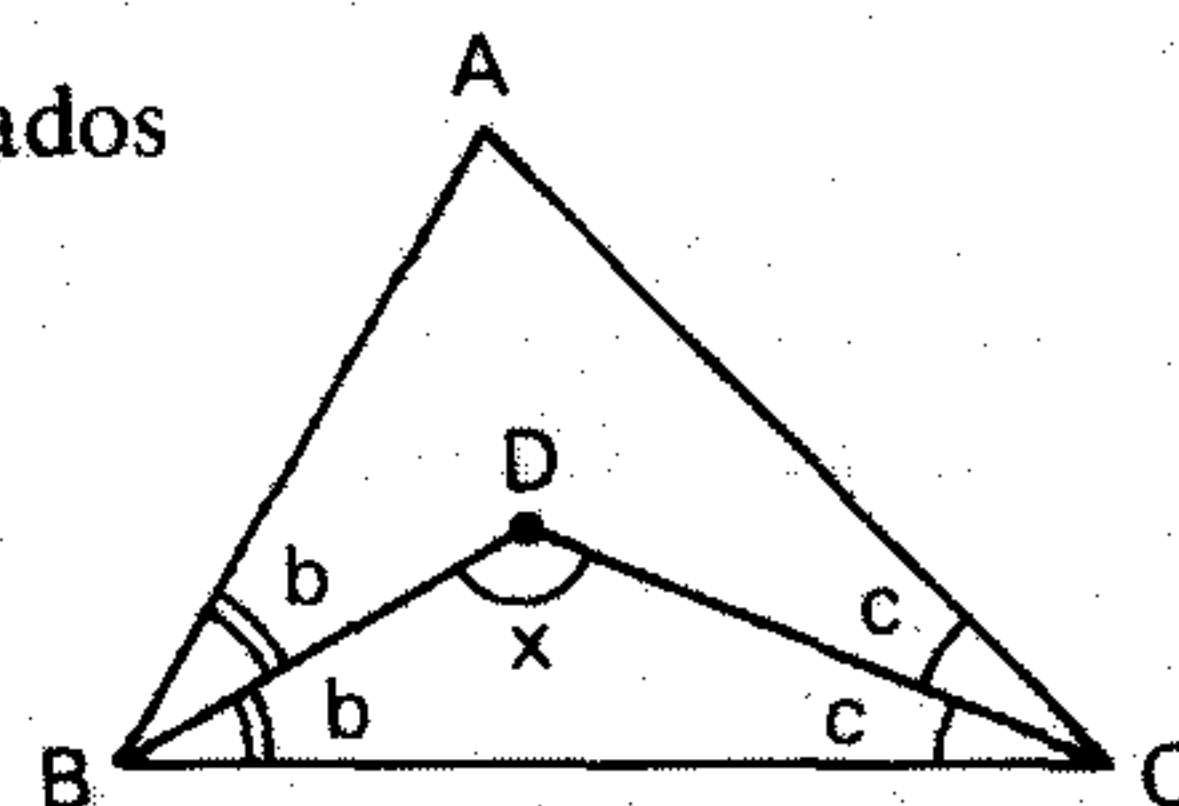
169. Num triângulo ABC, o ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ excede o ângulo $\hat{A}$ em 76°. Determine $\hat{A}$.

170. Prove que no triângulo ABC, da figura, vale a relação $\alpha - \beta = \hat{B} - \hat{C}$, sendo $\overline{AD}$ bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

171. Num triângulo ABC, o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, oposto a $\overline{BC}$, é o quíntuplo do ângulo $\hat{A}$. Determine a medida do ângulo $\hat{A}$.

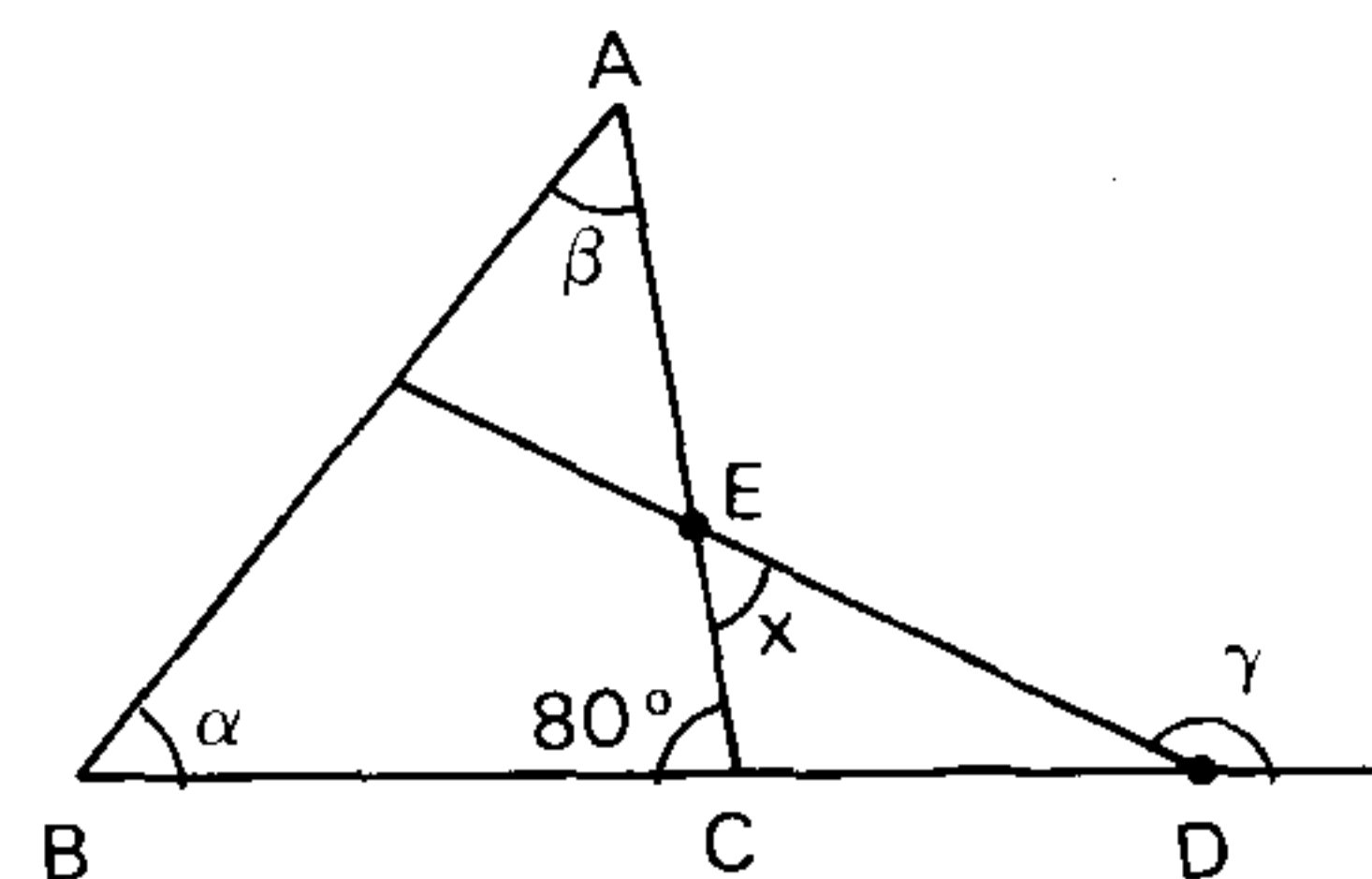
172. Na figura ao lado, calcule o valor de x em função de m.

173. Num triângulo ABC qualquer, o ângulo oposto a $\overline{BC}$ formado pelas bissetrizes dos ângulos internos em B e C é igual ao suplemento do complemento da metade do ângulo do vértice A.

Solução

Nota inicial
Em problemas cujo enunciado é uma proposição, é normal que o pedido seja a demonstração da propriedade.

Com os elementos caracterizados na figura, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle DBC\text{: } x + b + c = 180^\circ \implies x = 180^\circ - (b + c) \\ \triangle ABC\text{: } 2b + 2c + \hat{A} = 180^\circ \implies b + c = 90^\circ - \dfrac{\hat{A}}{2} \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies x = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right).$$

174. Na figura, calcule o ângulo x, sendo α o triplo de β e γ o sêxtuplo de β.

175. Em um triângulo ABC, o ângulo do vértice A é igual à oitava parte do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos adjacentes a $\overline{BC}$. Determine a medida do ângulo do vértice A.

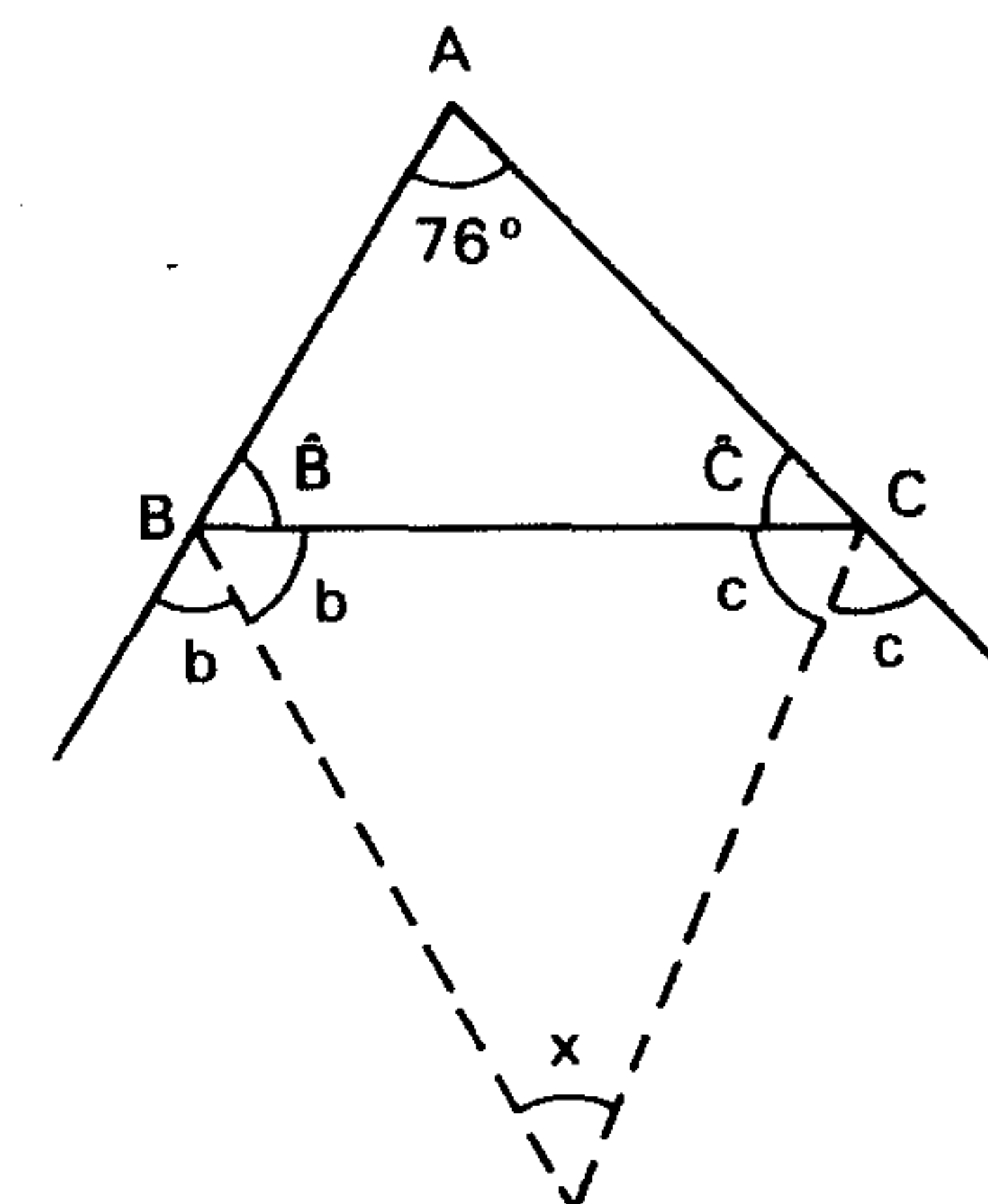
176. Um ângulo externo do vértice de um triângulo isósceles mede *150°*. Determine:

a) os ângulos do triângulo;

b) o ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos da base do triângulo;

c) os ângulos formados pela bissetriz de um dos ângulos da base e pela bissetriz do ângulo do vértice.

177. Determine a medida do menor ângulo formado pelas bissetrizes externas relativas aos vértices B e C de um triângulo ABC, sabendo que o ângulo $\hat{A}$ mede *76°*.

Solução

1) $\hat{B} + \hat{C} + 76^\circ = 180^\circ \implies \hat{B} + \hat{C} = 104^\circ$

2) $\begin{cases} 2b + \hat{B} = 180^\circ \\ 2c + \hat{C} = 180^\circ \end{cases} \implies 2(b + c) + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ \implies$

$\implies 2(b + c) + 104^\circ = 360^\circ \implies b + c = 128^\circ$

3) $x + b + c = 180^\circ \implies x + 128^\circ = 180^\circ \implies x = 52^\circ$

178. Determine as medidas dos três ângulos de um triângulo, sabendo que o segundo é os $\frac{3}{2}$ do primeiro e que o terceiro é a semi-soma dos dois primeiros.

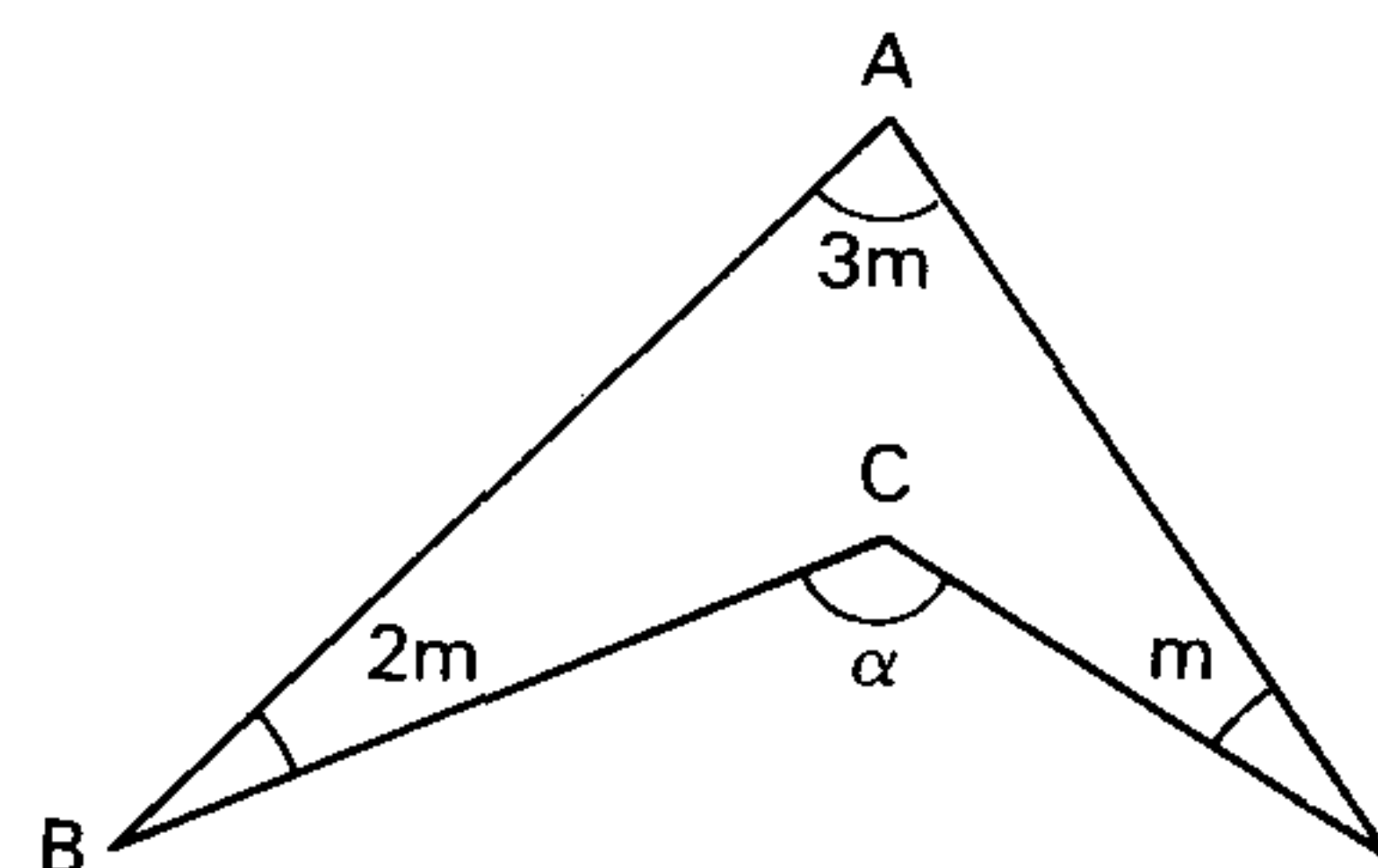
179. Os três ângulos de um triângulo são tais que o segundo mede *28°* menos que o primeiro e o terceiro *10°* mais que o primeiro. Determine os três ângulos do triângulo.

180. Em um triângulo isósceles o ângulo do vértice é a metade de cada um dos ângulos da base. Determine os três ângulos do triângulo.

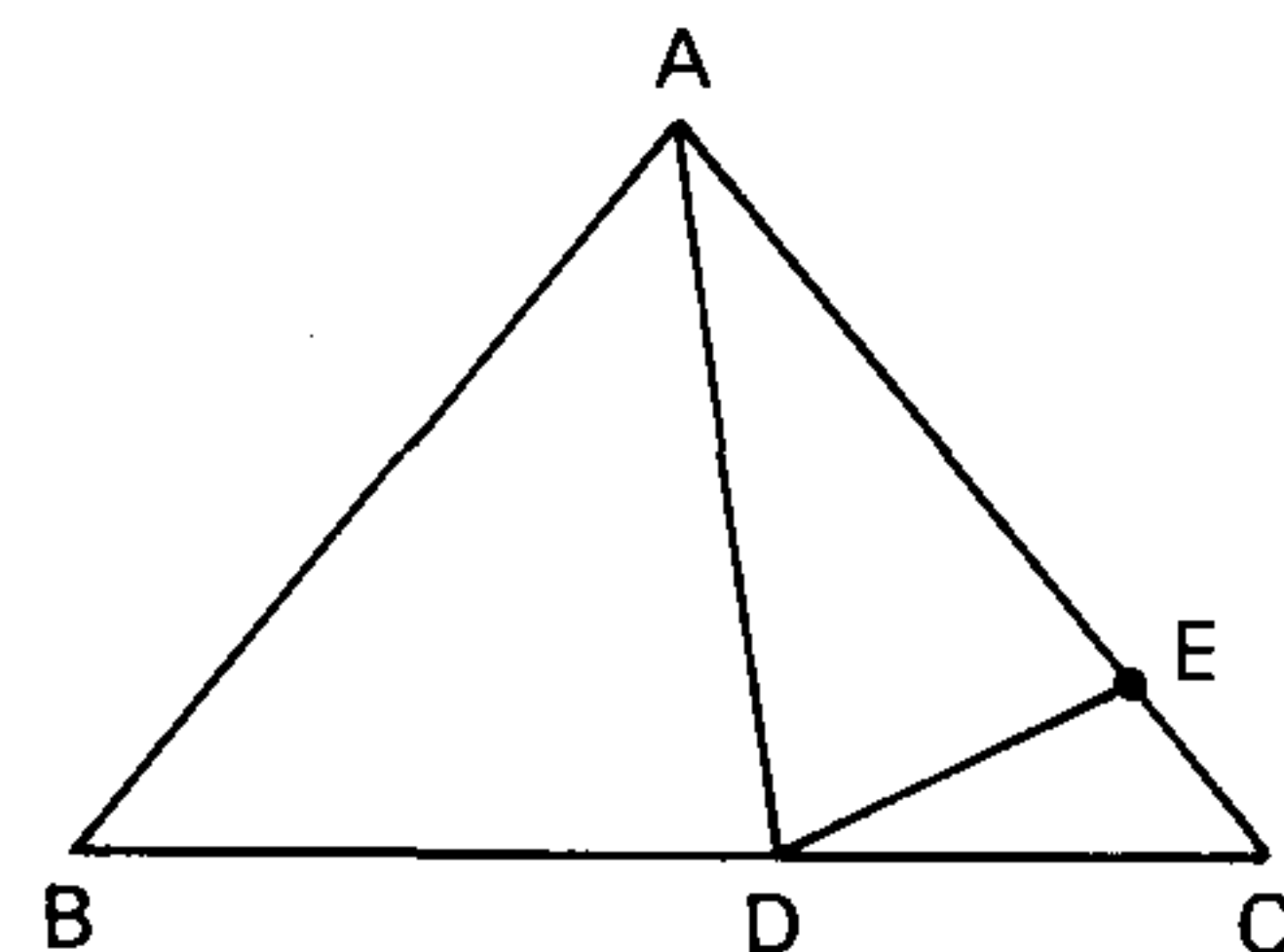
181. Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos colaterais internos de duas retas paralelas interceptadas por uma transversal qualquer.

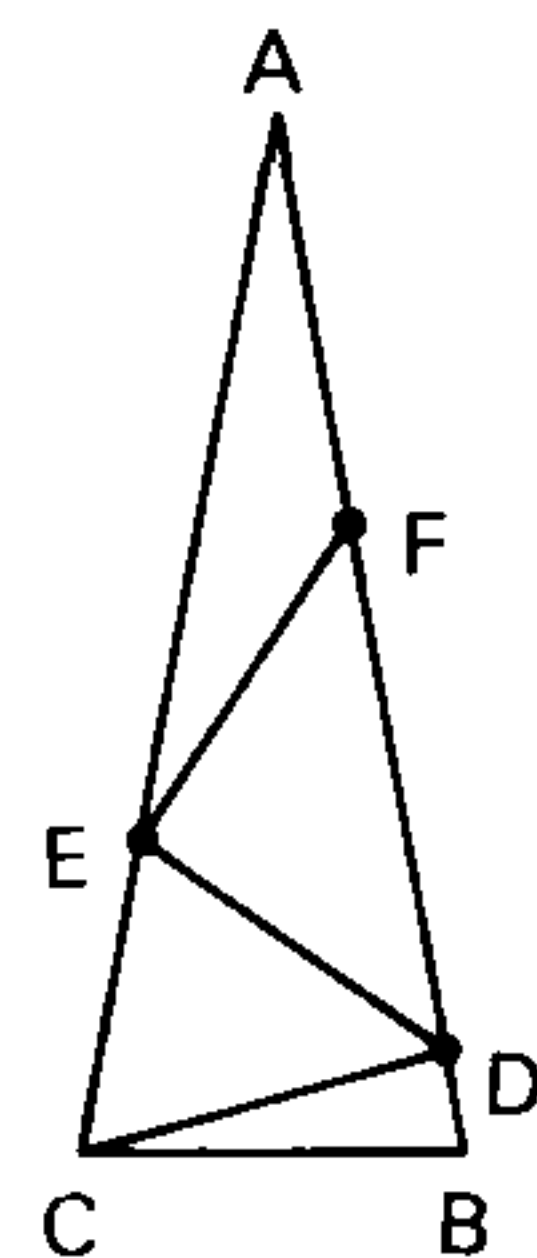
182. Na figura, determine a medida do ângulo α em função de m.

$\hat{A} = 3\,m$ $\hat{B} = 2\,m$
$\widehat{BCM} = \alpha$ $\hat{D} = m$
$B\hat{C}M$

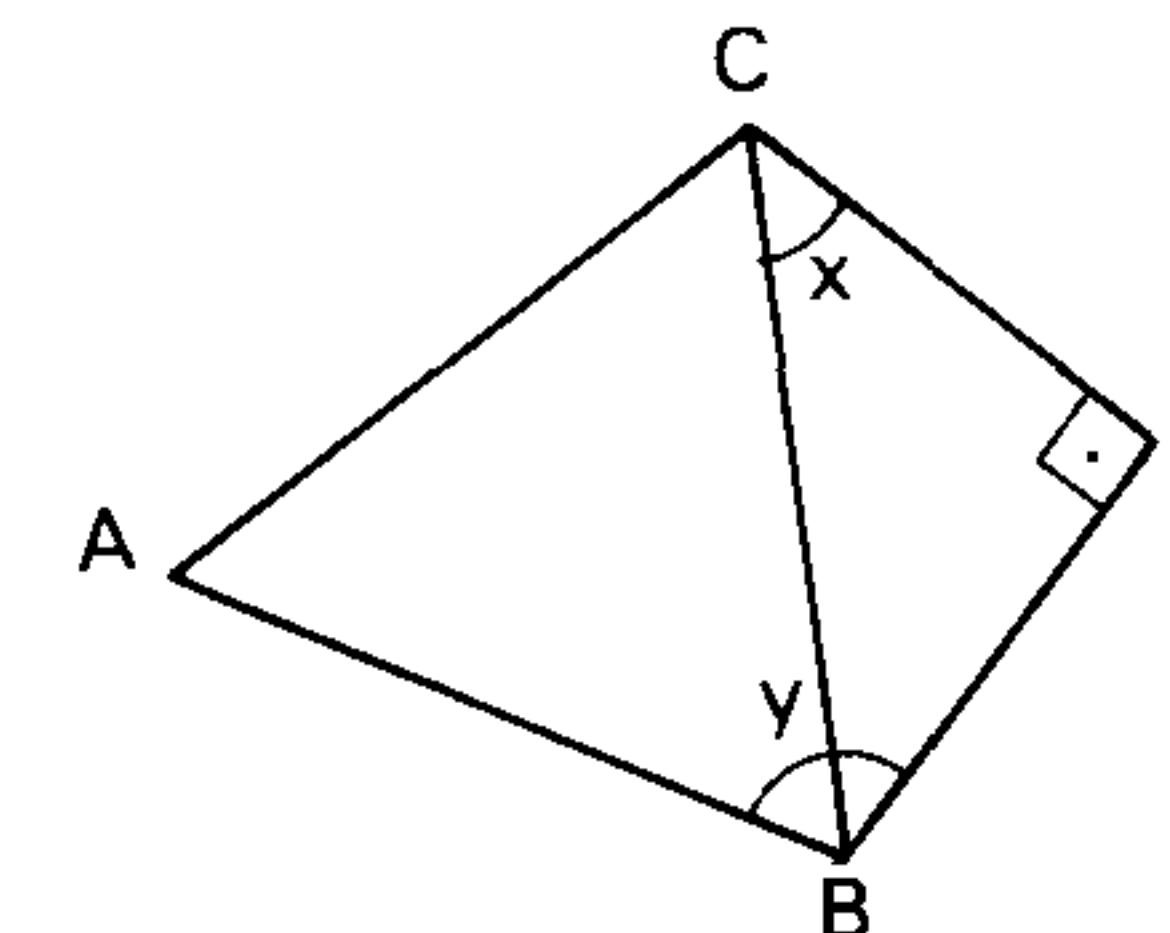
A, 3m, C, 2m, α, m, B

183. Num triângulo ABC qualquer, o ângulo, oposto a $\overline{BC}$, formado pelas bissetrizes dos ângulos externos em B e C é igual ao complemento da metade do ângulo do vértice A do triângulo.

184. Na figura, sendo $\overline{AB}$ congruente a $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ congruente a $\overline{AD}$, calcule a medida do ângulo $C\hat{D}E$, dado $B\hat{A}D = 48°$.

A, E, B, D, C

185. Determine a medida do ângulo do vértice A do triângulo isósceles ABC, sabendo que os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ são congruentes.

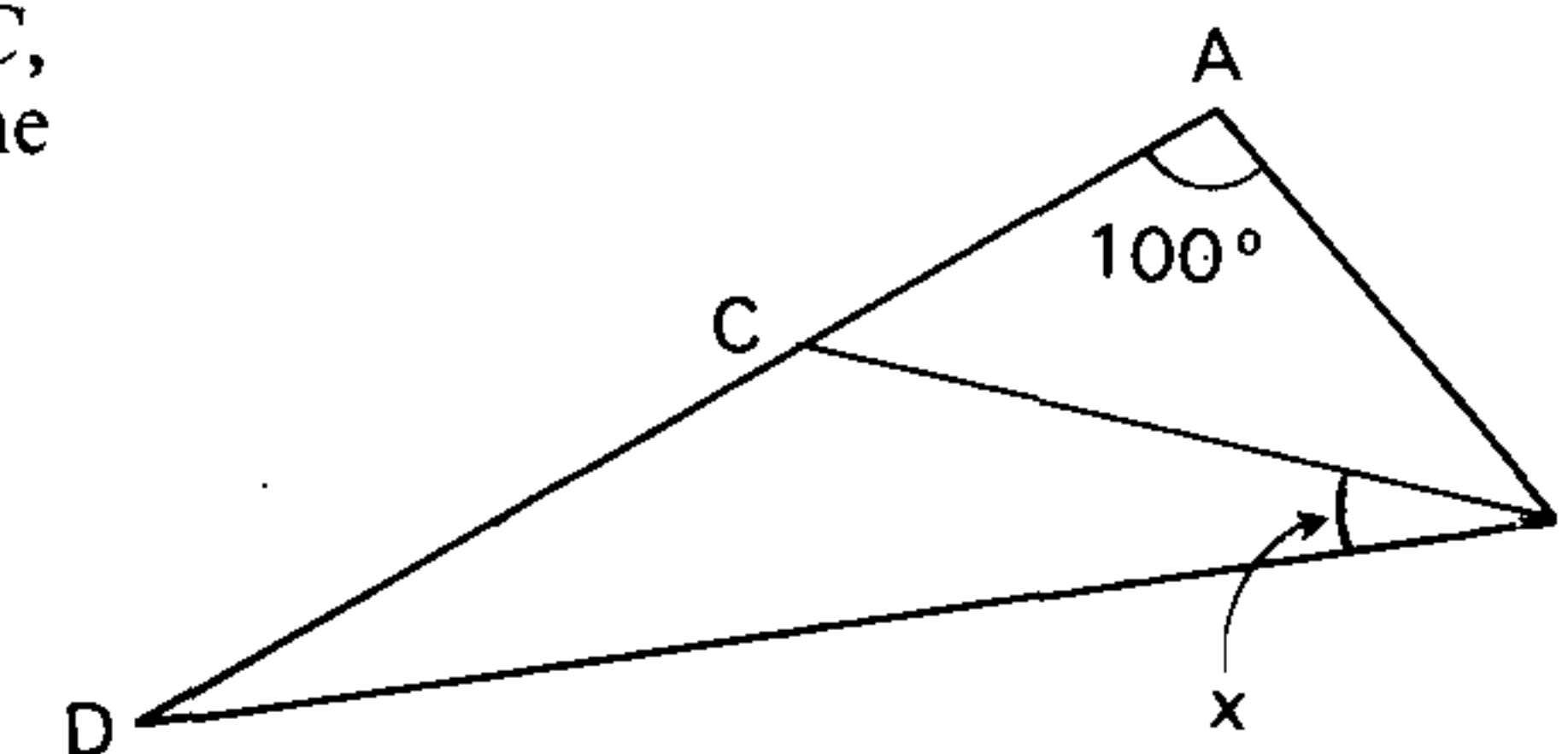
A, F, E, D, C, B

186. Na figura, o triângulo ABC é equilátero e o triângulo CDB é isósceles. Calcule o valor de $2x + y$.

$B\hat{C}D = x$
$A\hat{B}D = y$

C, x, D, A, y, B

187. Considere o triângulo ABC, em que $AB = AC = 5\ cm$ e $BC = 7\ cm$. Sobre o lado $\overline{BC}$ tomamos um ponto D tal que $BD = 3\ cm$ e pelo ponto D traçamos $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ respectivamente paralelos a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, com E em $\overline{AB}$ e F em $\overline{AC}$. Calcule o perímetro de $AEDF$.

188. Da figura, sabemos que $AB = AC$, $\hat{A} = 100°$ e $AD = BC$. Determine $x = C\hat{B}D$.

A, 100°, C, B, D, x

CAPÍTULO VI

Perpendicularidade

I. Definições — Ângulo reto

78. *Retas perpendiculares*

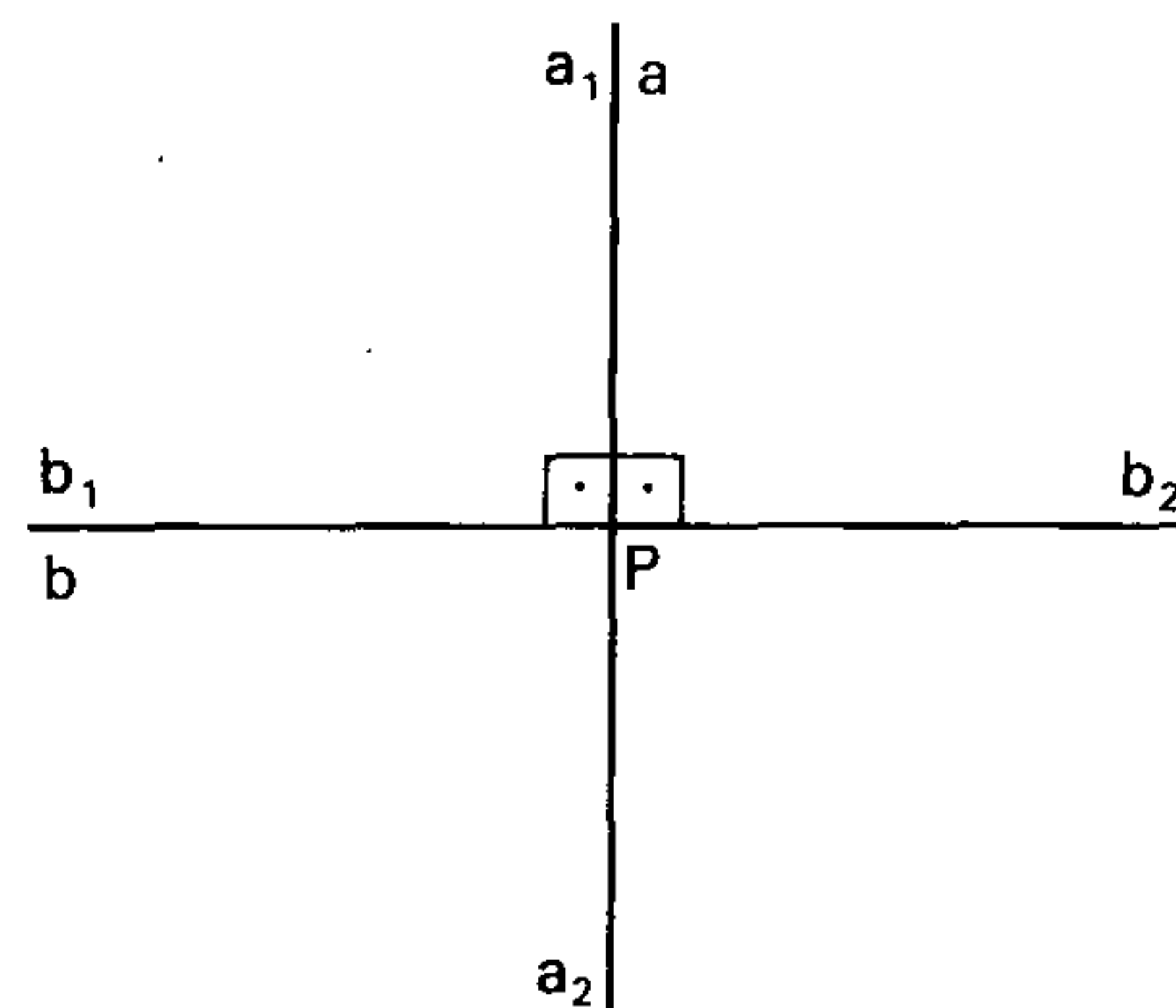
Duas retas são *perpendiculares* (símbolo: $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes

$$a \perp b \iff (a \cap b = \{P\} \text{ e } a_1\hat{P}b_1 = a_1\hat{P}b_2)$$

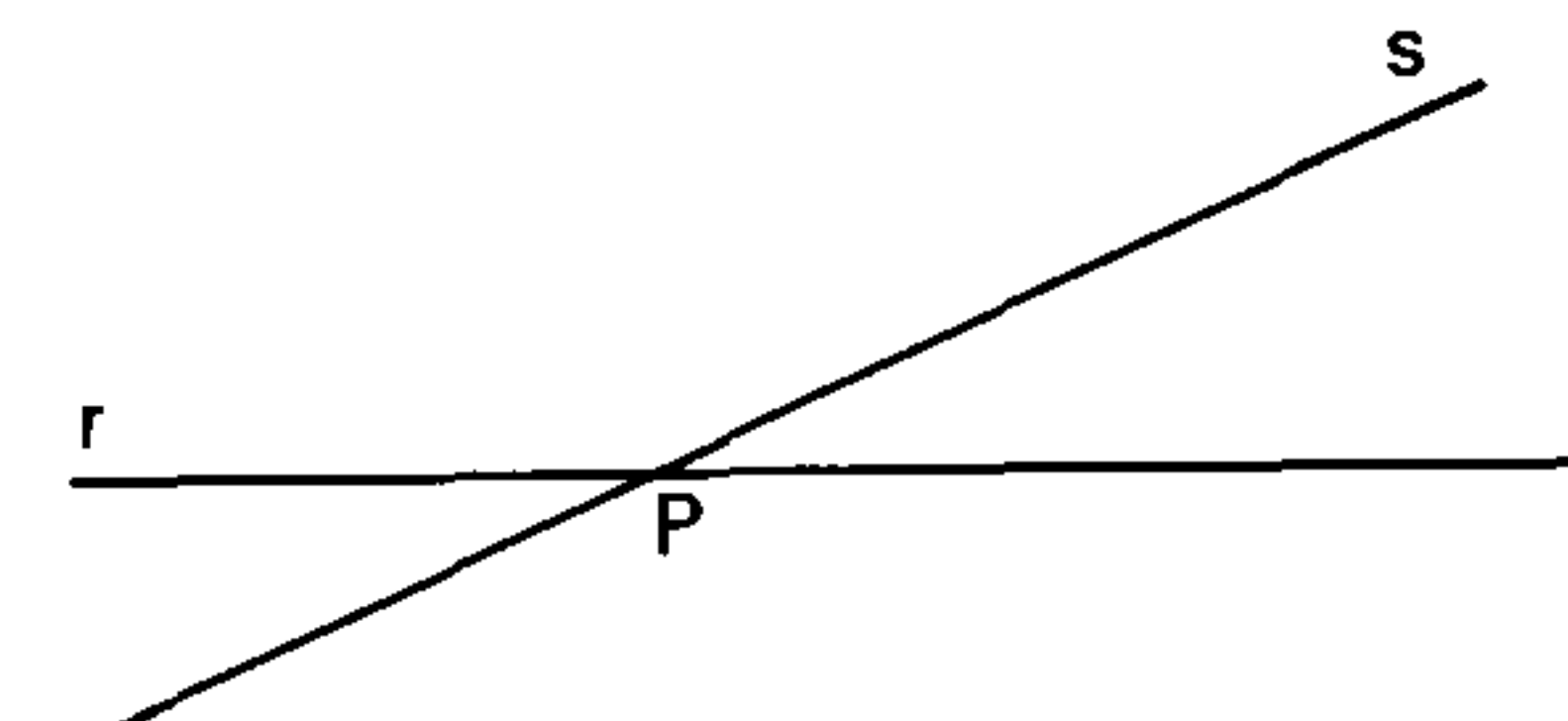
em que a_1 é uma das semi-retas de a de origem P e b_1 e b_2 são semi-retas opostas de b com origem em P.

Duas semi-retas são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares e têm um ponto comum.

Dois segmentos de reta são perpendiculares se, e somente se, estão contidos em retas perpendiculares e têm um ponto comum.

Um ângulo $a_1\hat{P}b_1$ é *reto* se a semi-reta a_1 é perpendicular à semi-reta b_1.

79. *Retas oblíquas*

Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que essas retas são *oblíquas*.

Se $r \cap s = \{P\}$ e $r \not\perp s$, então r e s são oblíquas.

80. *Existência do ângulo reto*

Consideremos uma reta r e um seu ponto O.

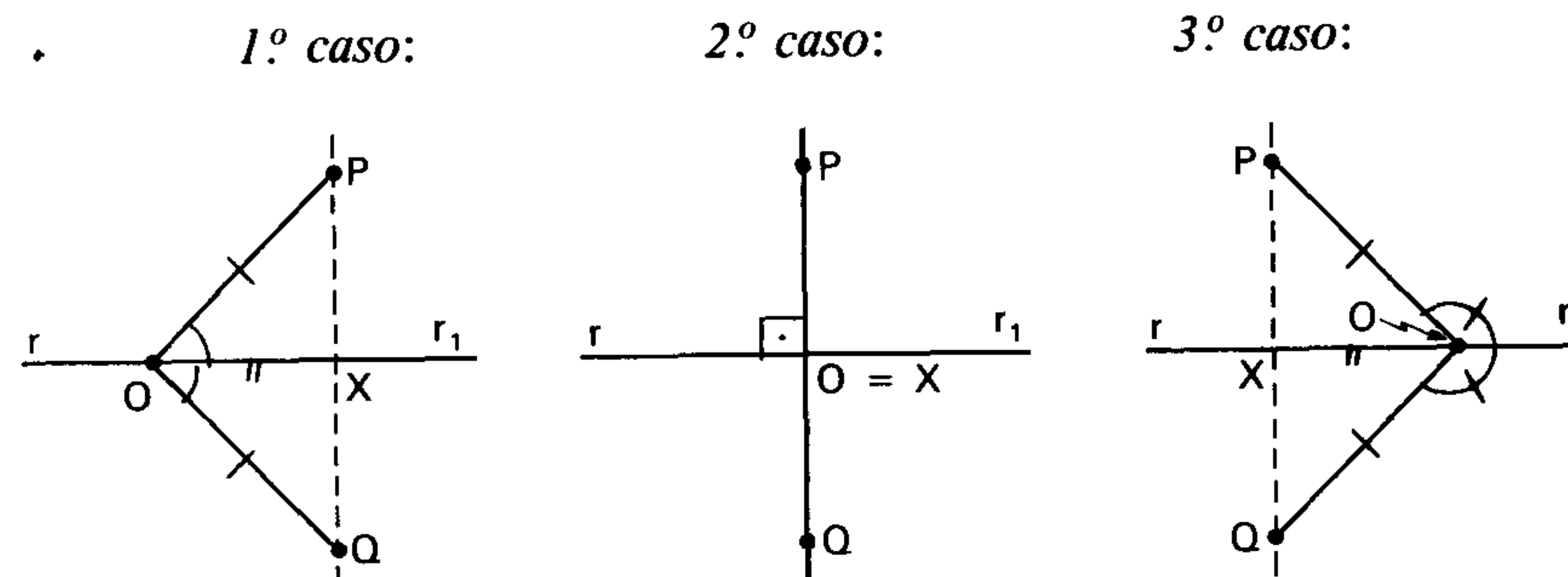
Tomemos dois pontos P e Q em semiplanos opostos em relação a r tais que:

$$r_1\hat{O}P \equiv r_1\hat{O}Q \quad (1) \qquad \text{e} \qquad \overline{OP} \equiv \overline{OQ} \quad (2)$$

em que r_1 é uma das semi-retas de r de origem O.

O segmento $\overline{PQ}$ intercepta r num ponto X.

Temos os três casos abaixo:

1º caso: *2º caso:* *3º caso:*

No 2º caso, em que $X = O$, temos:

$P\hat{X}r_1 \equiv Q\hat{X}r_1$ e $r \perp \overleftrightarrow{PQ}$ e $P\hat{X}r_1$ é reto

No 1º caso e no 3º caso temos:

$\triangle POX \equiv \triangle QOX$ pelo caso LAL ((2), (1) e $\overline{OX}$ comum)

Então:

$$\triangle POX \equiv \triangle QOX \implies P\hat{X}O \equiv Q\hat{X}O \implies r \perp \overleftrightarrow{PQ} \implies P\hat{X}O \text{ é reto}$$

II. Existência e unicidade da perpendicular

1ª parte

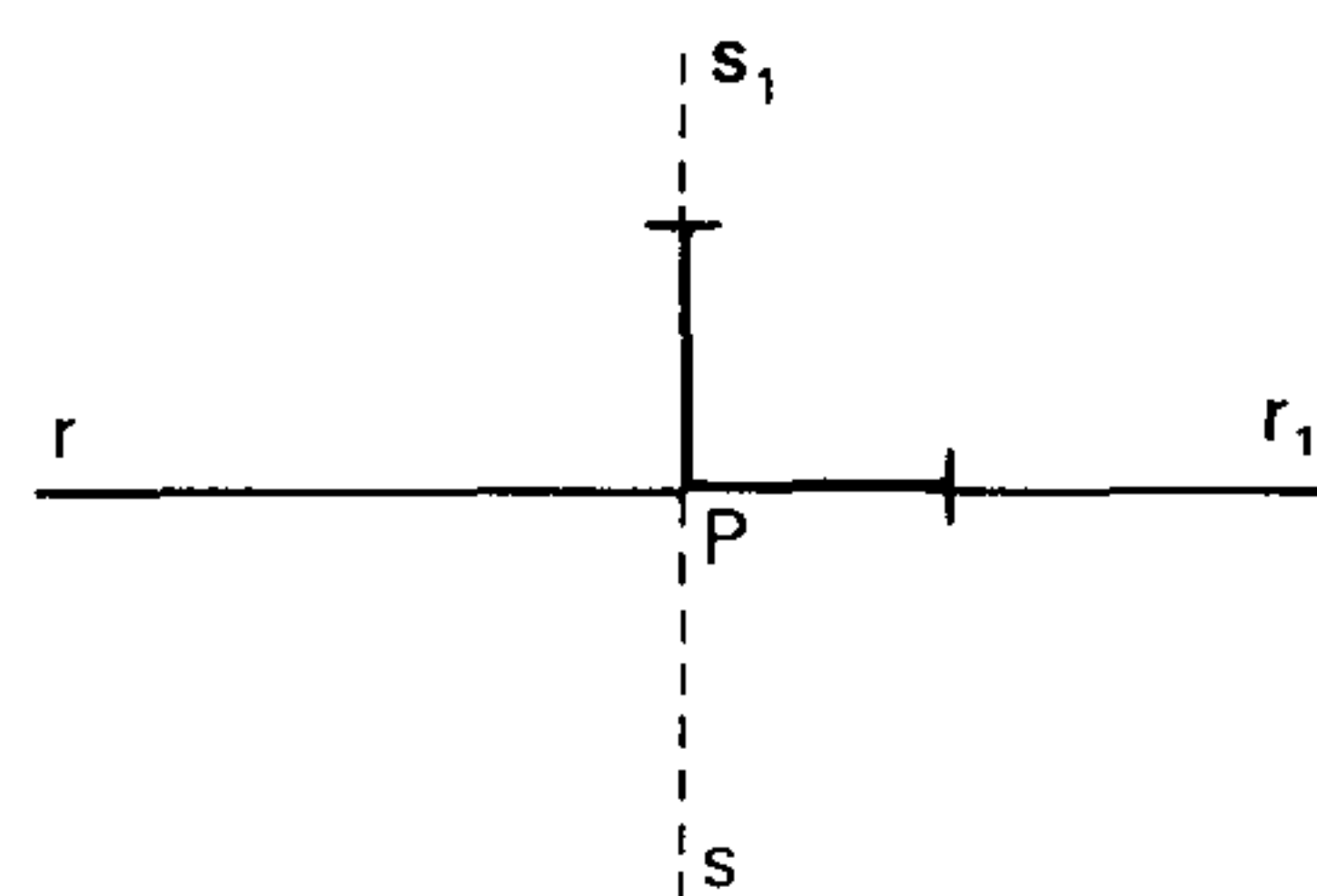
Num plano por um ponto dado de uma reta dada passa uma única reta perpendicular à reta dada.

ou

Num plano, por um ponto *P* de uma reta *r* existe uma única reta *s* perpendicular a *r*.

81. *Existência*

Utilizando o postulado do transporte de ângulos (item 35) e sendo r_1 uma das semi-retas de r de origem P, construímos, num dos semiplanos dos determinados por r, o ângulo $s_1\hat{P}r_1$ congruente a um *ângulo reto*.

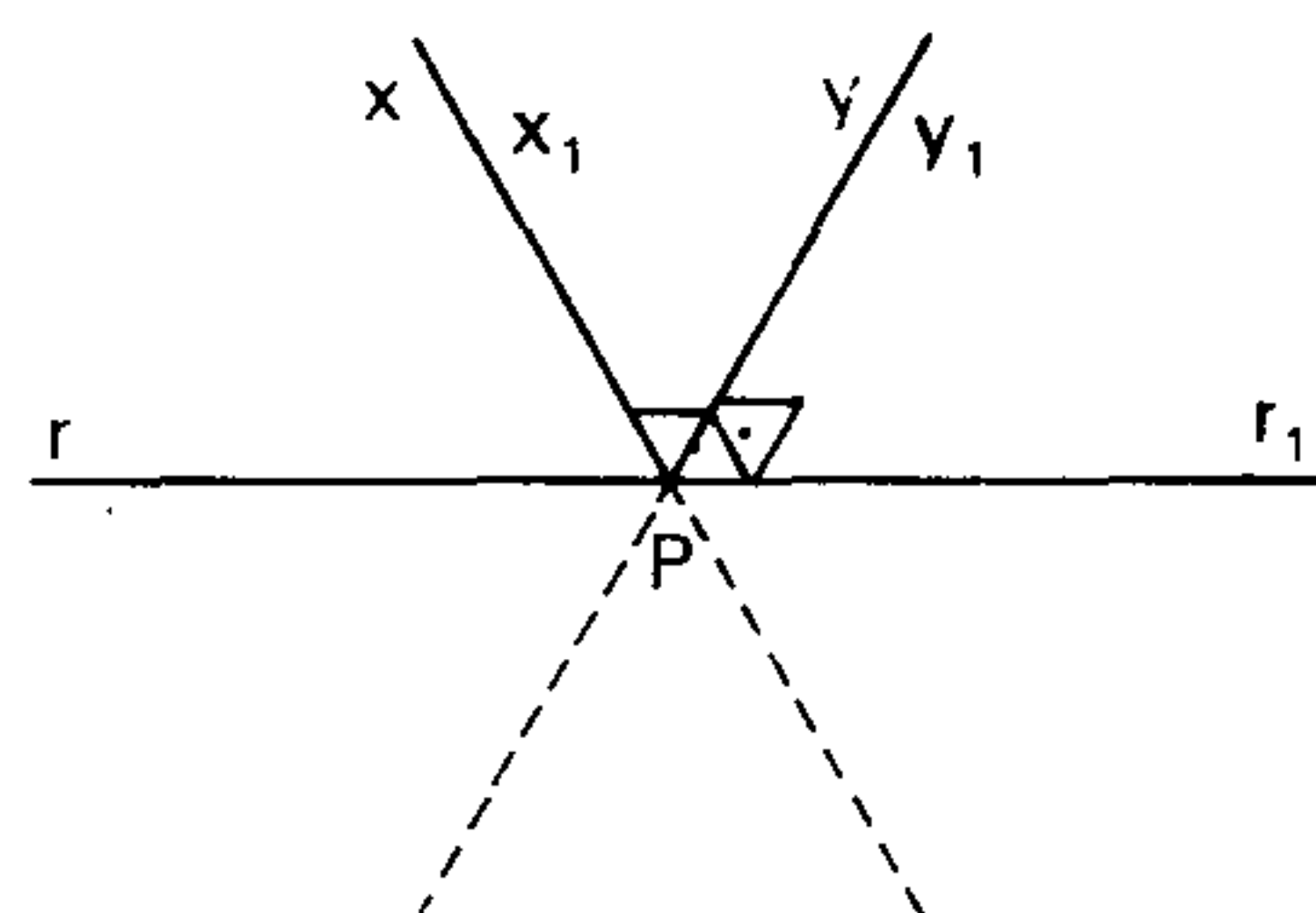
A reta s que contém s_1 é perpendicular a r, pois $\widehat{r_1Ps_1}$ é reto.

82. *Unicidade*

Se duas retas distintas x e y, com $x \neq y$, passando por P fossem ambas perpendiculares a r, teríamos o que segue.

Com as semi-retas Px_1 de x e Py_1 de y situadas num mesmo semiplano dos determinados por r e com Pr_1 semi-reta de r, vem:

$$x \perp r \text{ em } P \implies r_1\hat{P}x_1 \text{ é congruente ao ângulo reto}$$
$$y \perp r \text{ em } P \implies r_1\hat{P}y_1 \text{ é congruente ao ângulo reto}$$

Se Px_1 é distinta de Py_1, o resultado acima é um *absurdo*, de acordo com o postulado do transporte de ângulos (item 35).

Logo, a reta perpendicular a r por P é única.

2ª parte

Por um ponto dado fora de uma reta dada existe uma e somente uma reta perpendicular à reta dada.

ou

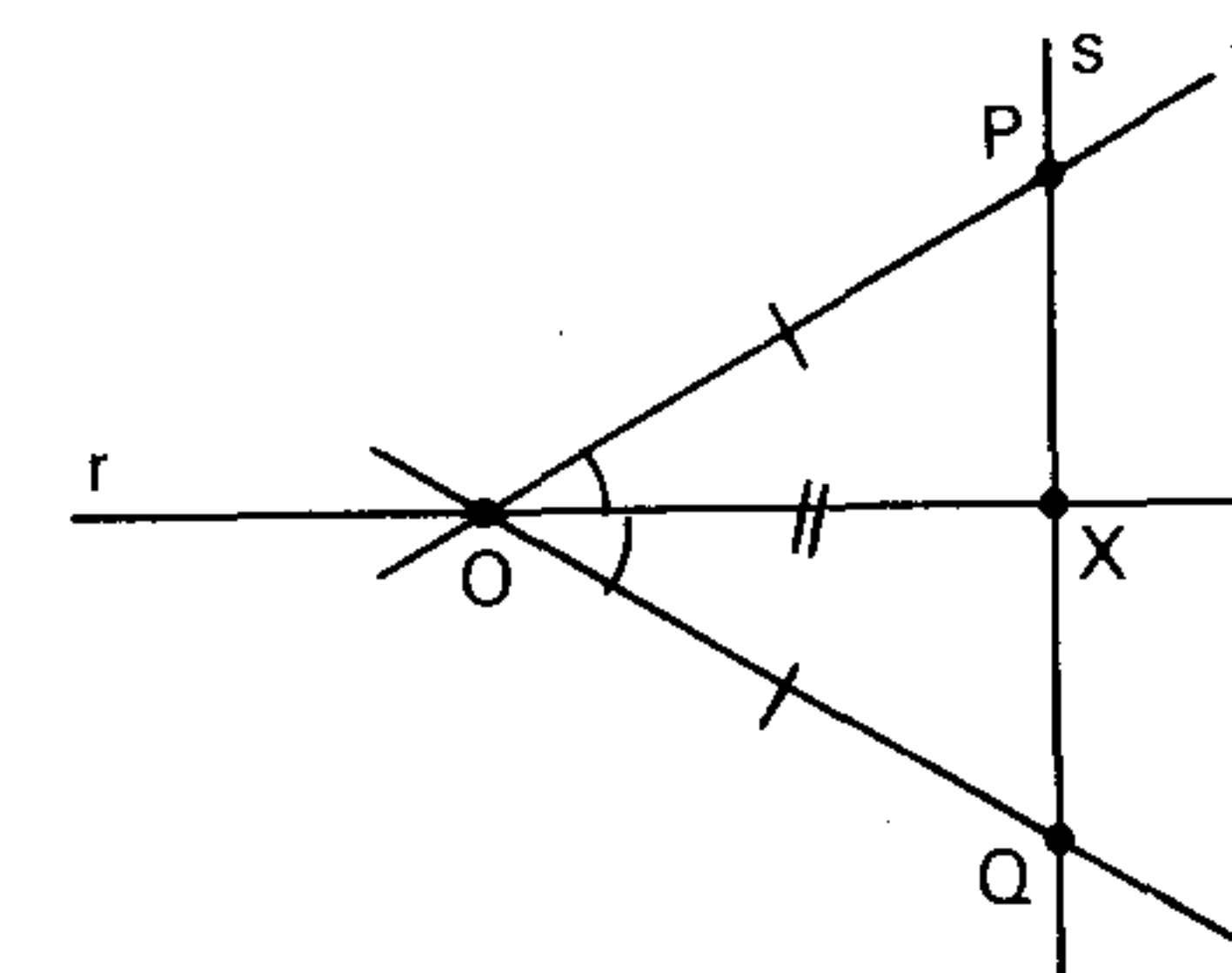
Por um ponto *P* fora de uma reta *r* passa uma única reta *s* perpendicular a *r*.

83. *Existência*

Construímos por P uma reta t que intercepta r num ponto O. Seja Or_1 uma das semi-retas de r de origem O.

No semiplano oposto ao de P, dos determinados por r, obtemos um ponto Q tal que

$r_1\hat{O}P \equiv r_1\hat{O}Q$ (1) e $\overline{OP} \equiv \overline{OQ}$ (2)

utilizando os postulados de transporte (itens 18 e 35).

A reta $s = \overleftrightarrow{PQ}$ é a reta pedida, conforme o que segue.

O segmento $\overline{PQ}$ intercepta r num ponto X.

Se X coincide com O ($X = O$), então:

$r_1\hat{X}P \equiv r_1\hat{X}Q$ e $\overleftrightarrow{PQ} \perp r$ ou seja $s \perp r$.

Se X não coincide com O, temos:

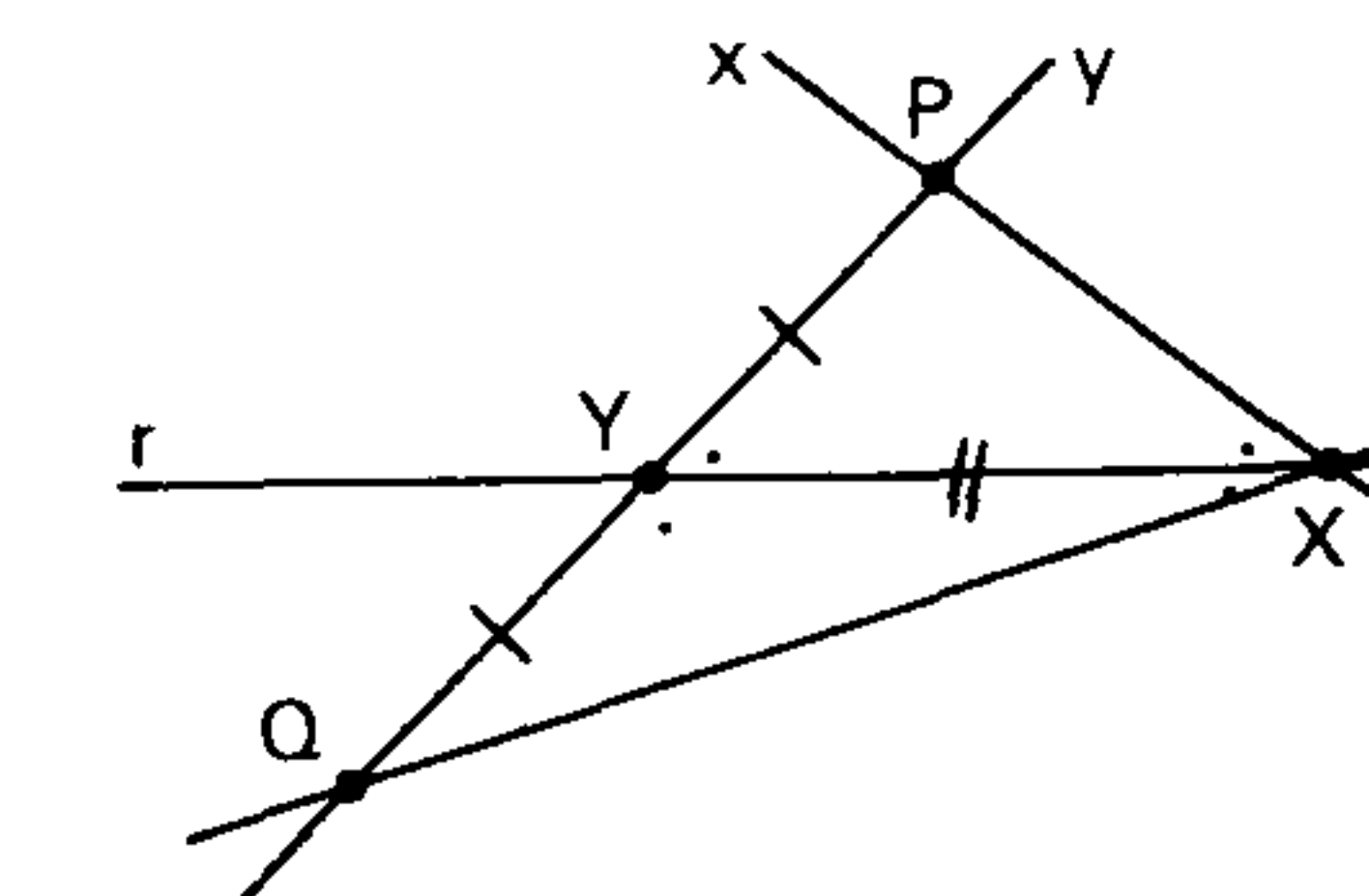
$\triangle OXP \equiv \triangle OXQ$ pelo caso LAL ((2), (1) e $\overline{OX}$ comum).

Então:

$$\triangle OXP \equiv \triangle OXQ \implies O\hat{X}P \equiv O\hat{X}Q \implies r \perp \overleftrightarrow{PQ} \implies s \perp r.$$

84. *Unicidade*

Se duas retas distintas x e y, com $x \neq y$, passando por P fossem ambas perpendiculares a r, teríamos o que segue.

Sejam X e Y os pontos de interseção de x e y com r e seja Q o ponto da semi-reta oposta a $\overrightarrow{YP}$ tal que:

$$\overline{YQ} \equiv \overline{YP} \quad (1)$$

$y \perp r \implies P\hat{Y}X \equiv Q\hat{Y}X \quad (2) \qquad x \perp r \implies P\hat{X}Y$ é reto (3)

Pelo caso LAL ((1), (2) e $\overline{XY}$ comum), vem: $\triangle PXY \equiv \triangle QXY$.

$\triangle PXY \equiv \triangle QXY \implies P\hat{X}Y \equiv Q\hat{X}Y \stackrel{(3)}{\implies} Q\hat{X}Y$ é reto $\implies \overleftrightarrow{XQ} \perp r$

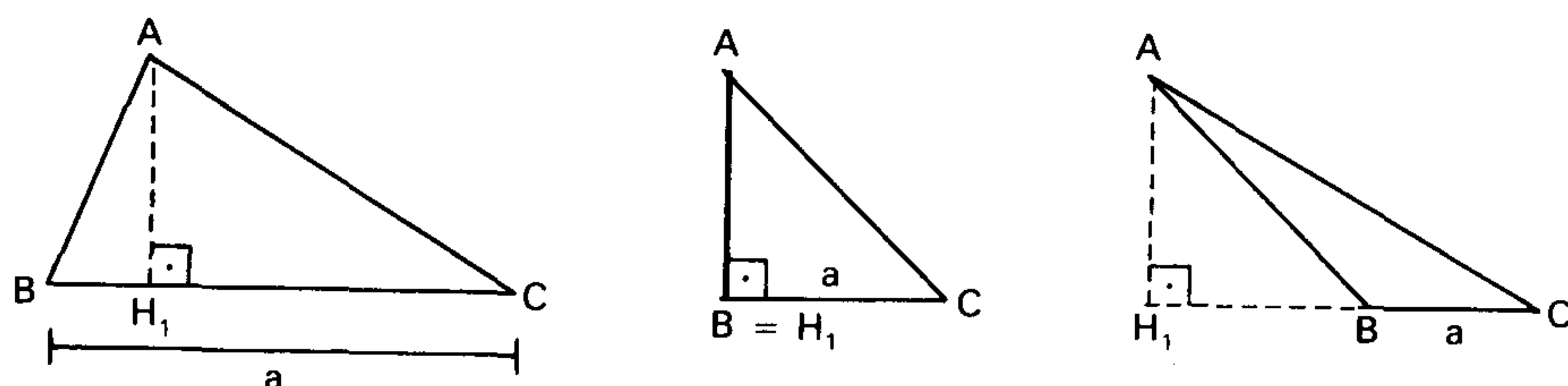
Ficamos então com o seguinte absurdo:

por um ponto X da reta r temos duas retas distintas x e $\overleftrightarrow{XQ}$, ambas perpendiculares a r, o que contraria a unicidade provada na *1.ª parte* (item 82).

Logo, a reta perpendicular a r por P é única.

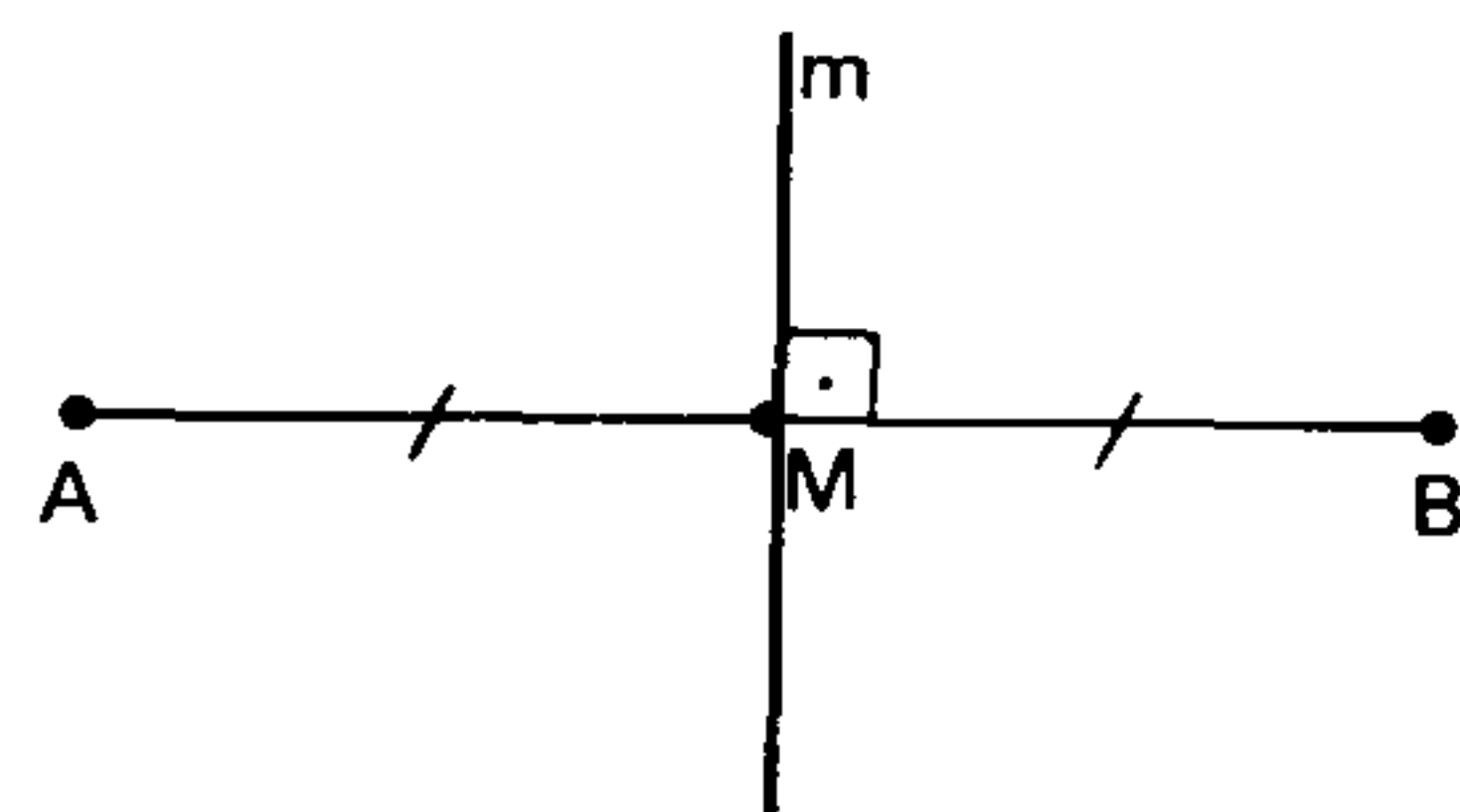
85. *Altura de um triângulo*

Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.

A B H₁ C a · A B = H₁ a C · A H₁ B a C

H_1 é a interseção da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com a perpendicular a ela, conduzida por A.
$\overline{AH_1}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, ou
$\overline{AH_1}$ é a altura relativa ao lado a, ou ainda
$\overline{AH_1}$ é a altura relativa ao vértice A.
H_1 também é dito pé da altura.

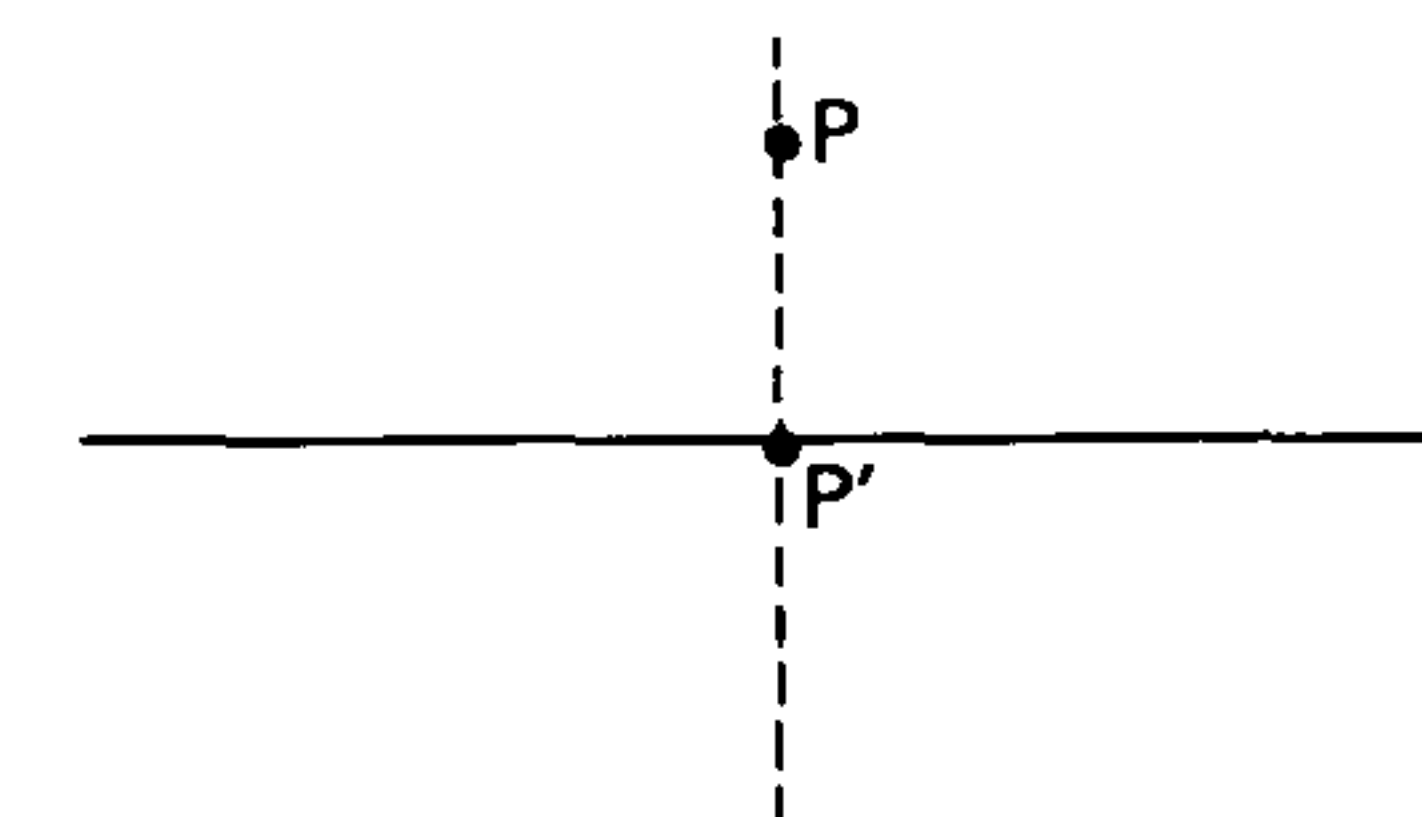
86. *Mediatriz de um segmento*

A *mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.

m A M B

III. Projeções e distância

87. *Projeção de um ponto sobre uma reta*

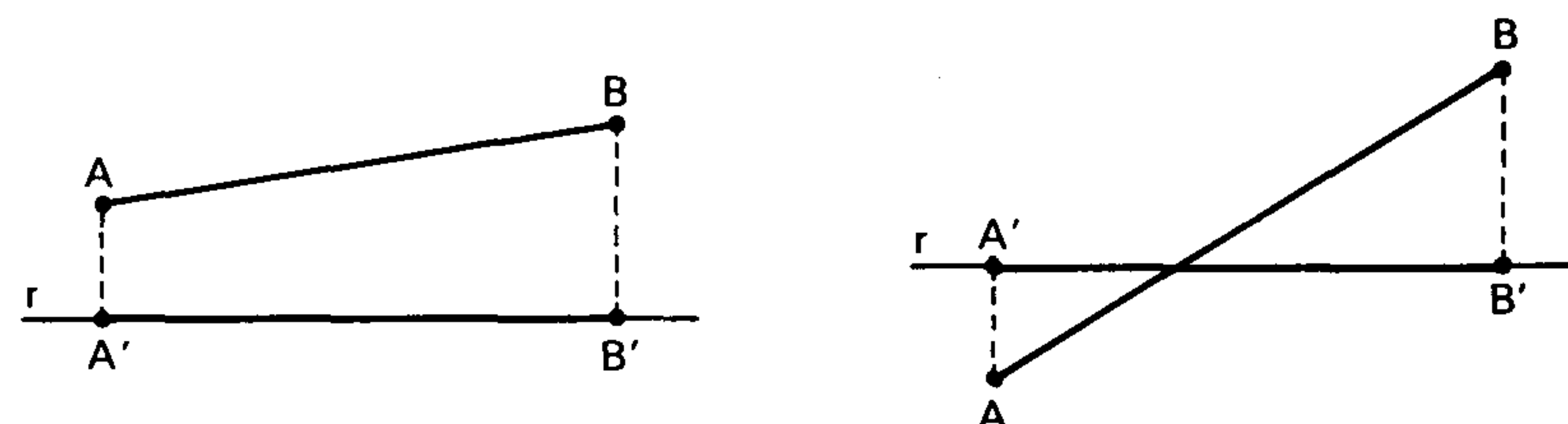
Chama-se *projeção ortogonal* (ou simplesmente projeção) de um ponto sobre uma reta ao ponto de interseção da reta com a perpendicular a ela conduzida por aquele ponto.

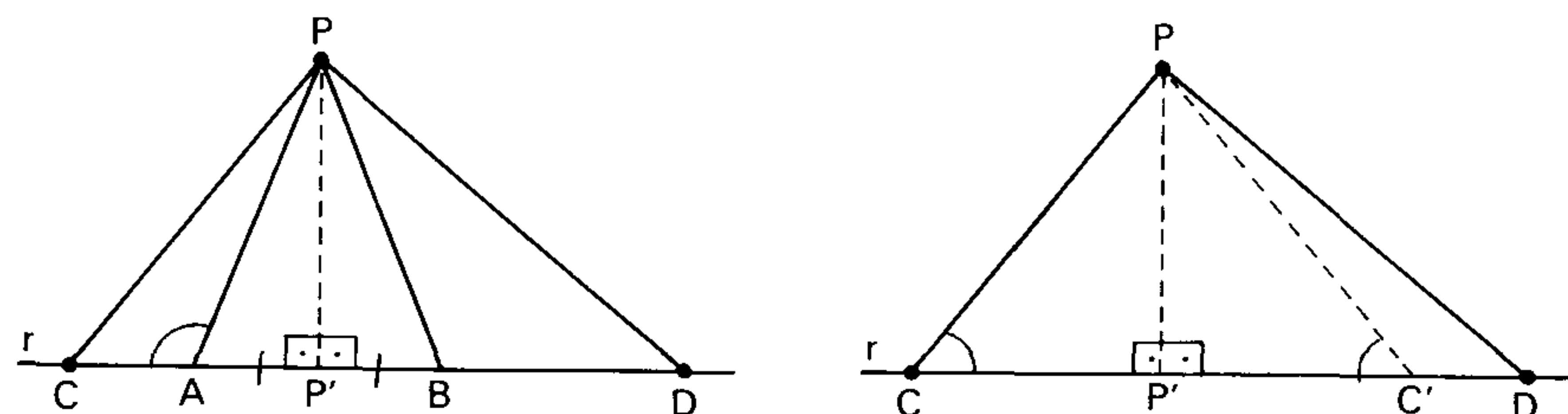
P r P'

P' é a projeção de P sobre r.
$\overleftrightarrow{PP'} \perp r$ e $\overleftrightarrow{PP'} \cap r = \{P'\}$
P' é o *pé da perpendicular* à reta r conduzida por P.
Se $P \in r$, então $P' = P$.

88. *Projeção de um segmento sobre uma reta*

A projeção de um segmento de reta $\overline{AB}$ não perpendicular a uma reta r sobre esta reta é o segmento de reta $\overline{A'B'}$ em que

A' é a projeção de A sobre r e
B' é a projeção de B sobre r.

B A r A' B' · B r A' B' A

89. *Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a uma reta por um ponto*

Se por um ponto P não pertencente a uma reta r conduzirmos os segmentos $\overline{PP'}$, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, ..., o primeiro ($\overline{PP'}$) perpendicular e os demais ($\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, ...) oblíquos a r, todos com uma extremidade comum P e as outras extremidades P', A, B, C, D, ... em r, então:

1º) O segmento perpendicular é *menor* que qualquer dos oblíquos.

Demonstração

$\overline{PP'}$ é cateto de triângulos retângulos que têm, respectivamente, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, ... como hipotenusa.

Logo,

$$\overline{PP'} < \overline{PA};\ \overline{PP'} < \overline{PB};\ \overline{PP'} < \overline{PC};\ \overline{PP'} < \overline{PD};\ \ldots$$

2º) a) Segmentos oblíquos, com *projeções congruentes*, são *congruentes*.

Hipótese — *Tese*

$$\overline{P'A} \equiv \overline{P'B} \Longrightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$$

Demonstração

$(\overline{PP'}$ comum, $P\hat{P}'A \equiv P\hat{P}'B$, $\overline{P'A} \equiv \overline{P'B}) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle PP'A \equiv \triangle PP'B \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$

b) Segmentos oblíquos *congruentes* têm *projeções congruentes*.

Hipótese — *Tese*

$$\overline{PA} \equiv \overline{PB} \Longrightarrow \overline{P'A} \equiv \overline{P'B}$$

Demonstração

Aplicação do caso especial para triângulos retângulos: cateto-hipotenusa.

$\triangle PP'A$ e $\triangle PP'B$ têm cateto $\overline{PP'}$ comum e hipotenusa $\overline{PA} \equiv \overline{PB} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \triangle PP'A \equiv \triangle PP'B \Longrightarrow \overline{P'A} \equiv \overline{P'B}$

3º) a) De dois segmentos oblíquos de projeções não congruentes, o de *maior projeção* é *maior*.

Hipótese — *Tese*

$$\overline{P'C} > \overline{P'A} \Longrightarrow \overline{PC} > \overline{PA}$$

Demonstração

Considerando A e C numa mesma semi-reta de r das determinadas por P' e considerando a hipótese $\overline{P'C} > \overline{P'A}$, resulta que A está entre P' e C.

O ângulo $P\hat{A}C$ é obtuso pois é ângulo externo do $\triangle PP'A$, em que $P\hat{P}'A$ é reto.

No $\triangle PAC$, temos: $P\hat{A}C > P\hat{C}A$,

pois o primeiro é obtuso e o segundo é agudo. Como ao maior ângulo está oposto o maior lado, temos:

$$\overline{PC} > \overline{PA}$$

b) De dois segmentos oblíquos não congruentes, o *maior* tem *projeção maior*.

Hipótese — *Tese*

$$\overline{PC} > \overline{PA} \Longrightarrow \overline{P'C} > \overline{P'A}$$

Demonstração

Se $\overline{P'C} \leqslant \overline{P'A}$, pelos casos anteriores teríamos $\overline{PC} \leqslant \overline{PA}$, o que é absurdo, de acordo com a hipótese.

Logo, $\overline{P'C} > \overline{P'A}$

4º) a) De dois segmentos oblíquos não congruentes, o *maior* forma com a sua projeção *ângulo menor*.

Hipótese — *Tese*

$$\overline{PD} > \overline{PC} \Longrightarrow P\hat{D}P' < P\hat{C}P'$$

Demonstração

Se $\overline{PD} > \overline{PC}$, então, pelo caso anterior, $\overline{P'D} > \overline{P'C}$. Então ou C está entre P' e D ou podemos considerar um ponto C' entre P' e D tal que $\overline{P'C} \equiv \overline{P'C'}$. Vamos considerar a segunda alternativa.

De $\overline{P'C} \equiv \overline{P'C'}$ decorre que $P\hat{C}P' \equiv P\hat{C}'P'$. (1)

Aplicando o teorema do ângulo externo no $\triangle PC'D$, vem:

$$P\hat{D}C' < P\hat{C}'P'$$

E em vista de (1) obtemos:

$$P\hat{D}P' < P\hat{C}P'$$

b) De dois segmentos oblíquos não congruentes, aquele que forma com a sua projeção um *ângulo menor* é *maior*.

Hipótese		*Tese*
$P\hat{D}P' < P\hat{C}P'$	$\Longrightarrow$	$\overline{PD} > \overline{PC}$

Demonstração

Se $\overline{PD} \leqslant \overline{PC}$ por congruência de triângulos (para $\overline{PD} \equiv \overline{PC}$) ou pelo caso anterior (para $\overline{PD} < \overline{PC}$) teríamos $P\hat{D}P' \geqslant P\hat{C}P'$, o que é um absurdo, de acordo com a hipótese.

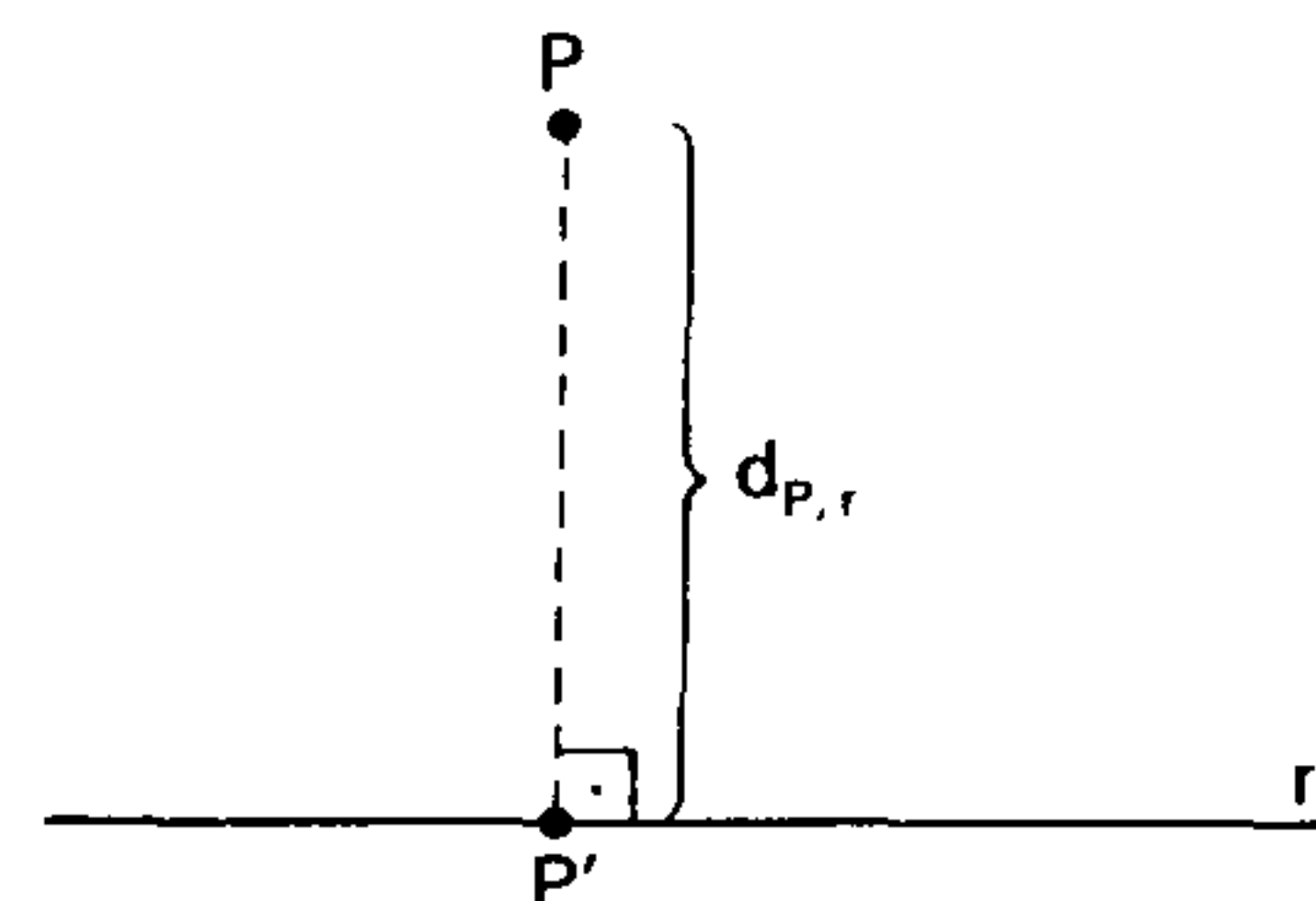
Logo, $\overline{PD} > \overline{PC}$.

90. Distância entre um ponto e uma reta

A distância de um ponto a uma reta é a distância desse ponto à projeção dele sobre a reta.

A distância entre P e r é a distância entre P e P', em que P' é a projeção de P sobre r.

$$d_{P,r} = d_{P,P'}$$

P
$d_{P,r}$
r
P'

Se o ponto pertence à reta, a distância entre eles é *nula*.

91. Distância entre duas retas paralelas

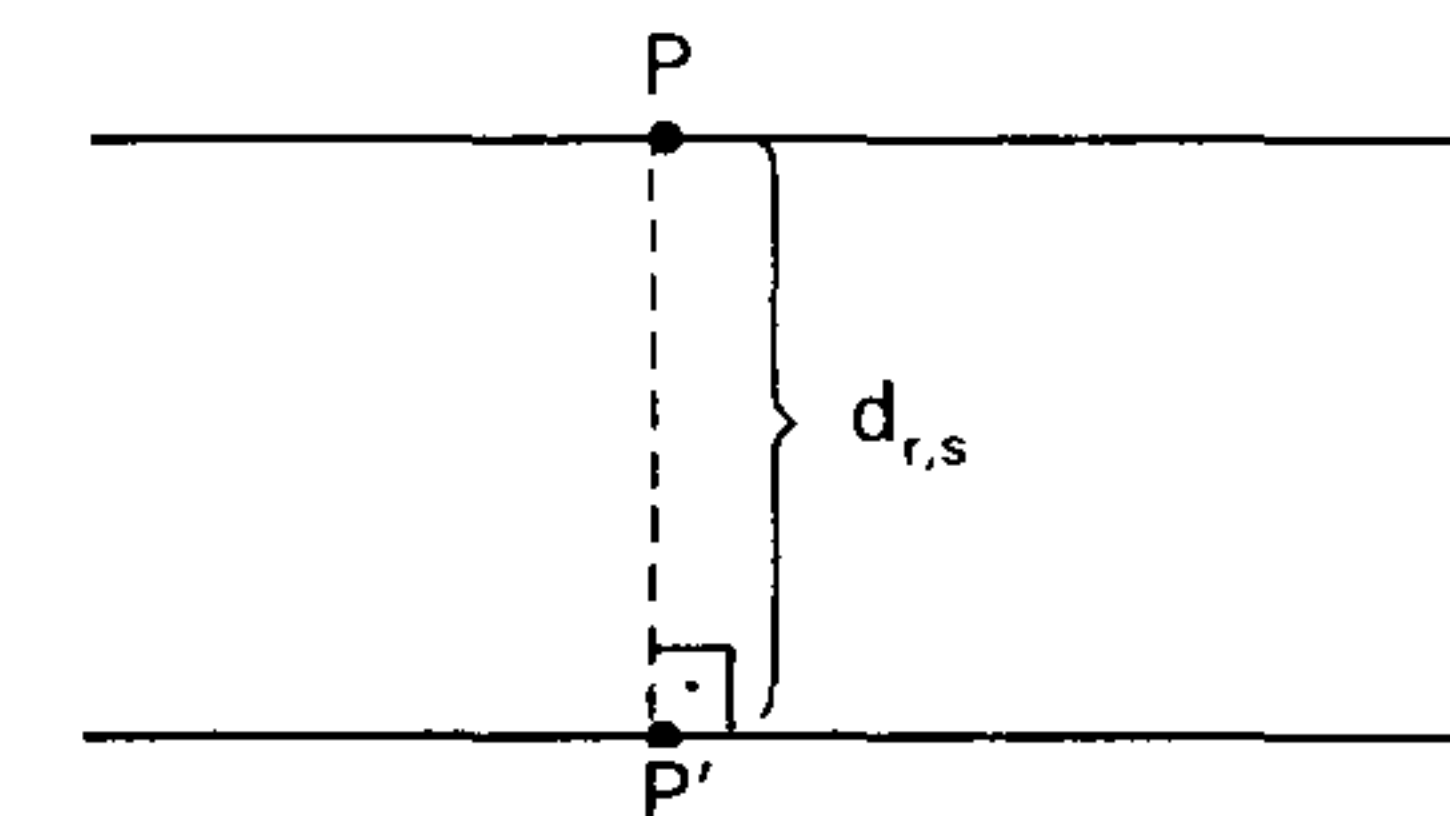
A distância entre duas retas paralelas é a distância entre um ponto qualquer de uma delas e a outra reta.

A distância entre r e s paralelas é a distância entre um ponto P de r e a reta s.

P r
$d_{r,s}$
s
P'

$d_{r,s} = d_{P,s}$ com $P \in r$

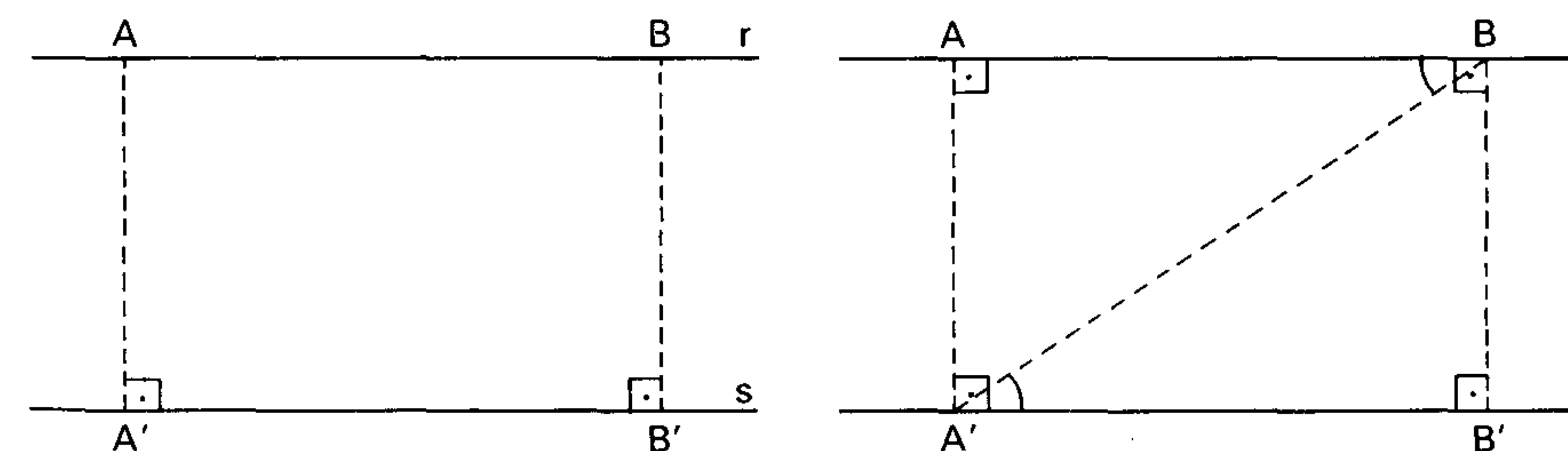
Se $r = s$, a distância entre r e s é nula.

A definição acima é justificada pela propriedade que segue.

92. **Se duas retas distintas são paralelas, os pontos de uma delas estão a igual distância (são eqüidistantes) da outra.**

Demonstração

De fato, sendo r e s duas retas paralelas e distintas, tomando dois pontos distintos A e B em r, vamos provar que $d_{A,s} = d_{B,s}$.

A B r
s
A' B'

A B r
s
A' B'

1) $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ são colaterais e, sendo $\hat{A}'$ reto, concluímos que $\hat{A}$ é reto.

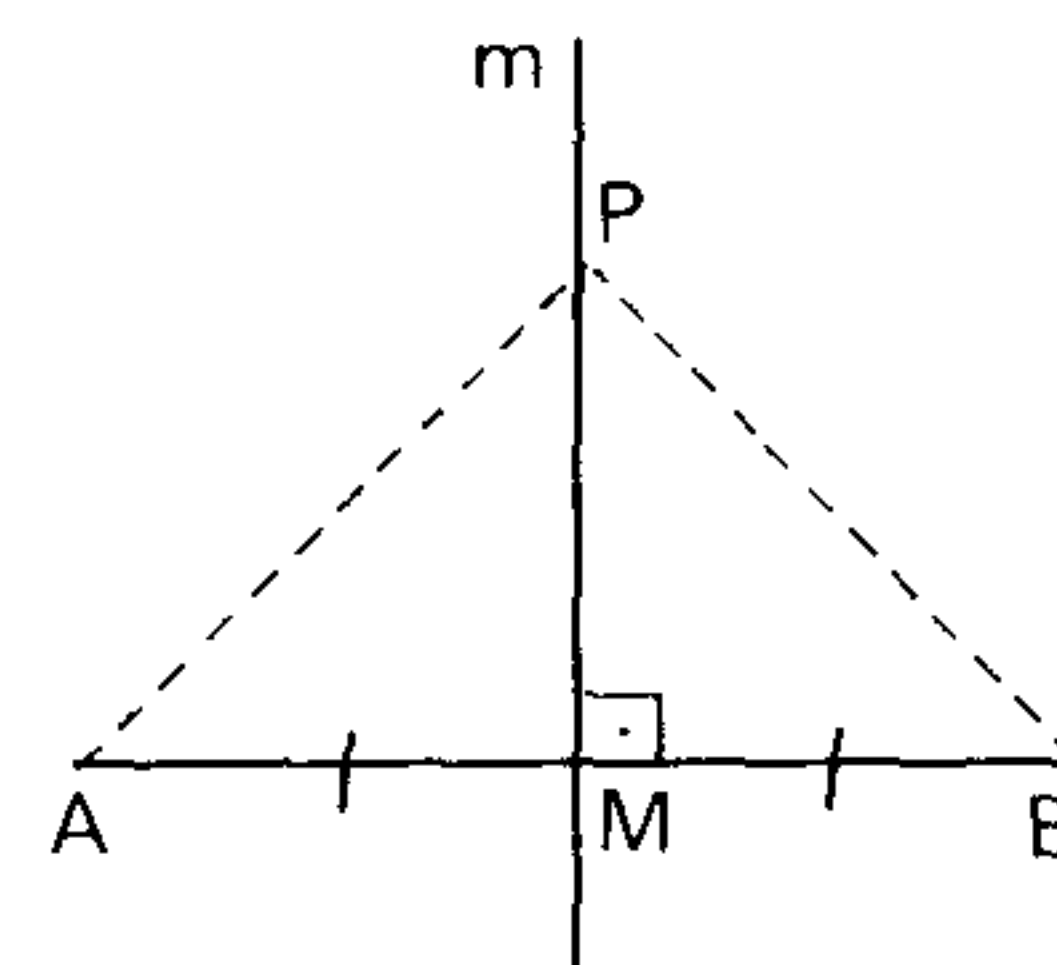
2) Considerando os triângulos $AA'B$ e $BB'A'$, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A'B} \text{ (lado comum)} \\ A'\hat{B}A \equiv B\hat{A'}B' \text{ (alternos)} \\ \hat{A} \equiv \hat{B}' \text{ (retos)}\end{array}\right\} \overset{LAA_o}{\Longrightarrow} \triangle A'AB \equiv \triangle BB'A' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AA' = BB' \Longrightarrow d_{A,s} = d_{B,s}$$

93. Propriedade dos pontos da mediatriz

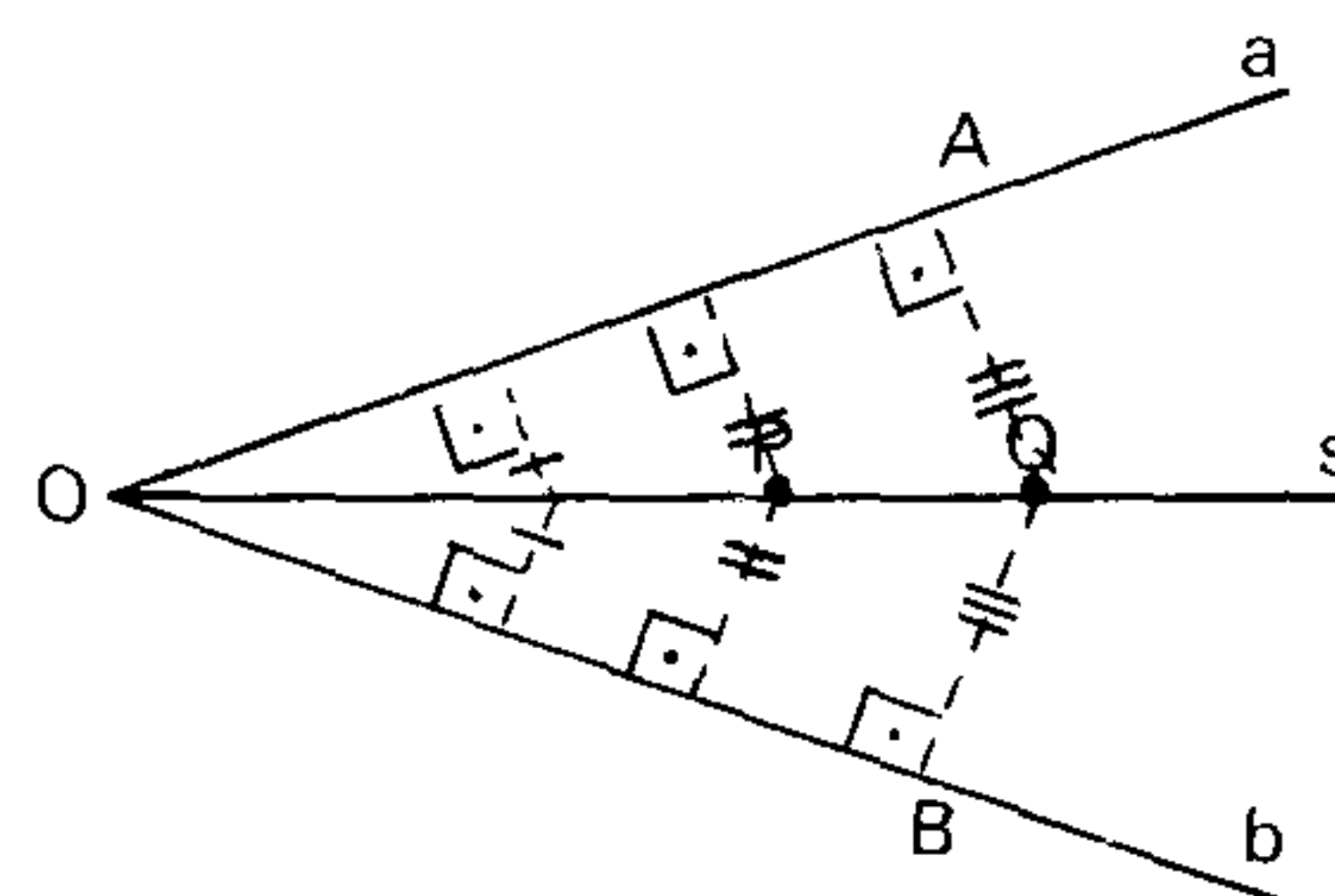
Usando o caso LAL de congruência de triângulos, podemos provar que:

Todo ponto da mediatriz de um segmento é eqüidistante das extremidades do segmento.

(m é mediatriz de $\overline{AB}$, $P \in m$) $\Rightarrow$ $PA = PB$

Note que, se $P = M$, a propriedade também vale.

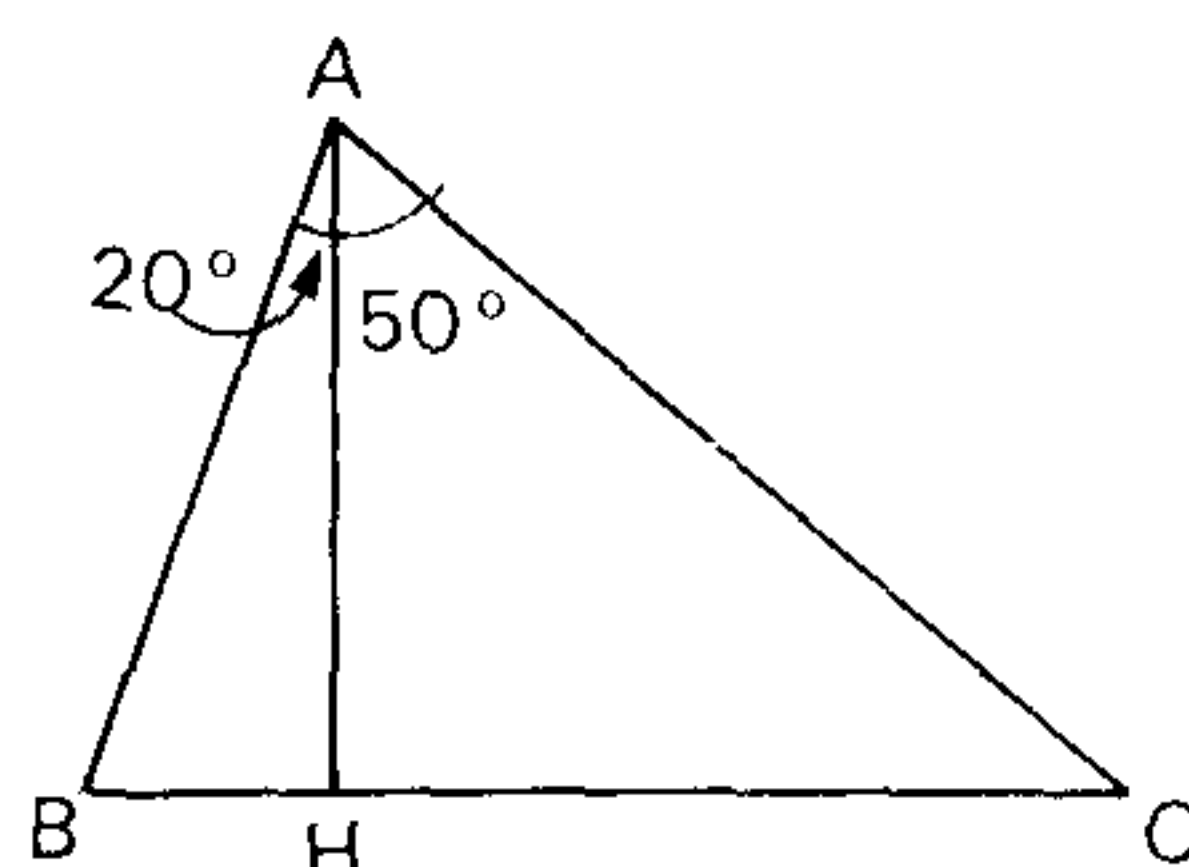
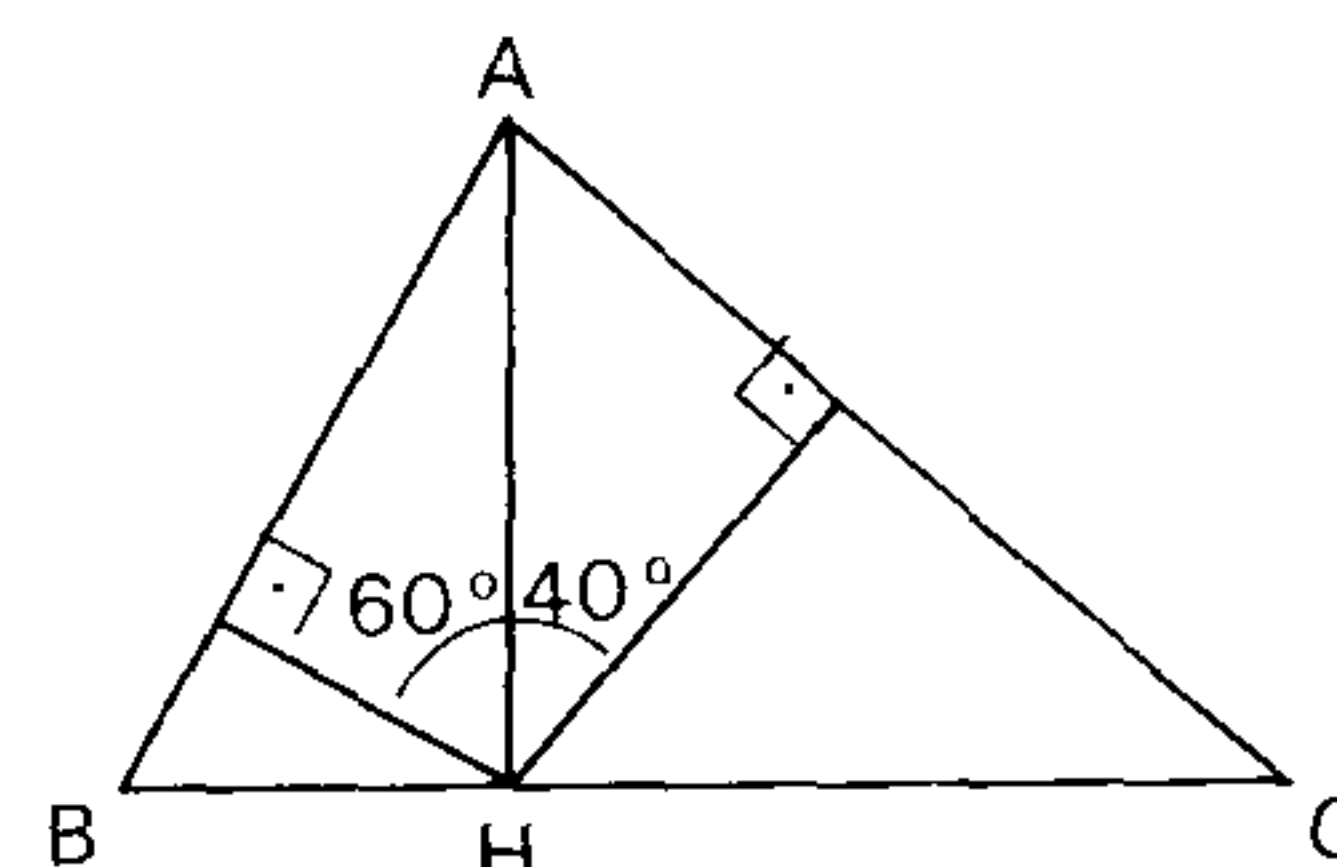
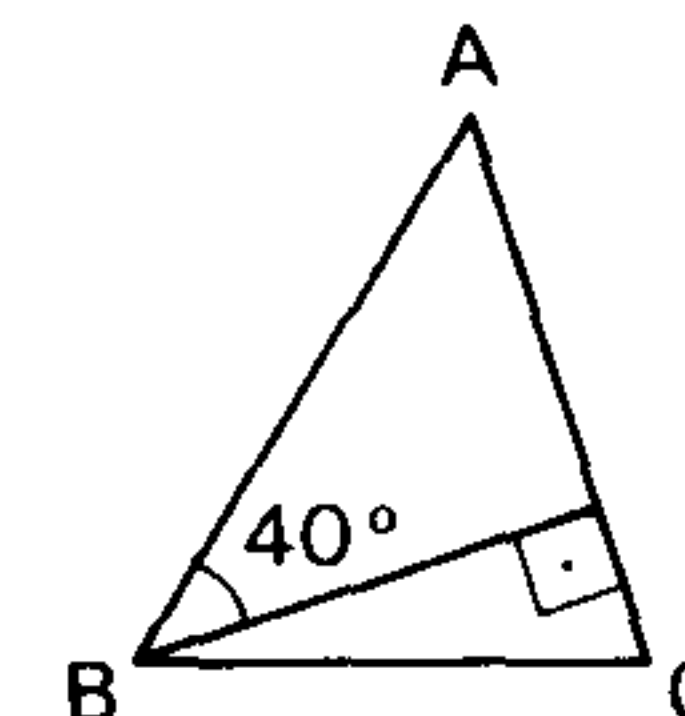
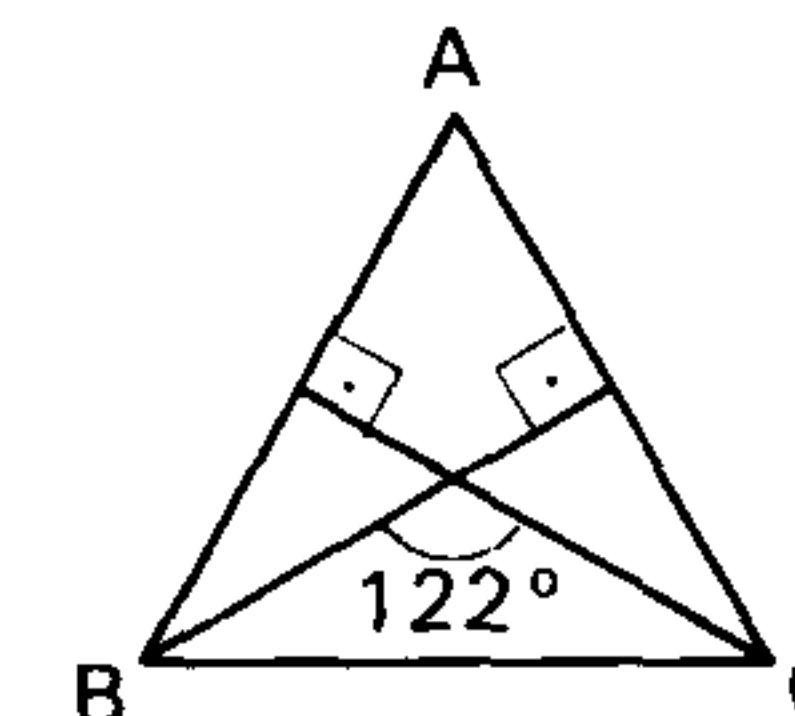
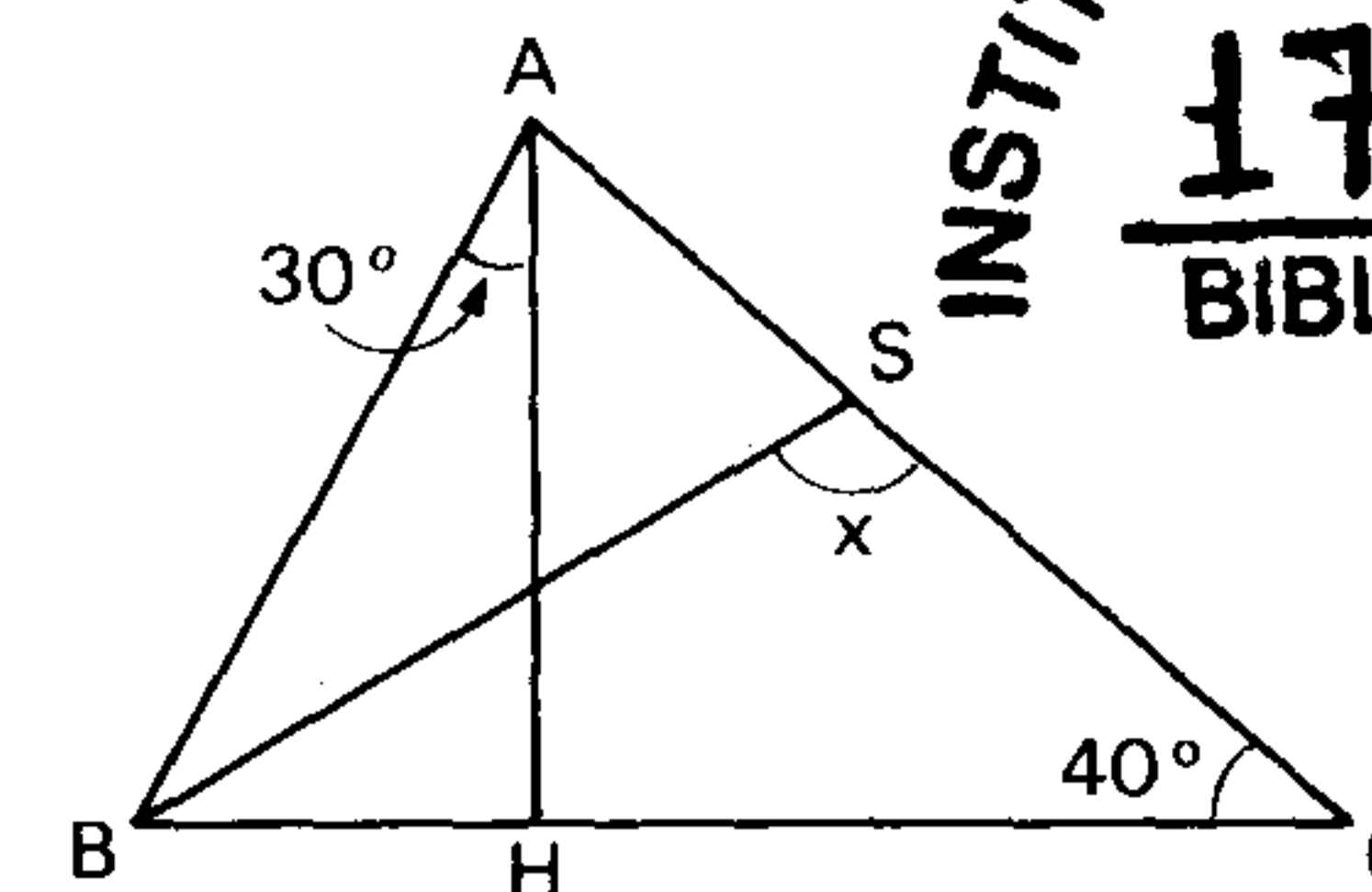
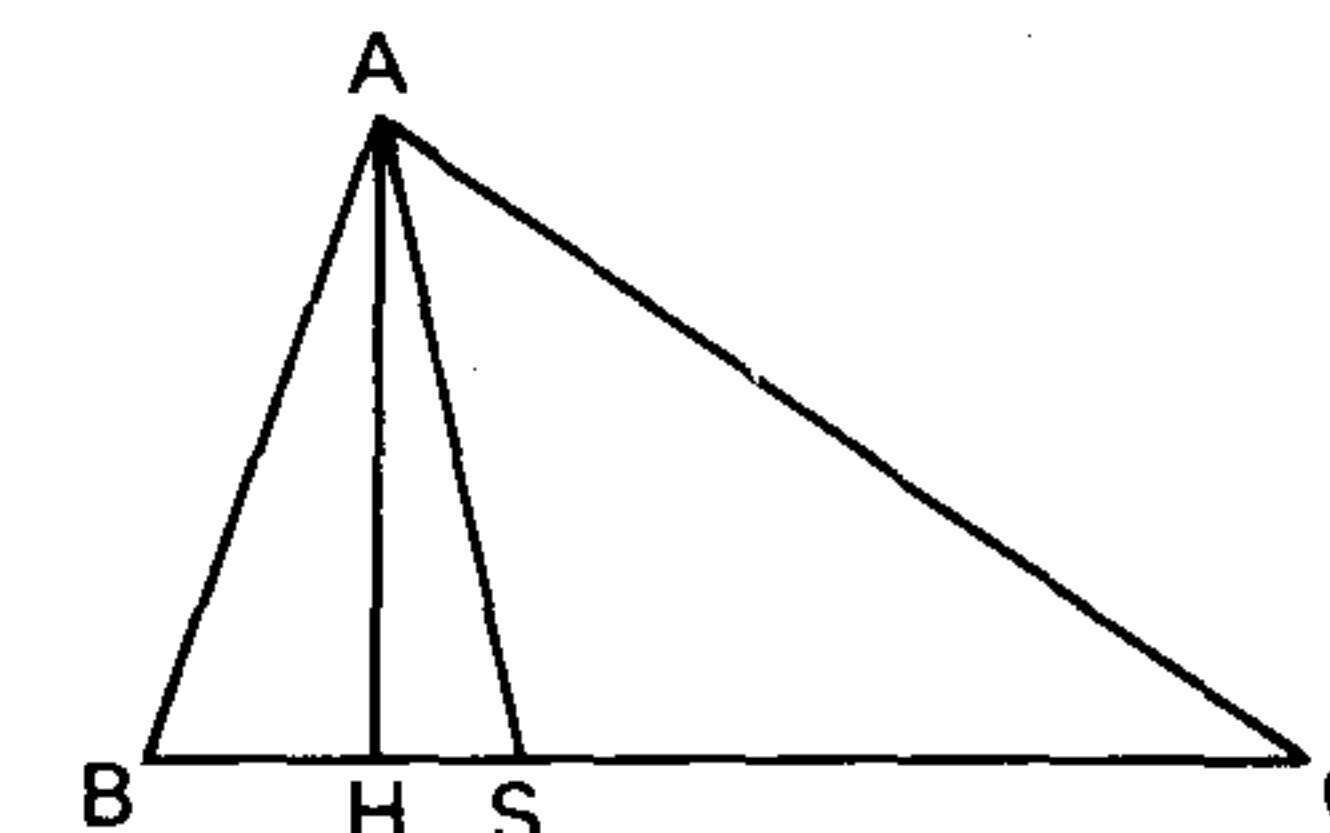
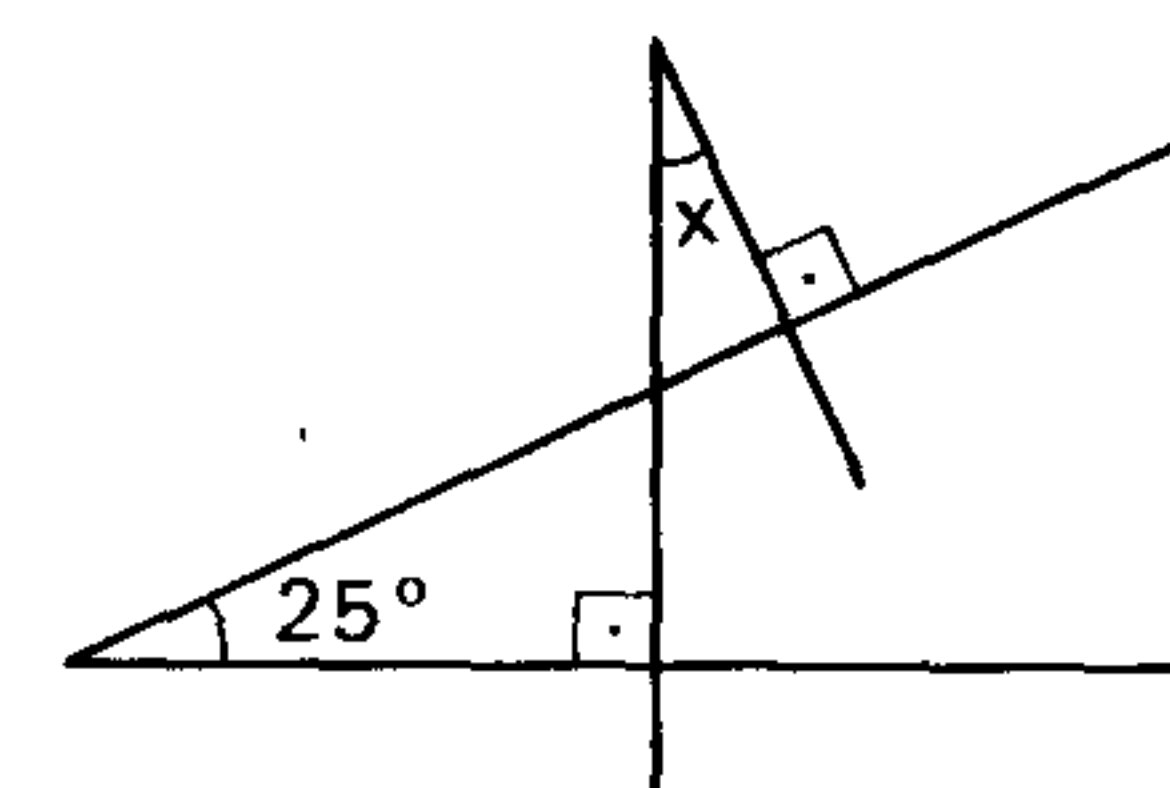
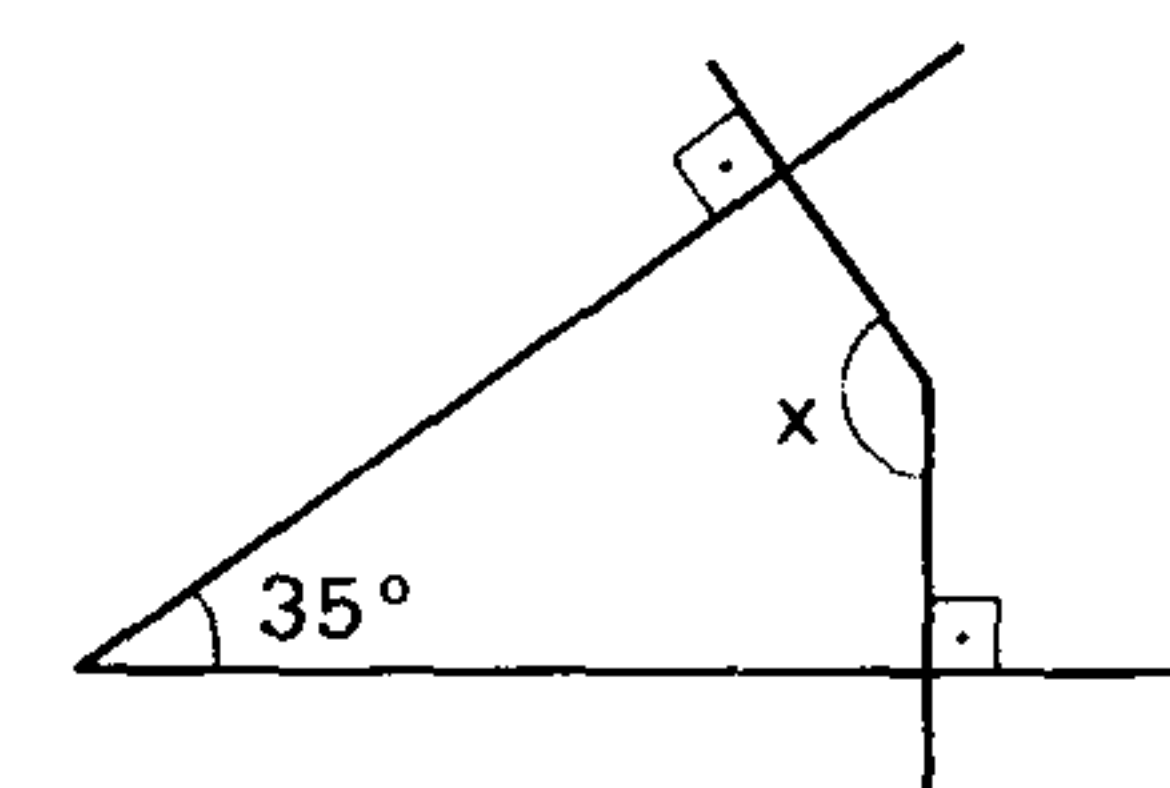
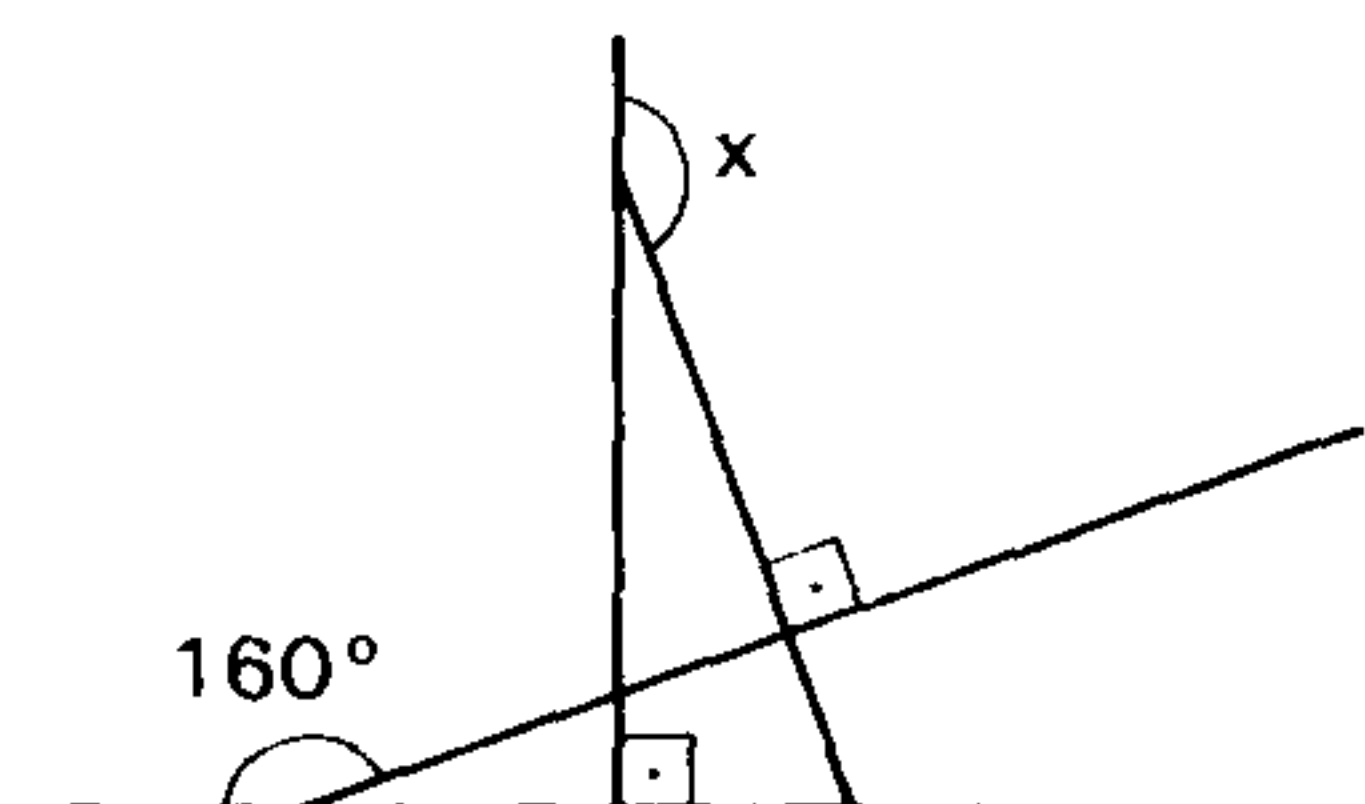
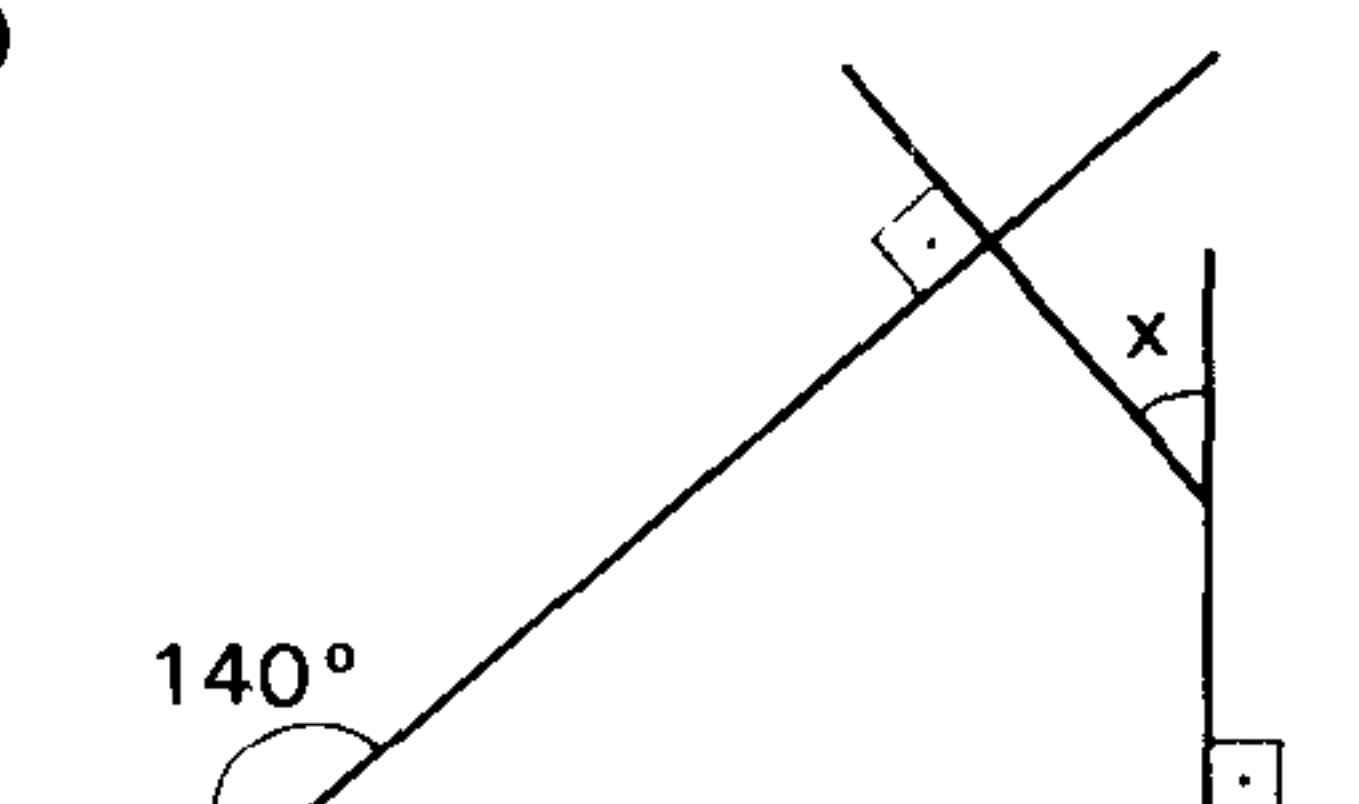
94. Propriedade dos pontos da bissetriz

Usando o caso LAA_o de congruência de triângulos, podemos provar que:

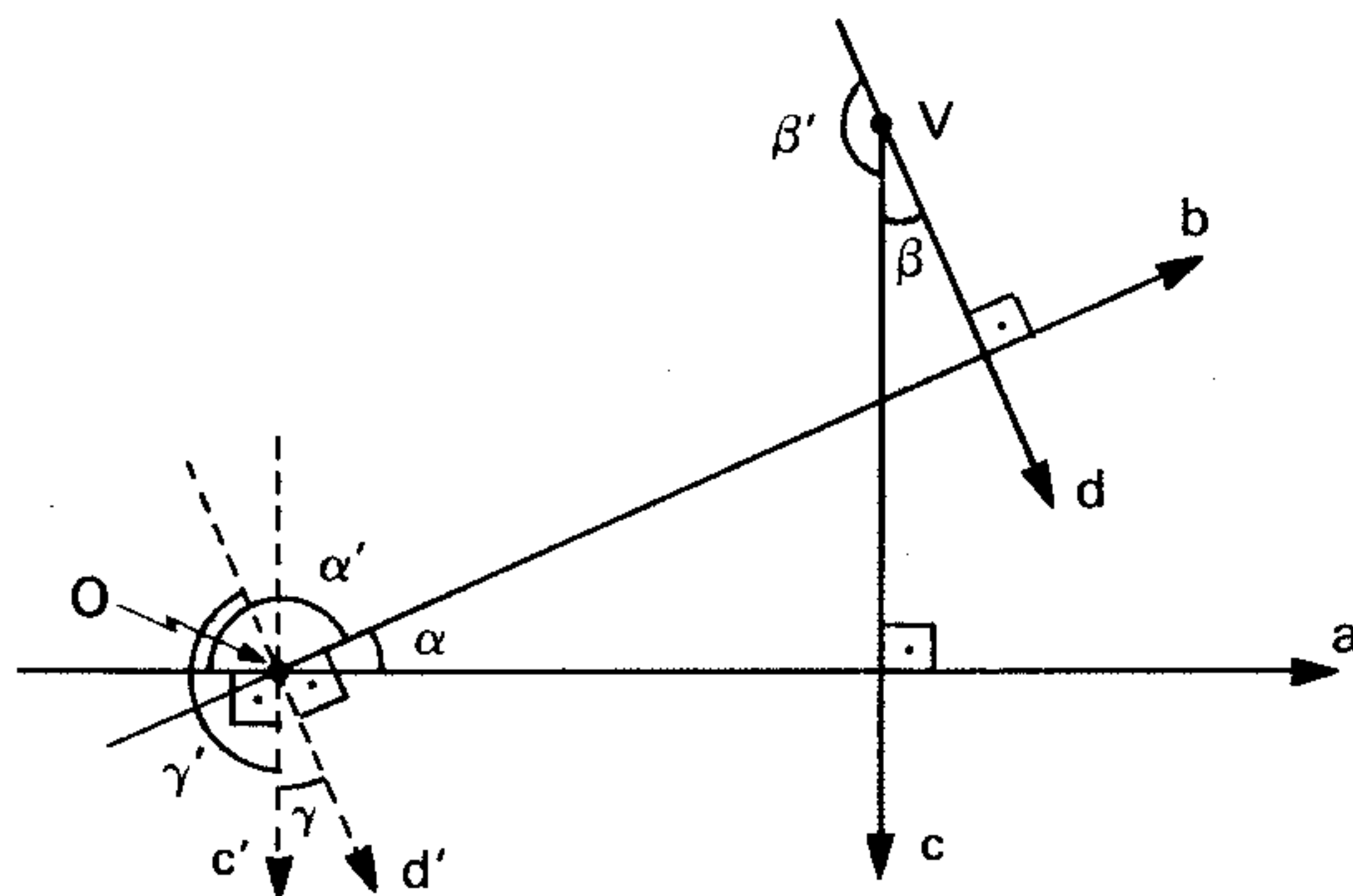
Todo ponto da bissetriz de um ângulo é eqüidistante dos lados do ângulo.

(s é bissetriz de $a\hat{O}b$, $P \in s$) $\Rightarrow$ $d_{P,a} = d_{P,b}$

Note que, se $P = O$, a propriedade também se verifica.

EXERCÍCIOS

189. Se $\overline{AH}$ é altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$, determine $\hat{B}$ e $\hat{C}$ nos casos:

a) b)

190. Em cada caso abaixo temos um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$. Determine o ângulo da base.

a) b)

191. No triângulo ABC da figura, se $\overline{AH}$ é altura e $\overline{BS}$ é bissetriz, determine $B\hat{S}C$ dados $B\hat{A}H = 30°$ e $A\hat{C}B = 40°$.

192. Da figura, sabemos que $\overline{AH}$ é altura e $\overline{AS}$ é bissetriz relativas a $\overline{BC}$ do triângulo ABC. Se $\hat{B} = 70°$ e $H\hat{A}S = 15°$, determine $\hat{C}$.

193. Determine o valor de x nos casos:

a) b)

c) d)

194. *Ângulos de lados perpendiculares*

Dois ângulos de lados respectivamente perpendiculares são congruentes ou suplementares.

Solução

Sejam os ângulos $a\hat{O}b$ e $c\hat{V}d$ com $Oa \perp Vc$, $Ob \perp Vd$ com as medidas α e β, sendo α' e β' as medidas dos respectivos adjacentes suplementares, conforme indica a figura.
Se por O conduzimos $Oc' \perp Vc$ e $Od' \perp Vd$, surgem os ângulos $c'\hat{O}d'$ de medidas γ e seu adjacente suplementar de medida γ'.
Considerando ângulos de lados paralelos (item 77), temos:

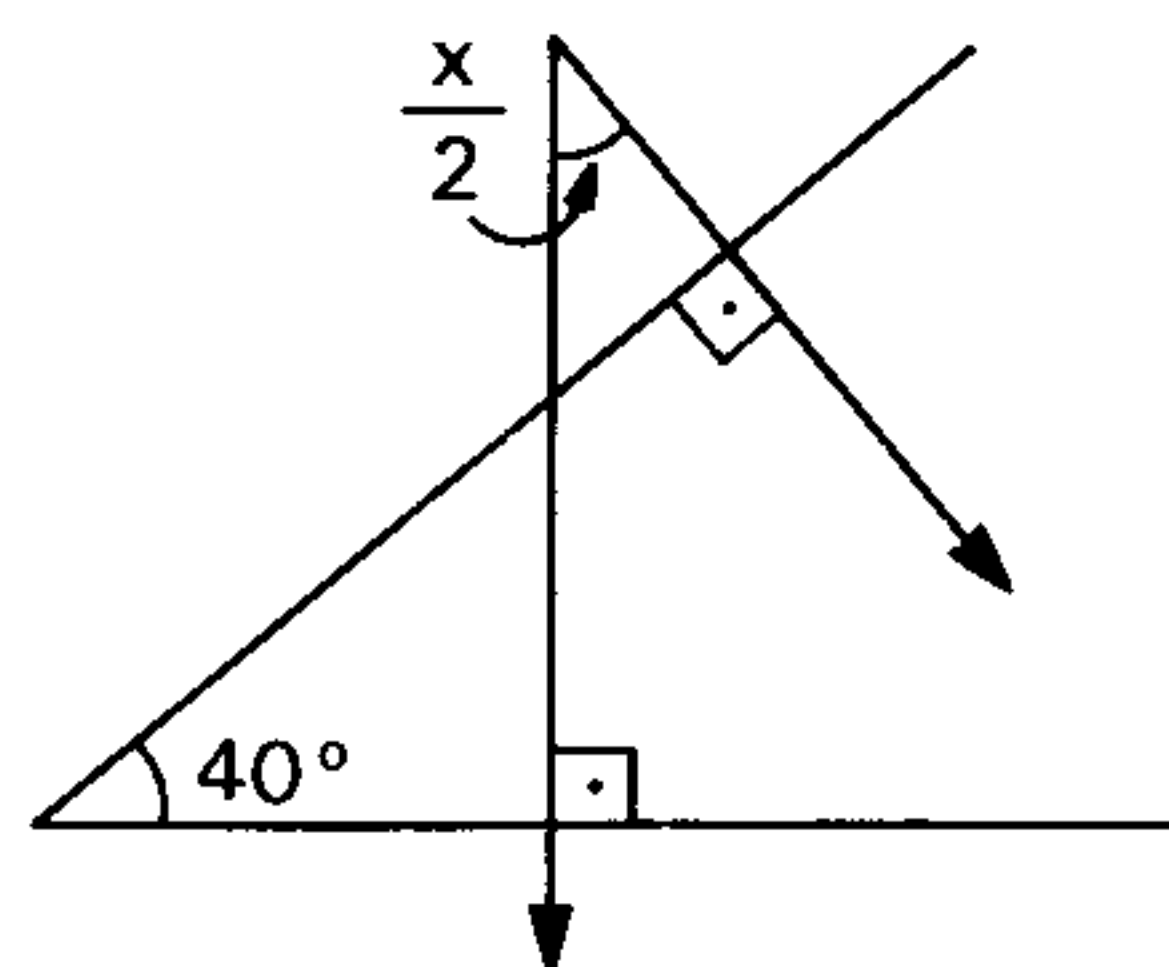
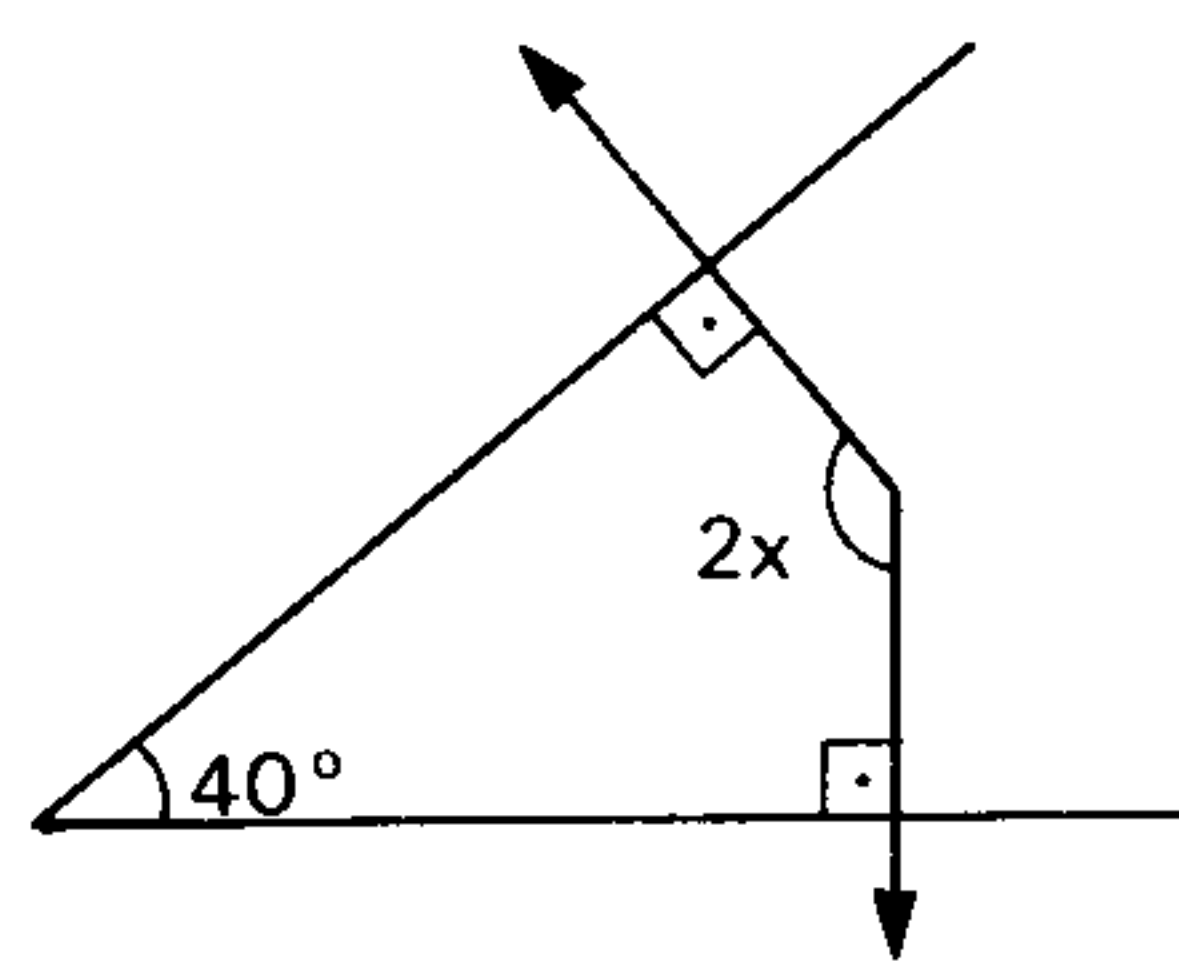
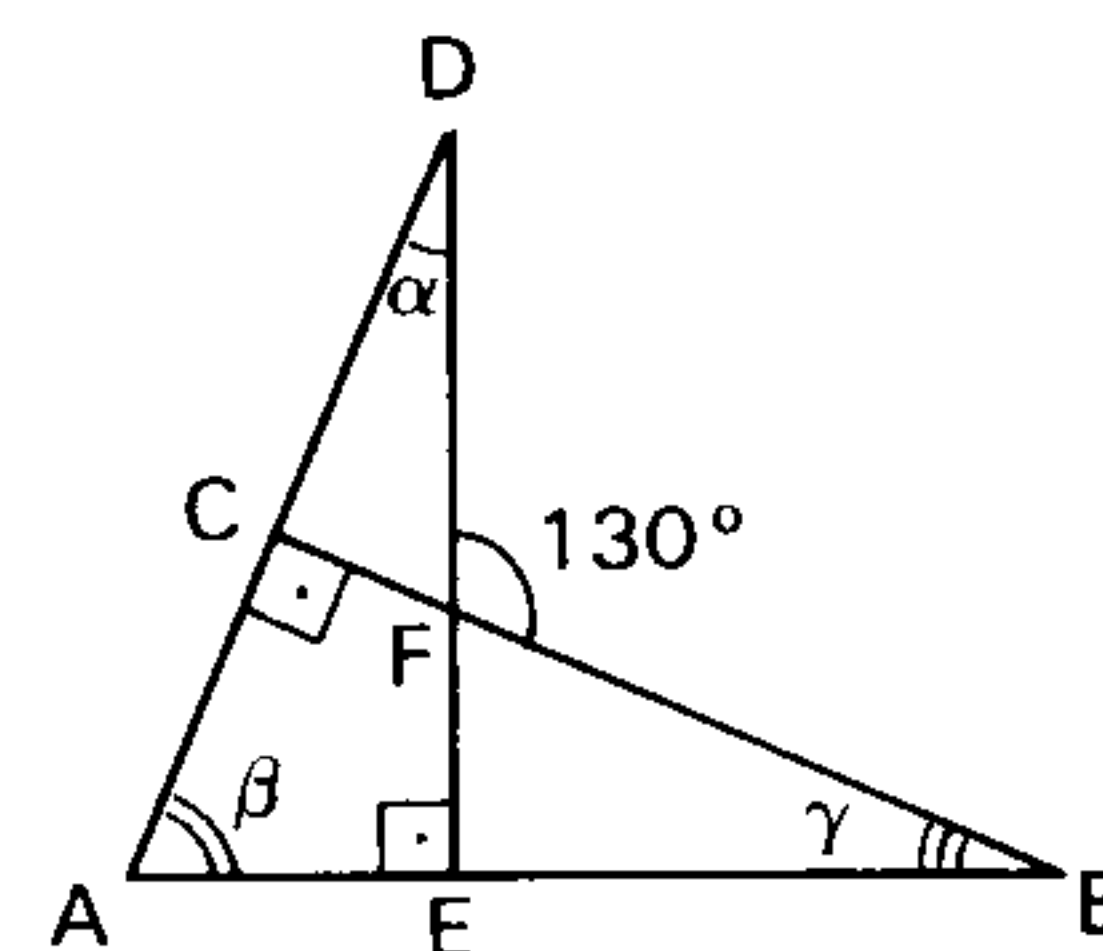
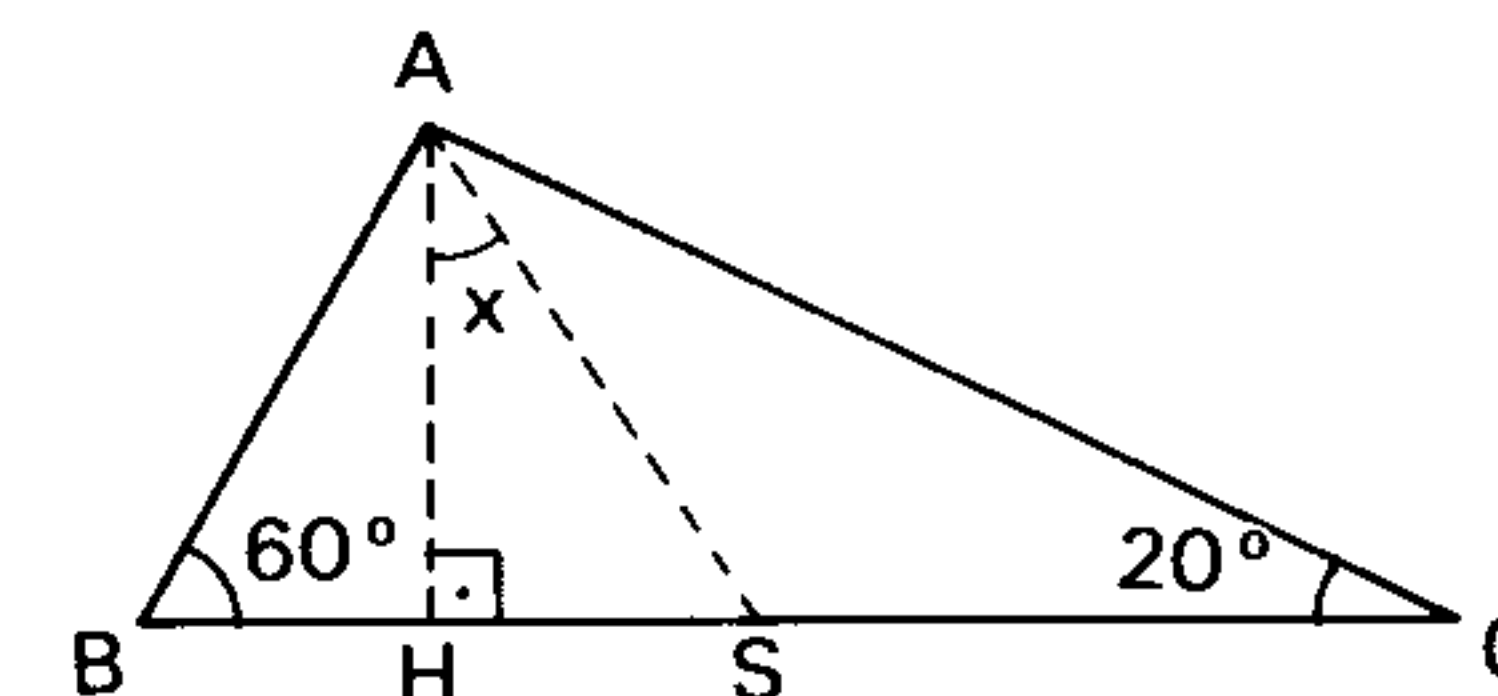
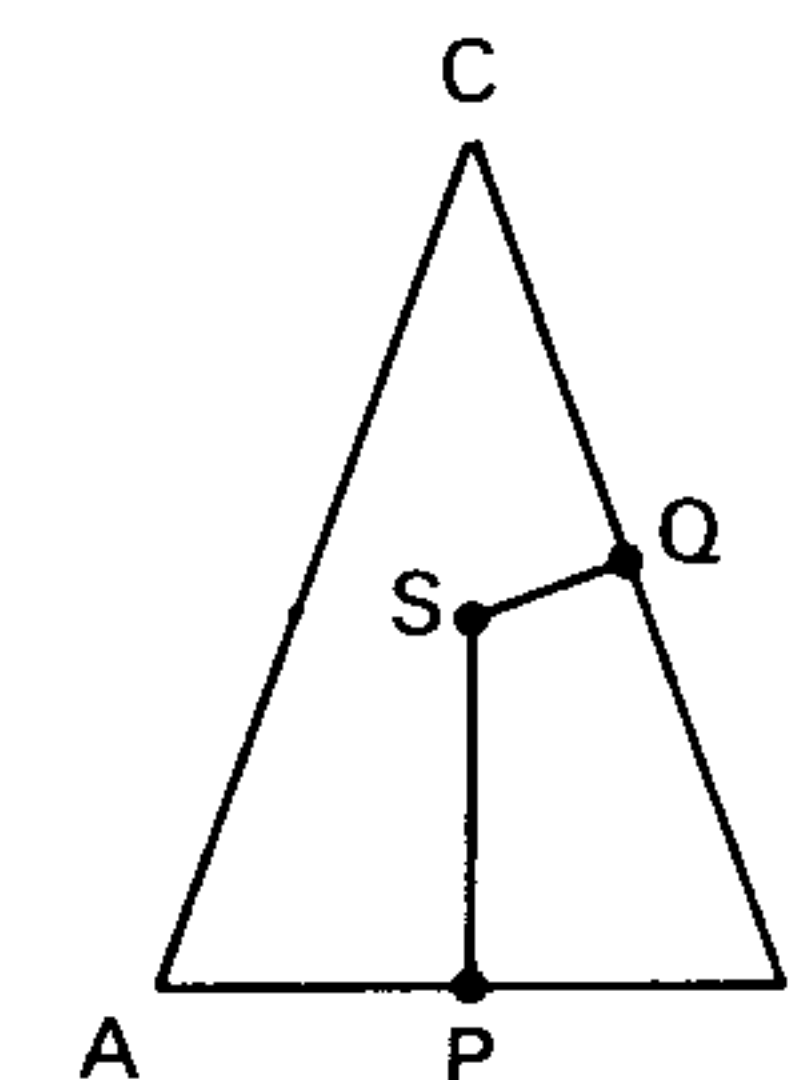
$$\gamma = \beta,\ \gamma' = \beta',\ \gamma + \beta' = 180°,\ \gamma' + \beta = 180°$$

Notando que $a\hat{O}c'$ e $b\hat{O}d'$ são retos, vem:

$$\left.\begin{array}{l} a\hat{O}d' = 90° - \alpha \\ a\hat{O}d' = 90° - \gamma \implies a\hat{O}d' = 90° - \beta \end{array}\right\} \implies \alpha = \beta$$

Então, temos:

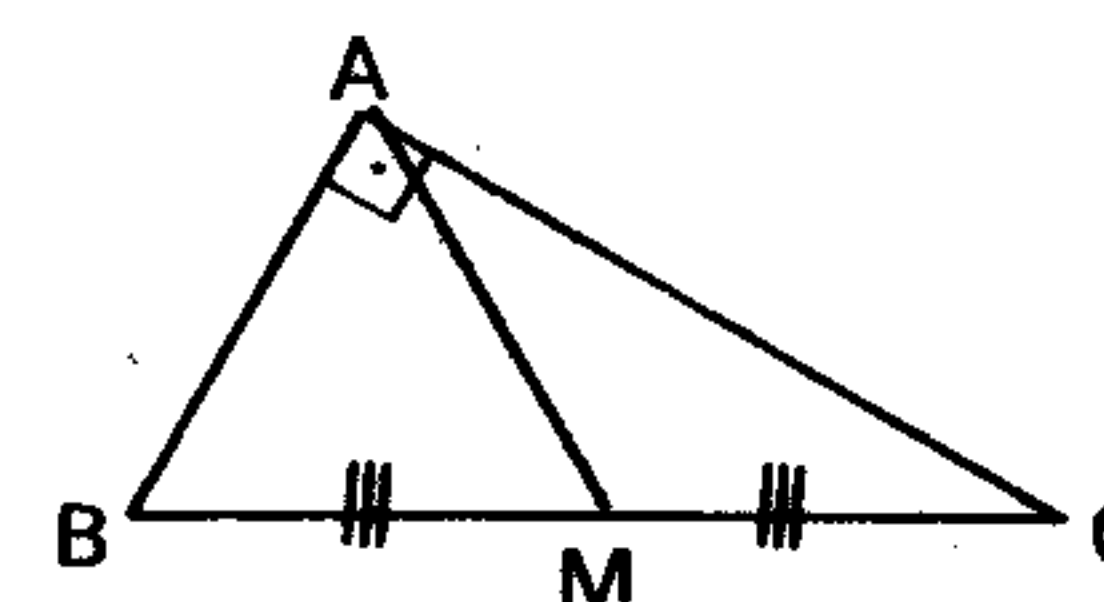
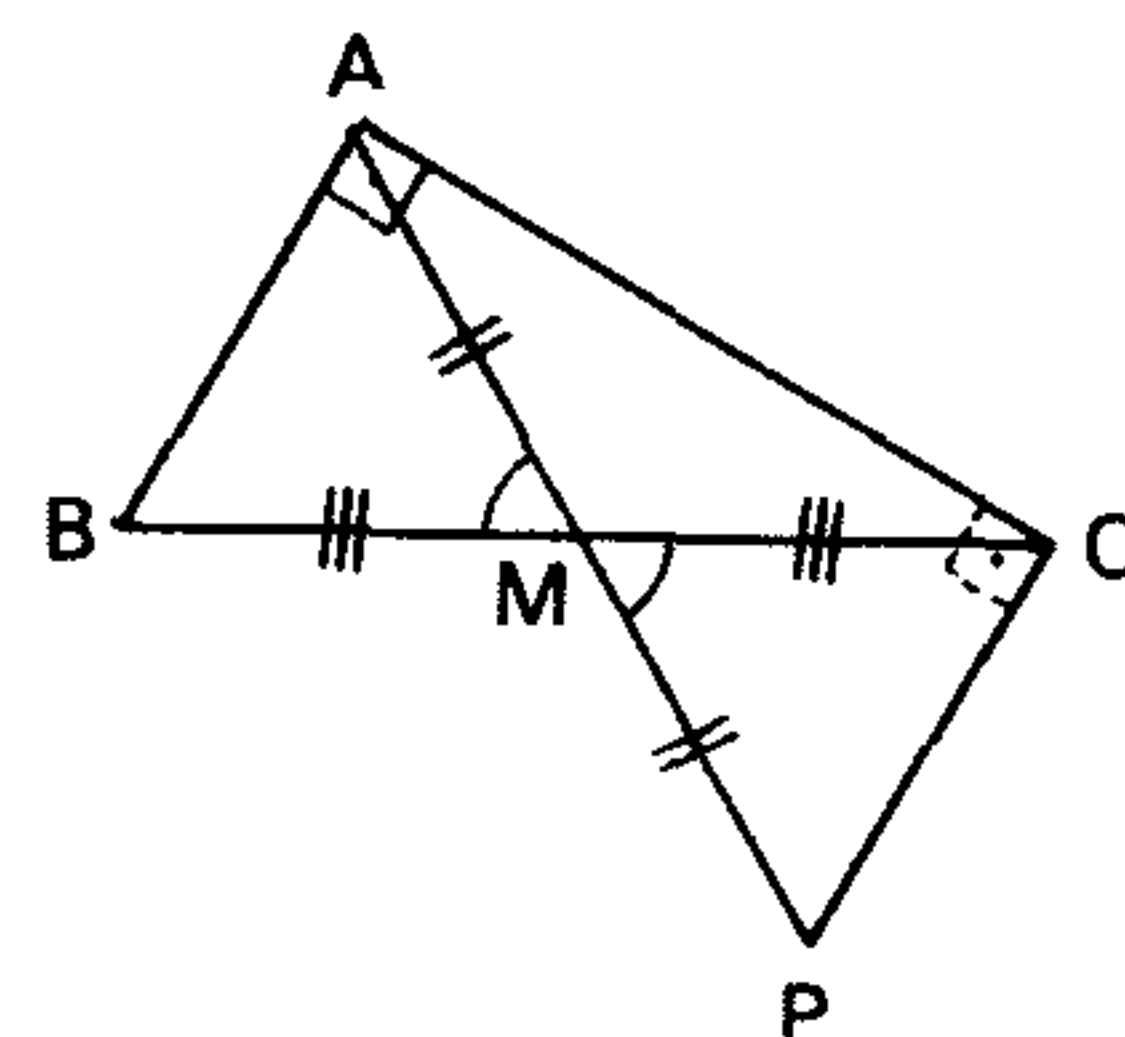
$$\alpha = \beta,\ \alpha' = \beta',\ \alpha + \beta' = 180°,\ \alpha' + \beta = 180°$$

195. Na figura, calcule o valor de x.

196. Na figura, calcule o valor de x.

197. Na figura, determine a medida de α, β e γ.

198. No triângulo ABC da figura ao lado, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 20°$. Qual o valor do ângulo $H\hat{A}S$ formado pela altura $\overline{AH}$ e a bissetriz $\overline{AS}$?

199. Num triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$, o ângulo $\hat{B}$ é igual a $\frac{2}{3}$ do ângulo $\hat{S}$, formado pelas mediatrizes $\overline{QS}$ e $\overline{PS}$. Calcule os ângulos desse triângulo.

200. **A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.**

Solução

Hipótese		*Tese*
$\triangle ABC$ é retângulo de hipotenusa $\overline{BC}$. $\overline{AM}$ é mediana. }	$\implies$	$AM = \frac{BC}{2}$

Demonstração

1) Tomemos P sobre a semi-reta $\overrightarrow{AM}$ com M entre A e P de modo que $PM = AM$.

2) Consideremos os triângulos AMB e PMC. Pelo caso LAL, eles são congruentes. Daí tiramos que $A\hat{B}M = P\hat{C}M$. E como estes ângulos são alternos internos, obtemos que as retas $\overleftrightarrow{BA}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são paralelas.

3) De $\overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{PC}$ e $B\hat{A}C$ reto, obtemos que $P\hat{C}A$ é reto (são colaterais internos).

4) Consideremos agora os triângulos BAC e PCA.

$$\left.\begin{array}{l} BA = PC \text{ (pois } \triangle AMB \equiv \triangle PMC) \\ \hat{A} = \hat{C} \text{ (são retos)} \\ AC = CA \text{ (lado comum)} \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle BAC \equiv \triangle PCA$$

Desta congruência concluímos que AP = BC e, como AP = 2AM, obtemos: $2AM = BC \Longrightarrow AM = \frac{BC}{2}$.

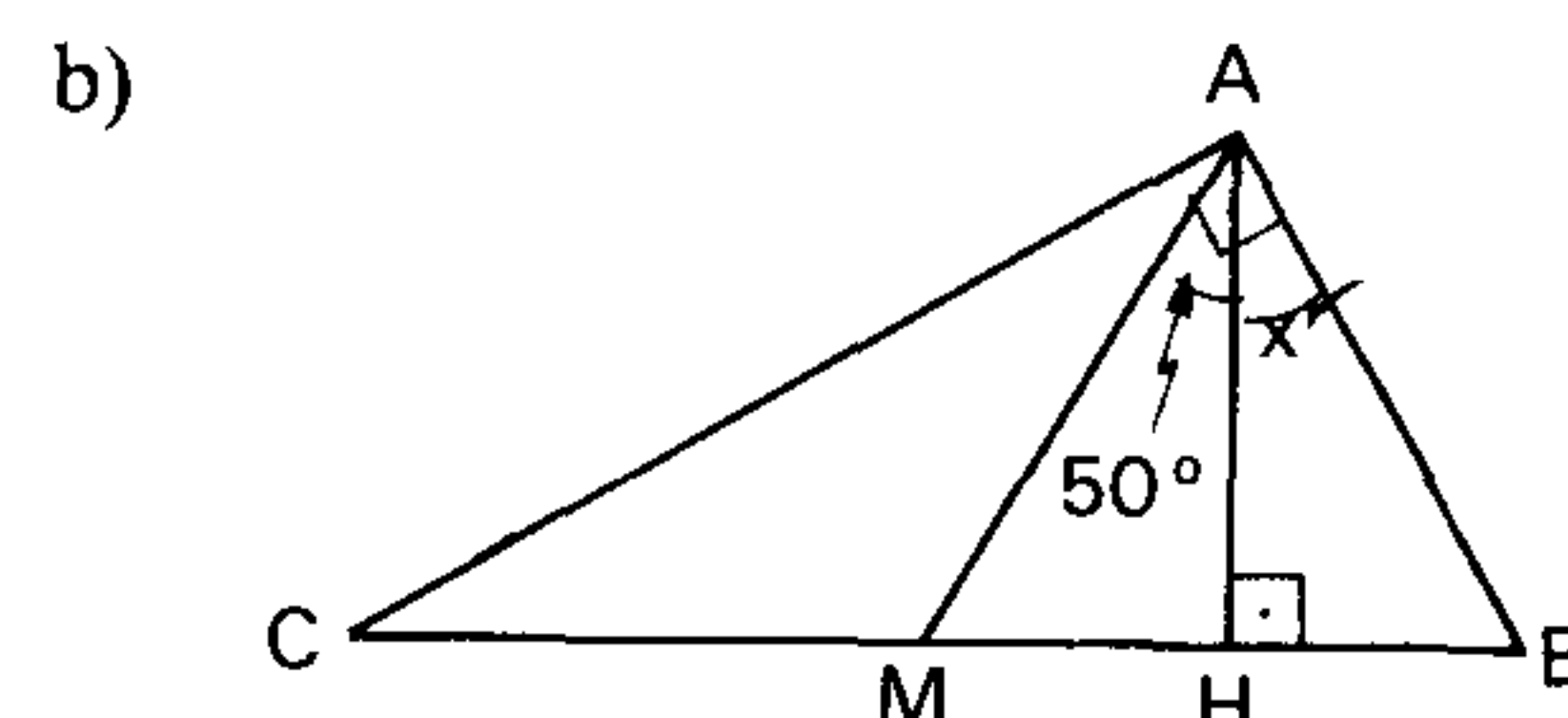
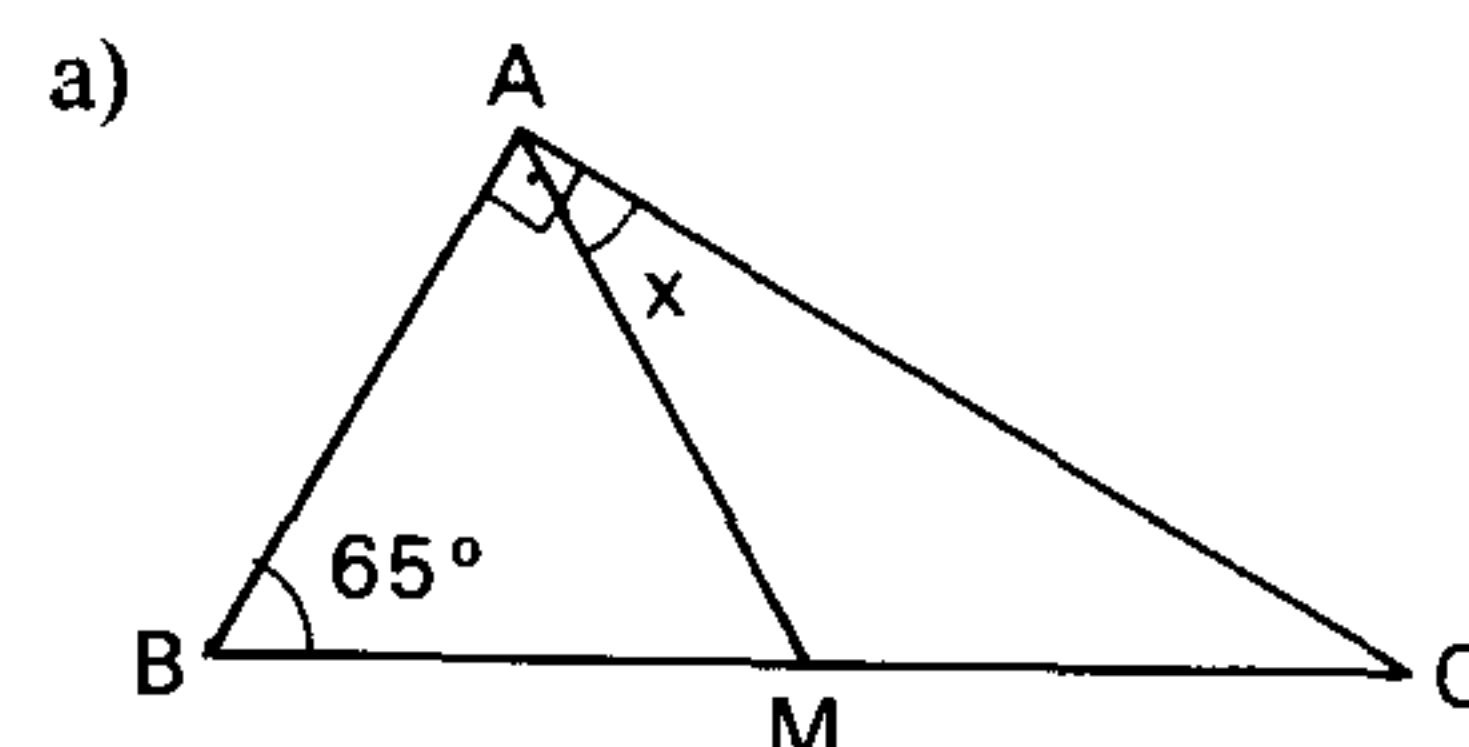
Observação

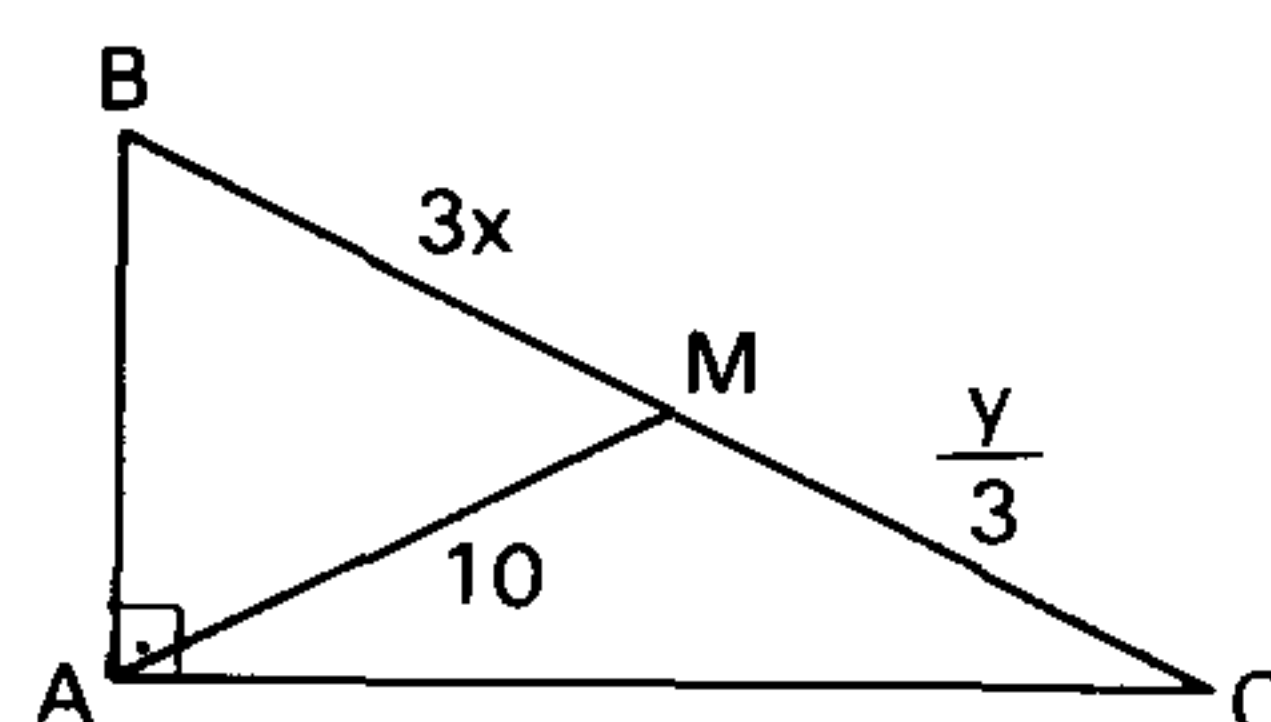
Note ainda que: MA = MB = MC

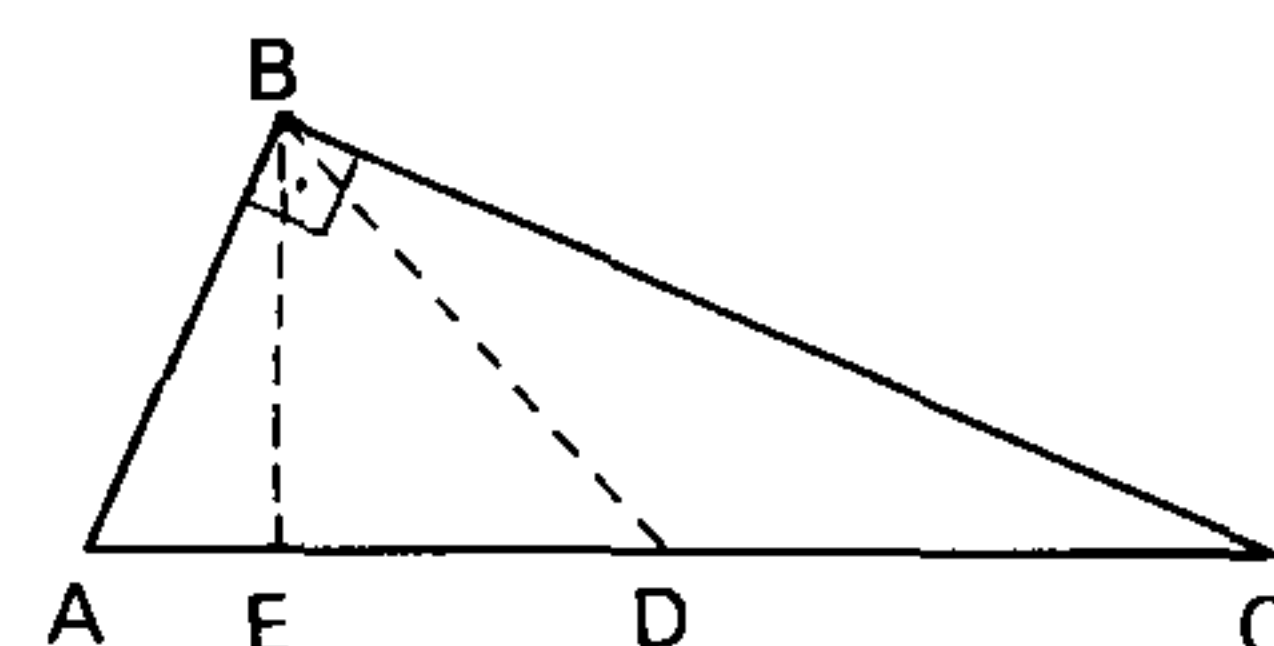
$\triangle AMB$ é isósceles de base $\overline{AB}$ $\quad\triangle AMC$ é isósceles de base $\overline{AC}$

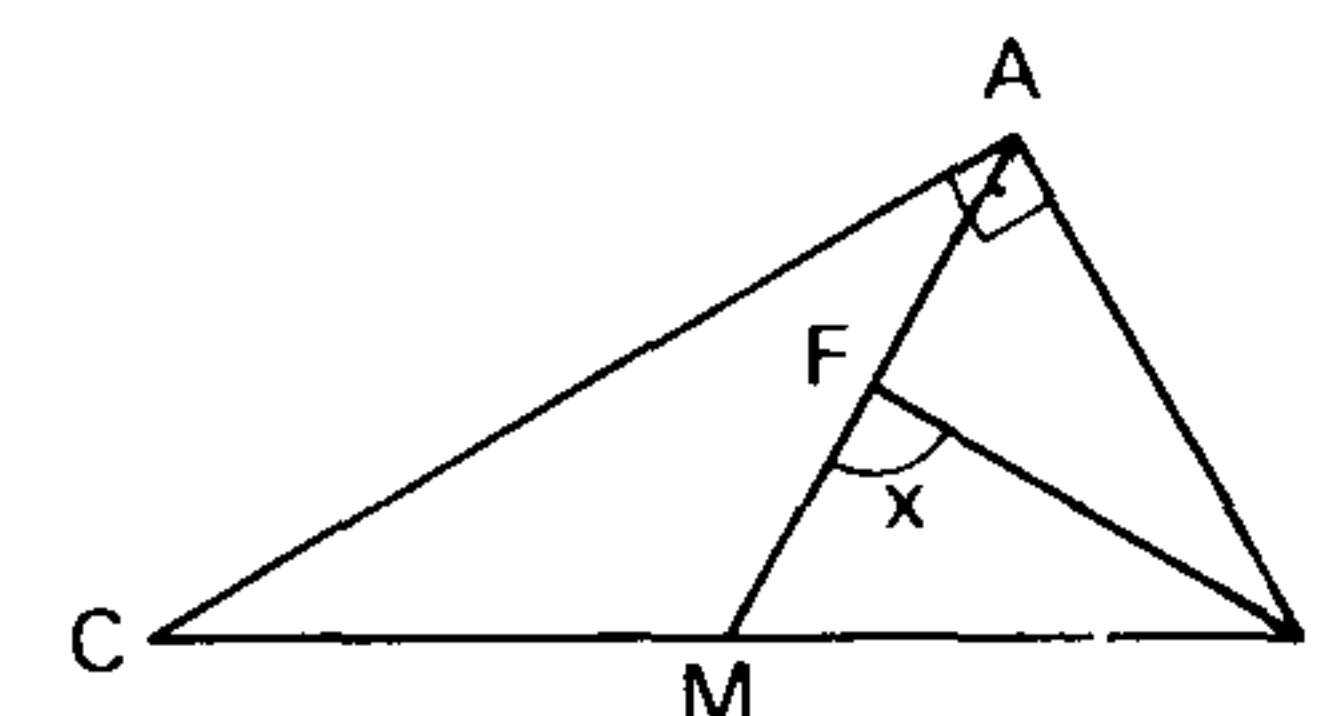
201. Se o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa $\overline{BC}$ e $\overline{AM}$ é mediana, determine x:

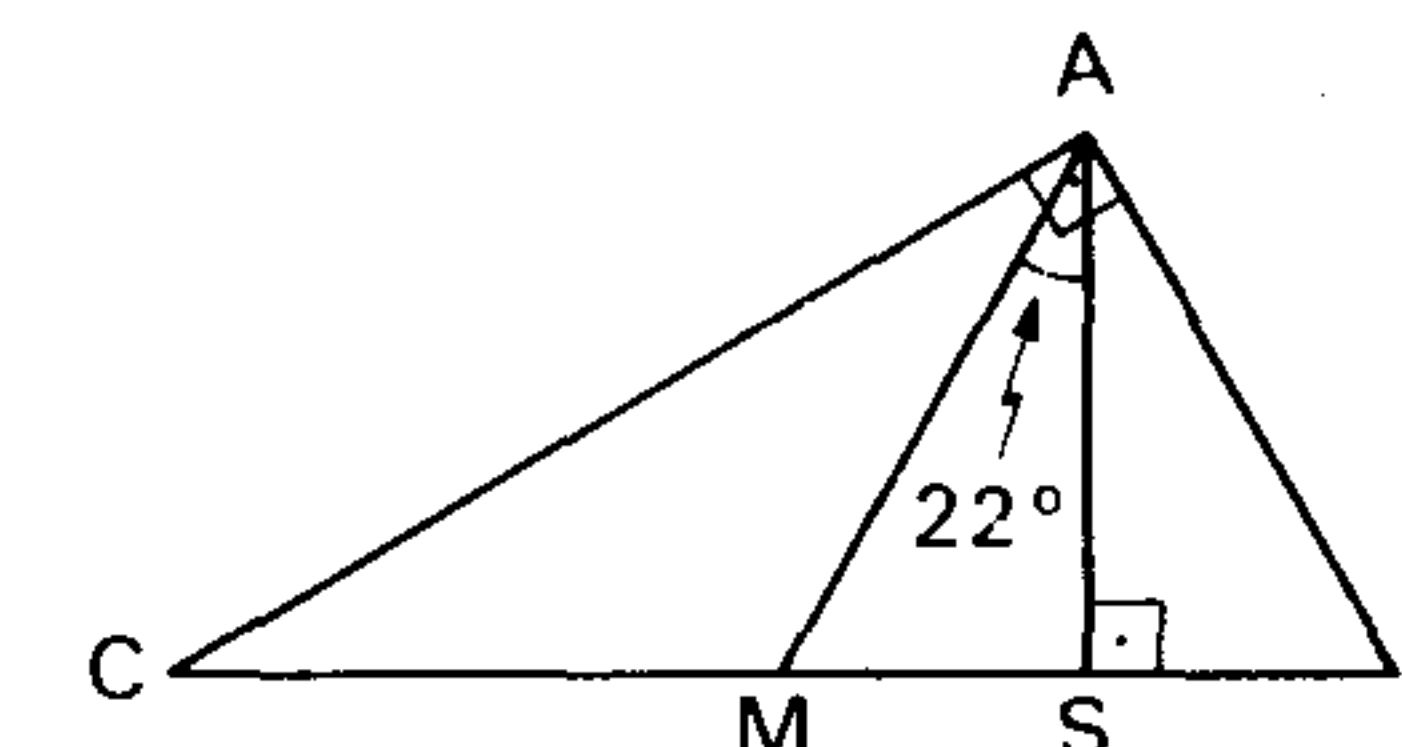
a) (figura: B, 65°, A, x, M, C)

b) (figura: A, x, 50°, C, M, H, B)

202. Na figura, calcule x e y. M é ponto médio de $\overline{BC}$.

(figura: B, 3x, M, $\frac{y}{3}$, 10, A, C)

203. Na figura, $\overline{BD}$ é mediana do triângulo retângulo ABC ($\hat{B} = 90°$) e $\overline{BE} \perp \overline{AC}$. Se $\hat{A} = 70°$, calcule a medida de $E\hat{B}D$.

(figura: B, A, E, D, C)

204. No triângulo retângulo ABC da figura, a mediana $\overline{AM}$ forma com a bissetriz $\overline{BF}$ os ângulos adjacentes $B\hat{F}A$ e $B\hat{F}M$. Exprima $B\hat{F}M$ em função de $\hat{B}$.

(figura: A, F, x, C, M, B)

205. Num triângulo retângulo ABC, a altura $\overline{AS}$ forma com a mediana $\overline{AM}$ um ângulo de $22°$. Calcule B e C.

(figura: A, 22°, C, M, S, B)

206. Determine os ângulos agudos de um triângulo retângulo, sabendo que a mediana e a bissetriz relativas à hipotenusa formam um ângulo de $35°$.

207. As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC formam um ângulo de $116°$. Determine a medida do menor ângulo formado pelas alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ desse triângulo.

208. Em um triângulo retângulo qualquer, o ângulo formado pela altura e mediana relativa à hipotenusa é igual ao módulo da diferença dos ângulos adjacentes à hipotenusa.

209.* Mostre que, se uma mediana relativa a um lado de um triângulo mede a metade desse lado, então o triângulo é retângulo.

210. Sendo ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ e M um ponto da base, prove que:

1º) Se $\overline{AM}$ é mediana, então $\overline{AM}$ é bissetriz e altura.

2º) Se $\overline{AM}$ é bissetriz, então $\overline{AM}$ é mediana e altura.

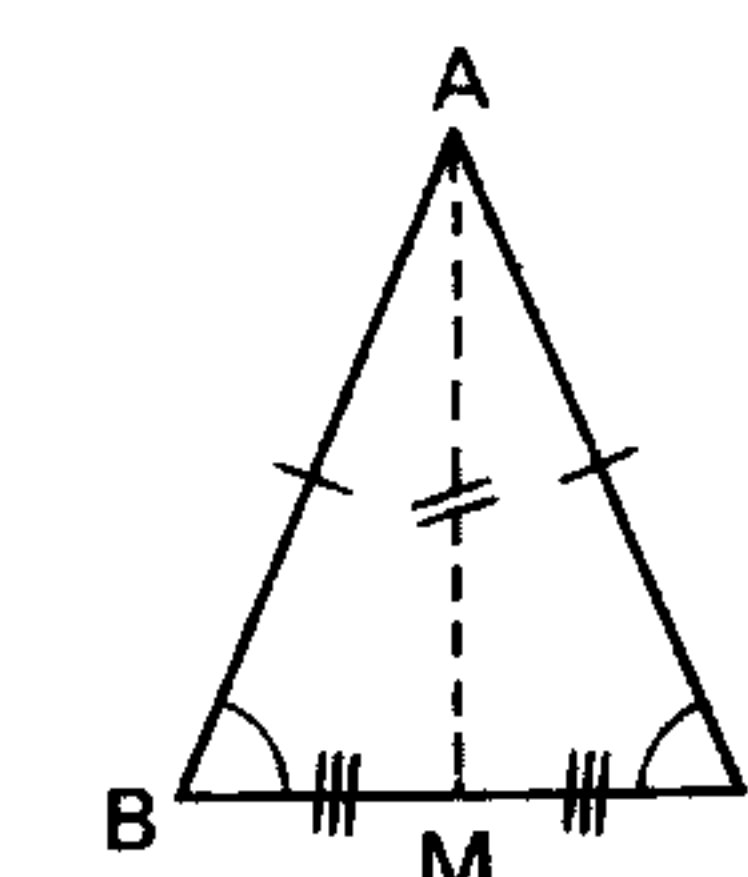
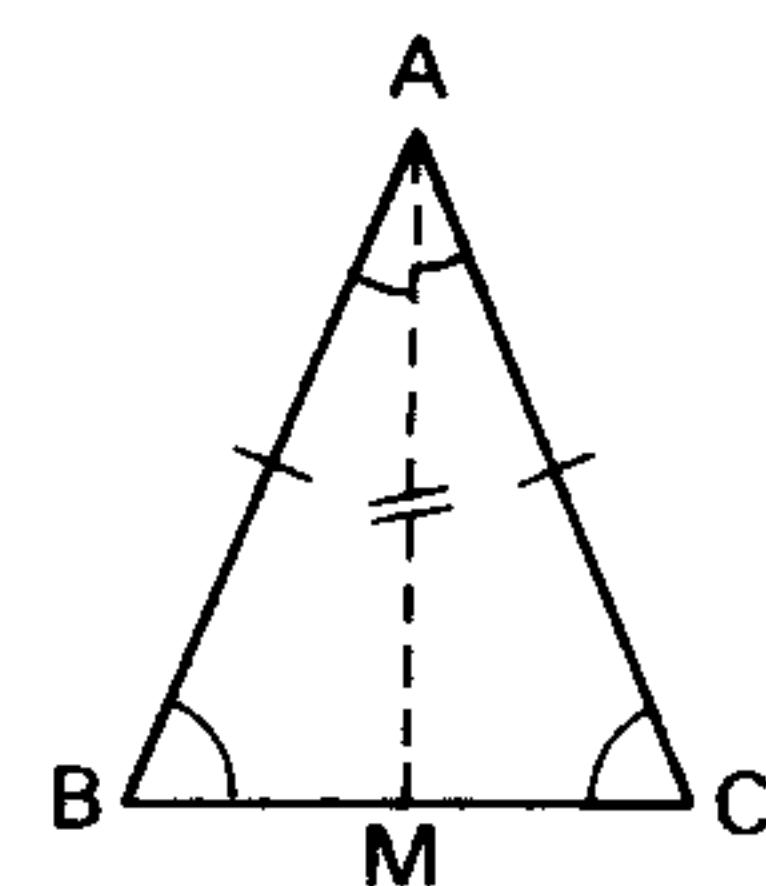
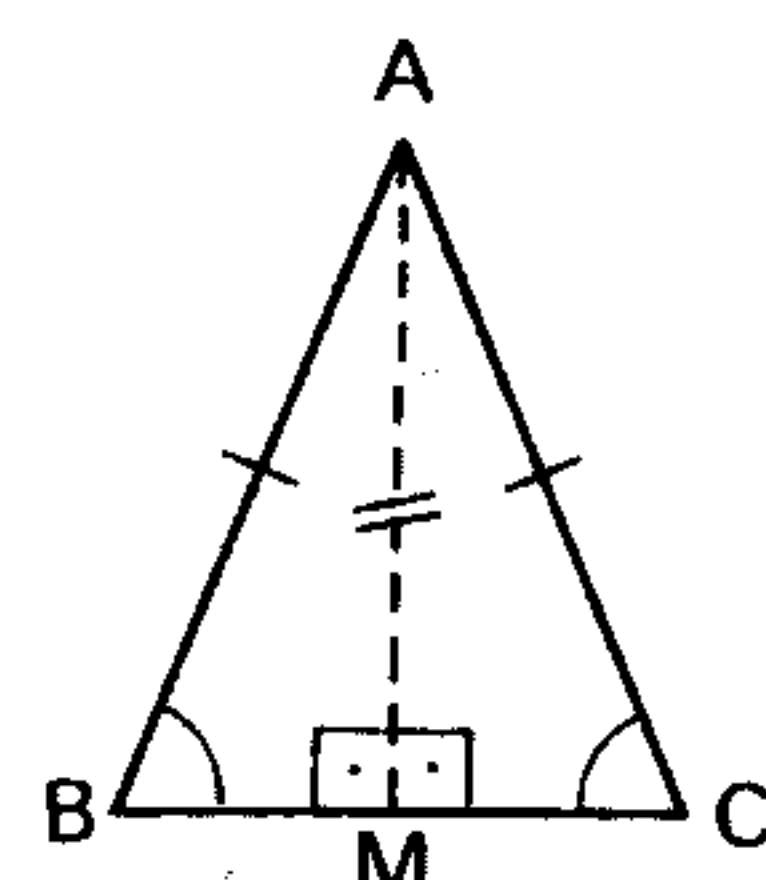
3º) Se $\overline{AM}$ é altura, então $\overline{AM}$ é mediana e bissetriz.

Solução

Considerando que num triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes e a condição de cada hipótese, temos:

1º) $\overline{AM}$ é mediana

Pelo caso LLL ou pelo caso LAL, $\triangle ABM = \triangle ACM$ e daí decorre que $\overline{AM}$ é bissetriz e $\overline{AM}$ é altura.

(figura: A, B, M, C)

2º) $\overline{AM}$ é bissetriz
Pelo caso LAL ou pelo caso ALA,
$\triangle ABM = \triangle ACM$
e daí decorre que
$\overline{AM}$ é mediana e $\overline{AM}$ é altura.

3º) $\overline{AM}$ é altura
Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos ou pelo caso LAA_o,
$\triangle ABM = \triangle ACM$
e daí decorre que
$\overline{AM}$ é mediana e $\overline{AM}$ é bissetriz.

211. Demonstre que em todo triângulo isósceles sempre temos duas alturas congruentes.

212. Mostre que, se uma altura e uma mediana de um triângulo coincidem, então este triângulo é isósceles.

213. Mostre que, se uma altura e uma bissetriz de um triângulo coincidem, então este triângulo é isósceles.

214. Prove que as bissetrizes dos ângulos agudos de um triângulo retângulo formam ângulos que independem dos valores daqueles ângulos agudos.

215. Demonstre que, se duas alturas de um triângulo são congruentes, então esse triângulo é isósceles.

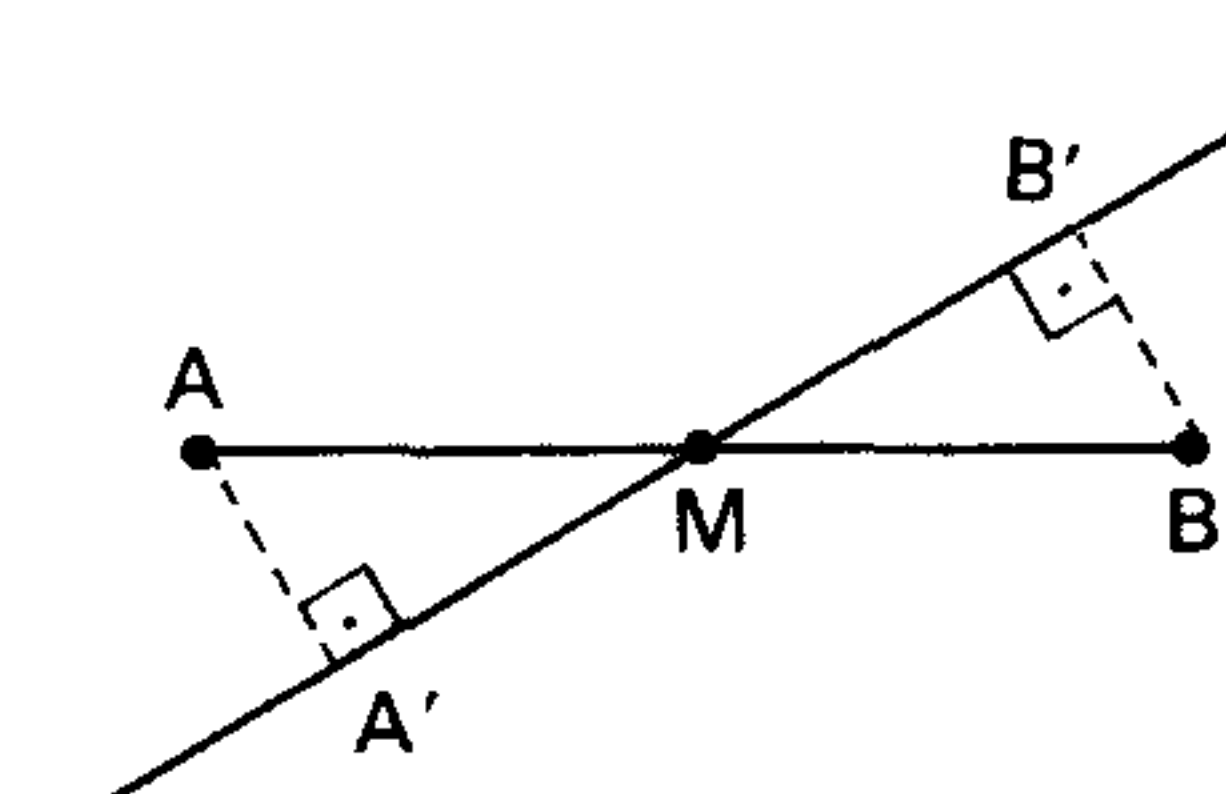
216. Toda reta que passa pelo ponto médio de um segmento é eqüidistante das extremidades do segmento.

Solução

Hipótese		*Tese*
$\overline{AM} \equiv \overline{MB}$, $M \in r$	$\Longrightarrow$	$d_{r,A} = d_{r,B}$

Demonstração

1º) $r \supset \overline{AB}$
$\overline{AB} \subset r \Longrightarrow d_{r,A} = d_{r,B}$
(distância nula.)

2º) $r \not\supset \overline{AB}$ e r não é perpendicular a $\overline{AB}$.
Conduzindo os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ perpendiculares a r, com $A', B' \in r$, e observando os triângulos $AA'M$ e $BB'M$, temos:

$\hat{A}' \equiv \hat{B}'$ (retos), $A\hat{M}A' \equiv B\hat{M}B'$ (opostos pelo vértice) $\Longrightarrow \hat{A} \equiv \hat{B}$
$(A\hat{M}A' \equiv B\hat{M}B', \overline{AM} \equiv \overline{BM}, \hat{A} \equiv \hat{B}) \Longrightarrow \triangle AA'M \equiv \triangle BB'M \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \overline{AA'} \equiv \overline{BB'} \Longrightarrow d_{r,A} = d_{r,B}$.

3º) $r \perp \overline{AB}$ por M (r é mediatriz de $\overline{AB}$).
Neste caso $A' = B' = M$ e então $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, ou seja, $d_{r,A} = d_{r,B}$.

Nota

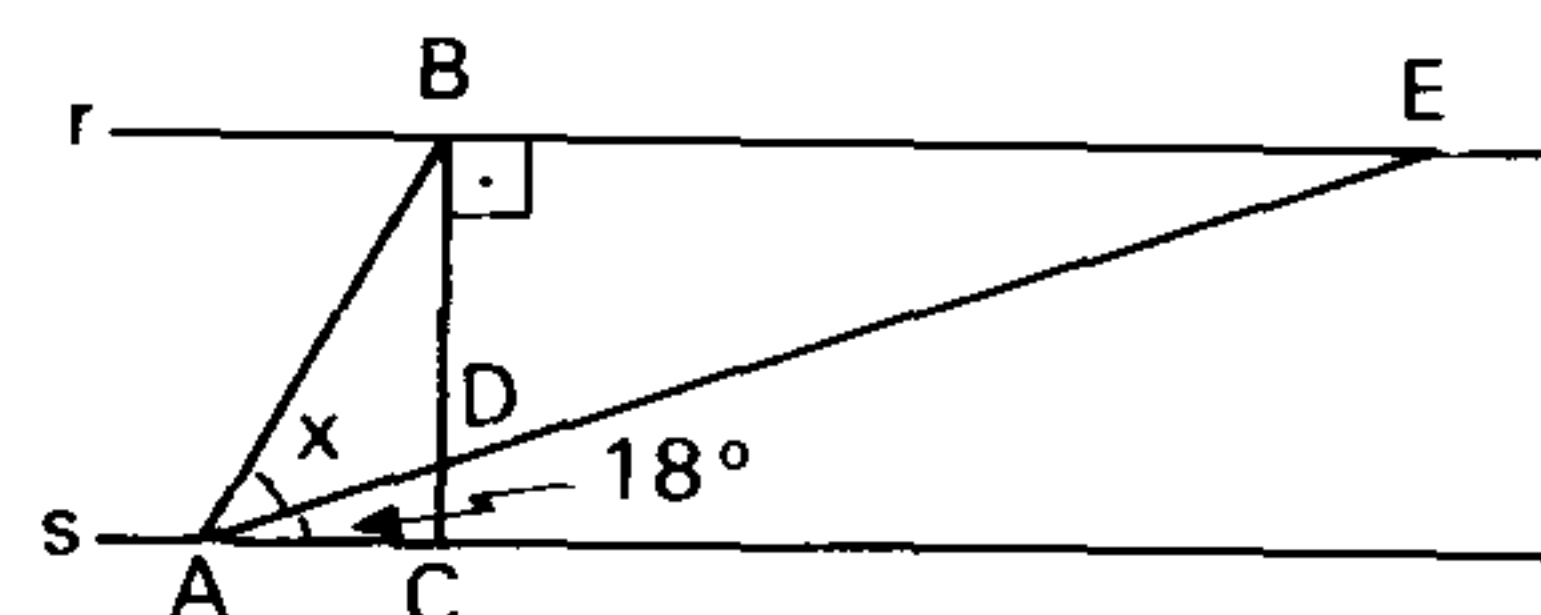
Em geral, uma reta que passa pelo ponto médio de um segmento é eqüidistante dos extremos, mas os pontos da reta *não são* eqüidistantes dos extremos.
Em particular, a mediatriz de um segmento é eqüidistante dos extremos e seus pontos *também* são eqüidistantes dos extremos.

217. Toda reta eqüidistante dos extremos de um segmento passa pelo ponto médio dele?

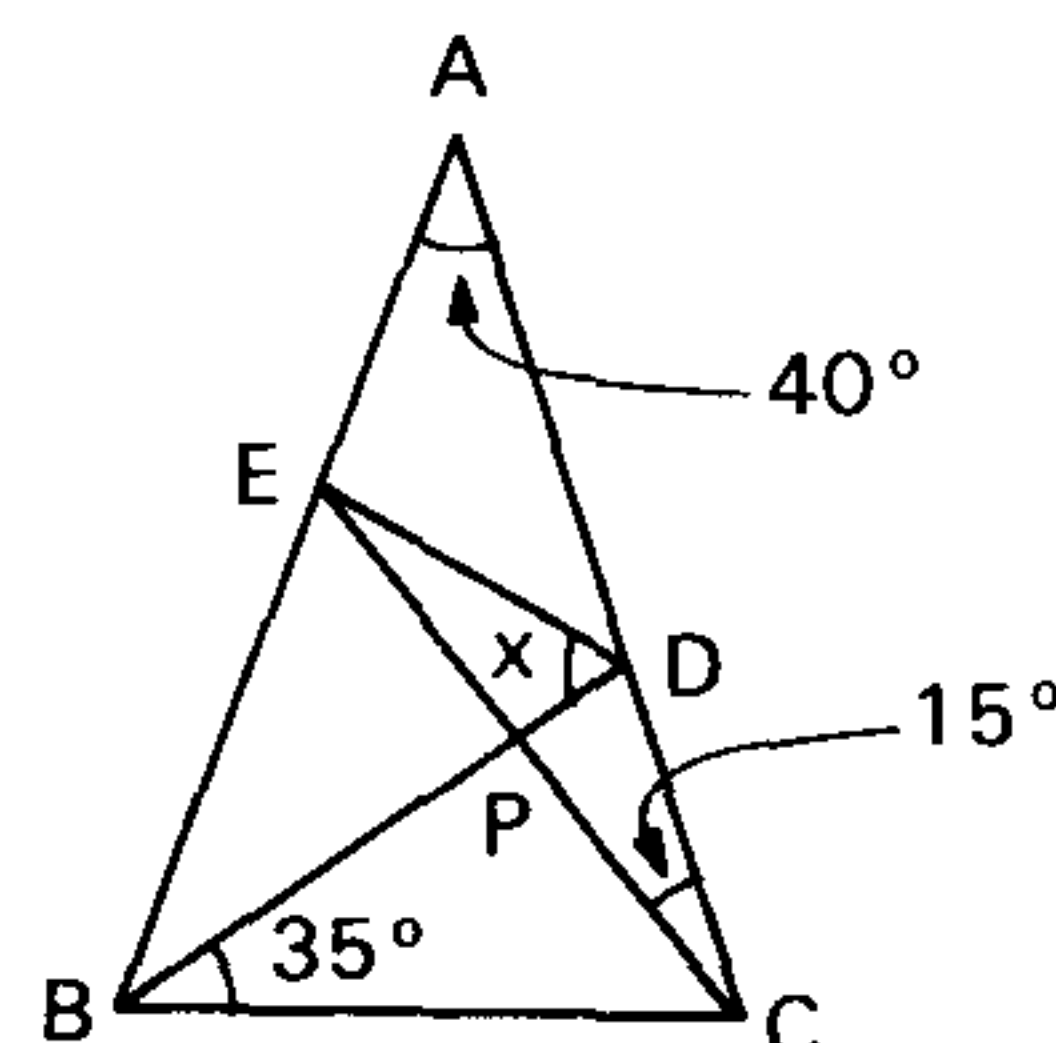
218. Dados dois pontos A e B distintos e um ponto P fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$, como se obtêm, no plano dos pontos A, B e P, duas retas eqüidistantes de A e B passando por P?

219. Prove que a altura relativa a qualquer lado de um triângulo é menor que a média aritmética dos lados adjacentes.

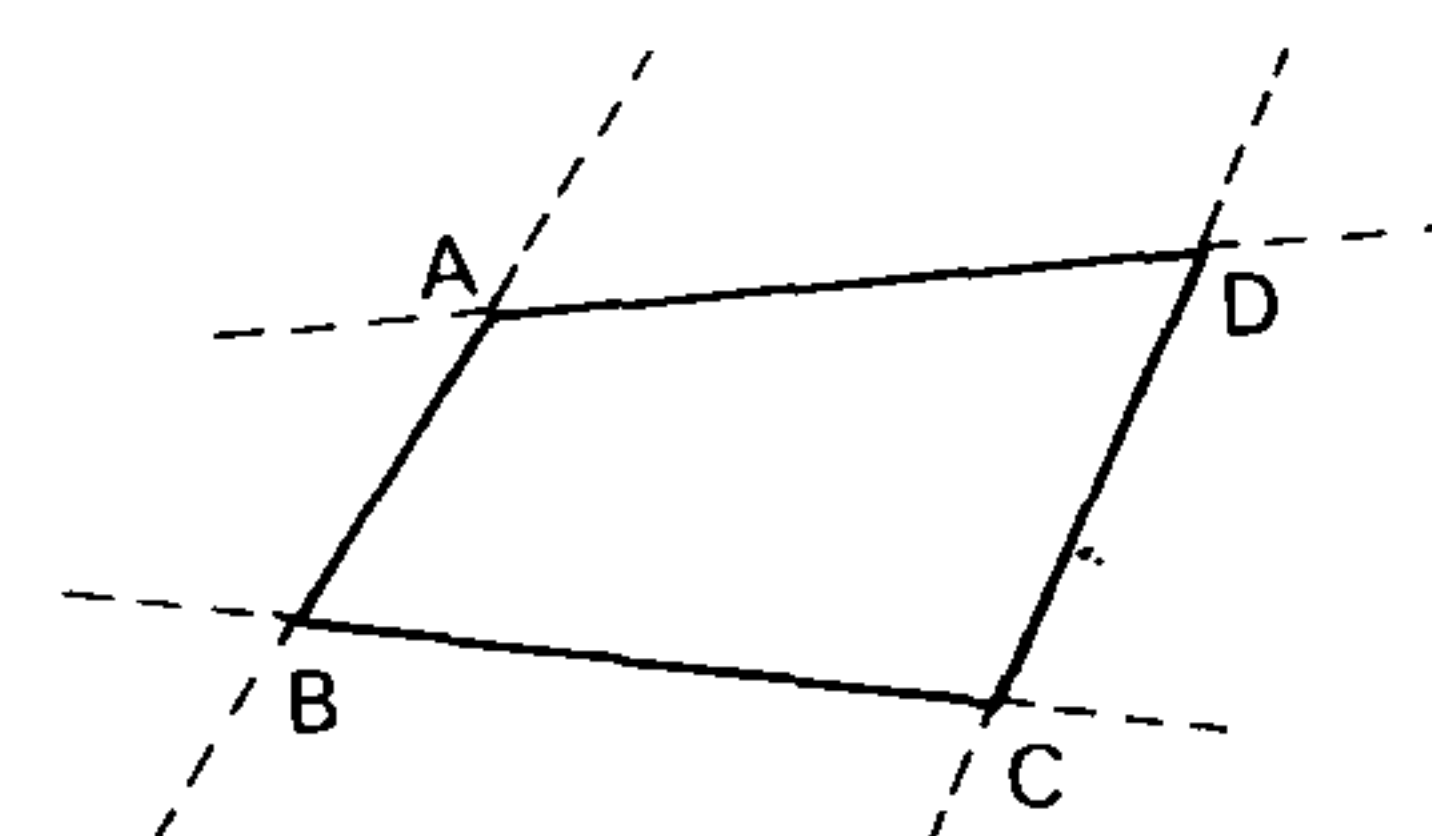
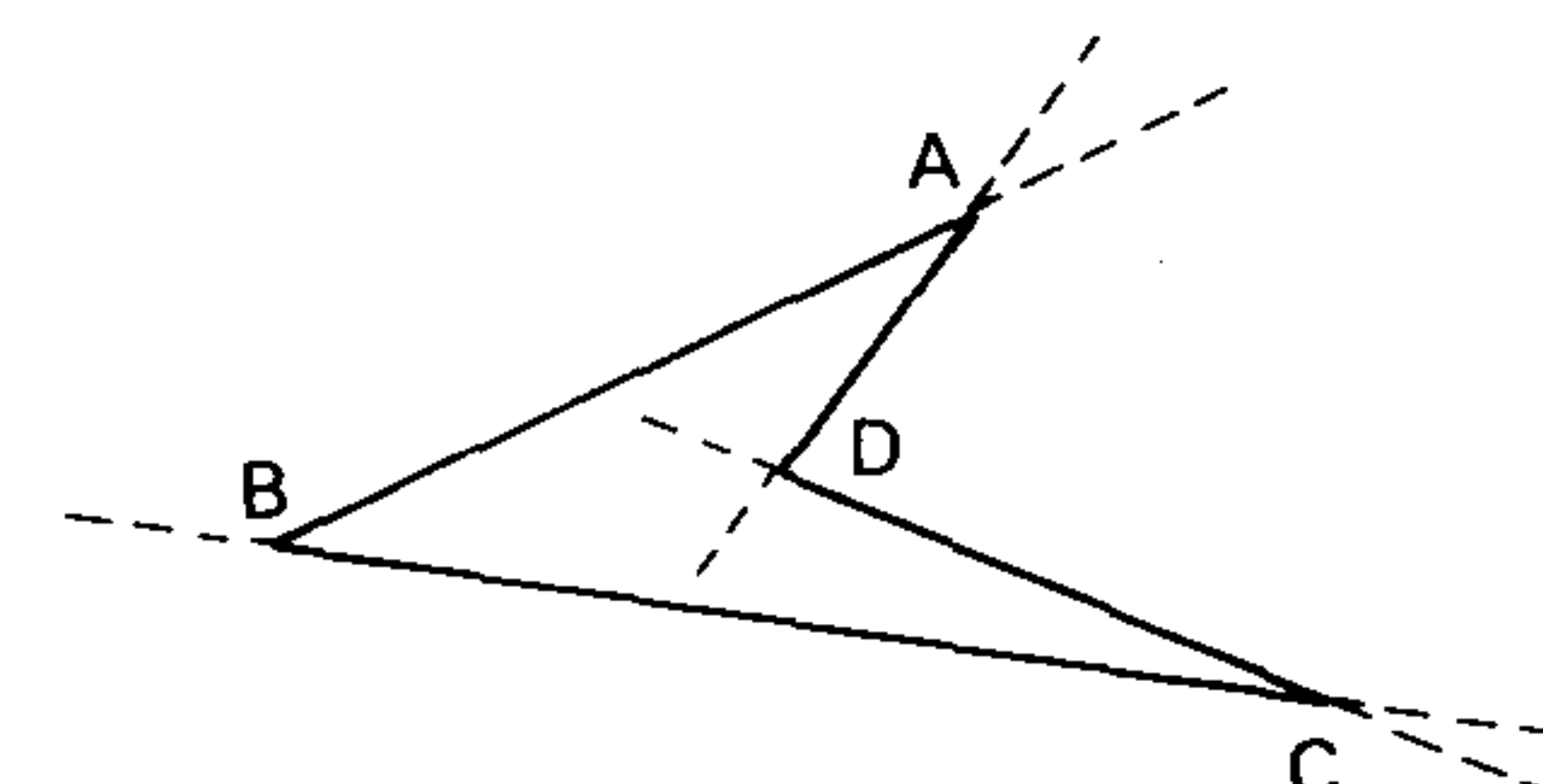
220. Demonstre que a soma das três alturas de um triângulo acutângulo é menor que o perímetro e maior que o semiperímetro desse triângulo.

221. Sendo r e s retas paralelas e $DE = 2AB$, determine x.

222. Num triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC}$, trace a bissetriz $\overline{BS}$, com S em $\overline{AC}$, relativa ao lado $\overline{AC}$. Mostre que $AS < SC$.

223. O triângulo ABC abaixo é isósceles de base $\overline{BC}$. Determine x.

CAPÍTULO VII

Quadriláteros Notáveis

I. Quadrilátero — Definição e elementos

95. Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um *quadrilátero*.

ABCD convexo

ABCD côncavo

Quadrilátero $ABCD$ = ABCD = $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$
O quadrilátero é um polígono simples de quatro lados.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ são os *lados*,
$\hat{A} = D\hat{A}B$, $\hat{B} = A\hat{B}C$, $\hat{C} = B\hat{C}D$ e $\hat{D} = C\hat{D}A$ são os *ângulos* e
$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as *diagonais* do quadrilátero $ABCD$.

96. Um quadrilátero tem *2* diagonais ($d = 2$), soma dos ângulos internos igual a *360°* e soma dos ângulos externos também igual a *360°*.

II. Quadriláteros notáveis — Definições

Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

97. *Trapézio*

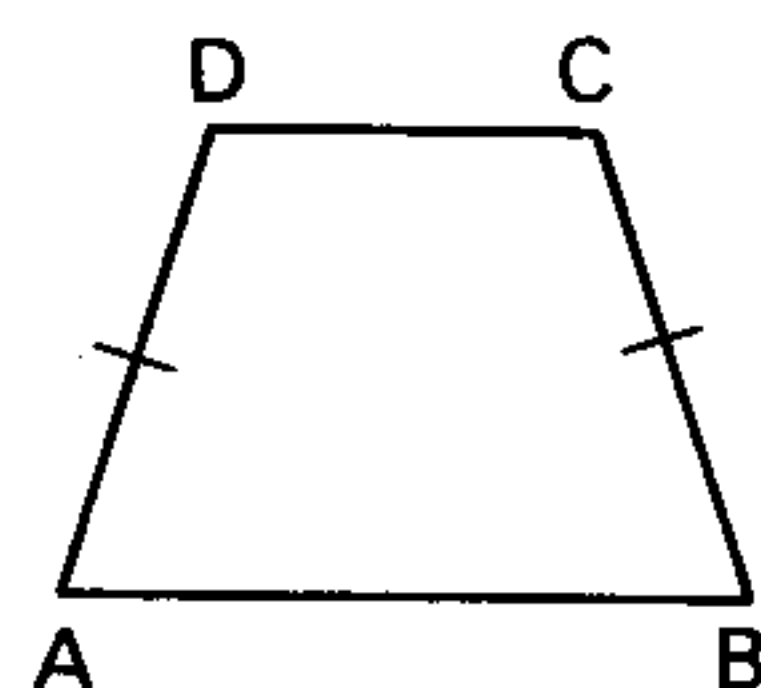
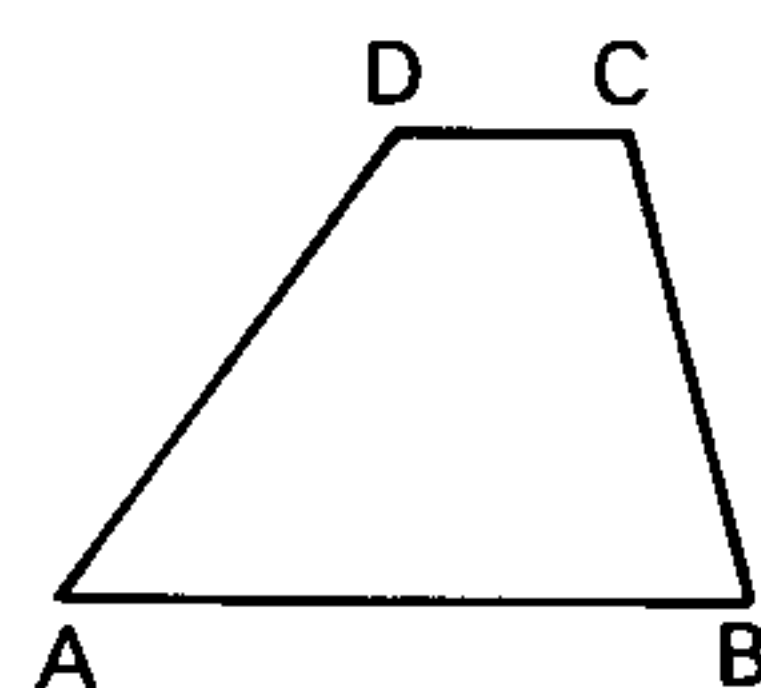
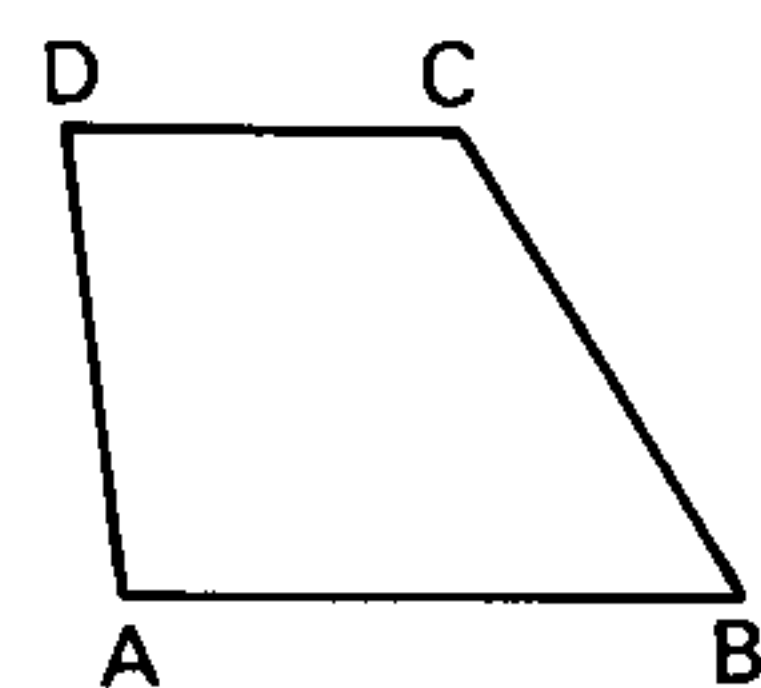
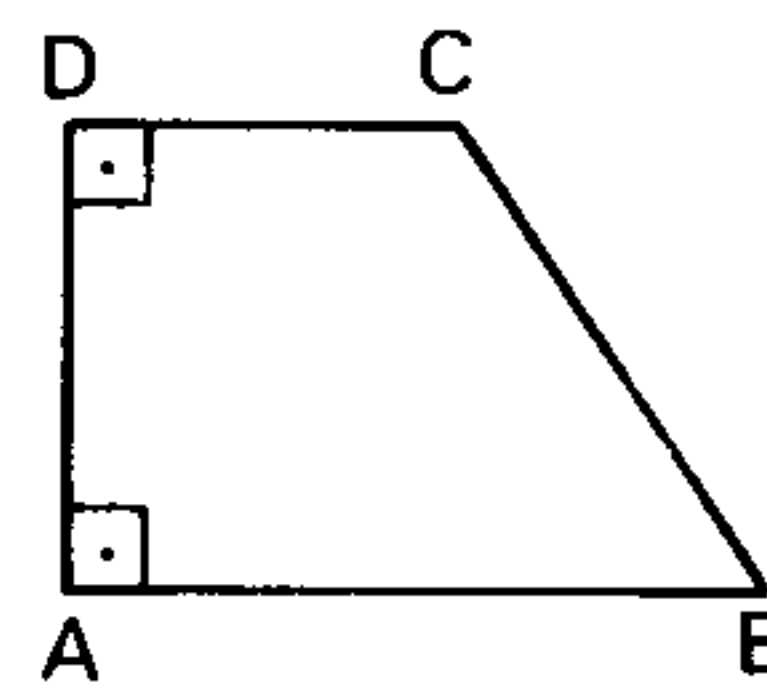
Um quadrilátero plano convexo é um *trapézio* se, e somente se, possui *dois lados* paralelos.

$ABCD$ é trapézio $\iff$ ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ *ou* $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$).

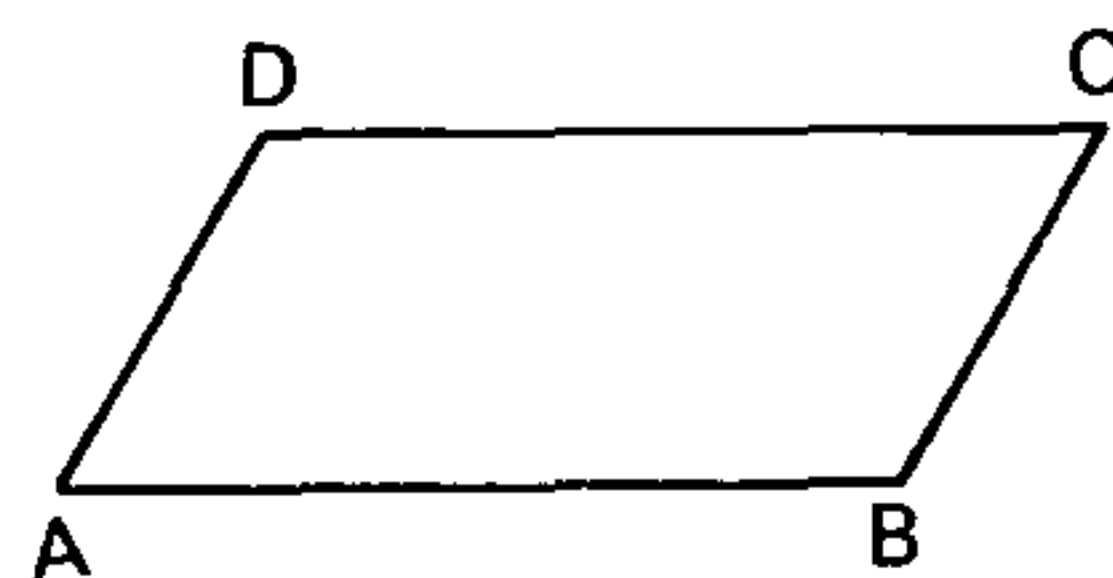
Os lados paralelos são as *bases* do trapézio.

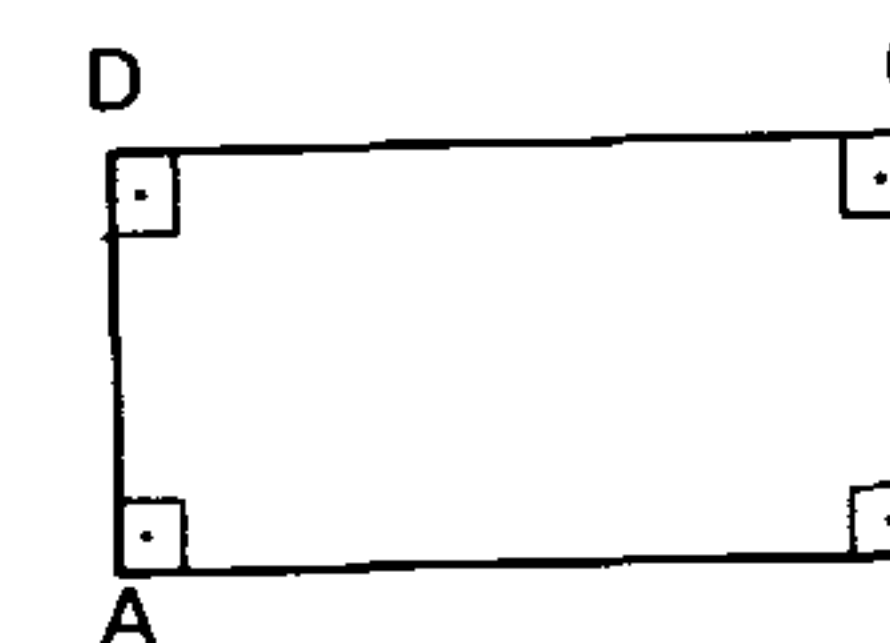
De acordo com os outros dois lados não bases, temos:

- trapézio isósceles, se estes lados são congruentes
- trapézio escaleno, se estes lados não são congruentes.

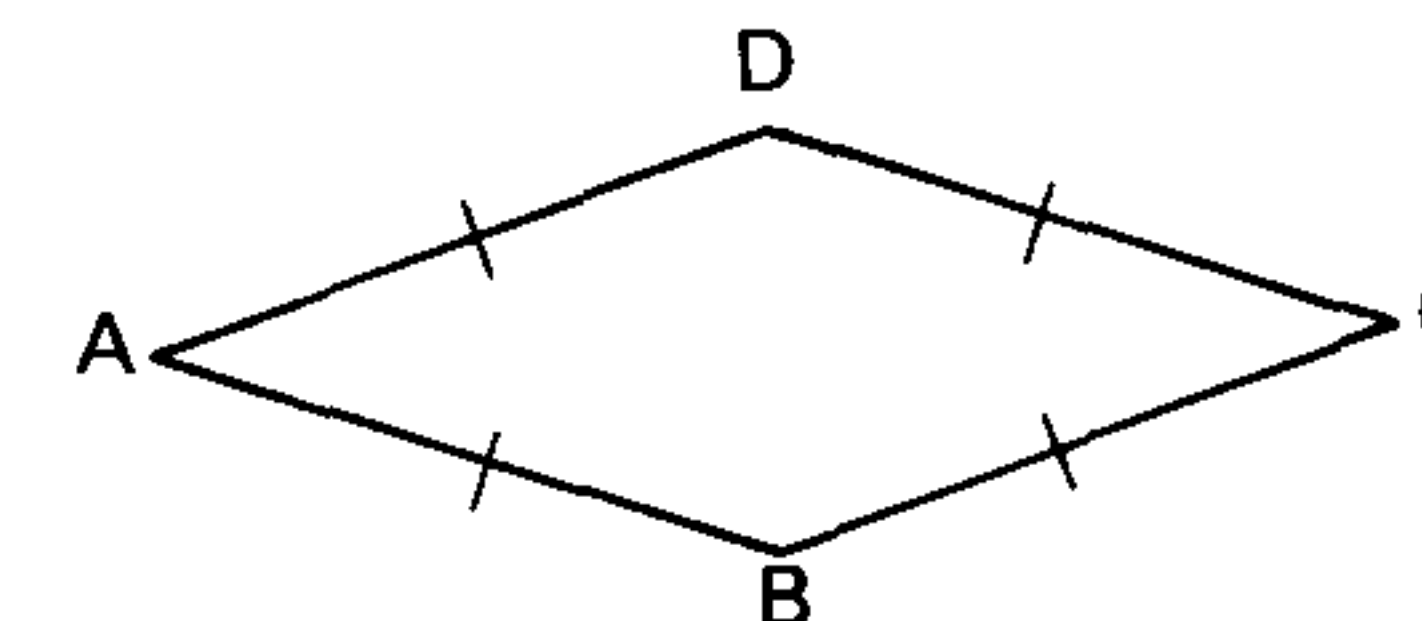
Trapézio retângulo (ou bi-retângulo) é um trapézio que tem dois ângulos retos.

trapézio isósceles | trapézio escaleno | trapézio escaleno | trapézio retângulo

98. *Paralelogramo*

Um quadrilátero plano convexo é um *paralelogramo* se, e somente se, possui os *lados opostos* paralelos.

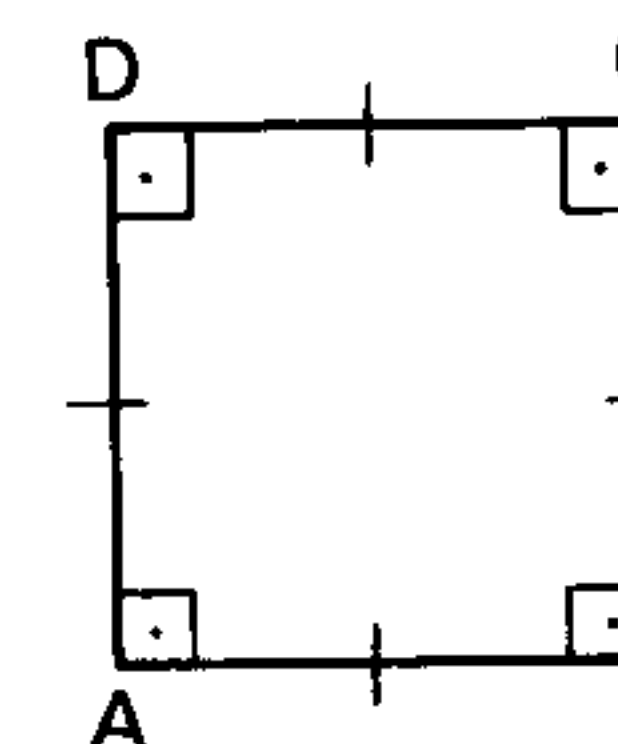
$ABCD$ é paralelogramo $\iff$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

99. *Retângulo*

Um quadrilátero plano convexo é um *retângulo* se, e somente se, possui os quatro *ângulos* congruentes.

$ABCD$ é retângulo $\iff$ $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$

100. *Losango*

Um quadrilátero plano convexo é um *losango* se, e somente se, possui os quatro *lados* congruentes.

$ABCD$ é losango $\iff$ $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$

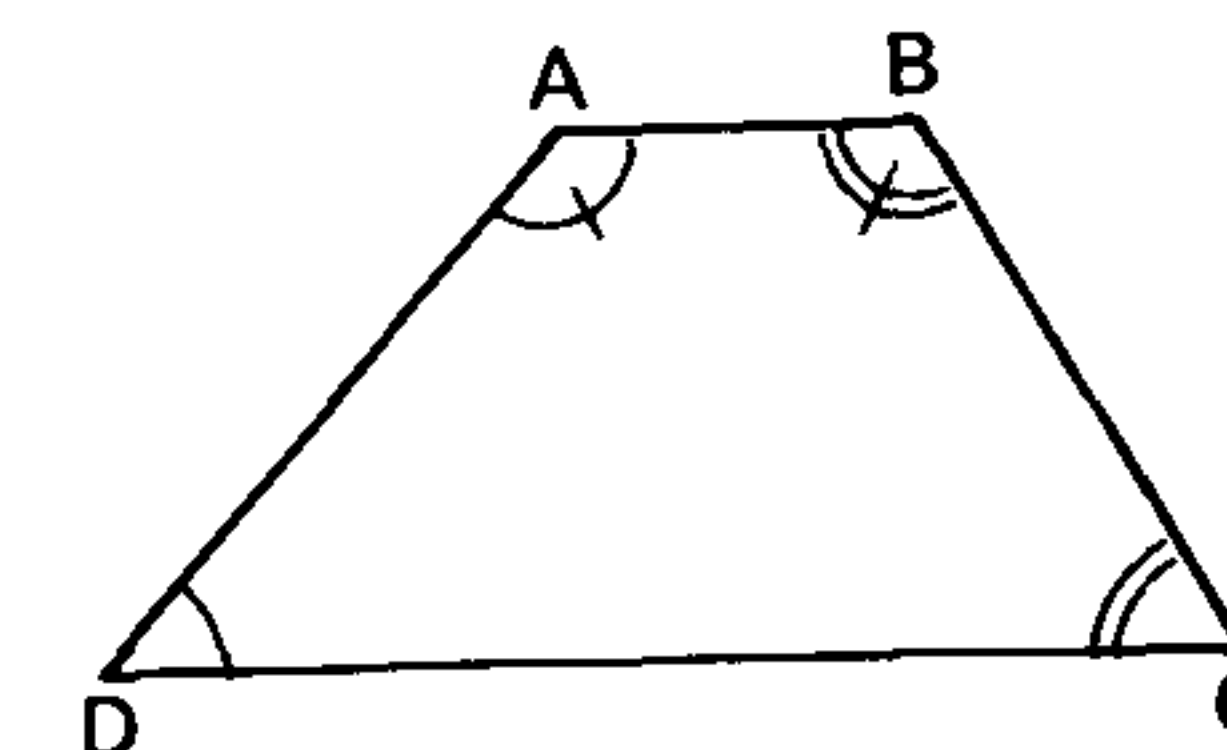
101. *Quadrado*

Um quadrilátero plano convexo é um *quadrado* se, e somente se, possui os quatro *ângulos* congruentes e os quatro *lados* congruentes.

$ABCD$ é quadrado $\iff$ ($\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$)

III. Propriedades dos trapézios

102. *Trapézio qualquer*

Em qualquer trapézio $ABCD$ (notação cíclica) de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ temos:

$$\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

De fato,

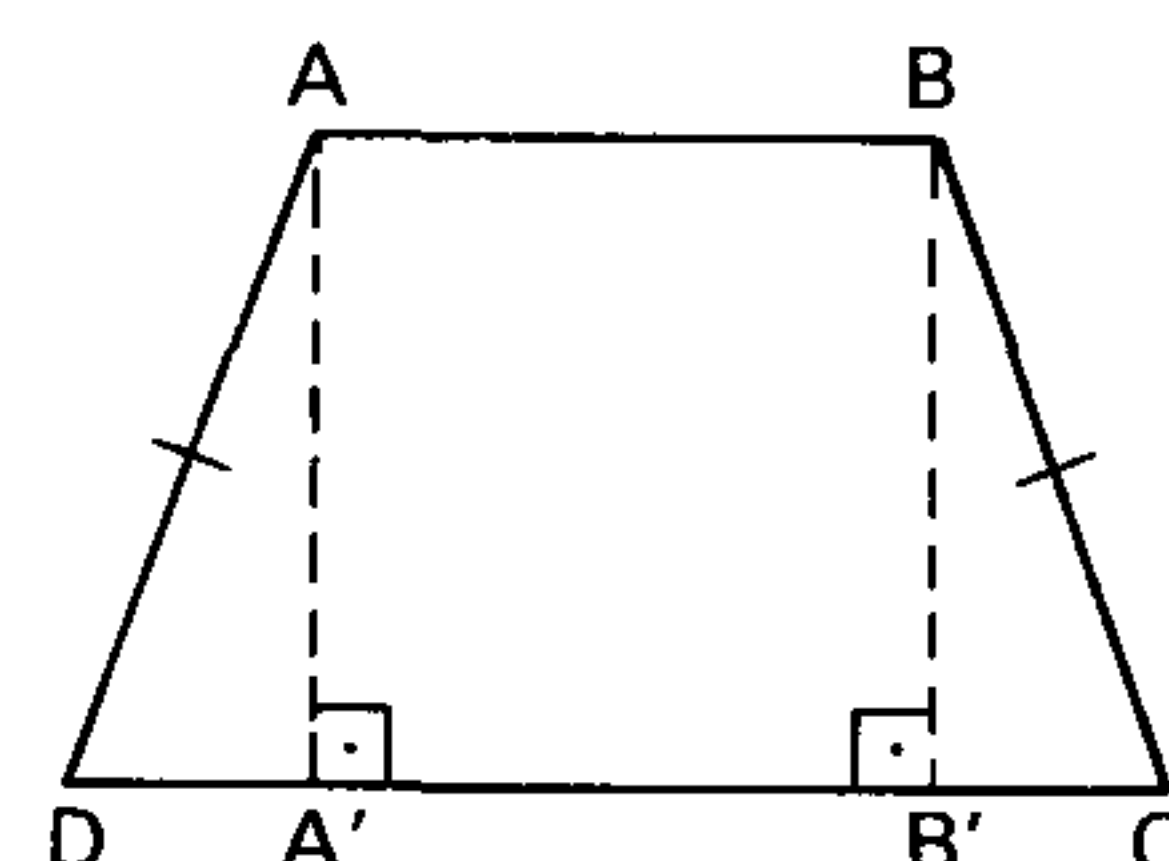
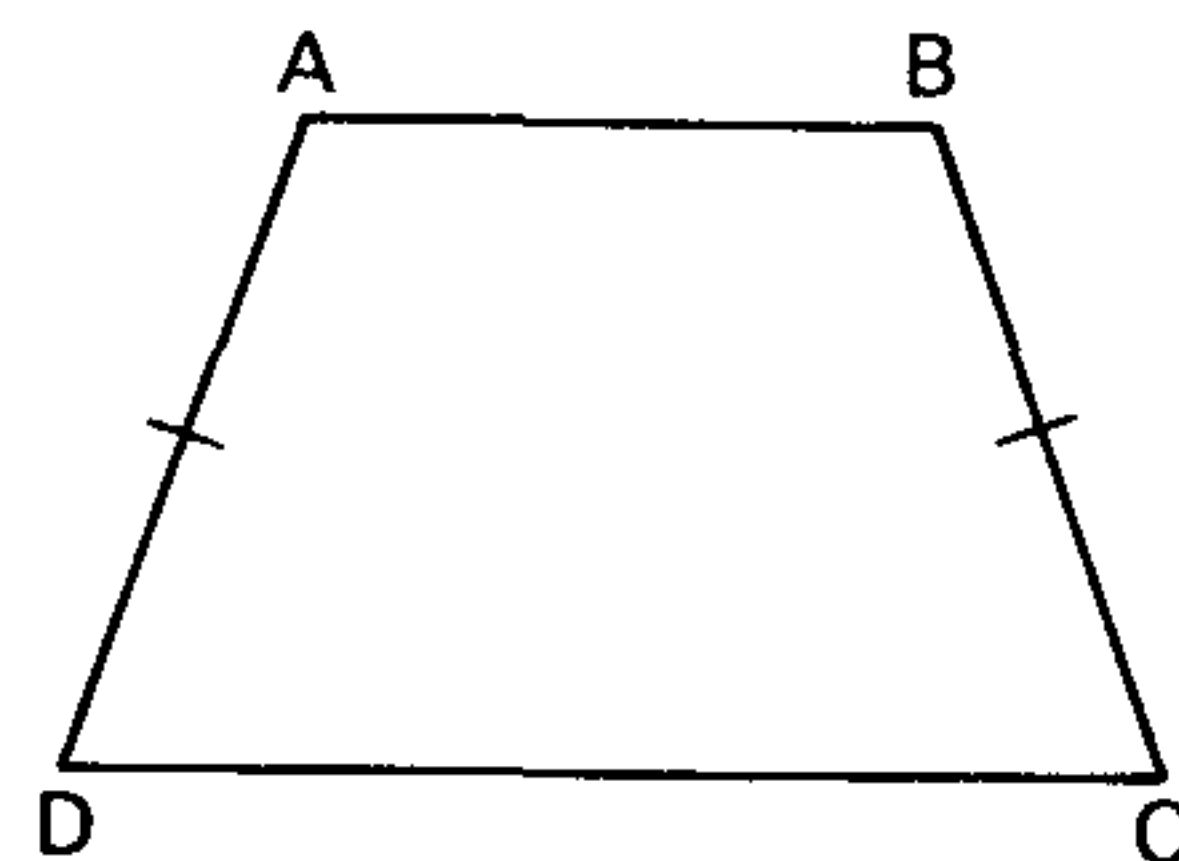
$$\left.\begin{array}{l}(\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD},\ \overleftrightarrow{AD} \text{ transversal}) \Longrightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ (\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD},\ \overleftrightarrow{BC} \text{ transversal}) \Longrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

103. Trapézio isósceles

Os ângulos de cada base de um trapézio *isósceles* são congruentes.

Hipótese | *Tese*

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são bases do trapézio isósceles $\Longrightarrow$ $(\hat{C} \equiv \hat{D}$ e $\hat{A} \equiv \hat{B})$

Demonstração

1) Tracemos as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, obtendo os pontos A' e B' na base maior $\overline{CD}$. Notemos que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ por serem distâncias entre retas paralelas.

2) Os triângulos retângulos $AA'D$ e $BB'C$ são congruentes pelo caso especial visto que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ (cateto) e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ (hipotenusa). Daí obtemos $\hat{C} \equiv \hat{D}$.

3) Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares de $\hat{D}$ e $\hat{C}$, respectivamente, temos: $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

Observação

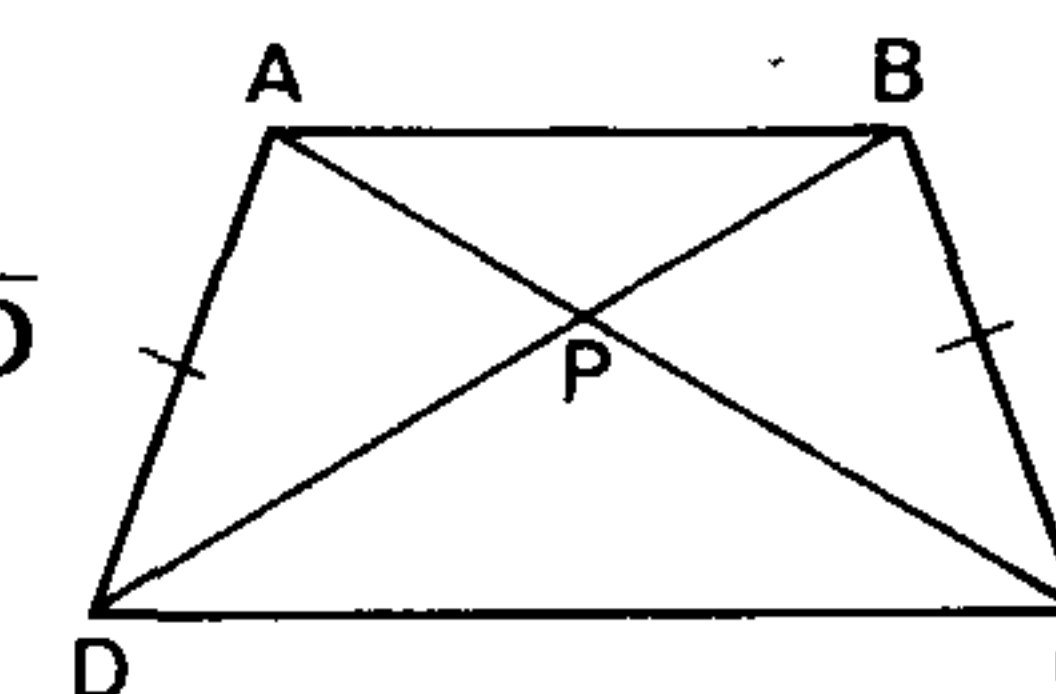
Da congruência dos triângulos $AA'D$ e $BB'C$ decorre também que $\overline{A'D} \equiv \overline{B'C}$, o que nos permite enunciar:

As projeções ortogonais dos lados não bases de um trapézio isósceles, sobre a base maior, são congruentes.

104. Trapézio isósceles — diagonais congruentes

As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Hipótese | *Tese*

$\left.\begin{array}{l}ABCD \text{ é trapézio de bases} \\ \overline{AB} \text{ e } \overline{CD},\ \overline{AD} \equiv \overline{BC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$

Demonstração

Observemos os triângulos ADC e BCD:

$$(\overline{AD} \equiv \overline{BC},\ \hat{D} \equiv \hat{C},\ DC = CD) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ADC \equiv \triangle BCD \Longrightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$$

Nota

Da congruência acima obtemos $A\hat{C}D \equiv B\hat{D}C$. Daí decorre que os triângulos PCD e PAB são isósceles com bases $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$, sendo P o ponto onde as diagonais se cortam.

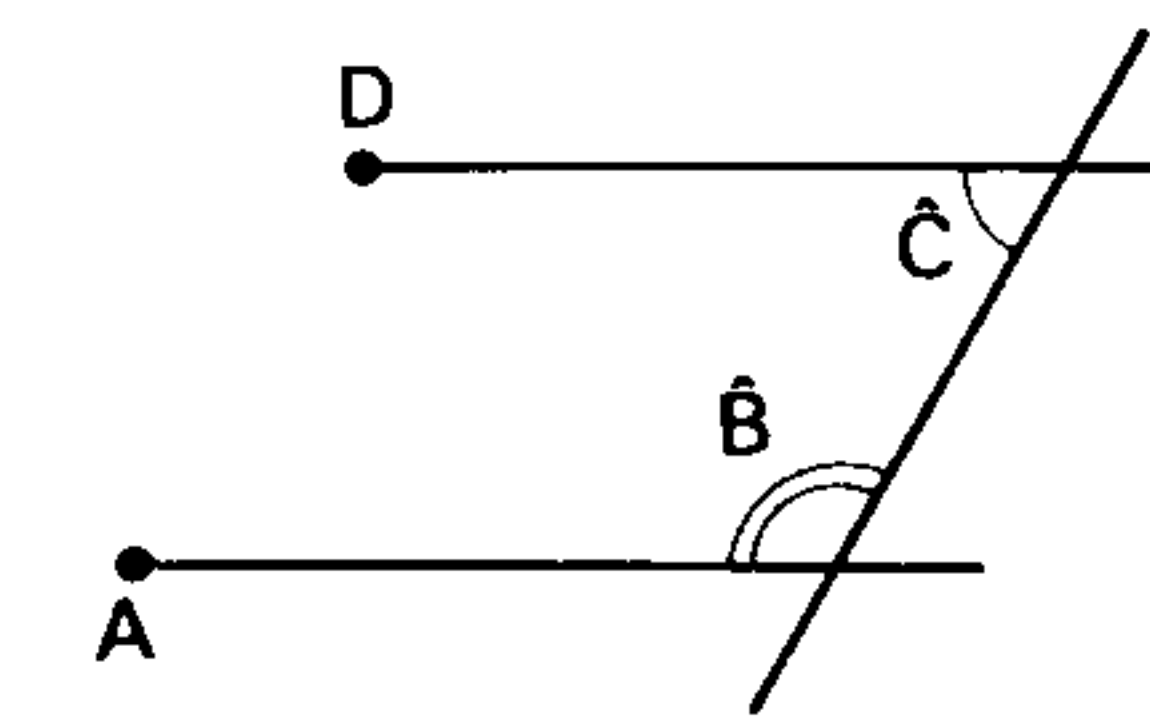
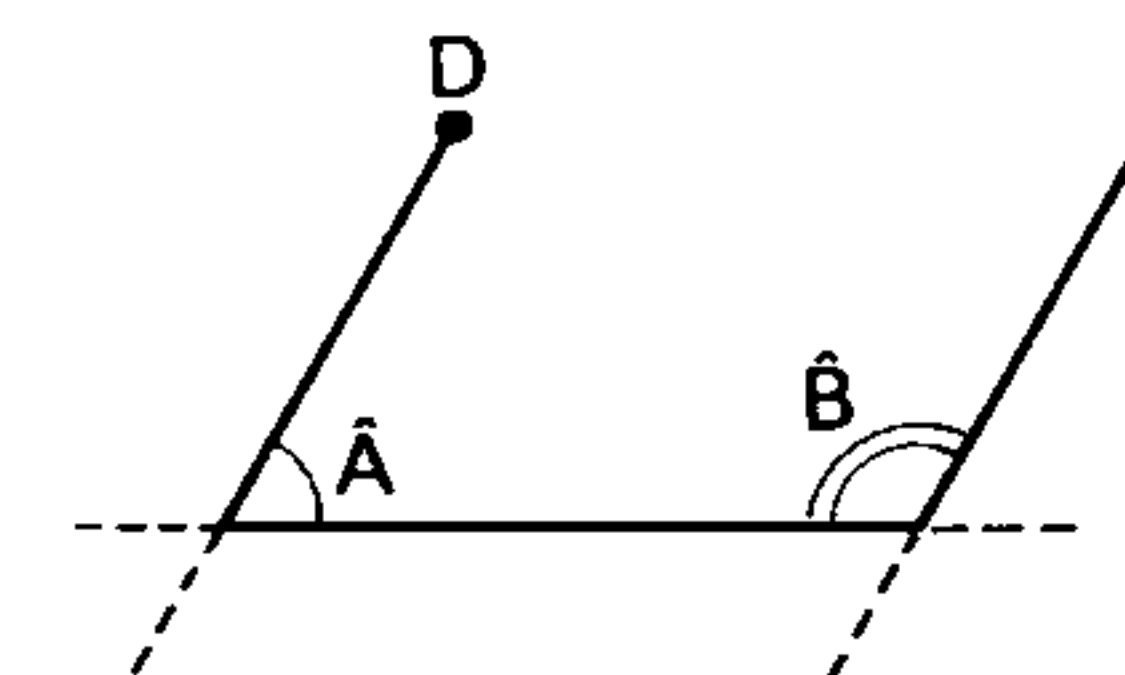
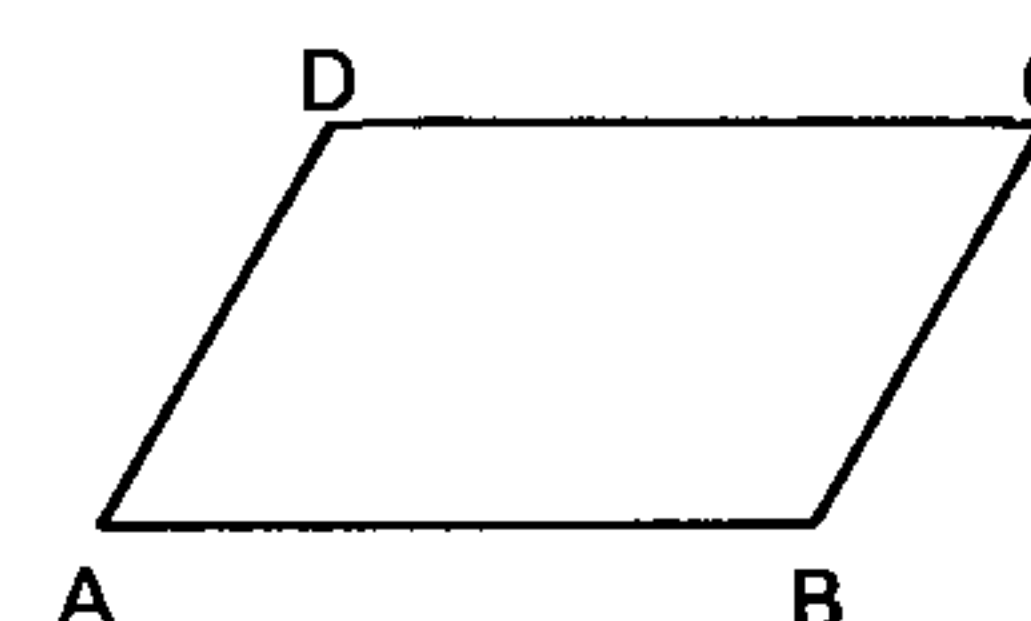
IV. Propriedades dos paralelogramos

105. Ângulos opostos congruentes

a) Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Hipótese | *Tese*

ABCD é paralelogramo $\Longrightarrow$ $(\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D})$

Demonstração

$ABCD$ é paralelogramo $\Longrightarrow \left\{\begin{matrix} \overleftrightarrow{AD} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180° \\ \overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180° \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \hat{A} \equiv \hat{C}$

Analogamente para $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

b) Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

Sendo $ABCD$ um quadrilátero convexo,

Hipótese		*Tese*
$(\hat{A} \equiv \hat{C},\ \hat{B} \equiv \hat{D})$	$\Longrightarrow$	ABCD é paralelogramo

Demonstração

$$\left.\begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{C},\ \hat{B} \equiv \hat{D} \Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} \\ ABCD \text{ quadrilátero} \Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360° \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{D} = 180° \Longrightarrow \overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ e $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD} \Longrightarrow$

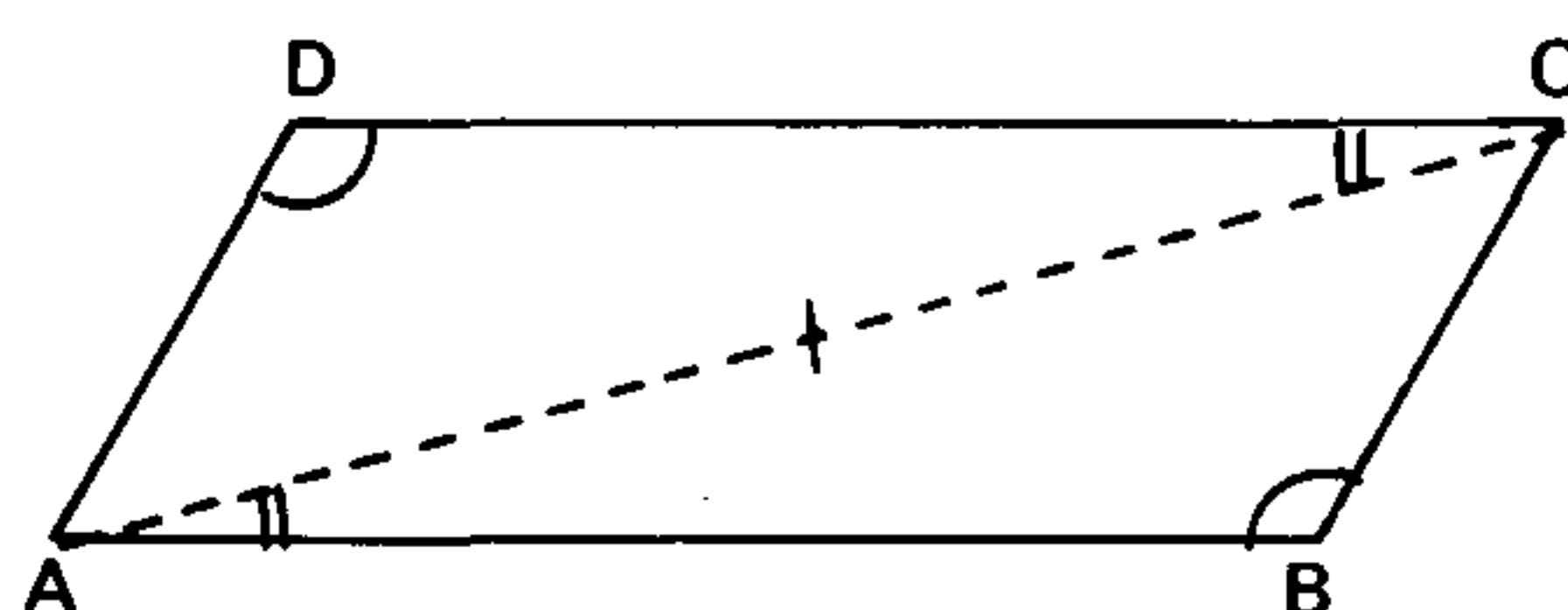
$\Longrightarrow ABCD$ é paralelogramo.

c) Conseqüência

Todo retângulo é paralelogramo.

106. *Lados opostos congruentes*

a) Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Hipótese		*Tese*
$ABCD$ é paralelogramo	$\Longrightarrow$	$(\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD})$

Demonstração

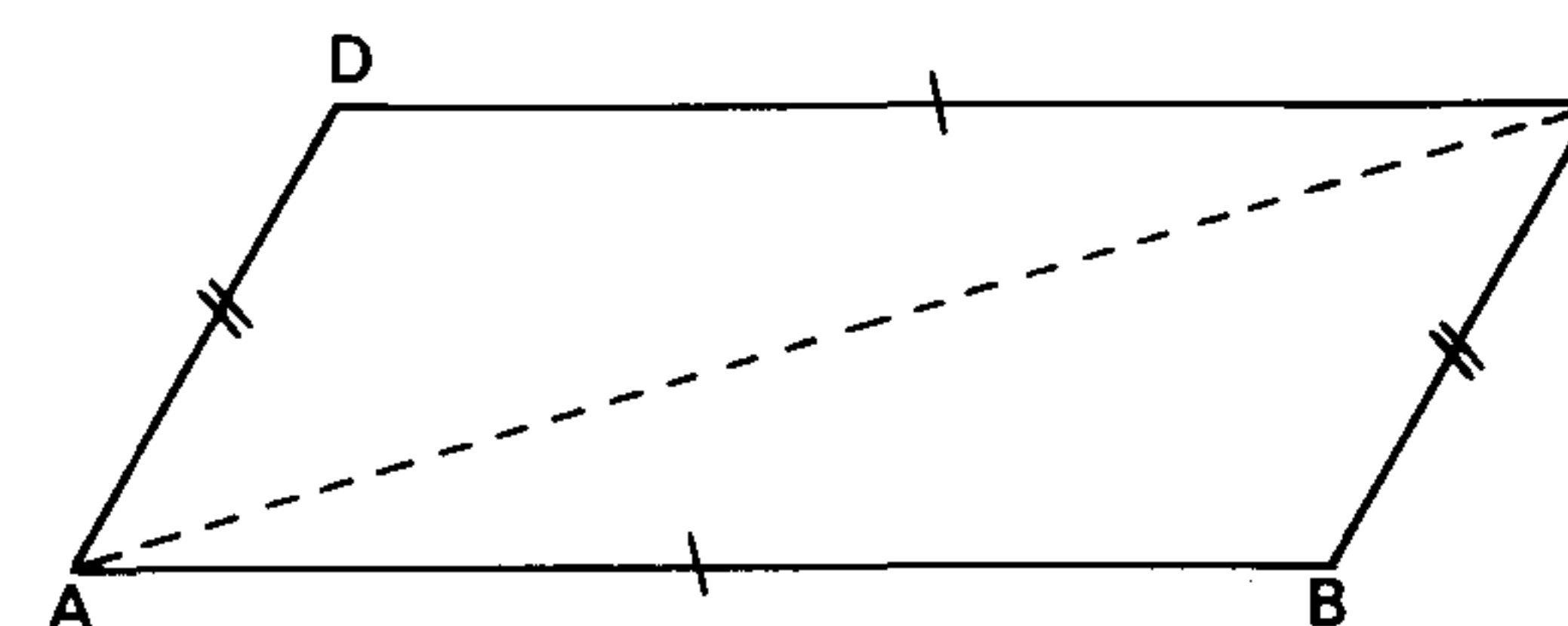
$ABCD$ é paralelogramo $\Longrightarrow \left\{\begin{matrix} \hat{B} \equiv \hat{D} \\ \overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD} \Longrightarrow B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \end{matrix}\right.$

$(\overline{AC}$ comum, $B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$, $\hat{B} \equiv \hat{D}) \overset{LAA_o}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle CDA \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{DA}$.

b) Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo.

Sendo $ABCD$ um quadrilátero convexo,

Hipótese		*Tese*
$(\overline{AB} \equiv \overline{CD},\ \overline{BC} \equiv \overline{DA})$	$\Longrightarrow$	$ABCD$ é paralelogramo

Demonstração

$(\overline{AB} \equiv \overline{CD},\ \overline{BC} \equiv \overline{DA},\ \overline{AC}$ comum$) \overset{LLL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle CDA \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{matrix} B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \Longrightarrow \overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD} \\ B\hat{C}A \equiv D\hat{A}C \Longrightarrow \overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow ABCD \text{ é paralelogramo}$$

c) Conseqüência

Todo losango é paralelogramo.

107. *Diagonais dividem-se ao meio*

a) Em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.

Hipótese *Tese*

$(ABCD$ é paralelogramo, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}) \Longrightarrow (\overline{AM} \equiv \overline{CM}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{DM})$

Demonstração

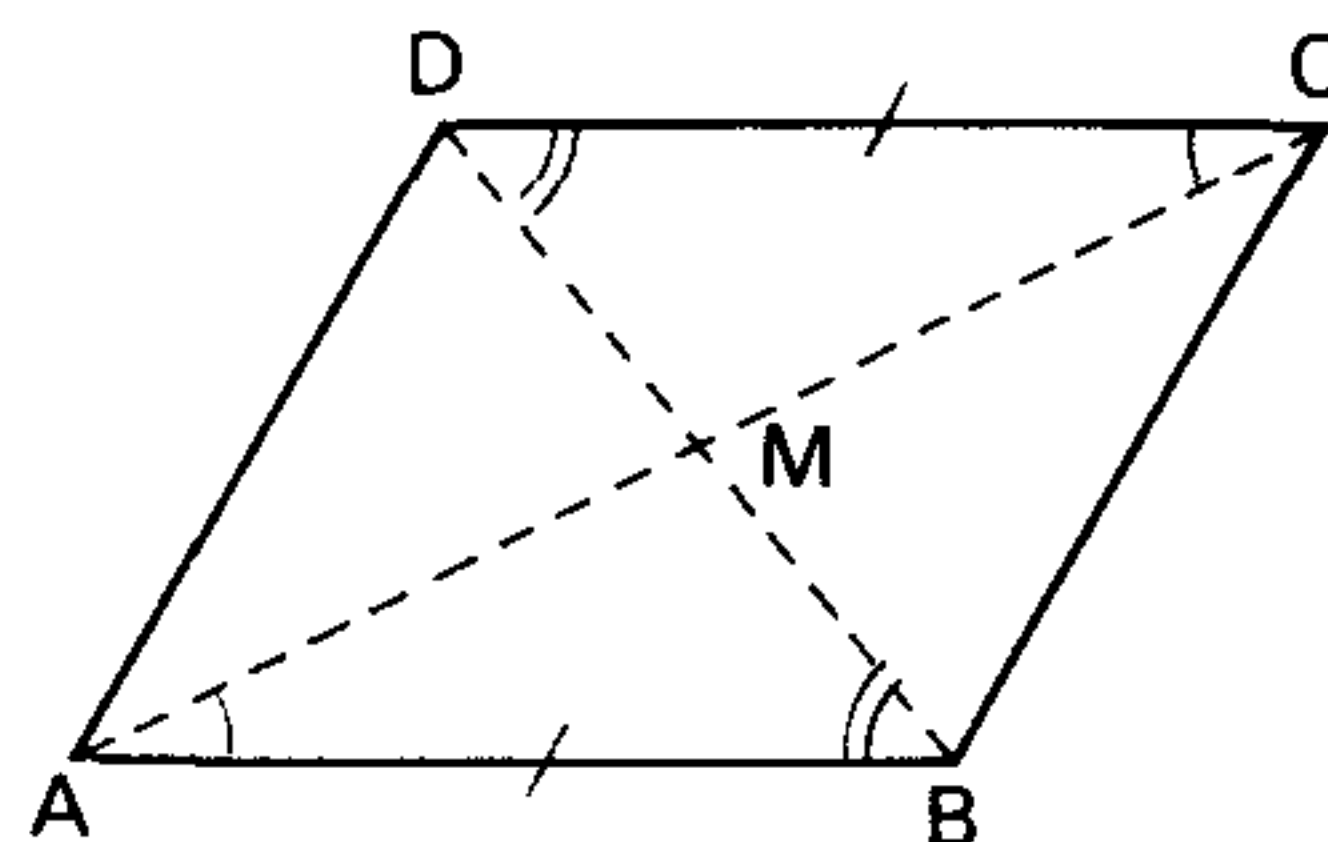
$ABCD$ é paralelogramo $\Longrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (1)

$ABCD$ é paralelogramo $\Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$ (2) e $A\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$ (3)

$((2), (1), (3) \overset{ALA}{\Longrightarrow} \triangle ABM \equiv \triangle CDM \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\overline{AM} \equiv \overline{CM}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{DM}.)$

D C M A B

b) Todo quadrilátero convexo em que as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios é paralelogramo.

Sendo $ABCD$ um quadrilátero convexo,

Hipótese *Tese*

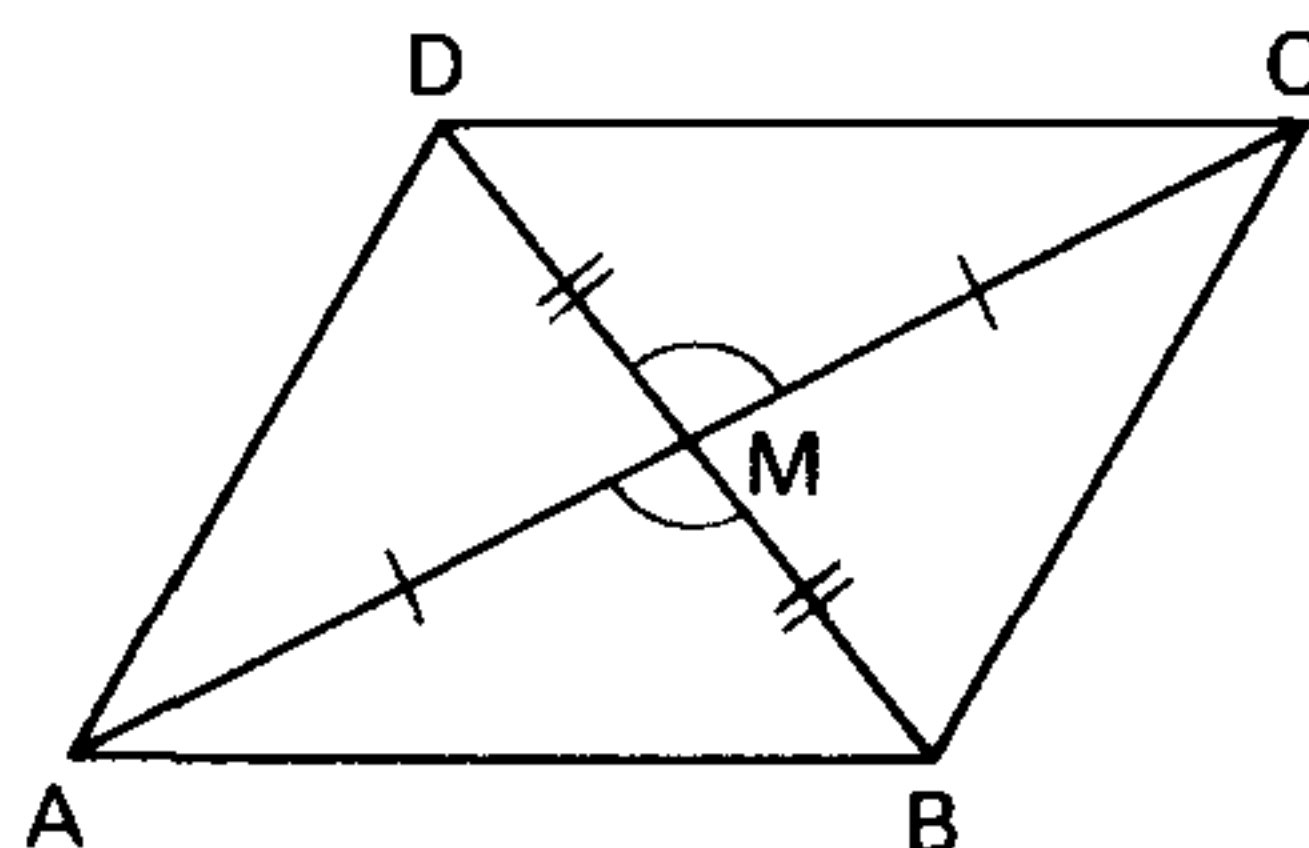
$(\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}, \overline{AM} \equiv \overline{CM}, \overline{BM} \equiv \overline{DM}) \Longrightarrow ABCD$ é paralelogramo

Demonstração

$(\overline{AM} \equiv \overline{CM}, A\hat{M}B \equiv C\hat{M}D$ (o.p.v.),

$\overline{BM} \equiv \overline{DM}) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABM \equiv \triangle CDM \Longrightarrow$

$B\hat{A}M \equiv D\hat{C}M \Longrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

D C M A B

Analogamente, considerando $\triangle ADM$ e $\triangle BCM$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

$(\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}) \Longrightarrow ABCD$ é paralelogramo.

c) Conseqüência

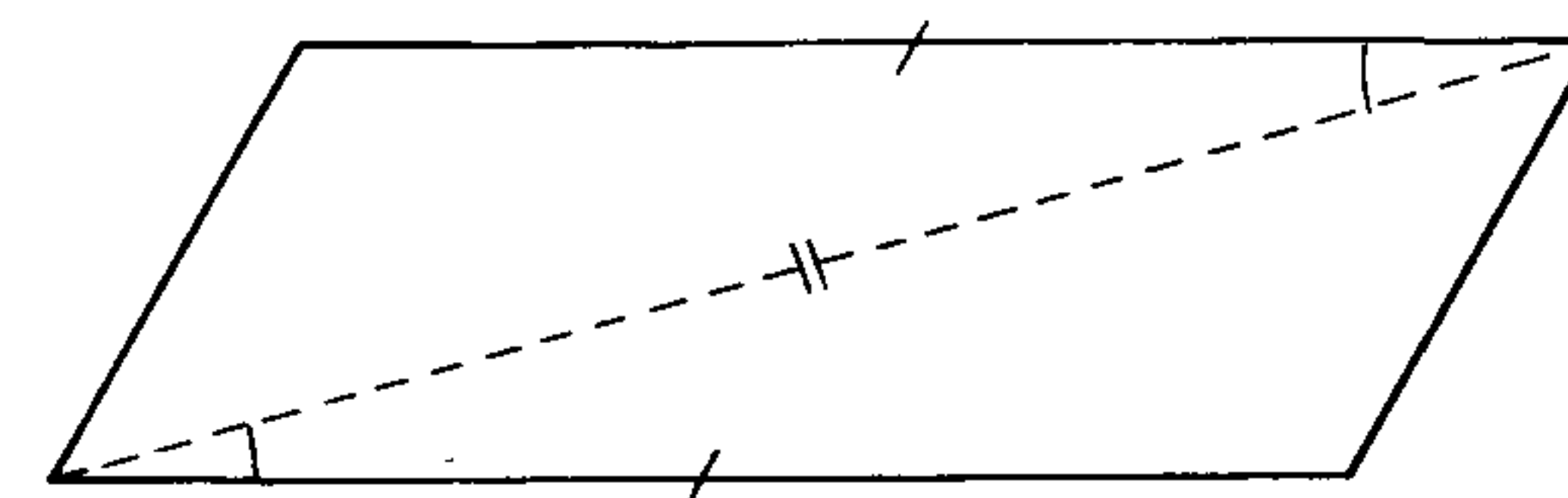
Se dois segmentos de reta interceptam-se nos respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

108. Dois lados paralelos e congruentes

a) Todo quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

Sendo $ABCD$ um quadrilátero convexo,

Hipótese *Tese*

$(\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}) \Longrightarrow ABCD$ é paralelogramo

Demonstração

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Longrightarrow B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$

$(\overline{AB} \equiv \overline{CD}, B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A, \overline{AC}$ comum$) \overset{LAL}{\Longrightarrow} \overline{BC} \equiv \overline{AD}$

Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$, então, pelo item 106b, $ABCD$ é paralelogramo.

b) Conseqüência

Se dois segmentos de reta são paralelos e congruentes, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

V. Propriedades do retângulo, do losango e do quadrado

109. Retângulo — diagonais congruentes

Além das propriedades do paralelogramo, o retângulo tem a propriedade característica que segue.

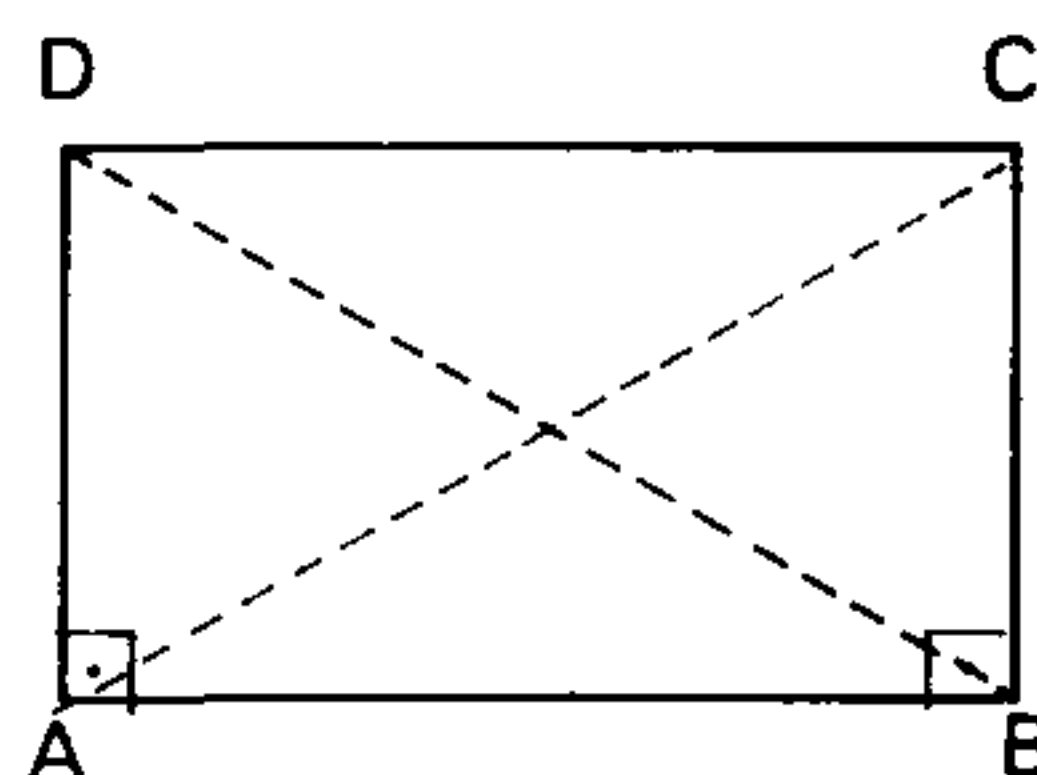
a) Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Hipótese *Tese*

$ABCD$ é retângulo $\Longrightarrow$ $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$

Demonstração

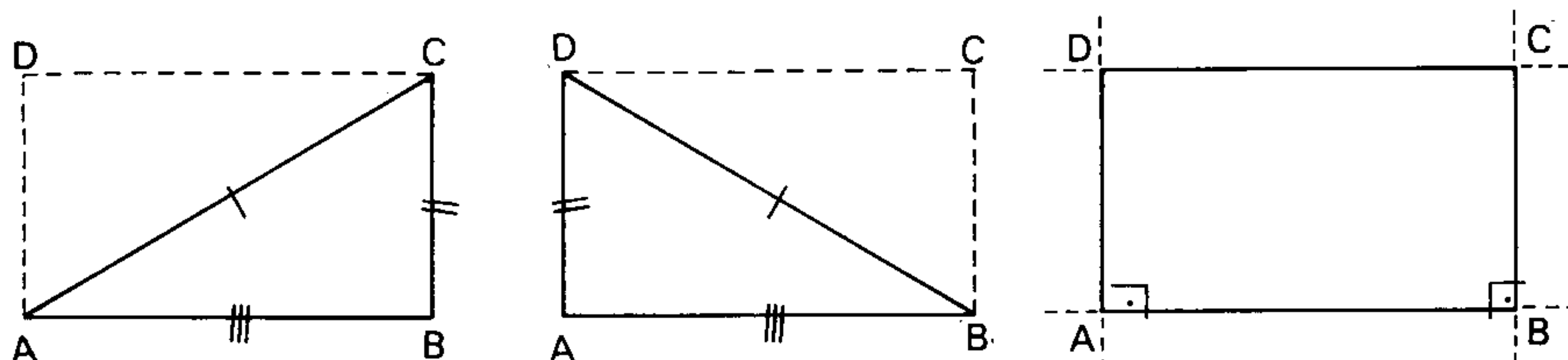
$ABCD$ é retângulo $\Longrightarrow$ $ABCD$ é paralelogramo $\Longrightarrow$ $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$

$(\overline{BC} \equiv \overline{AD},\ \hat{B} \equiv \hat{A},\ \overline{AB}$ comum$)$ $\overset{LAL}{\Longrightarrow}$ $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ $\Longrightarrow$ $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

b) Todo *paralelogramo* que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Sendo $ABCD$ um paralelogramo,

Hipótese *Tese*

$\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ $\Longrightarrow$ $ABCD$ é retângulo

Demonstração

$ABCD$ é paralelogramo $\Longrightarrow$ $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$.

$(\overline{AC} \equiv \overline{BD},\ \overline{BC} \equiv \overline{AD},\ \overline{AB}$ comum$)$ $\overset{LLL}{\Longrightarrow}$ $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ $\Longrightarrow$ $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos colaterais em relação às paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares.

Logo, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sendo congruentes e suplementares, são retos.

No paralelogramo os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são opostos respectivamente a $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e, portanto, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ também são retos.

Então:

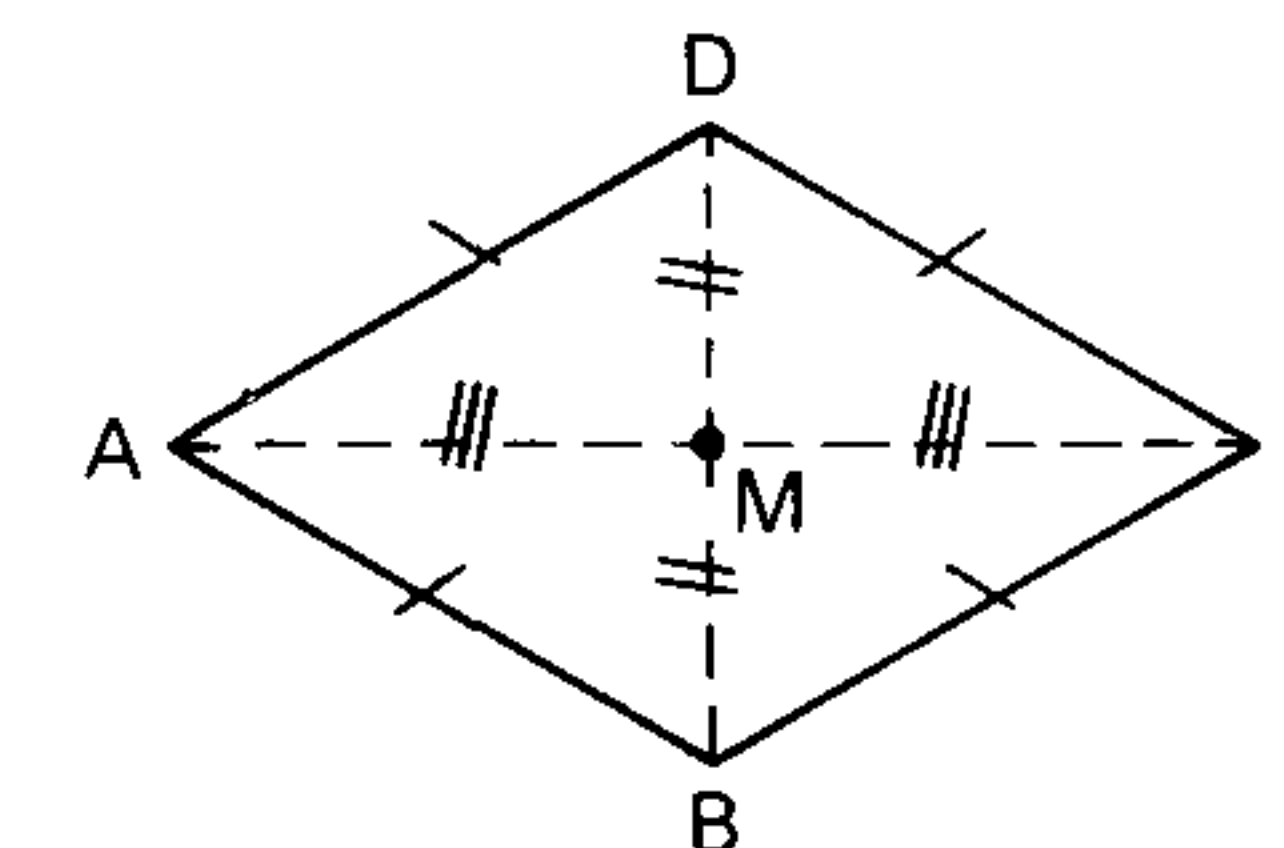
$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$ (são todos retos) $\Longrightarrow$ $ABCD$ é retângulo.

110. Losango — diagonais perpendiculares

Além das propriedades do paralelogramo, o losango tem a propriedade característica que segue.

a) Todo losango tem diagonais perpendiculares.

Hipótese *Tese*

ABCD é losango $\Longrightarrow$ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Demonstração

$ABCD$ é losango $\Rightarrow$ $ABCD$ é paralelogramo $\Rightarrow$ $(\overline{AM} \equiv \overline{CM}, \overline{BM} \equiv \overline{DM})$.

Pelo caso LLL, temos as congruências:

$\triangle AMB \equiv \triangle AMD \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$

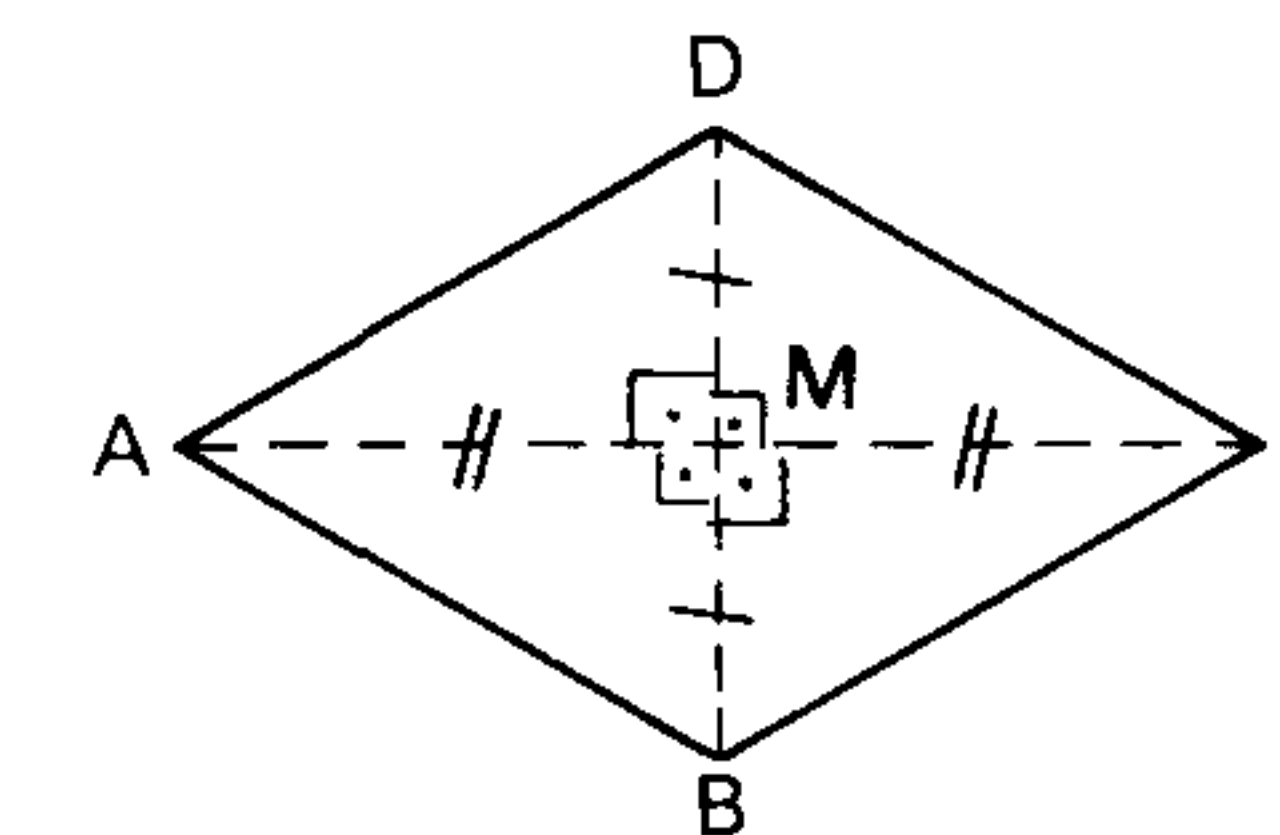
e, então, os ângulos de vértice M são congruentes e suplementares.

Logo, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

b) Todo *paralelogramo* que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Sendo $ABCD$ um paralelogramo,

Hipótese *Tese*

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ $\Longrightarrow$ ABCD é um losango

Demonstração

$ABCD$ é paralelogramo $\Rightarrow$ $(\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}, \overline{AM} \equiv \overline{CM}, \overline{BM} \equiv \overline{DM})$

Pelo caso LAL, temos as congruências:

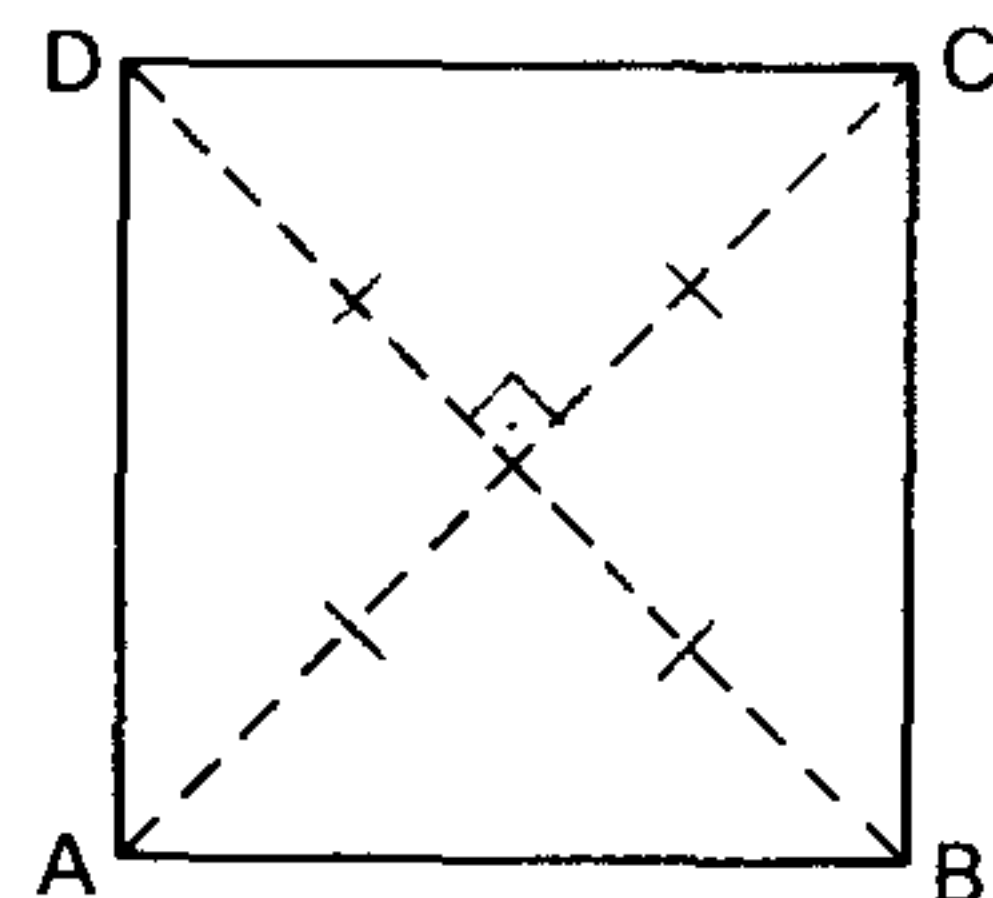
$\triangle AMB \equiv \triangle AMD \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$

Daí, $\overline{AB} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD}$ e então $ABCD$ é losango.

111. *Quadrado — diagonais congruentes e perpendiculares*

Pelas definições, podemos concluir que:

Todo quadrado é retângulo e também é losango.

Portanto, além das propriedades do paralelogramo, o quadrado tem as propriedades características dos retângulos e do losango.

$ABCD$ é quadrado $\iff$ ($ABCD$ é paralelogramo, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$).

112. *Nota*

Notemos, em resumo, que se um *quadrilátero convexo*
tem as diagonais que se cortam ao meio, então é um *paralelogramo*,
tem diagonais que se cortam ao meio e são congruentes, então é um *retângulo*,
tem diagonais que se cortam ao meio e são perpendiculares, então é um *losango*,
tem diagonais que se cortam ao meio, são congruentes e são perpendiculares, então é um *quadrado*.

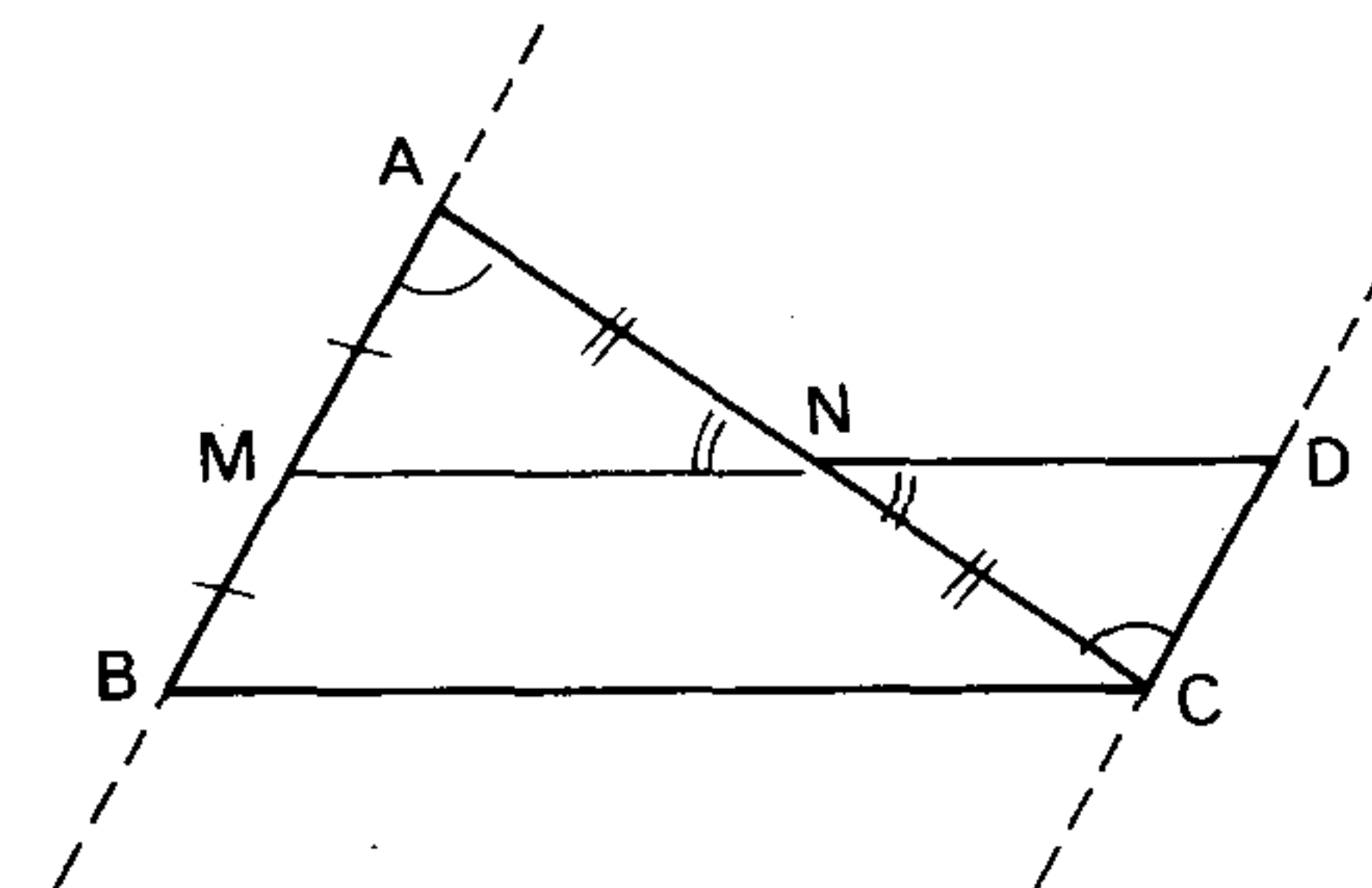
VI. Conseqüências — Bases médias

113. *Base média do triângulo*

a) Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:
1º) ele é paralelo ao terceiro lado;
2º) ele é metade do terceiro lado.

Seja ABC o triângulo.

Hipótese — *Tese*

$$(\overline{AM} \equiv \overline{MB},\ \overline{AN} \equiv \overline{NC}) \Rightarrow \begin{cases} 1º)\ \overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ 2º)\ \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} \end{cases}$$

Demonstração

Conduzimos por C uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e seja D o ponto de interseção com a reta $\overleftrightarrow{MN}$: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \hat{C} \equiv \hat{A}$

$(\hat{C} \equiv \hat{A},\ \overline{AN} \equiv \overline{CN},\ \hat{N}$ o.p.v.$) \overset{ALA}{\Rightarrow} \triangle AMN \equiv \triangle CDN \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{CD} \equiv \overline{AM} \Rightarrow \overline{CD} \equiv \overline{MB}$
$(\overline{CD} \parallel \overline{MB}$, e $\overline{CD} \equiv \overline{MB}) \Rightarrow MBCD$ é paralelogramo $\Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{MD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{BC}$

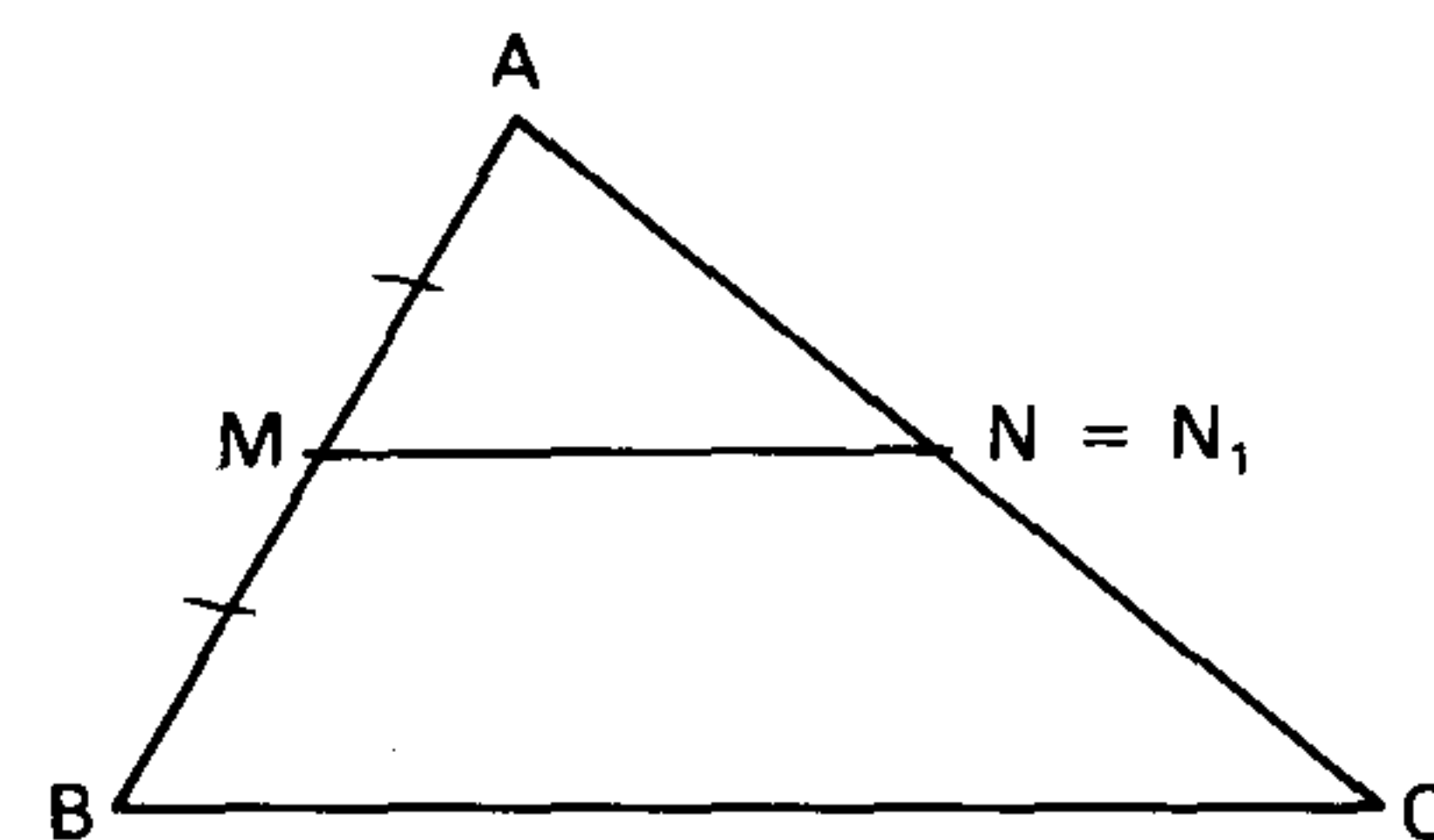
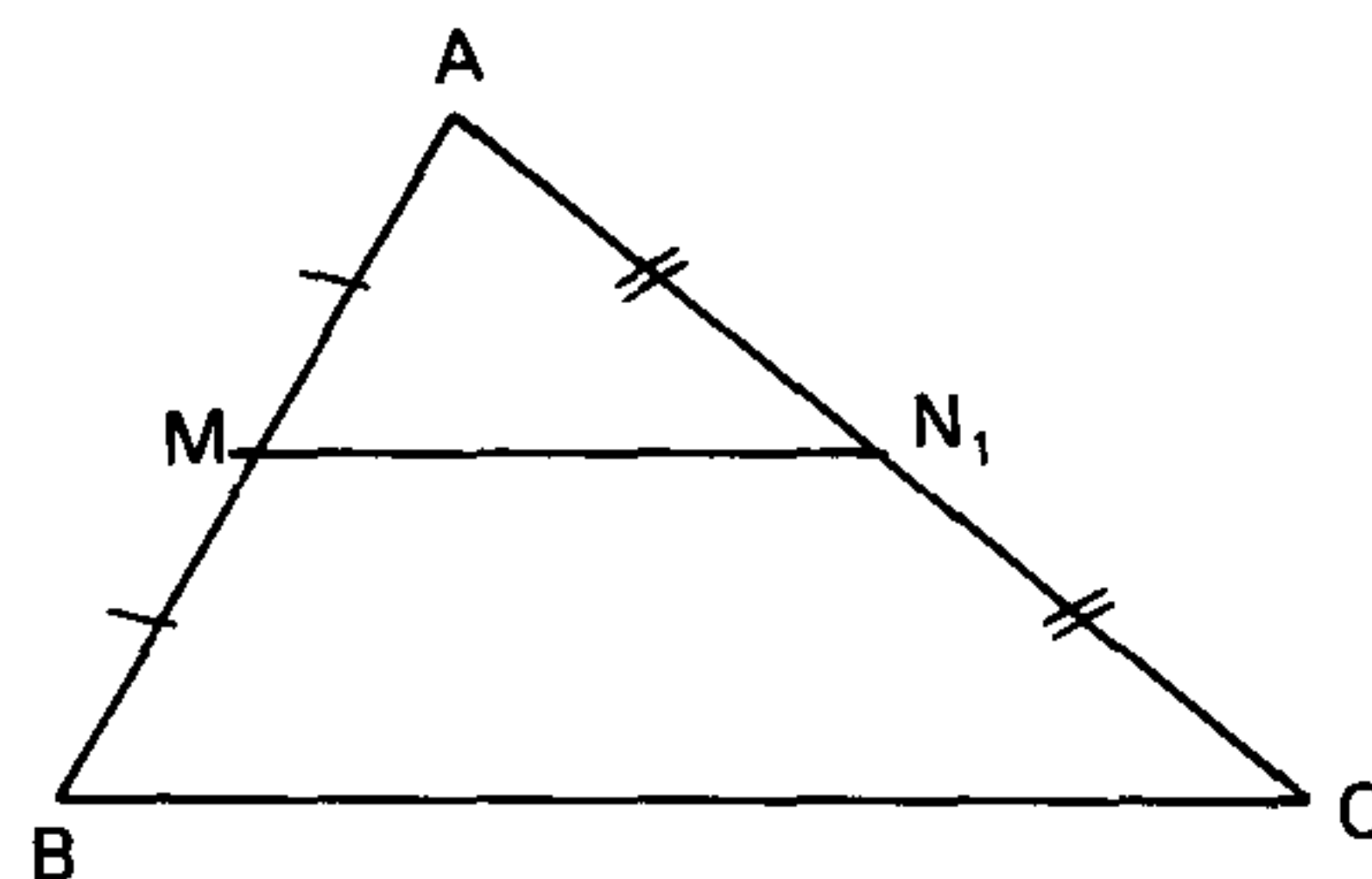
E ainda:

$\triangle AMN \equiv \triangle CDN \Rightarrow \overline{MN} \equiv \overline{DN}$
$MBCD$ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{MD} \equiv \overline{BC}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \overline{MN} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

b) Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Seja ABC o triângulo.

Hipótese	*Tese*
$(\overline{MN} \parallel BC, \overline{AM} \equiv \overline{MB}, N \in \overline{AC}) \Rightarrow$	$\overline{AN} \equiv \overline{NC}$

Demonstração

Seja N_1 o ponto médio de $\overline{AC}$. Pelo teorema anterior $\overleftrightarrow{MN_1} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Como a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ por M é única (postulado das paralelas, item 72), resulta que $\overleftrightarrow{MN_1} = \overleftrightarrow{MN}$. E como $\overleftrightarrow{MN_1}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ interceptam $\overline{AC}$ em N_1 e N, respectivamente, decorre que $N_1 = N$.

Logo, $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$.

114. *Base média do trapézio*

a) Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:
1º) ele é paralelo às bases;
2º) ele é igual à semi-soma das bases.

Seja $ABCD$ um trapézio não paralelogramo de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Hipótese	*Tese*
$(\overline{AM} \equiv \overline{DM}, \overline{BN} \equiv \overline{CN}) \Rightarrow$	1º) $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 2º) $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$

Demonstração

Seja E o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{DN}$ e $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$

$(\hat{B} \equiv \hat{C}, \overline{BN} \equiv \overline{CN}, \hat{N}$ o.p.v.$) \overset{ALA}{\Longrightarrow}$

$\overset{ALA}{\Longrightarrow} \triangle BEN \equiv \triangle CDN \Rightarrow \overline{EN} \equiv \overline{DN}$ (1) e $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ (2)

No $\triangle ADE$, em vista de (1), M e N são pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$, respectivamente.

Logo,

1º) $\overline{MN} \parallel \overline{AE} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

2º) $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AE}}{2} \Rightarrow \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BE}}{2} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$

Se $ABCD$ for paralelogramo, a propriedade é imediata.

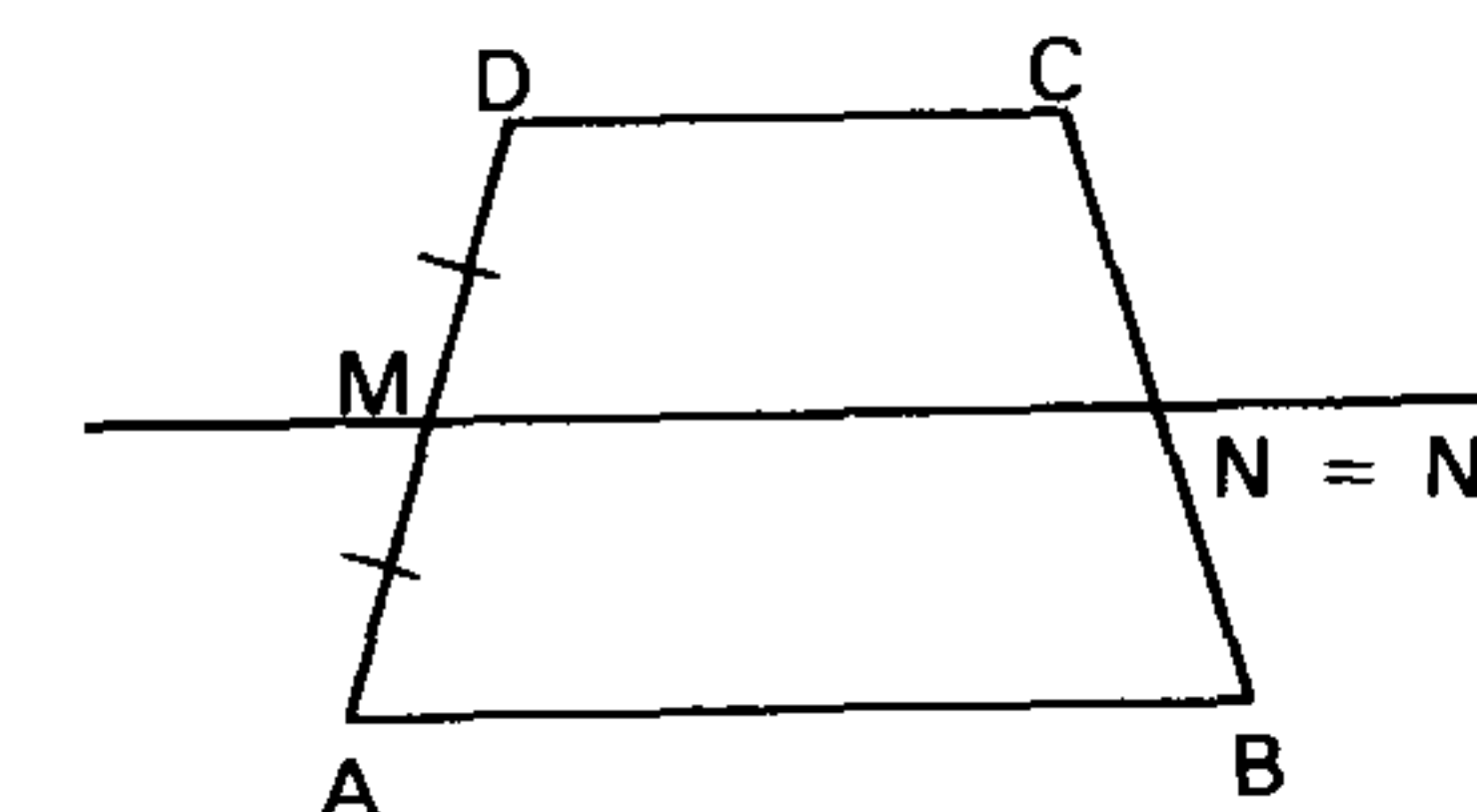
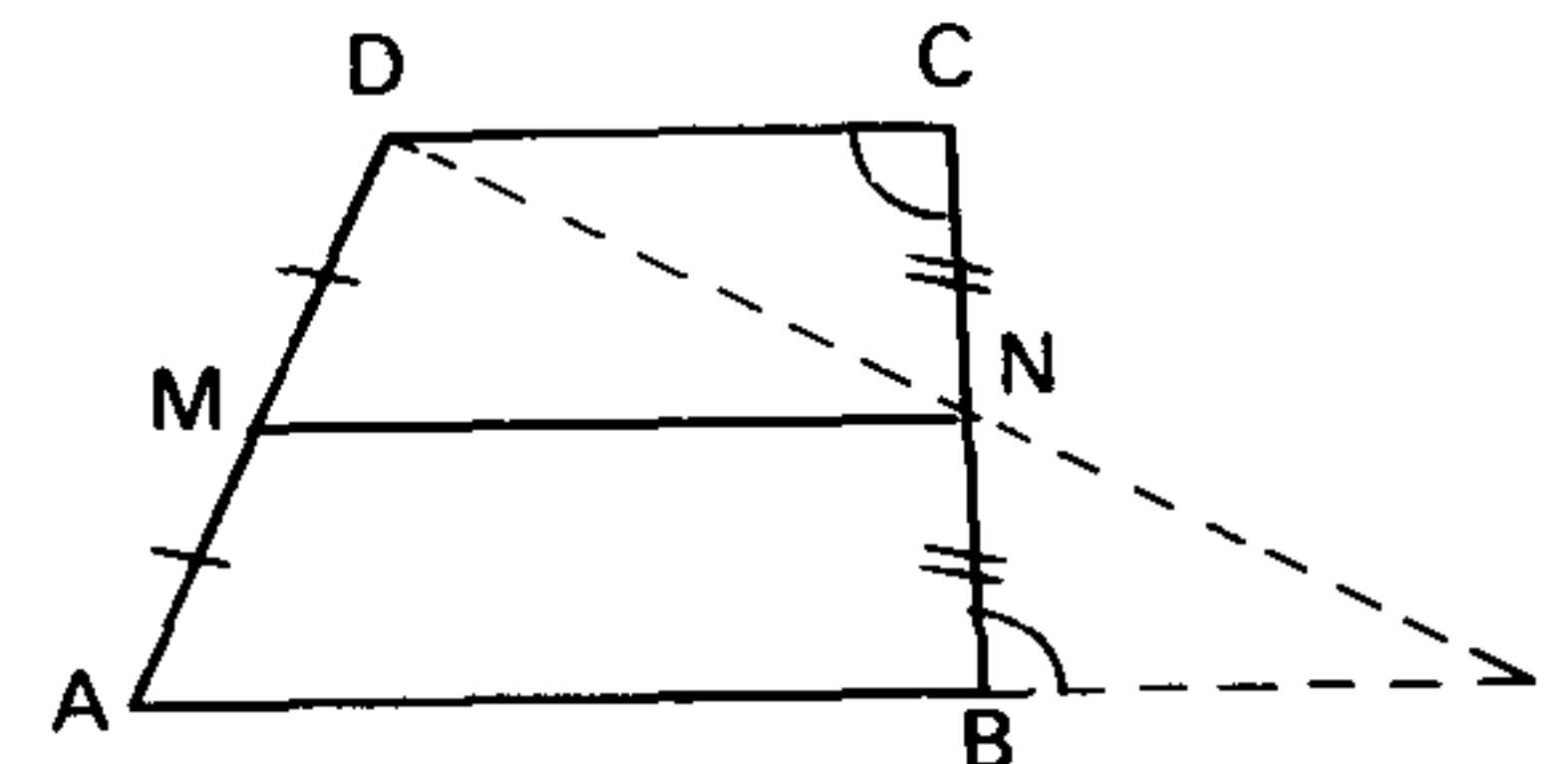
b) Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado, então esta extremidade é ponto médio deste lado.

Se $ABCD$ é um trapézio não paralelogramo,

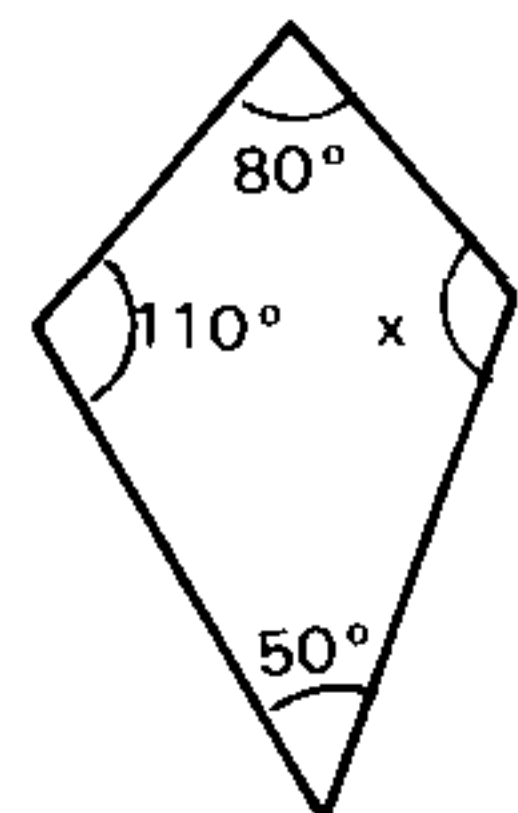
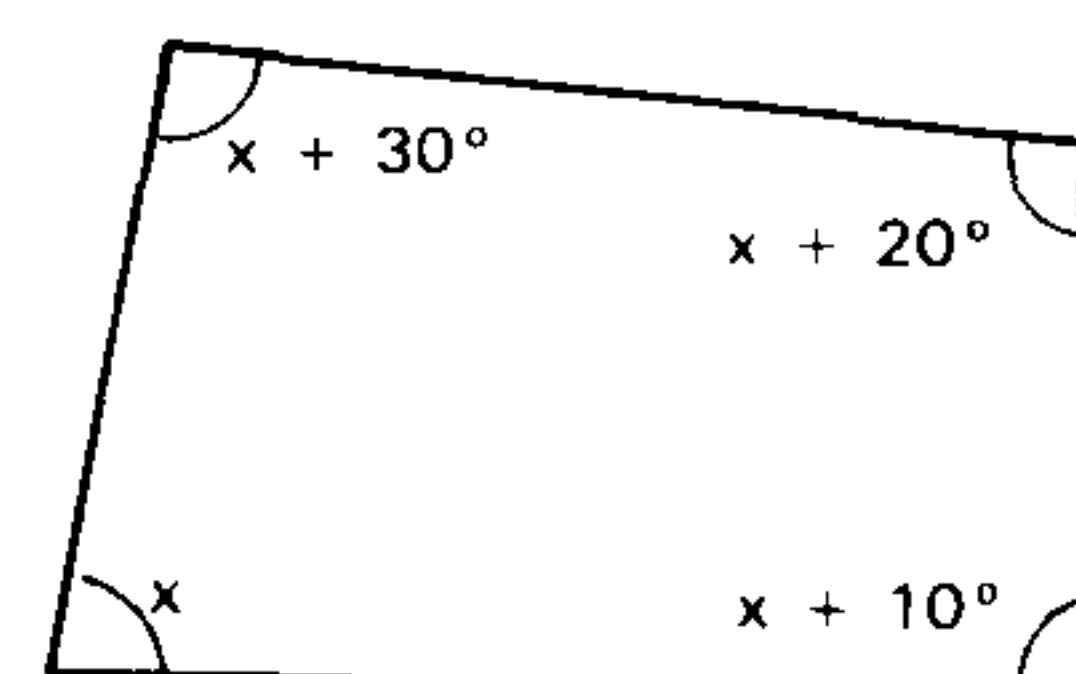
Hipótese	*Tese*
$(\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{AM} \equiv \overline{DM}, N \in \overline{BC}) \Rightarrow$	$\overline{BN} \equiv \overline{CN}$

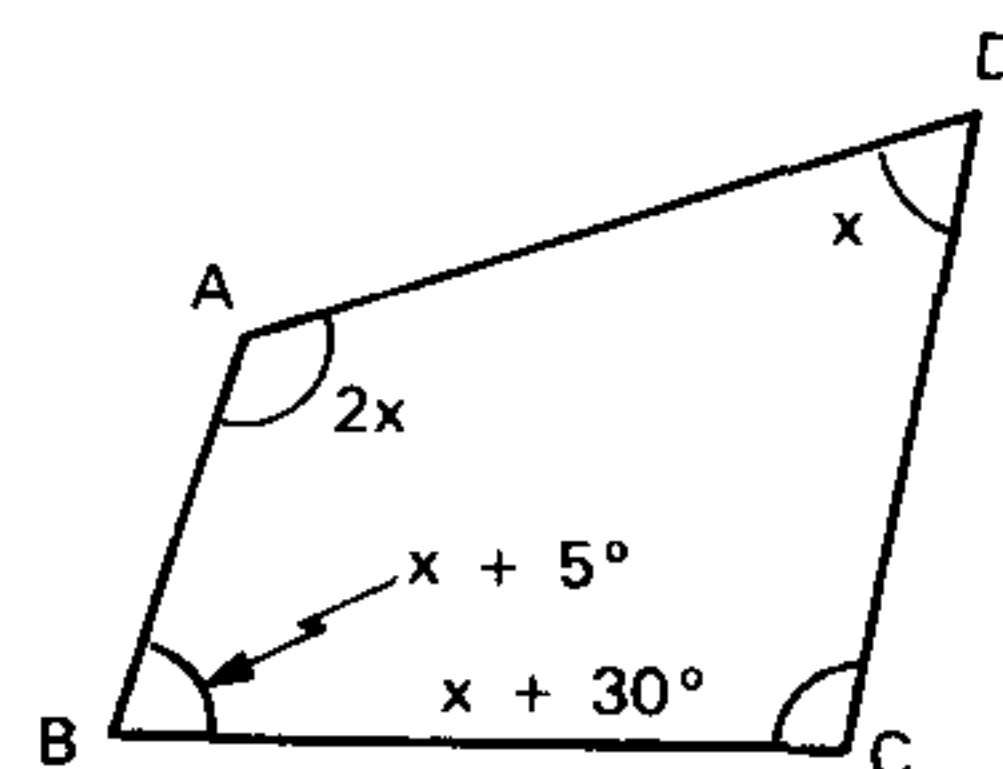
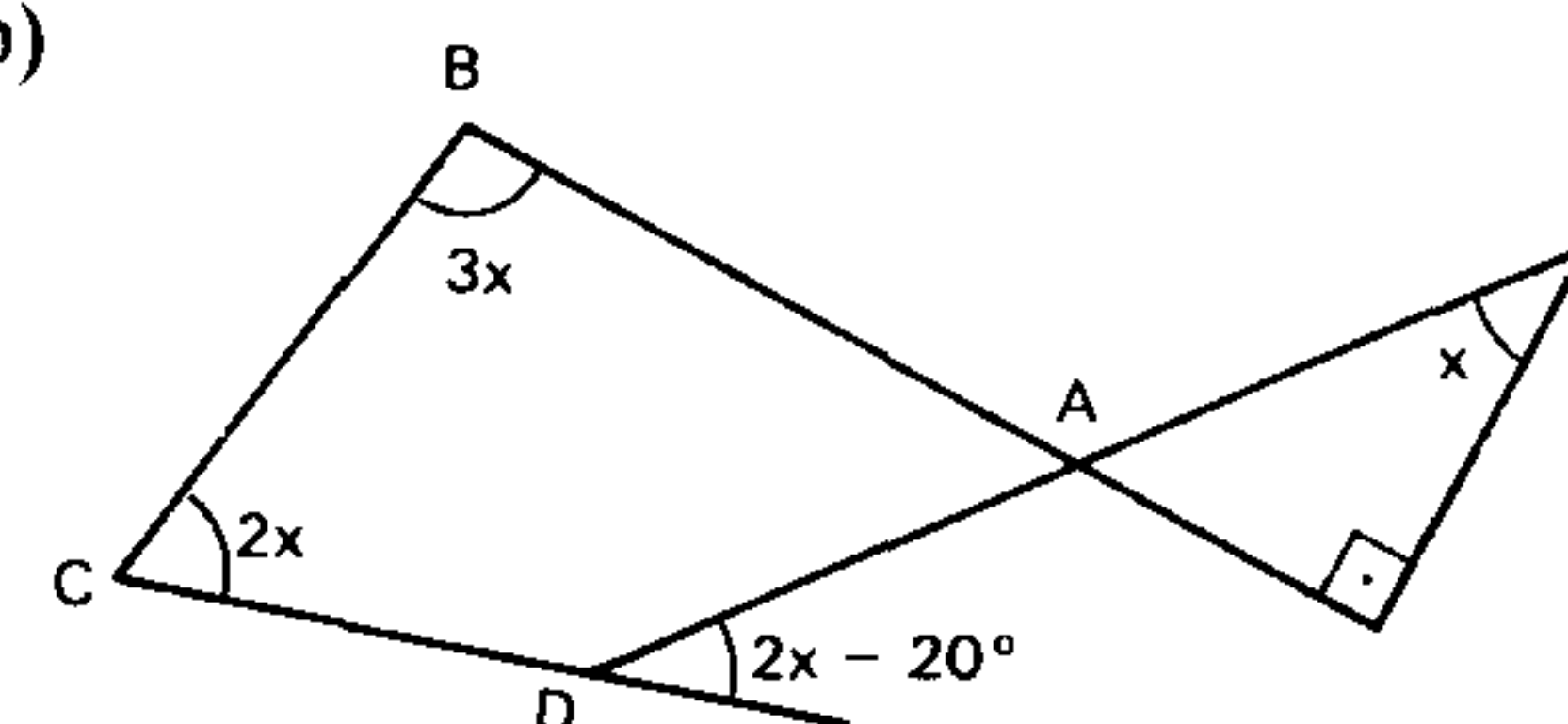
Demonstração

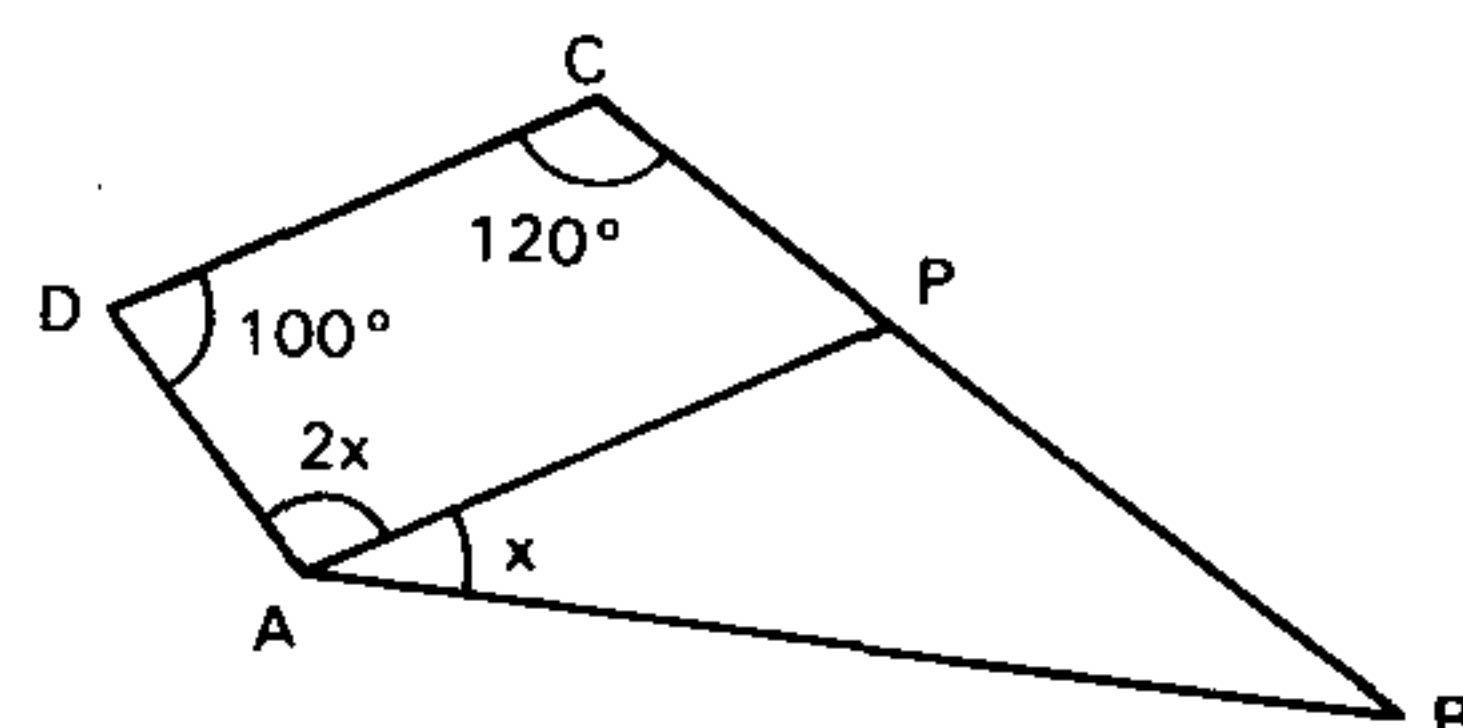
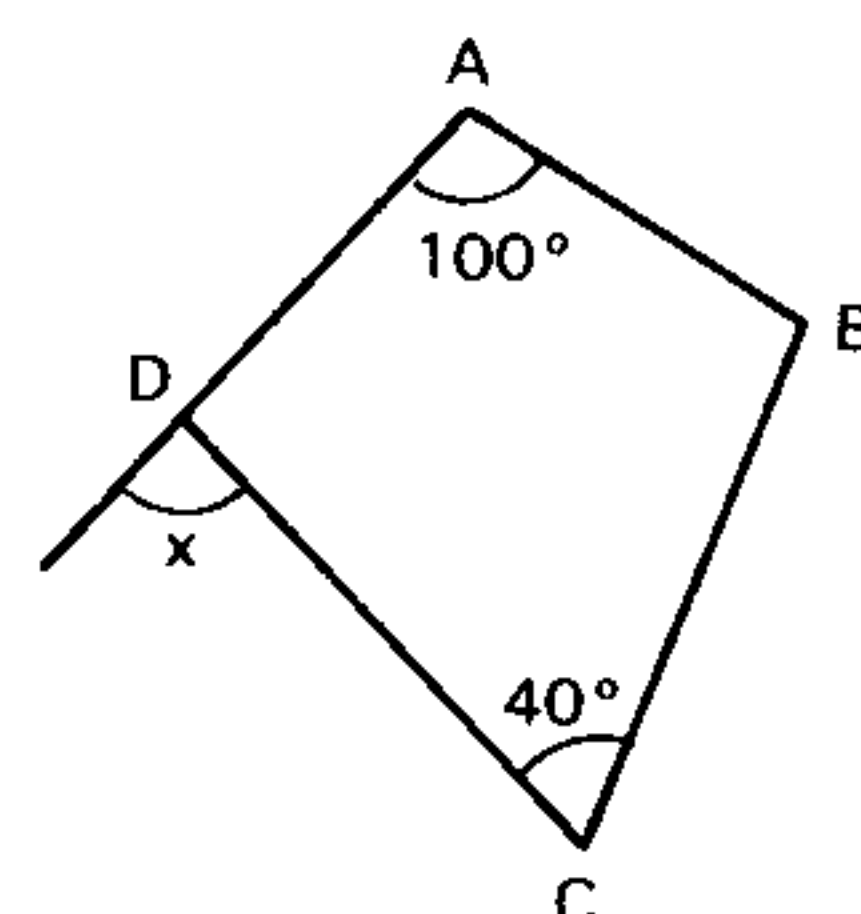
Seja N_1 o ponto médio de $\overline{BC}$. Pelo teorema anterior $\overleftrightarrow{MN_1} \parallel \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Como a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto M é única (postulado das paralelas, item 72), temos $\overleftrightarrow{MN_1} = \overleftrightarrow{MN}$. E como $\overleftrightarrow{MN_1}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ interceptam $\overline{BC}$ em N_1 e N, respectivamente, decorre que $N_1 = N$

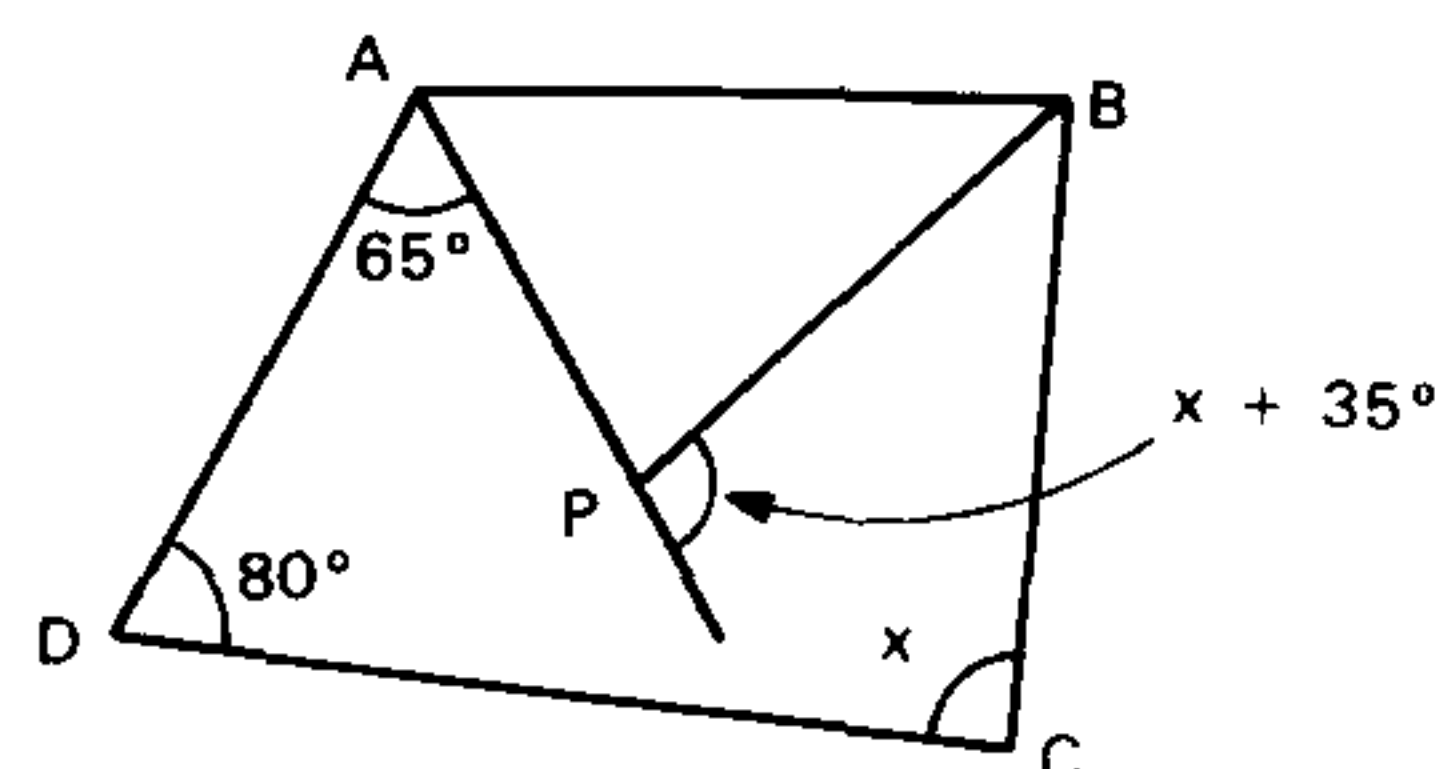
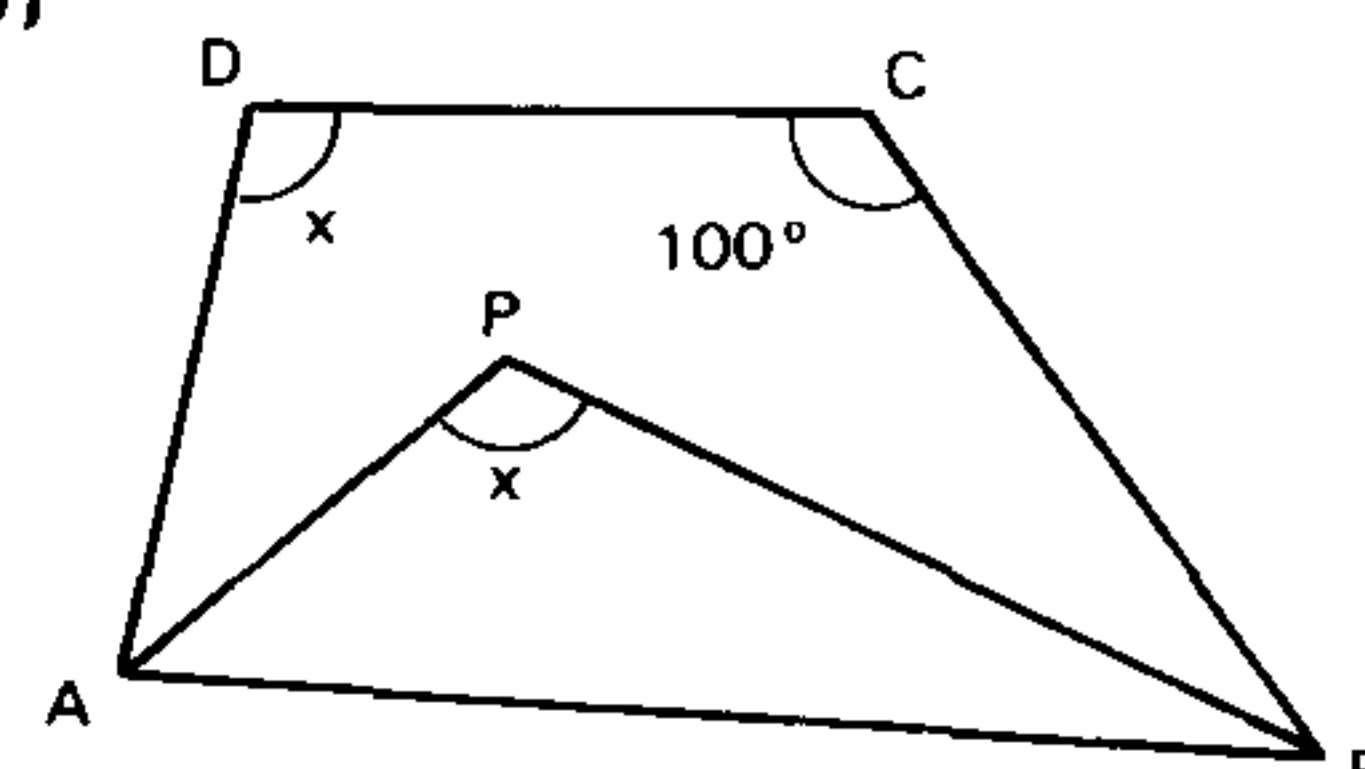
Logo, $\overline{BN} \equiv \overline{CN}$.

EXERCÍCIOS

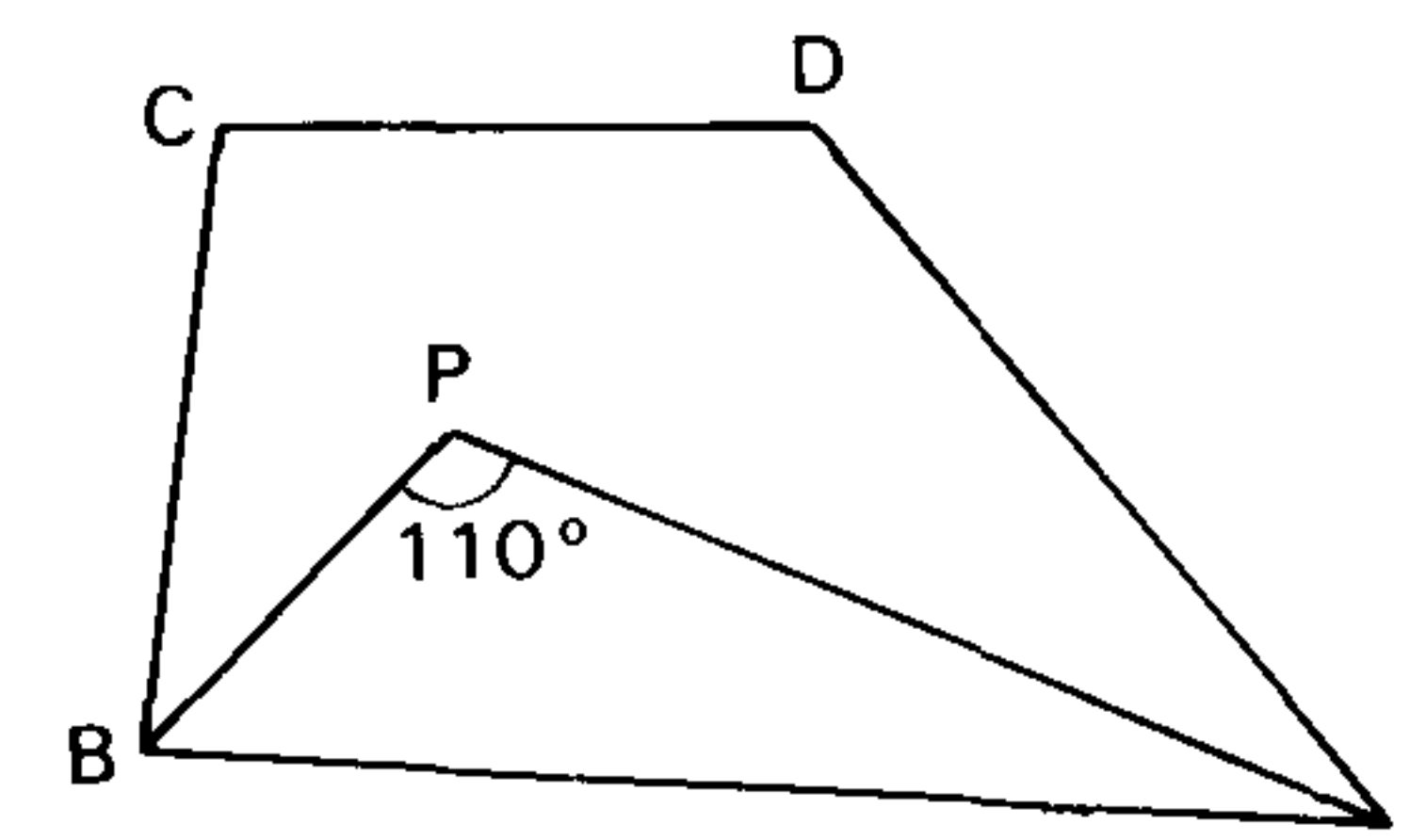
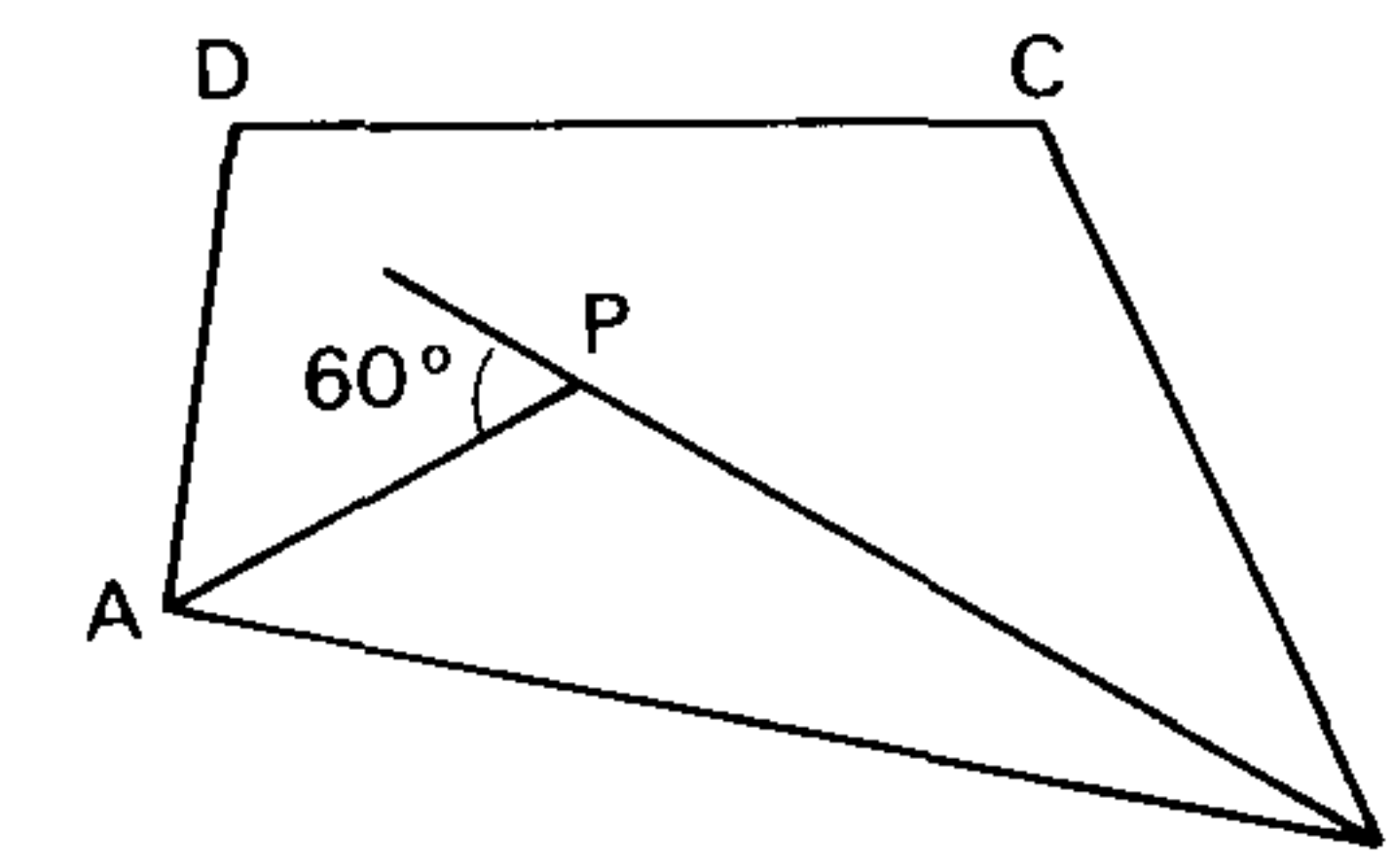
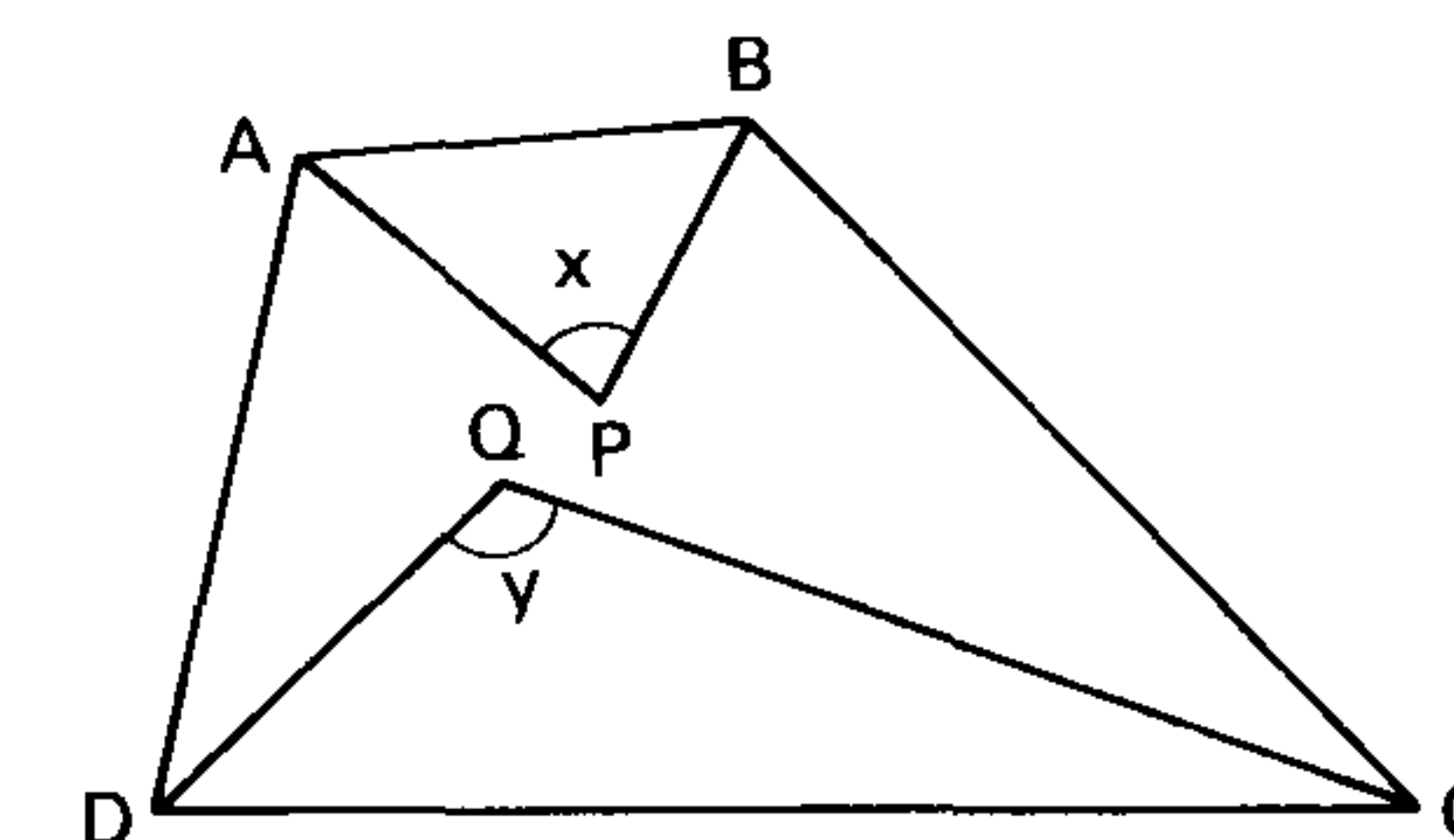
224. Determine o valor de x nos casos:

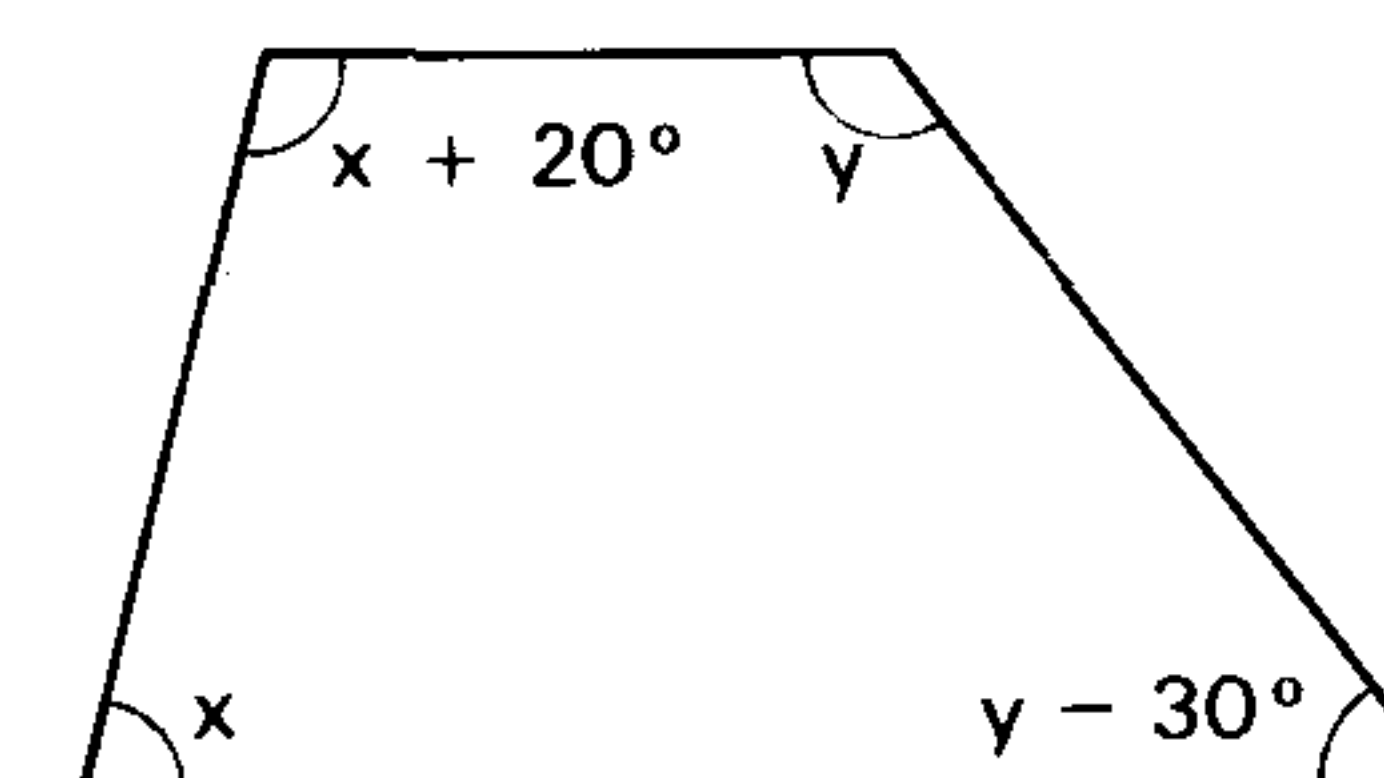
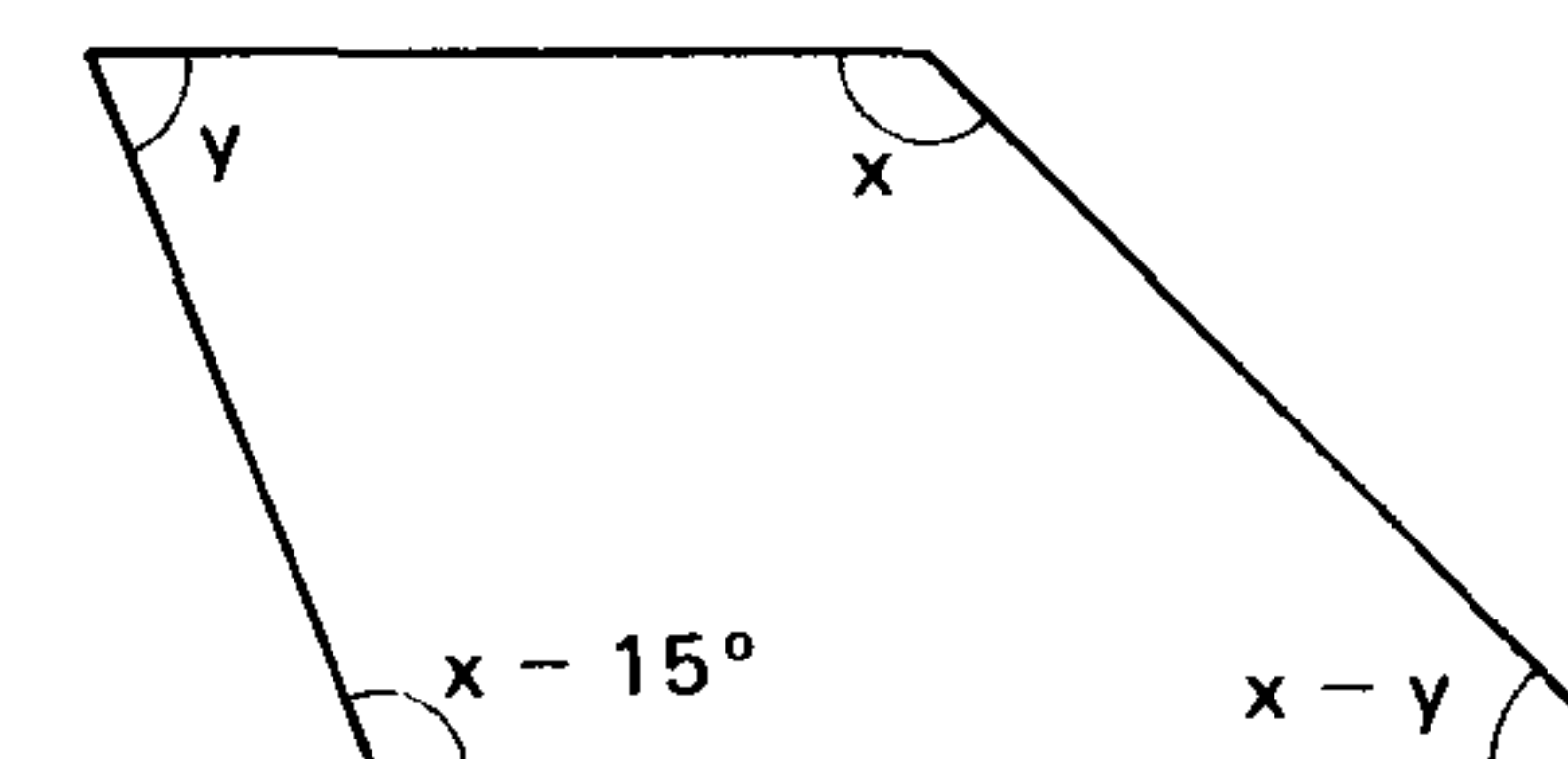
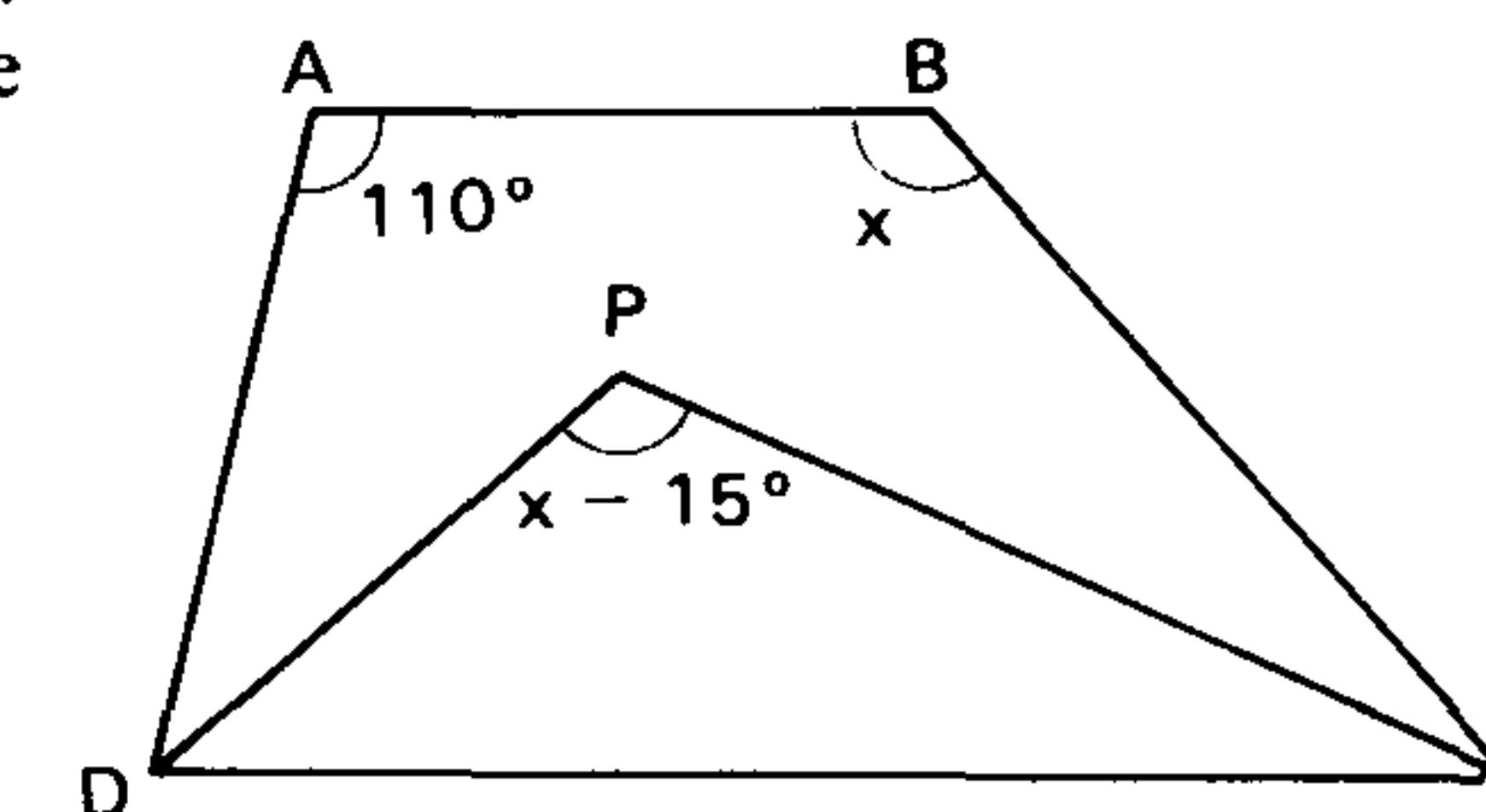
a)

b)

225. Determine os ângulos do quadrilátero $ABCD$ nos casos:

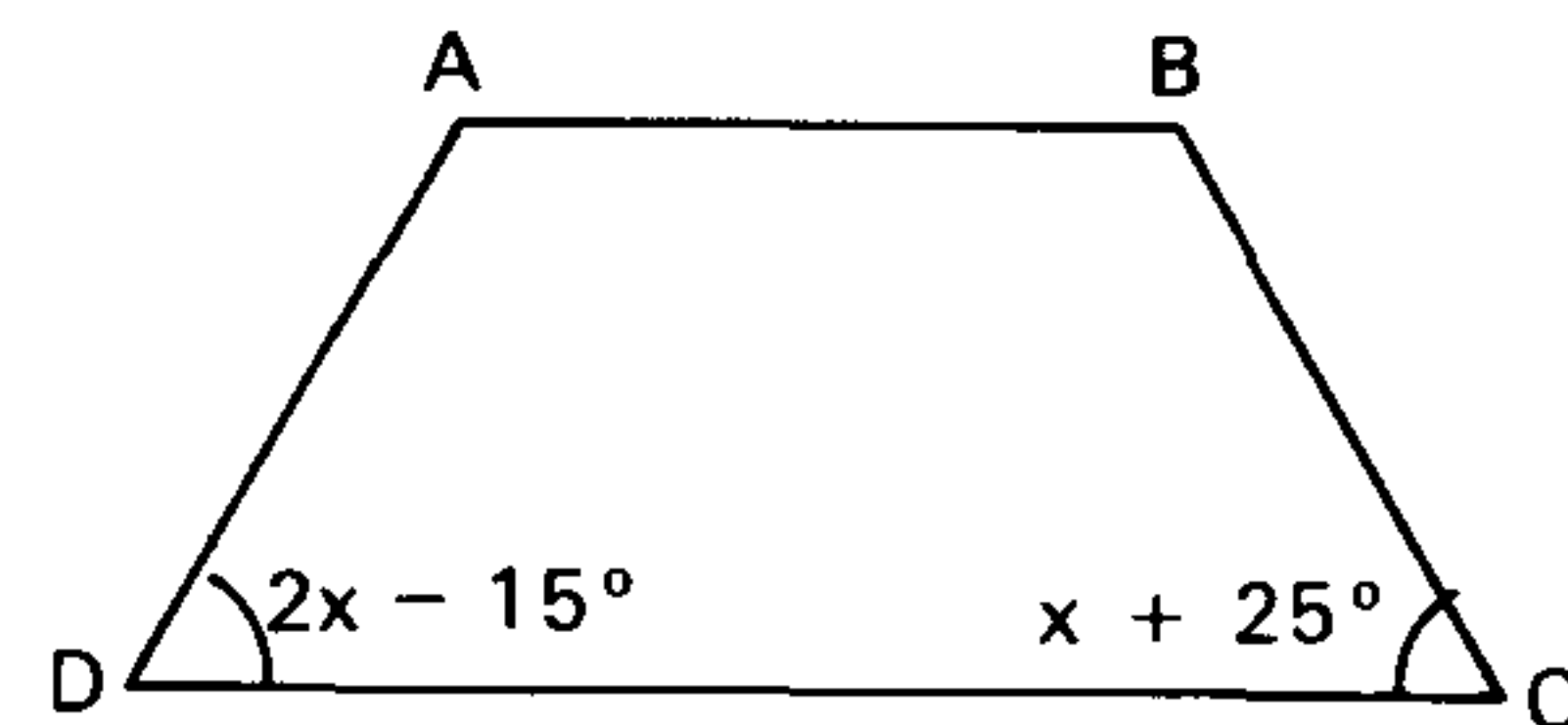
a)

b)

226. Determine o valor de x nos casos:

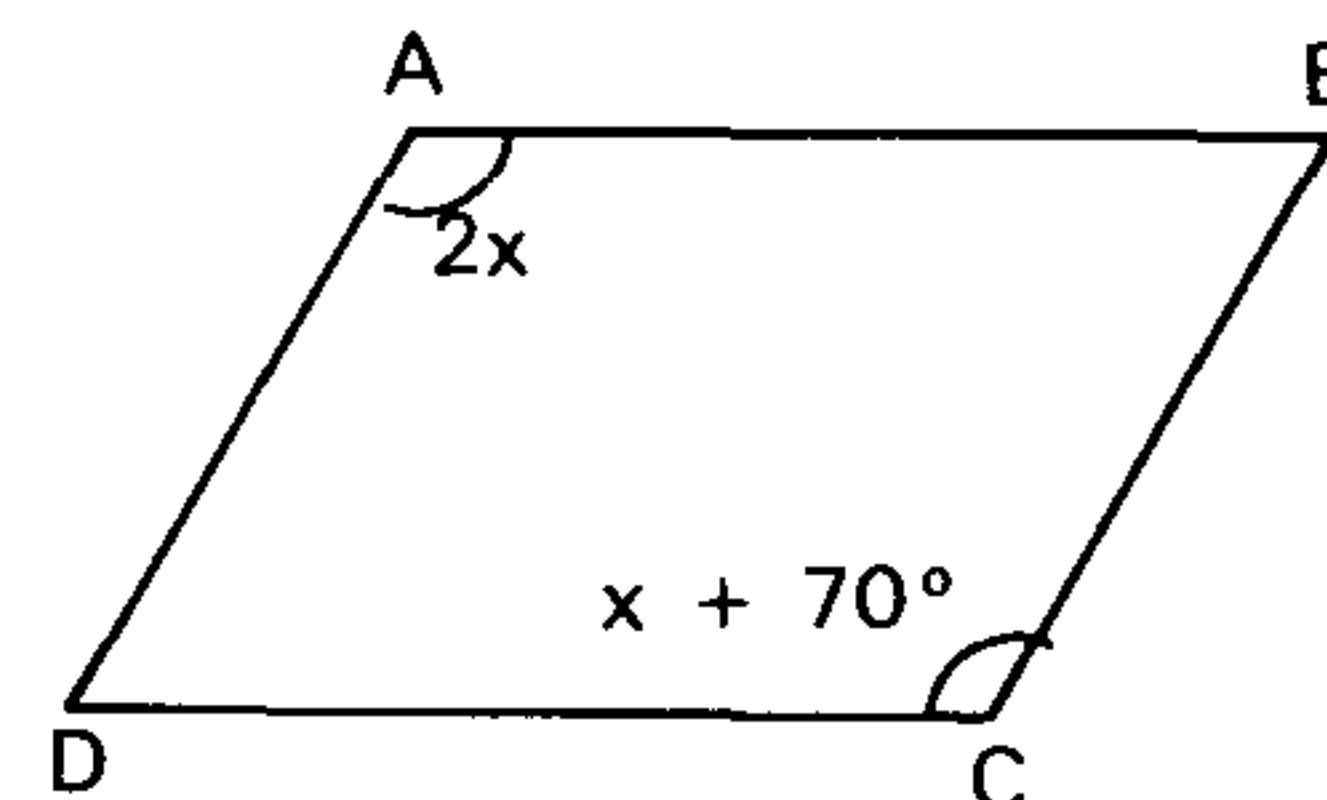
a) PA = PB

b) AB = AD e CB = CD

227. Se $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são bissetrizes, determine x nos casos:

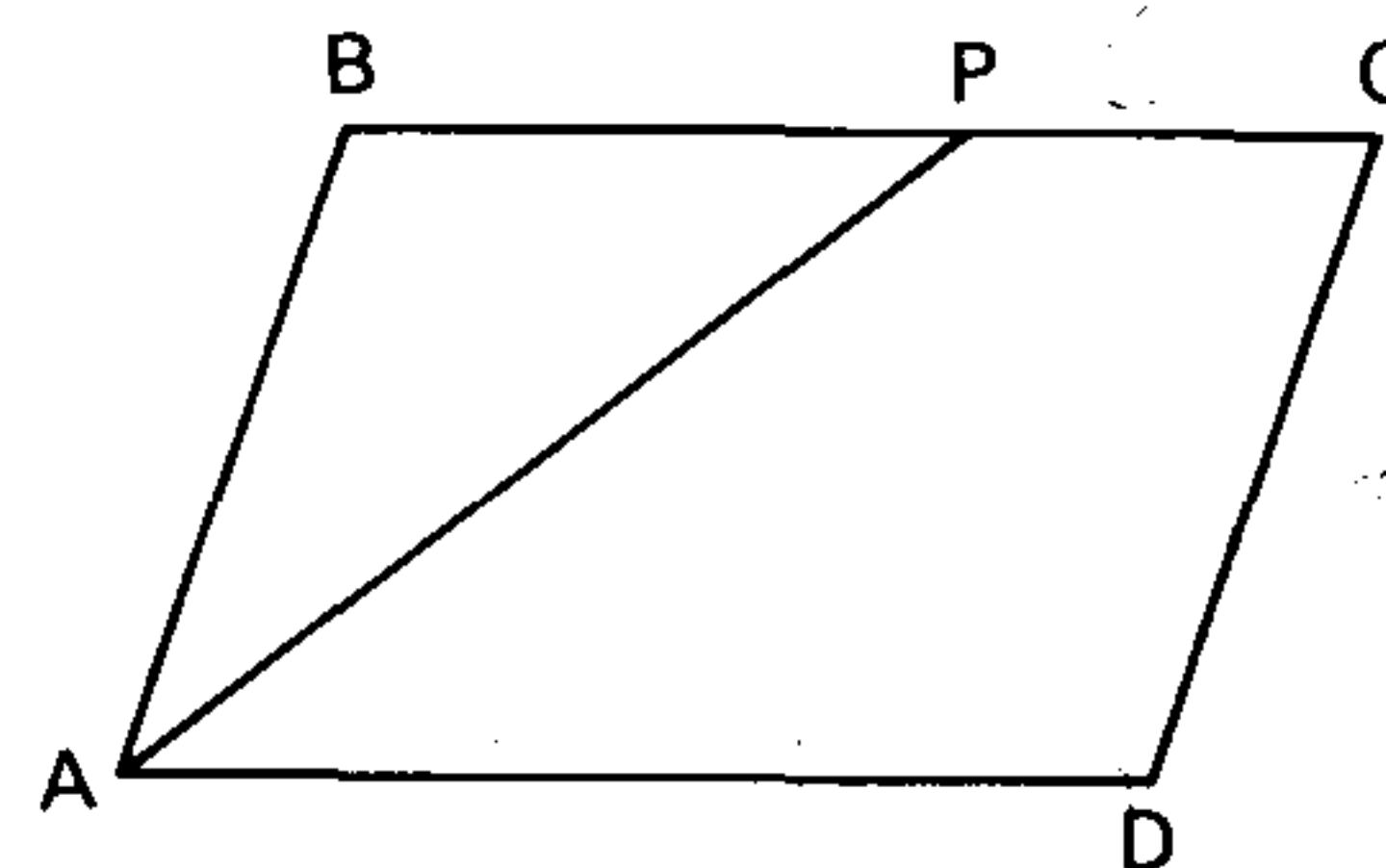
a)

b)

228. Se $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são bissetrizes, determine:

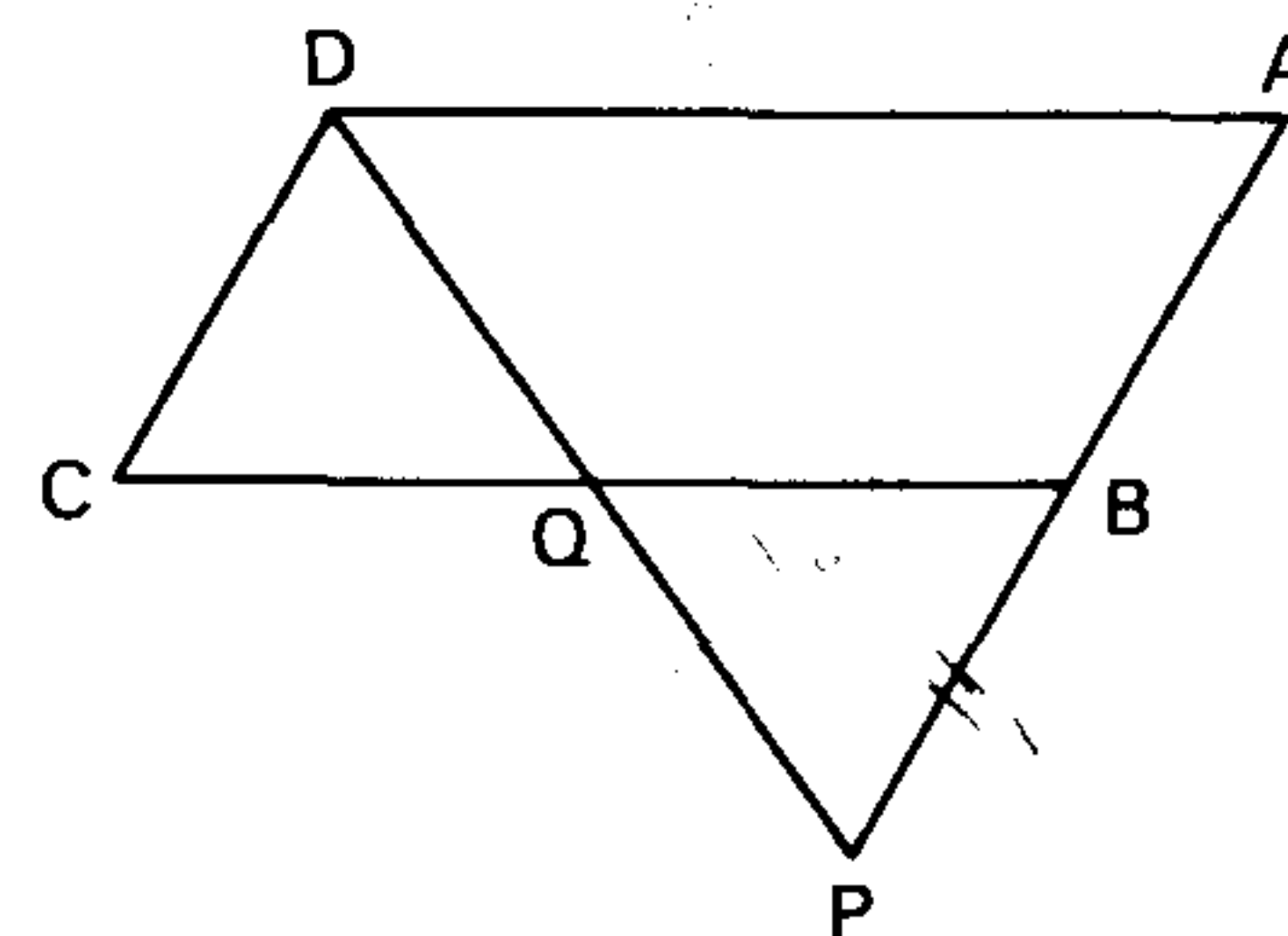
a) $\hat{C} + \hat{D}$

b) $\hat{C}$, que excede $\hat{D}$ em 10°

229. Se $\overline{BP}$, $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$ e $\overline{DQ}$ são bissetrizes, determine $x + y$.

230. Se $ABCD$ é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine x e y.

a)

b)

231. $ABCD$ é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Se $\overline{DP}$ e $\overline{CP}$ são bissetrizes, determine x e $B\hat{C}D$.

232. Se o trapézio $ABCD$ é isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine $\hat{A}$.

A B D C 2x − 15° x + 25°

233. Se $ABCD$ é um paralelogramo e $\hat{A} = 2x$ e $\hat{C} = x + 70°$, determine $\hat{B}$.

A B D C 2x x + 70°

234. Sendo $ABCD$ um paralelogramo, $\overline{AP}$ é bissetriz, $AB = 7\ cm$ e $PC = 3\ cm$, determine o perímetro do paralelogramo.

B P C A D

235. Se $ABCD$ é um paralelogramo, $AD = 20\ cm$, $BQ = 12\ cm$ e $BP = BQ$, determine o perímetro desse paralelogramo.

D A C Q B P

236. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todo retângulo é um paralelogramo.
b) Todo paralelogramo é retângulo.
c) Todo quadrado é retângulo.
d) Todo retângulo é quadrado.
e) Todo paralelogramo é losango.
f) Todo quadrado é losango.

237. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todo retângulo que tem dois lados congruentes é quadrado.
b) Todo paralelogramo que tem dois lados adjacentes congruentes é losango.
c) Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes, então ele é um retângulo.
d) Se dois ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

238. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
b) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
c) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.

239. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) As diagonais de um losango são congruentes.
b) As diagonais de um retângulo são perpendiculares.
c) As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos.
d) As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.
e) As diagonais de um quadrado são bissetrizes de seus ângulos e são perpendiculares.
f) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes de seus ângulos, então ele é um losango.
g) Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos dele.
h) Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então ele é um quadrado.
i) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes e congruentes, então ele é um quadrado.
j) Se uma diagonal de um quadrilátero é bissetriz dos dois ângulos, então ela é perpendicular a outra diagonal.

240. Calcule os lados de um retângulo cujo perímetro mede $40\ cm$, sabendo que a base excede a altura em $4\ cm$.

241. Determine a base e a altura de um retângulo, sabendo que o perímetro vale $288\ m$ e que a base excede em $4\ m$ o triplo da altura.

242. Calcule os lados de um paralelogramo, sabendo que o seu perímetro mede $84\ m$ e que a soma dos lados menores representa $\frac{2}{5}$ da soma dos lados maiores.

243. A soma de dois ângulos opostos de um paralelogramo é igual a $\frac{5}{13}$ da soma dos outros dois ângulos opostos. Determine-os.

244. Determine as medidas dos ângulos de um paralelogramo, sabendo que a diferença entre dois consecutivos é igual a $\frac{1}{9}$ da soma dos seus ângulos.

245. Prove que as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo cortam-se em ângulo reto.

246. Em um trapézio retângulo, a bissetriz de um ângulo reto forma com a bissetriz do ângulo agudo do trapézio um ângulo de $110°$. Determine o maior ângulo do trapézio.

247. A diagonal de um losango forma com um dos seus lados um ângulo igual à terça parte de um reto. Determine os quatro ângulos do losango.

248. A bissetriz de um ângulo obtuso do losango faz com um dos lados um ângulo de $55°$. Determine o valor dos ângulos agudos.

249. A base maior de um trapézio isósceles mede $12\ m$ e a base menor $8\ cm$. Calcule o comprimento dos lados não paralelos, sabendo que o perímetro é $40\ cm$.

250. Um dos ângulos internos de um trapézio isósceles é os $\frac{2}{7}$ do ângulo externo adjacente. Determine os quatro ângulos do trapézio.

251. A soma dos ângulos consecutivos de um trapézio é igual a $78°$ e sua diferença é $4°$. Determine o maior ângulo do trapézio.

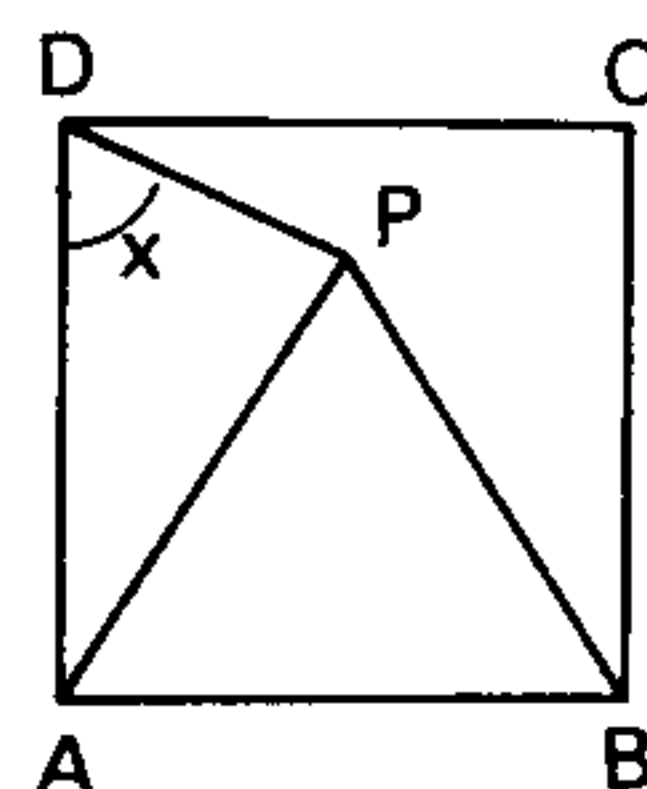
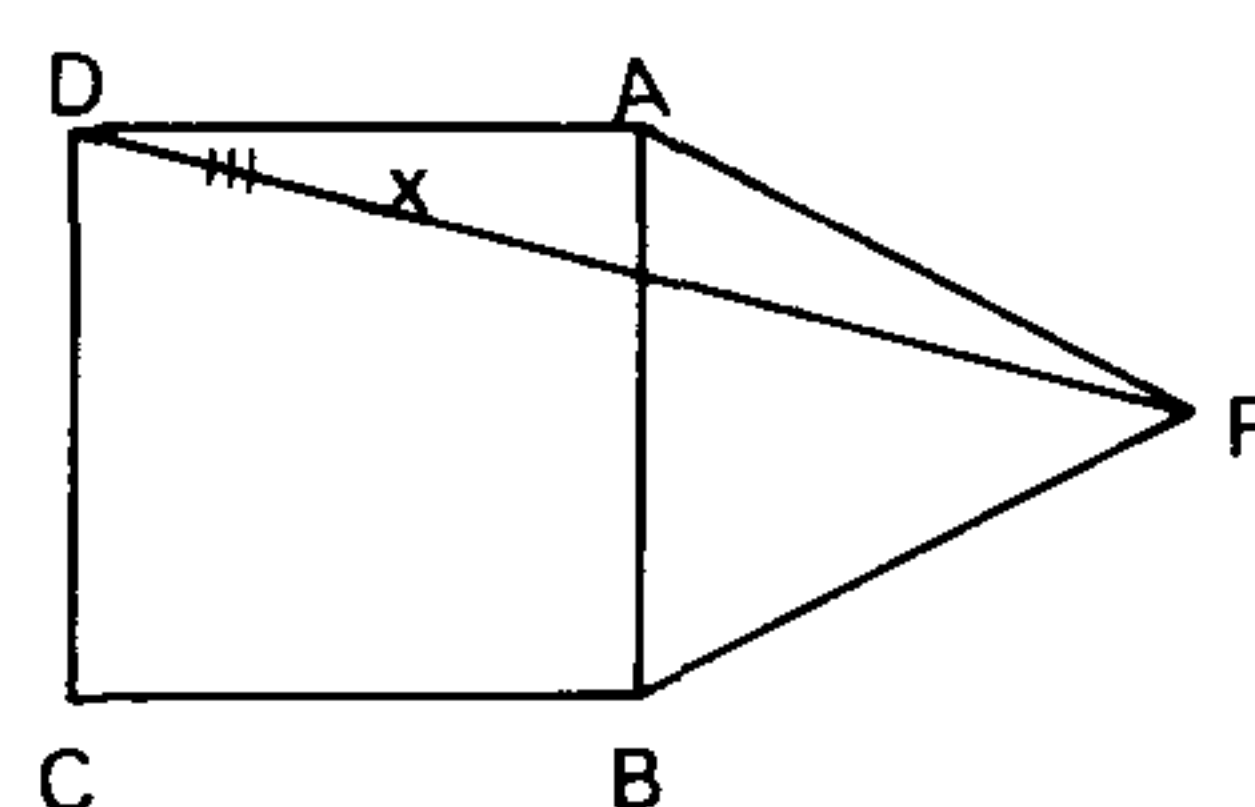
252. Determine as medidas dos ângulos formados pelas bissetrizes internas de um trapézio em que dois ângulos agudos consecutivos medem $80°$ e $60°$.

253. Com um arame de $36\ m$ de comprimento construímos um triângulo equilátero e com o mesmo arame construímos depois um quadrado. Determine a razão entre o lado do triângulo e o lado do quadrado.

254. Se $ABCD$ é quadrado e ABP é triângulo equilátero, determine x nos casos:

a)

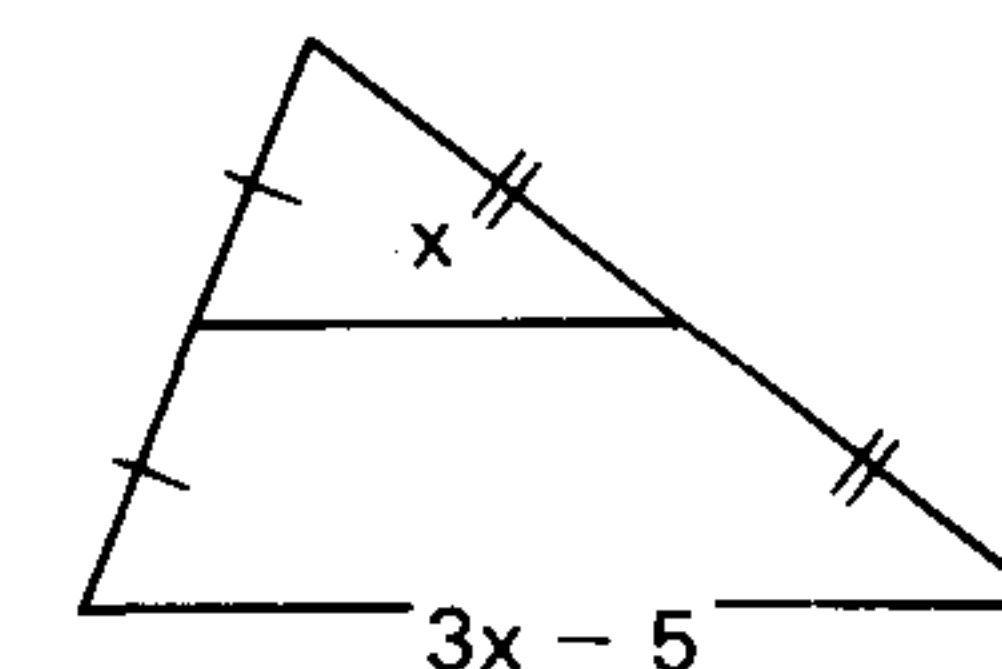
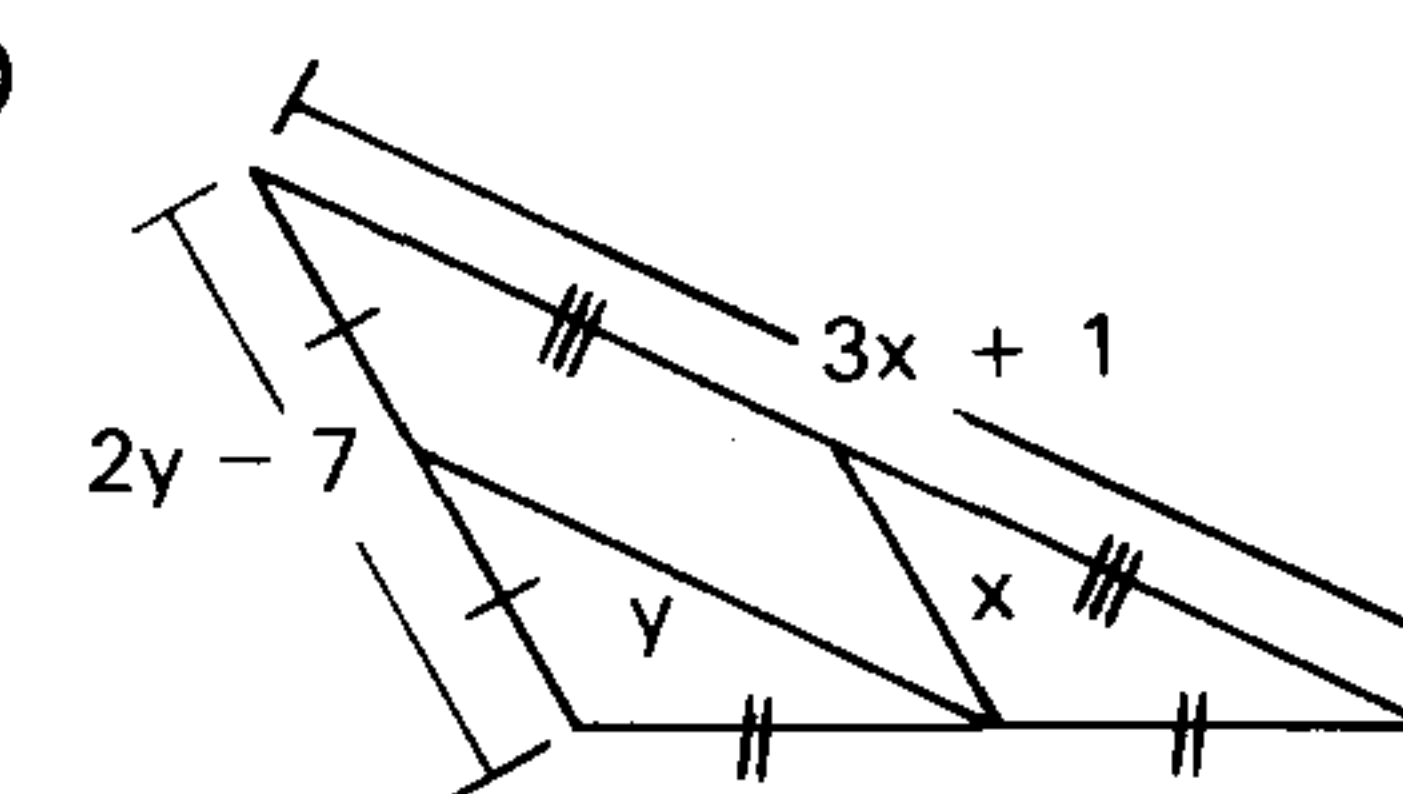
D C x P A B

b)

D A x P C B

255. Considerando congruentes os segmentos com "marcas iguais", determine os valores das incógnitas nos casos:

a)

x 3x − 5

b)

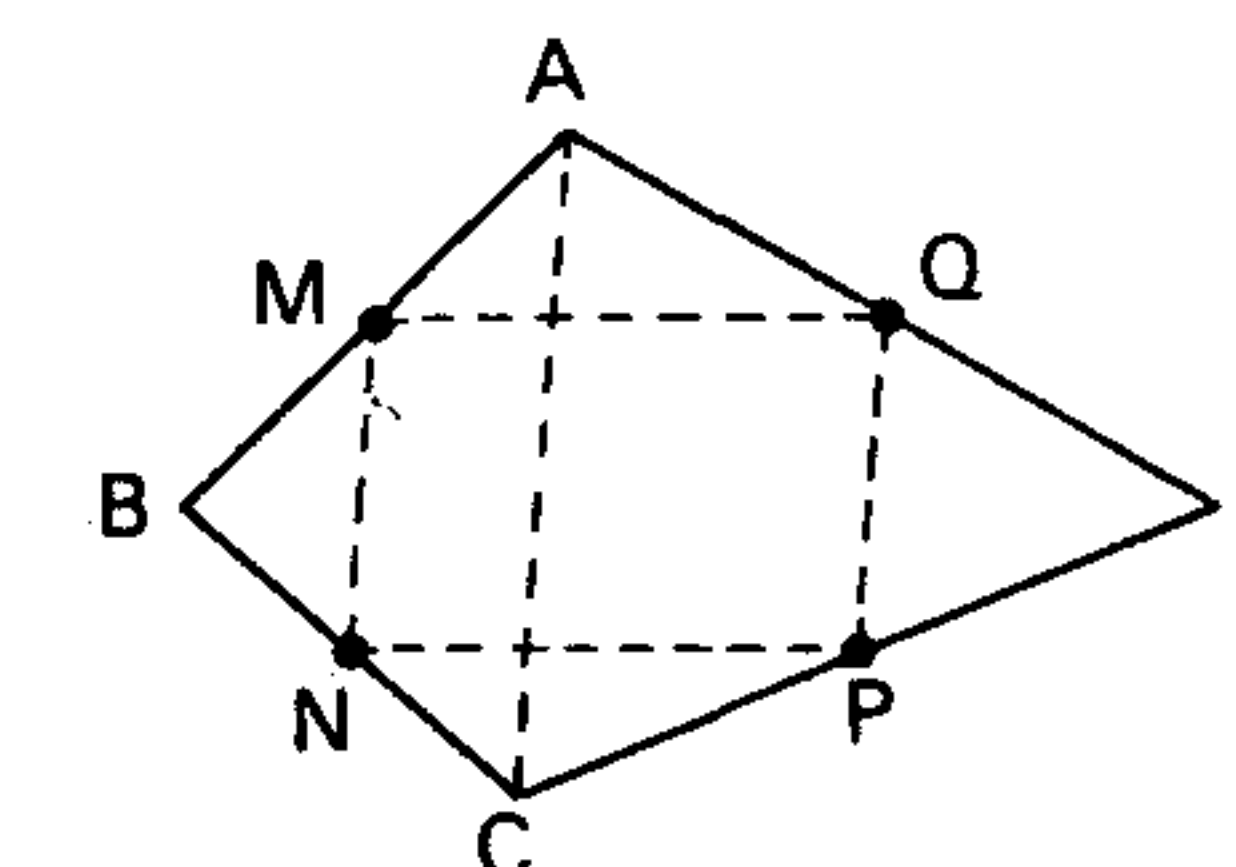
2y − 7 3x + 1 y x

256. No triângulo ABC de lados $AB = 9$, $BC = 14$ e $AC = 11$, os pontos D, E e F são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule o perímetro do triângulo DEF.

257. Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo $MN = 7\ cm$, $NR = 4\ cm$ e $MR = 8\ cm$, e M, N, R, pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

258. Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

Solução

Seja $ABCD$ um quadrilátero; M, N, P e Q os respectivos pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\ :\ \overline{MN} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{MN} = \dfrac{\overline{AC}}{2}\\ \triangle DAC\ :\ \overline{PQ} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AC}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{MN} \parallel \overline{PQ} \text{ e } \overline{MN} \equiv \overline{PQ} \Longrightarrow MNPQ \text{ é paralelogramo.}$$

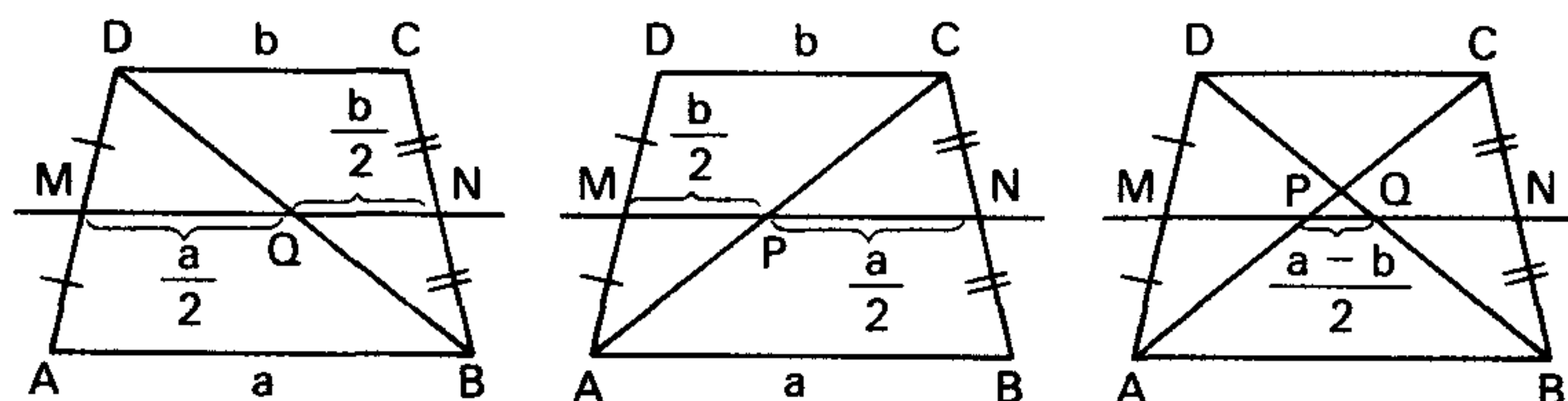
A M Q B D N P C

259. A que condições devem obedecer as diagonais de um quadrilátero convexo para que os pontos médios de seus lados sejam vértices de um losango? E de um retângulo?

260. A que condições devem obedecer as diagonais de um quadrilátero convexo para que os pontos médios de seus lados sejam vértices de um quadrado?

261. Seja $ABCD$ um trapézio de base maior $\overline{AB}$ e base menor $\overline{CD}$. Sejam M o ponto médio do lado $\overline{AD}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$. Os pontos P e Q são os pontos de interseção de $\overline{MN}$ com as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Dados $AB = a$ e $CD = b$, calcule MN, MP, MQ, NP, NQ e PQ.

Solução

É uma aplicação dos itens 113 e 114 da teoria.
Sendo $\overline{MN}$ base média do trapézio, $\overline{MN}$ é paralela às bases e daí os pontos P e Q são os respectivos pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Usando a base média de triângulo e de trapézio, temos:

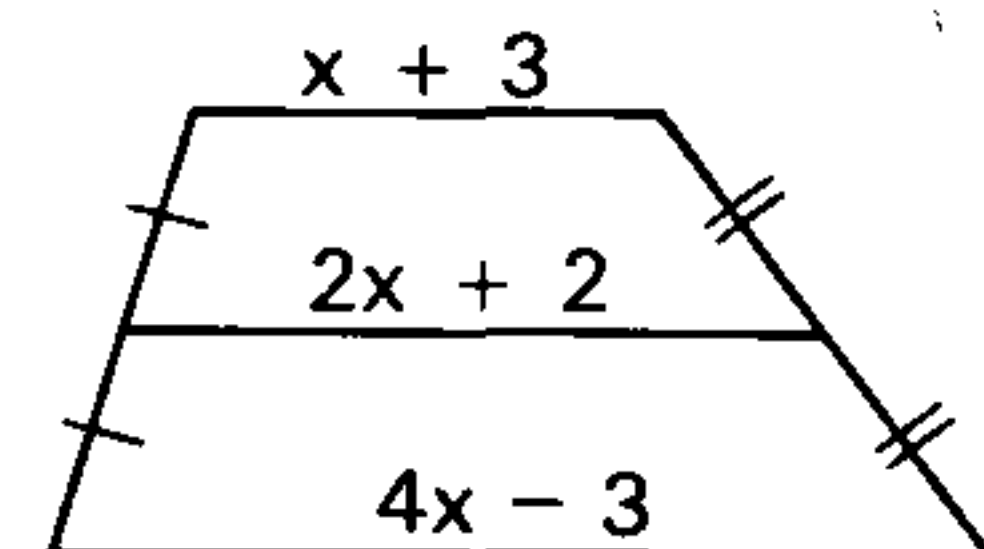
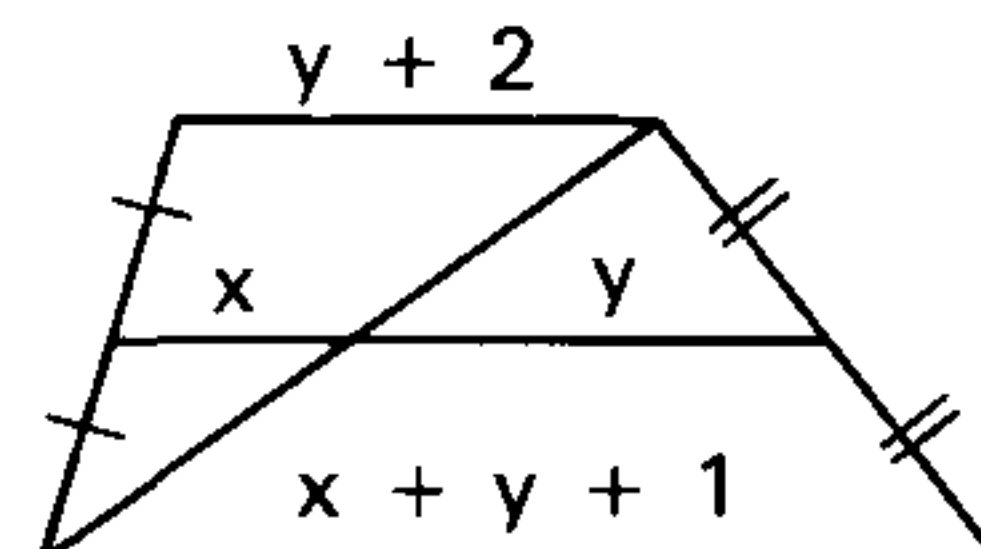
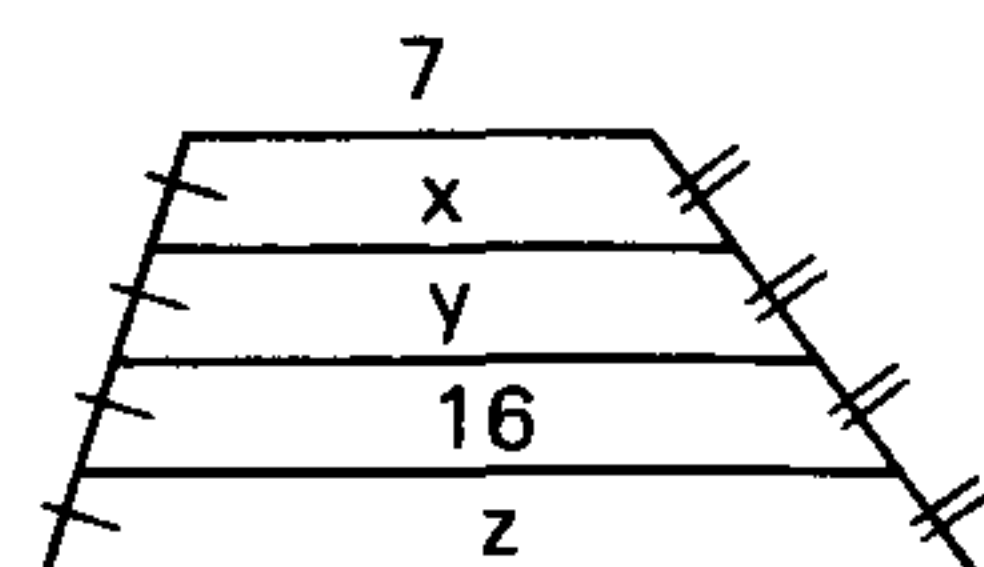
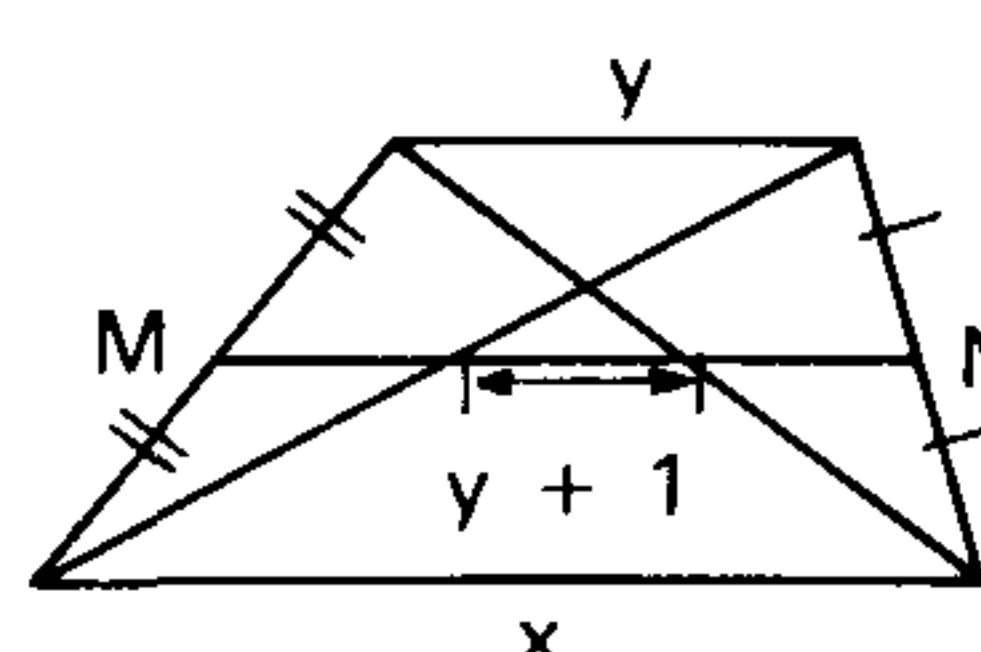
$MN = \frac{a + b}{2}$; $MP = \frac{b}{2}$; $MQ = \frac{a}{2}$; $NP = \frac{a}{2}$; $NQ = \frac{b}{2}$ e

$PQ = MQ - MP \implies PQ = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \implies PQ = \frac{a - b}{2}$

262. A base média de um trapézio vale *20 cm* e a base maior é os $\frac{3}{2}$ da base menor. Determine as bases.

263. Em um trapézio são dadas as bases $\overline{AB} = 20\ cm$ e $\overline{CD} = 12\ cm$. Considere os pontos P e Q médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e, depois, os pontos R e S médios dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Calcule os segmentos PR, RQ, RS.

264. Considerando que os segmentos com "marcas iguais" são congruentes, determine os valores das incógnitas nos casos:

a) trapézio

b) trapézio

c) trapézio

d) trapézio ($MN = x - 2y + 5$)

265. Num trapézio retângulo em que o ângulo agudo mede $45°$, a altura é igual à diferença das bases.

266. Prove que a altura de um trapézio retângulo que tem o ângulo agudo medindo $30°$ é igual à metade do lado não perpendicular às bases.

267. Prove que as bissetrizes dos ângulos obtusos de um paralelogramo são paralelas.

268. Prove que as bissetrizes dos ângulos formados pelas diagonais de um retângulo são paralelas aos lados do retângulo.

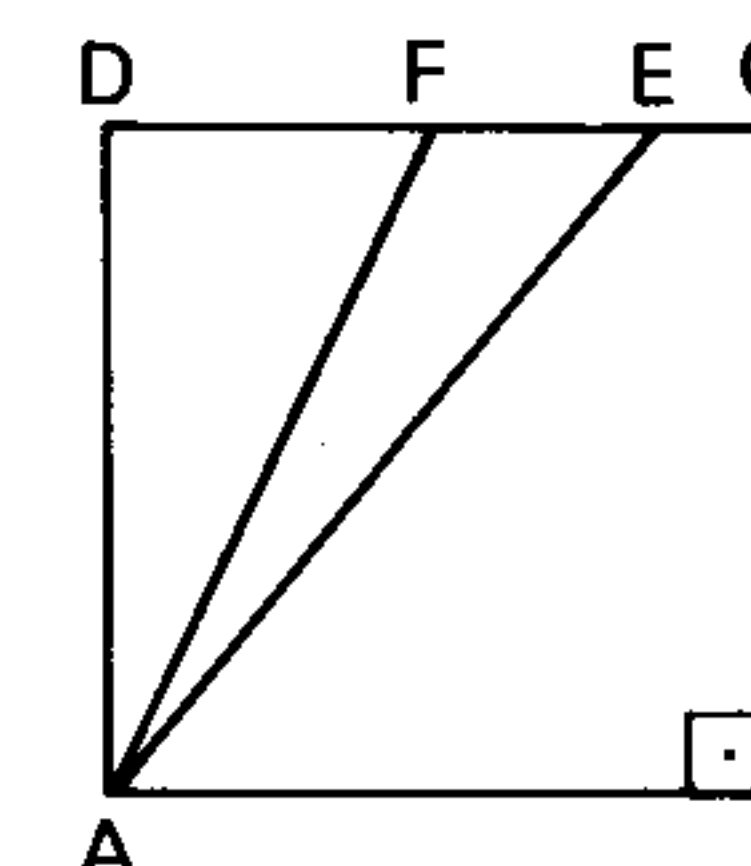
269. Num trapézio isósceles $ABCD$, a base menor $\overline{AB}$ é congruente aos lados não paralelos. Prove que as diagonais são bissetrizes dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ do trapézio.

270. Num paralelogramo $ABCD$ traçamos sua diagonal $\overline{AC}$. Pelos vértices B e D traçamos dois segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{DQ}$ perpendiculares à diagonal $\overline{AC}$, com P e Q pertencentes a $\overline{AC}$. Prove que $\overline{BP}$ é congruente a $\overline{DQ}$.

271. Pelo ponto médio M da base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles ABC traçamos os segmentos $\overline{MP}$ e $\overline{MQ}$ respectivamente paralelos aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo. Prove que $APMQ$ é um losango.

272. Consideremos um quadrilátero convexo com dois ângulos opostos retos. Prove que as bissetrizes dos outros dois ângulos internos do quadrilátero são semi-retas paralelas entre si.

273. Na figura, $ABCD$ é um quadrado, onde $\overline{BC} + \overline{CE} = \overline{AE}$. Sendo F o ponto médio de $\overline{DC}$, prove que, $B\hat{A}E = 2F\hat{A}D$.

CAPÍTULO VIII

Pontos Notáveis do Triângulo

I. Baricentro — Medianas

115. **As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.**

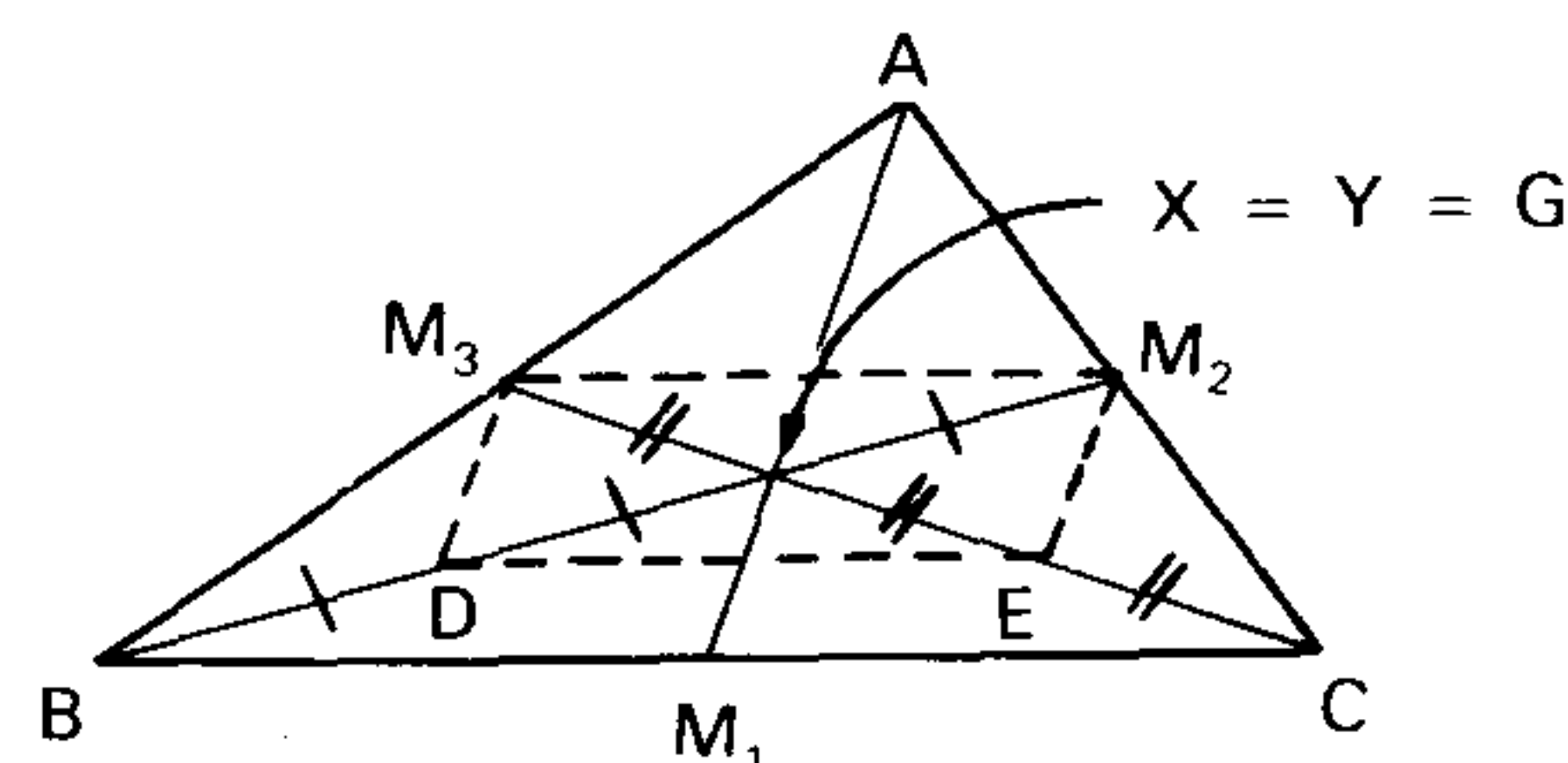
Hipótese — *Tese*

$\overline{AM_1}, \overline{BM_2}, \overline{CM_3}$ são medianas $\Longrightarrow \begin{cases} 1)\ \overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\} \\ 2)\ \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1},\ \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2},\ \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3} \end{cases}$

Demonstração

Seja X o ponto tal que:

$$\overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{X\}$$

A, X = Y = G, M_3, M_2, D, E, B, M_1, C

Considerando os pontos médios D e E de $\overline{BX}$ e $\overline{CX}$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l} (\Delta ABC,\ \overline{AM_3} \equiv \overline{BM_3},\ \overline{AM_2} \equiv \overline{CM_2}) \Longrightarrow \overline{M_2M_3} \mathbin{/\!/} \overline{BC} \text{ e } \overline{M_2M_3} = \dfrac{\overline{BC}}{2} \\ (\Delta XBC,\ \overline{XD} \equiv \overline{BD} \text{ e } \overline{XE} \equiv \overline{CE}) \Longrightarrow \overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC} \text{ e } \overline{DE} = \dfrac{\overline{BC}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{M_2M_3} \mathbin{/\!/} \overline{DE} \text{ e } \overline{M_2M_3} \equiv \overline{DE} \Longrightarrow M_2M_3DE \text{ é paralelogramo} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overline{DX} \equiv \overline{XM_2} \Longrightarrow \overline{BX} = 2 \cdot \overline{XM_2} & (1) \\ \overline{EX} \equiv \overline{XM_3} \Longrightarrow \overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3} & (2) \end{cases}$$

Logo, a mediana $\overline{BM_2}$ intercepta a mediana $\overline{CM_3}$ num ponto X tal que:

$$\overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}$$

Tomando-se as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{CM_3}$ e sendo Y o ponto tal que:

$$\overline{AM_1} \cap \overline{CM_3} = \{Y\},$$

de modo análogo concluímos que:

$$\overline{CY} = 2 \cdot \overline{YM_3} \quad (3) \qquad \text{e} \qquad \overline{AY} = 2 \cdot \overline{YM_1} \quad (4)$$

De (2) e (3), decorre que $X = Y$.

Chamando este ponto $X = Y$ de G e considerando (1), (2) e (4), temos:

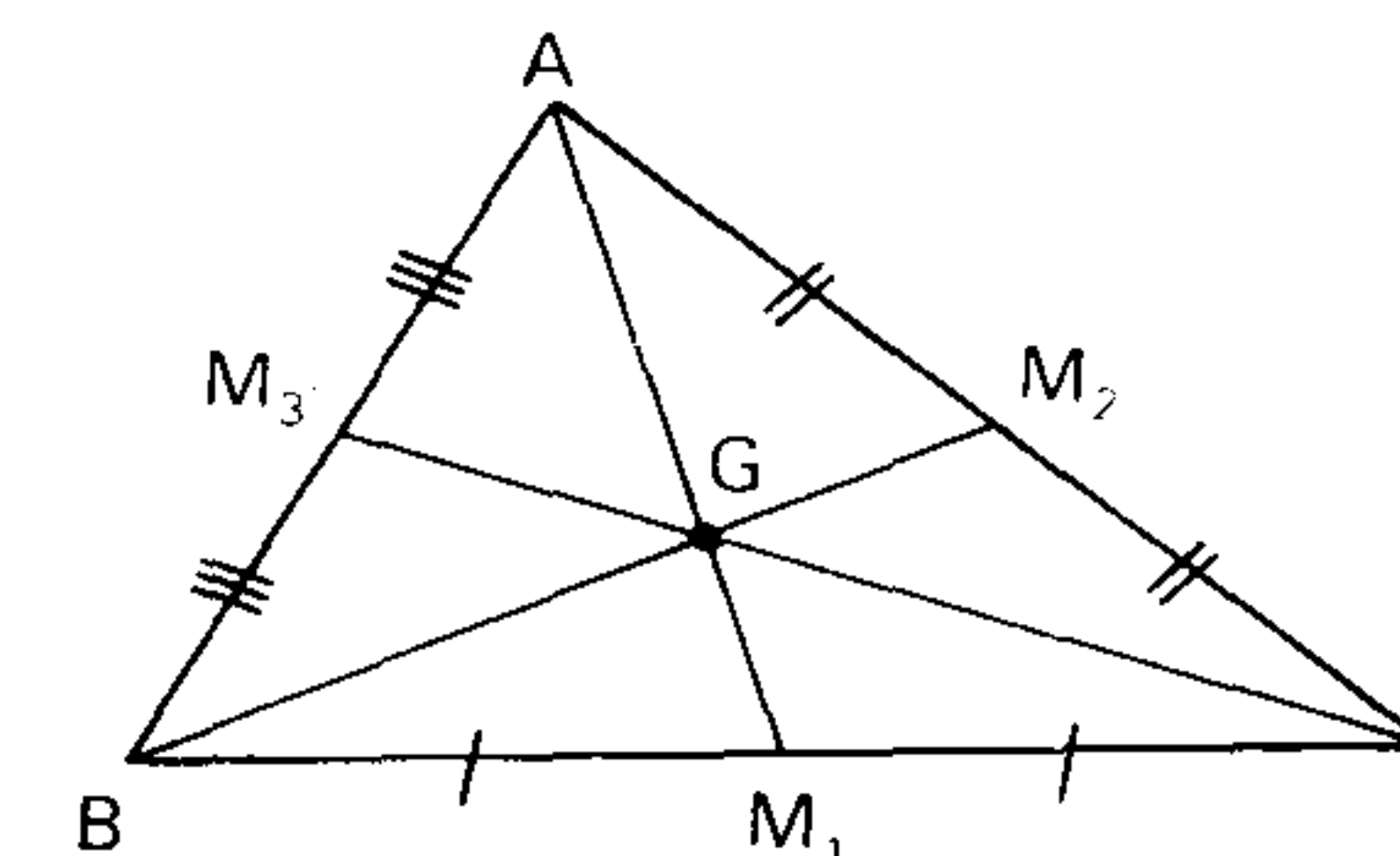
$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\} \text{ e}$$

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \quad \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \quad \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

116. *Baricentro — definição*

O ponto de interseção (ou ponto de encontro, ou ponto de concurso) das três medianas de um triângulo é o *baricentro* do triângulo.

G é o baricentro do ΔABC.

A, M_3, M_2, G, B, M_1, C

$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\}$$

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \ \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \ \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_1}, \ \overline{BG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BM_2}, \ \overline{CG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CM_3}$$

$$\overline{GM_1} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM_1}, \ \overline{GM_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BM_2}, \ \overline{GM_3} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CM_3}$$

Nota: O baricentro é o centro de gravidade do triângulo.

II. Incentro — Bissetrizes internas

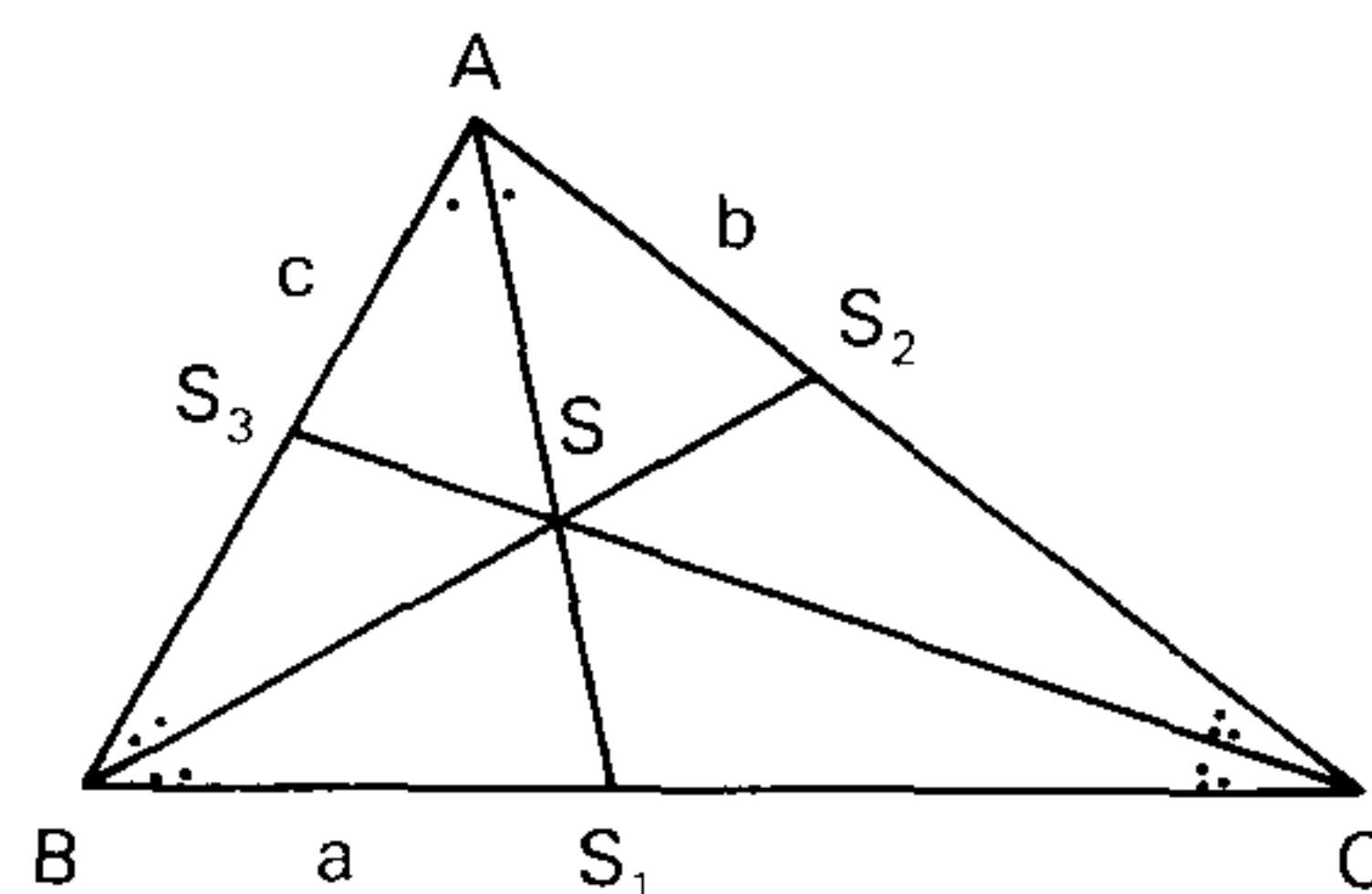
117. **As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.**

Sendo o ΔABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, e $\overline{AB} = c$,

Hipótese		*Tese*
$\overline{AS_1}, \overline{BS_2}, \overline{CS_3}$ são bissetrizes internas	$\Rightarrow$	1) $\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$ 2) $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$

Demonstração

Seja S o ponto tal que:

$$\overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$$

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} S \in \overline{BS_2} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,c} \\ S \in \overline{CS_3} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,b} \end{array}\right\} \Rightarrow d_{S,b} = d_{S,c} \Rightarrow S \in \overline{AS_1}.$$

Logo,

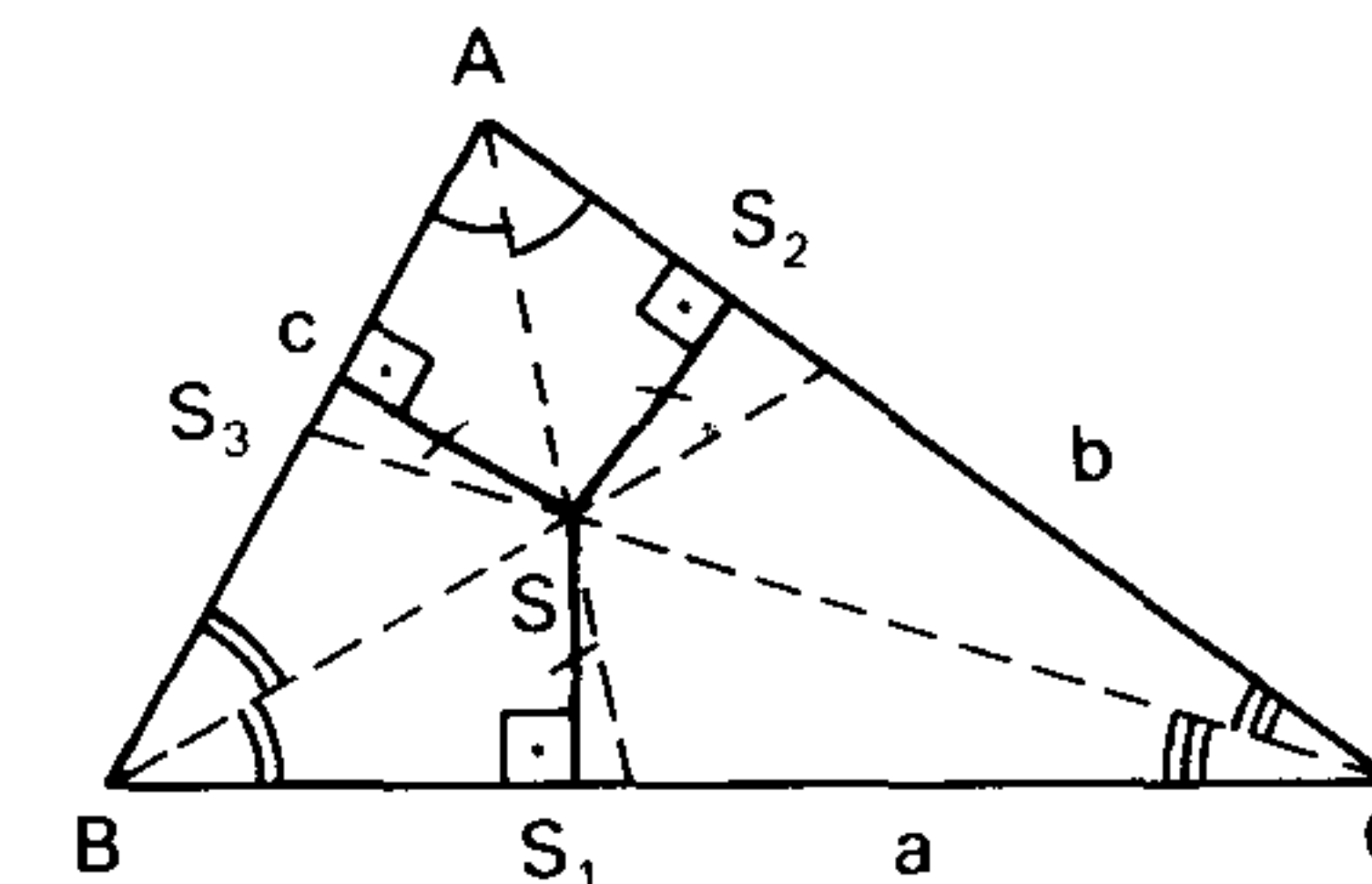
1º) $\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$ e 2º) $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$

118. *Incentro — definição*

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das três bissetrizes internas de um triângulo é o *incentro* do triângulo.

S é o incentro do ΔABC.

$$\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$$

$$d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$$

Nota

O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

III. Circuncentro — Mediatrizes

119. **As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.**

Sendo o ΔABC,

Hipótese		*Tese*
m_1, m_2, m_3 mediatrizes de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$	$\Rightarrow$	1) $m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\}$ 2) $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$

Demonstração

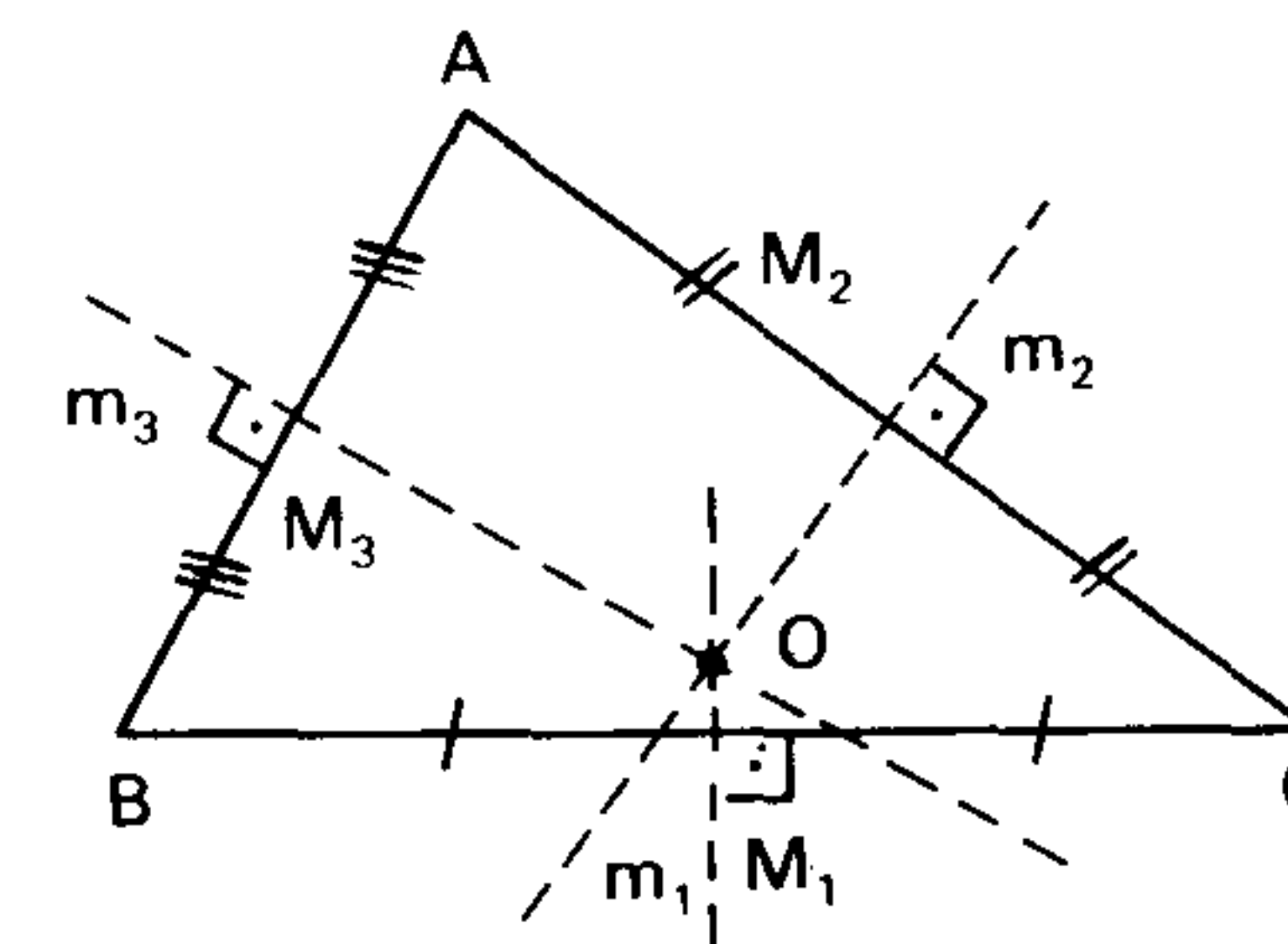
Seja O o ponto tal que:

$$m_2 \cap m_3 = \{O\}$$

$$\left.\begin{array}{l} O \in m_2 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \\ O \in m_3 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

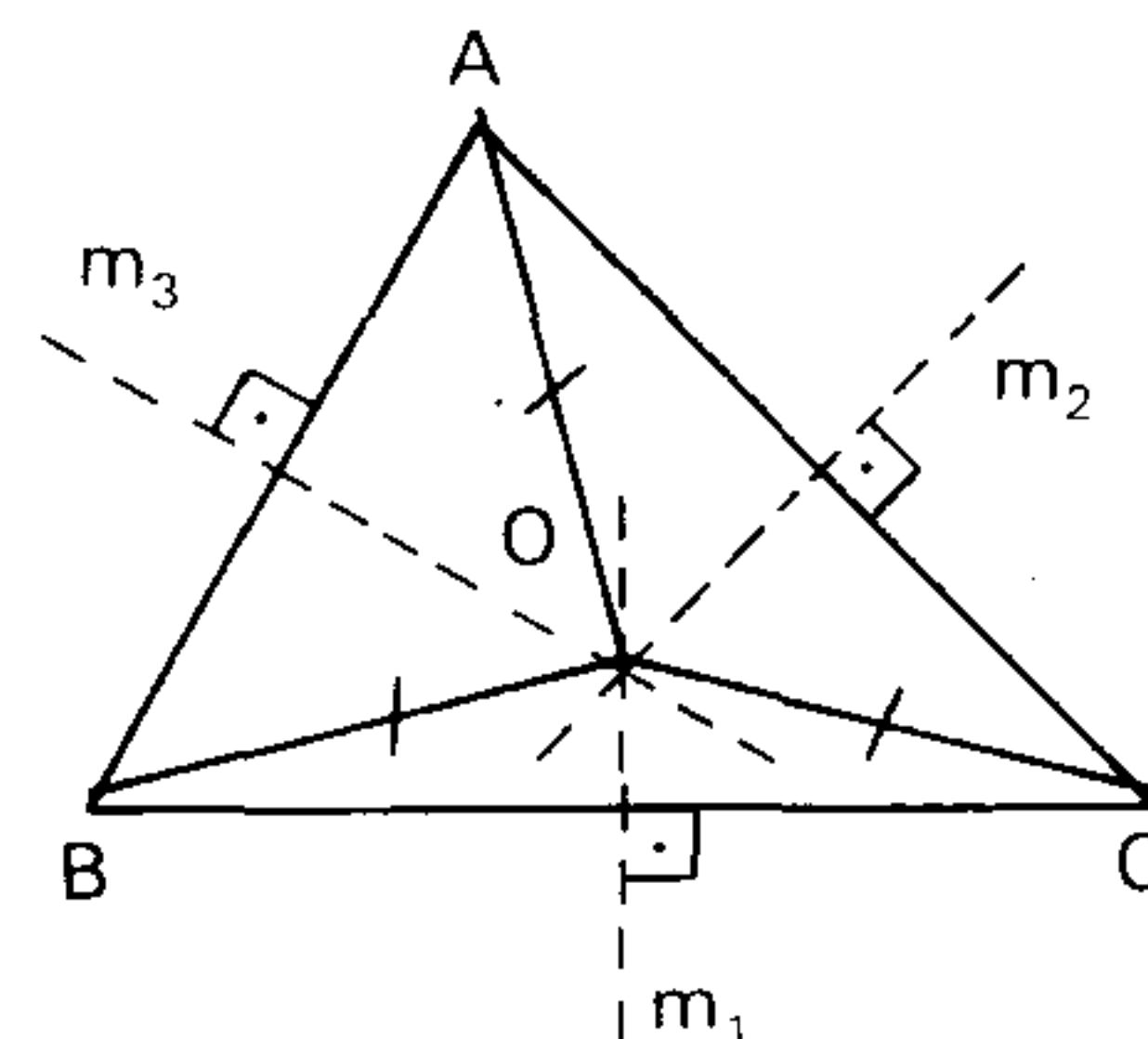
$$\Rightarrow \overline{OB} \equiv \overline{OC} \Rightarrow O \in m_1$$

Logo,

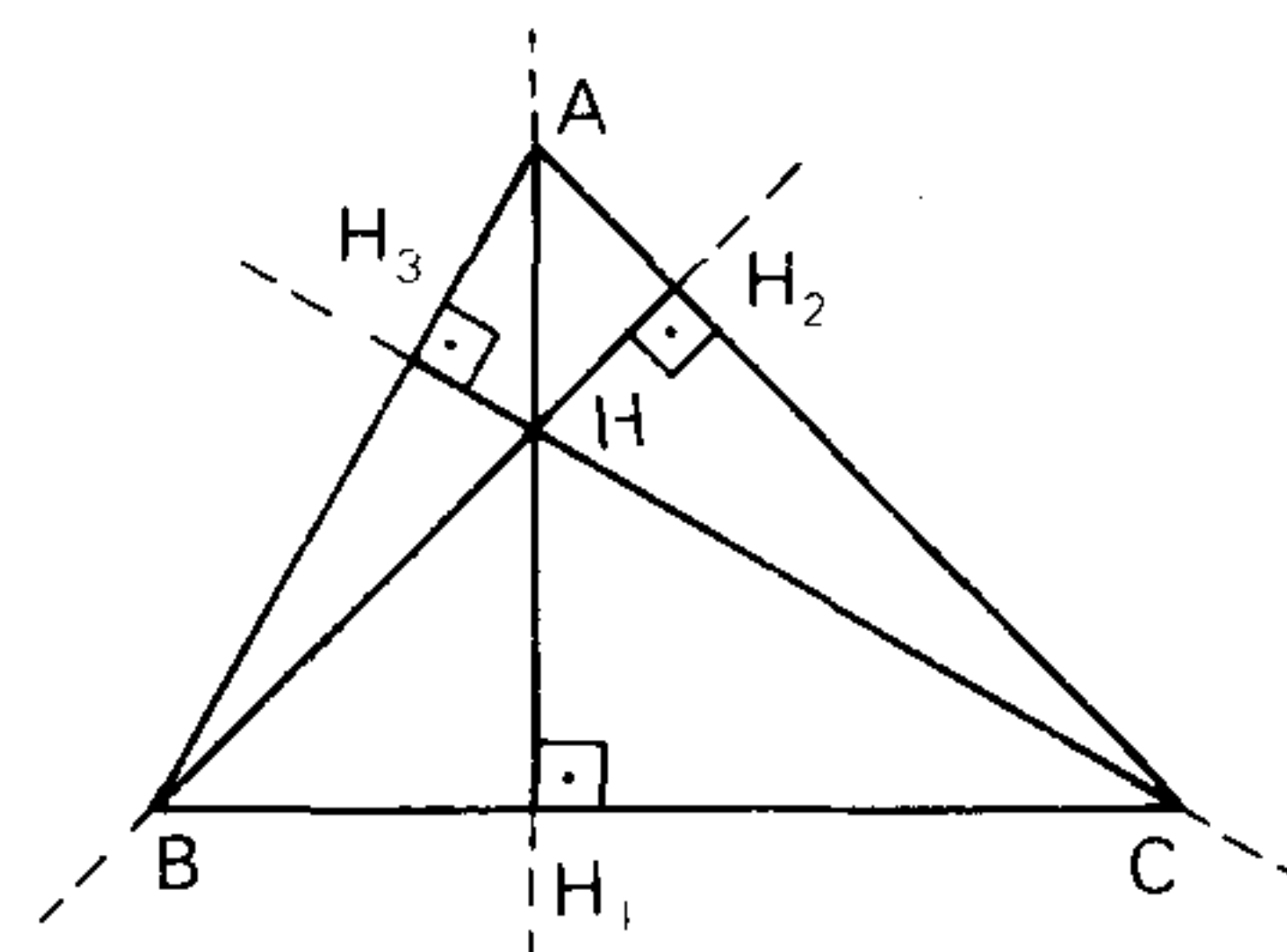
1) $m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\}$ e 2) $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$.

120. Circuncentro — definição

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das mediatrizes dos lados de um triângulo é o *circuncentro* do triângulo.

Nota

O circuncentro é o centro de circunferência circunscrita ao triângulo.

IV. Ortocentro — Alturas

121. **As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.**

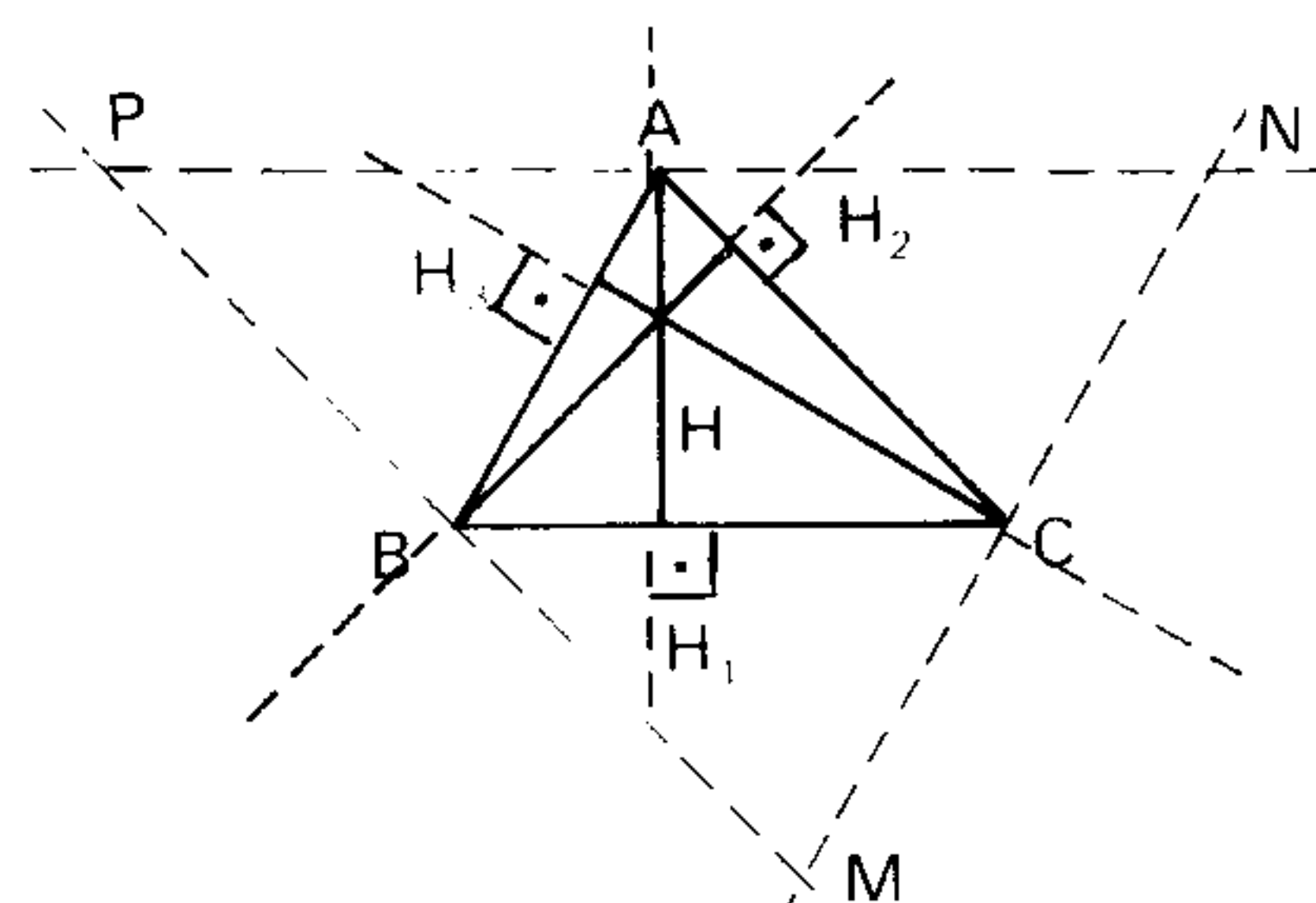
Sendo o ΔABC de alturas $\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$, $\overline{CH_3}$,

Hipótese		*Tese*
$\overleftrightarrow{AH_1}$, $\overleftrightarrow{BH_2}$, $\overleftrightarrow{CH_3}$ retas que contêm as alturas	$\Longrightarrow$	$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$

Demonstração

Pelos vértices A, B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo o triângulo MNP.

$A \in \overline{NP}$ e $\overline{NP} /\!/ \overline{BC}$;
$B \in \overline{MP}$ e $\overline{MP} /\!/ \overline{AC}$;
$C \in \overline{MN}$ e $\overline{MN} /\!/ \overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} APBC \text{ é paralelogramo} \Longrightarrow \overline{AP} \equiv \overline{BC} \\ ABCN \text{ é paralelogramo} \Longrightarrow \overline{AN} \equiv \overline{BC} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \text{ é ponto médio de } \overline{NP} \quad (1)$$

$$(\overleftrightarrow{AH_1} \perp \overline{BC},\ \overline{NP} /\!/ \overline{BC}) \Longrightarrow \overleftrightarrow{AH_1} \text{ é perpendicular a } \overline{NP} \quad (2)$$

De (1) e (2), decorre que:

A reta $\overleftrightarrow{AH_1}$ é mediatriz de $\overline{NP}$.

Analogamente:

A reta $\overleftrightarrow{BH_2}$ é mediatriz de $\overline{MP}$. A reta $\overleftrightarrow{CH_3}$ é mediatriz de $\overline{MN}$.

Logo, considerando o ΔMNP, as mediatrizes $\overleftrightarrow{AH_1}$, $\overleftrightarrow{BH_2}$ e $\overleftrightarrow{CH_3}$ dos lados do triângulo interceptam-se num ponto, H.

$$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$$

122. Ortocentro — definição

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das retas suportes das alturas de um triângulo é o *ortocentro* do triângulo.

EXERCÍCIOS

274. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
b) O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
c) O incentro é interno ao triângulo.
d) O baricentro é interno ao triângulo.
e) O ortocentro é interno ao triângulo.
f) O circuncentro é interno ao triângulo.
g) O baricentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

275. Diga que triângulo satisfaz a condição dada nos casos:

a) o ortocentro e o baricentro são coincidentes;
b) o incentro e o circuncentro são coincidentes;
c) o ortocentro é um dos vértices;
d) o ortocentro é externo;
e) o circuncentro é externo;
f) o circuncentro está em um dos lados;
g) o ortocentro é um ponto interno.

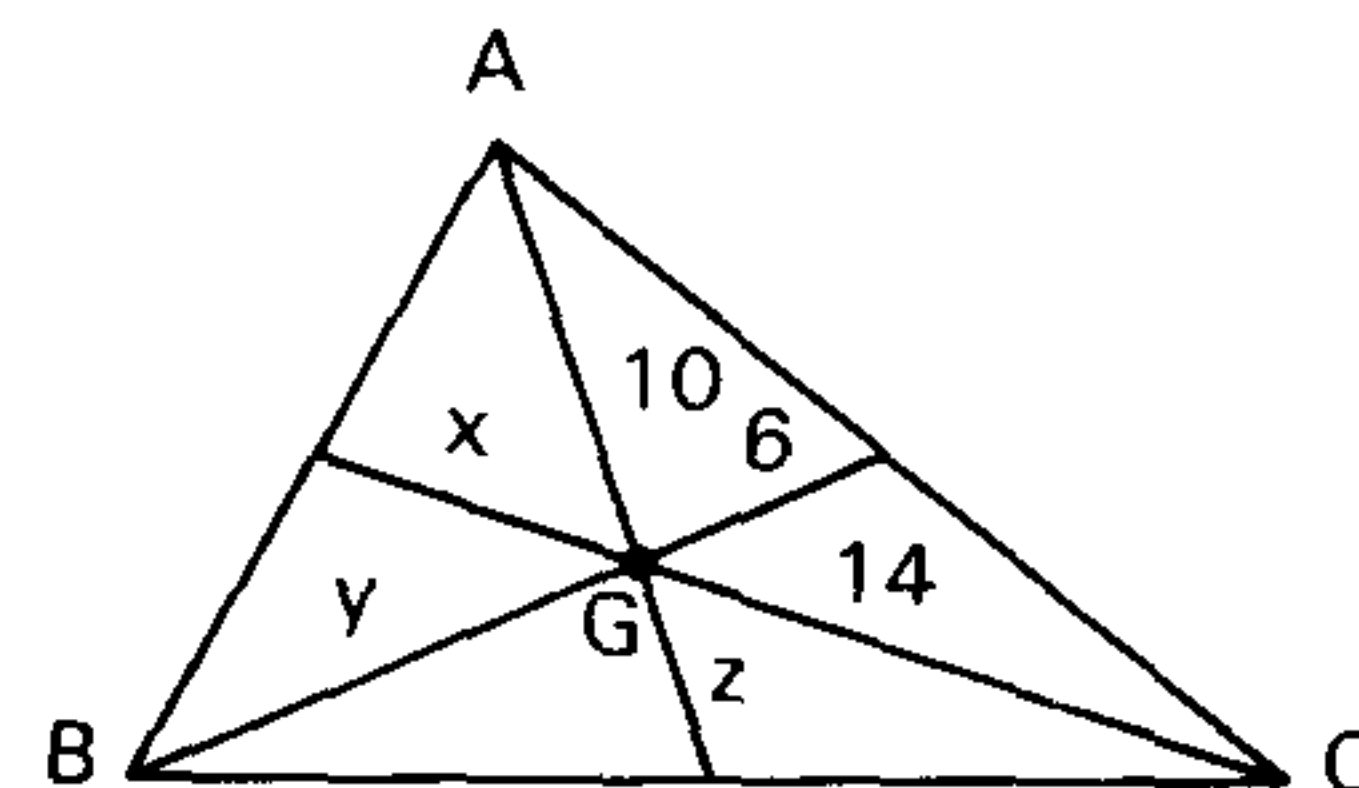
276. Considere os segmentos constituídos pelas três alturas, pelas três medianas e pelas três bissetrizes internas de um triângulo. Quantos desses segmentos, dois a dois distintos, teremos:

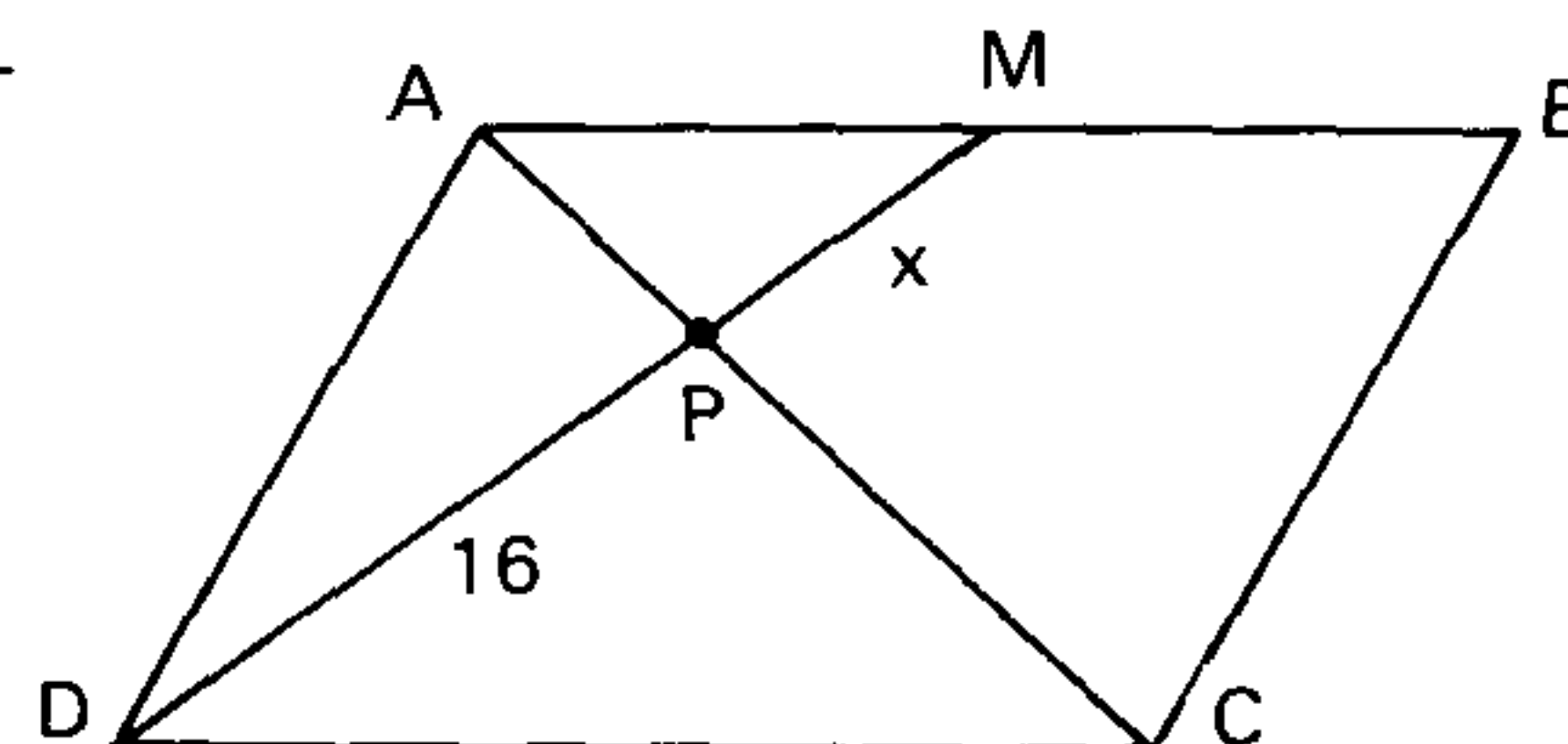
a) no triângulo equilátero;

b) no triângulo isósceles não equilátero;

c) no triângulo escaleno.

277. Sendo G o baricentro do triângulo ABC, determine x, y e z.

AG = 10
BG = y
CG = 14

278. Se o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo e M é ponto médio de AB, determine x.

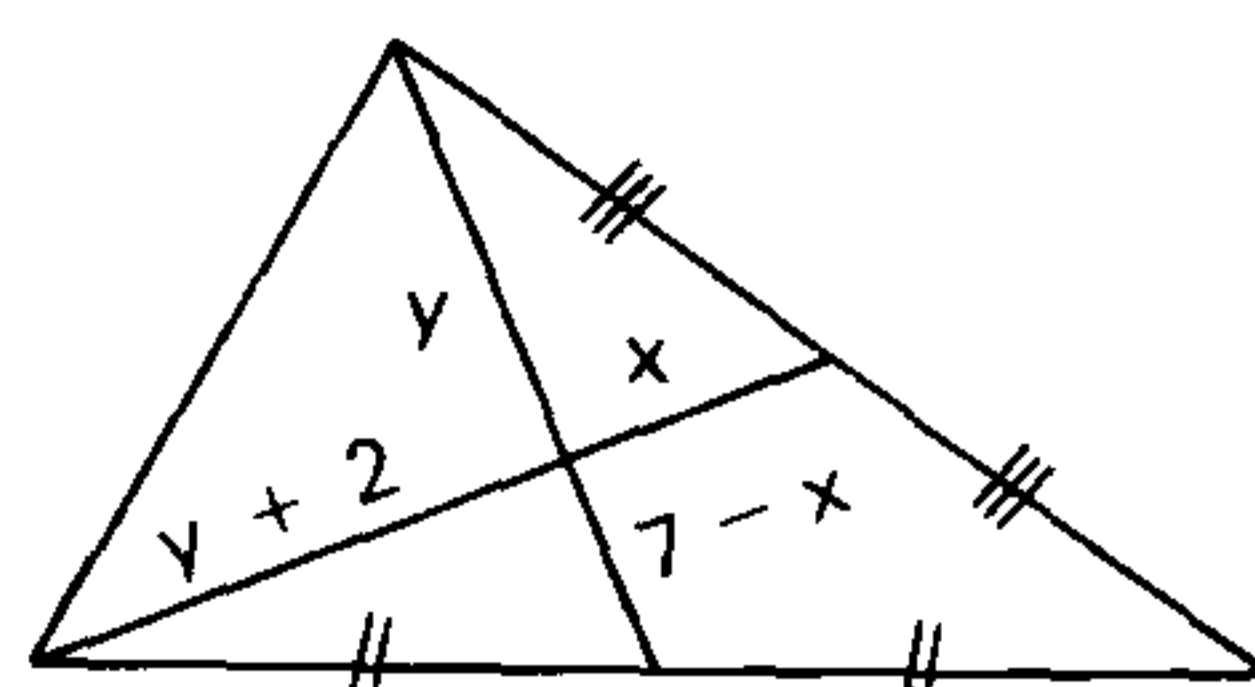
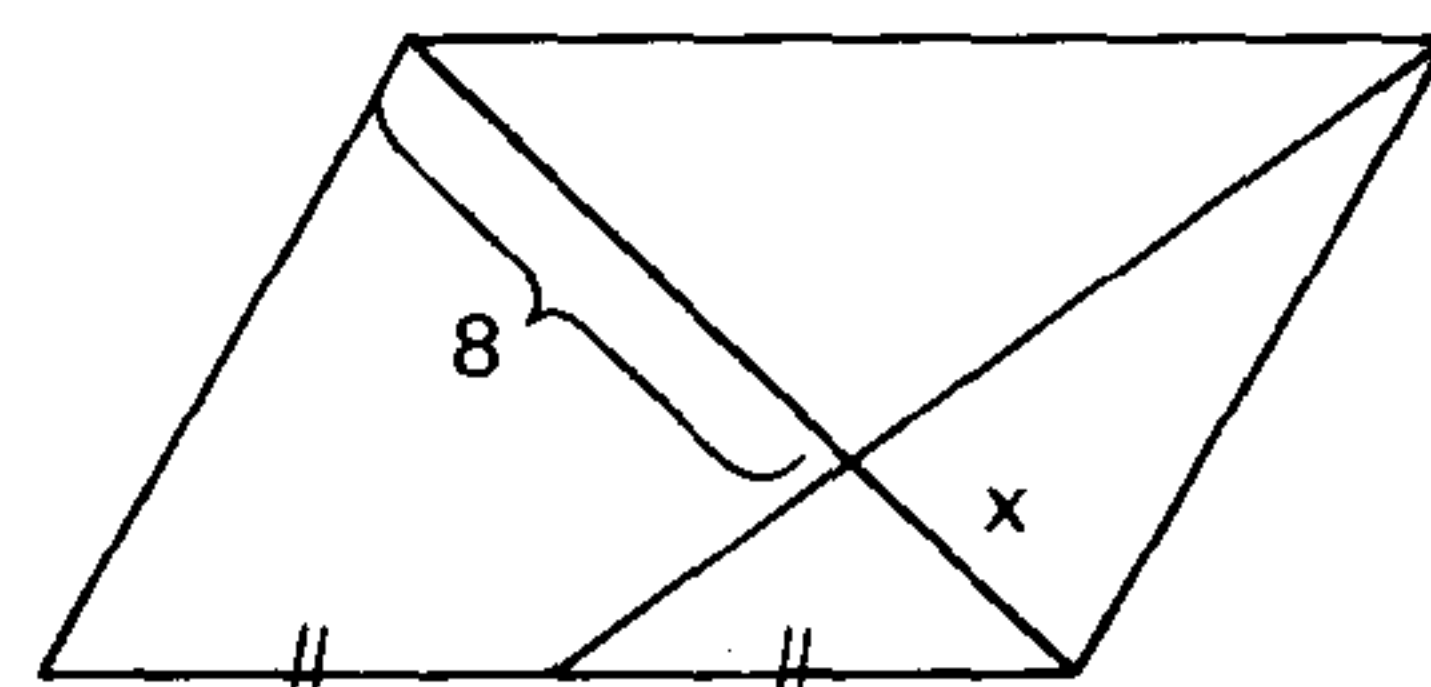
DP = 16
PM = x

279. Sendo H o ortocentro de um triângulo ABC e $B\hat{H}C = 150°$, determine Â.

280. Se H é o ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e $B\hat{H}C = 50°$, determine os ângulos do triângulo.

281. Se P é o incentro de um triângulo ABC e $B\hat{P}C = 125°$, determine $\hat{A}$.

282. O circuncentro de um triângulo isósceles é interno ao triângulo e duas mediatrizes formam um ângulo de 50°. Determine os ângulos desse triângulo.

283. Considerando congruentes os segmentos com "marcas iguais", determine os valores das incógnitas nos casos:

a)

b) paralelogramo

284. Considerando os quatro pontos notáveis de um triângulo:

a) Quais os que podem ser externos ao triângulo?

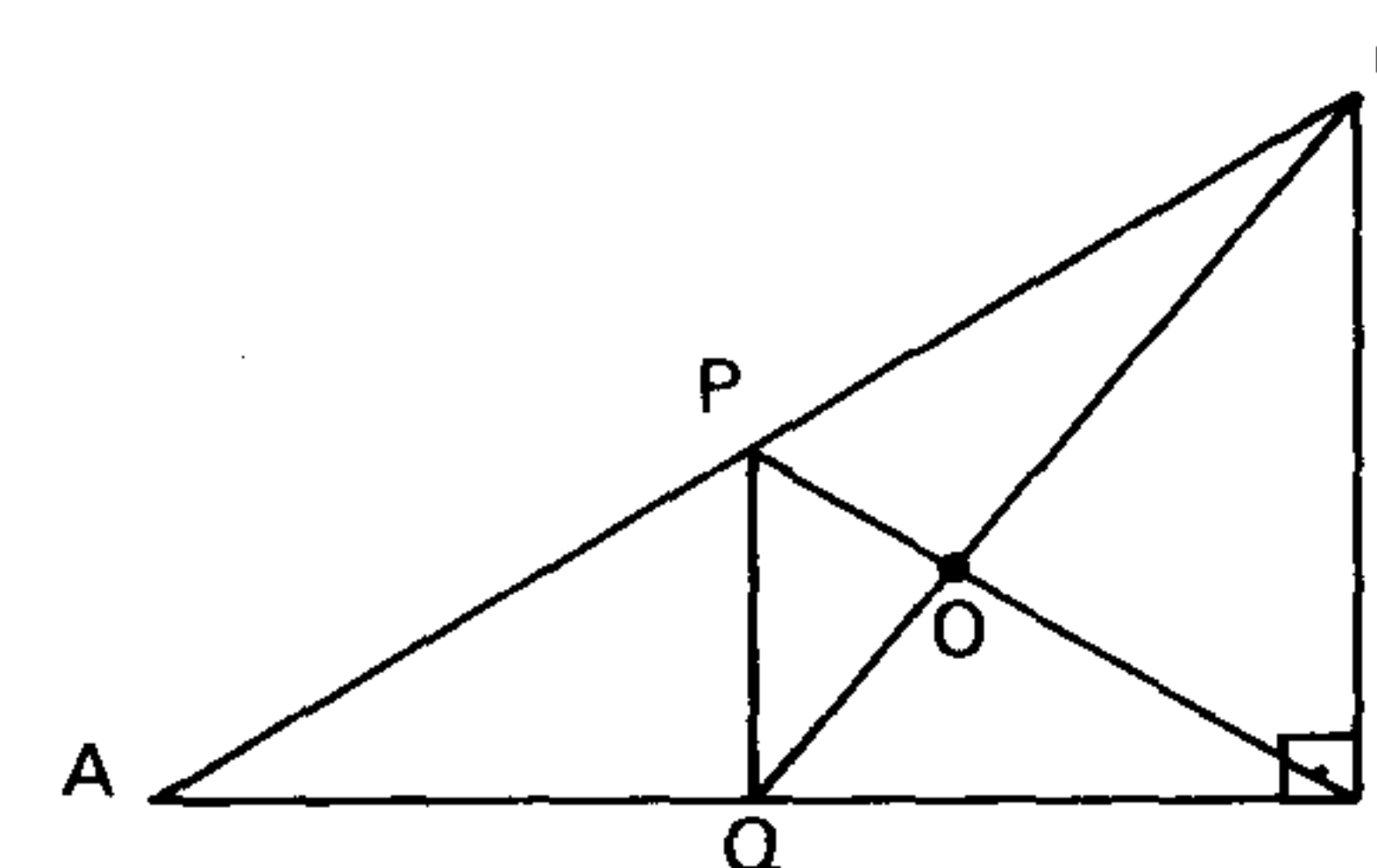
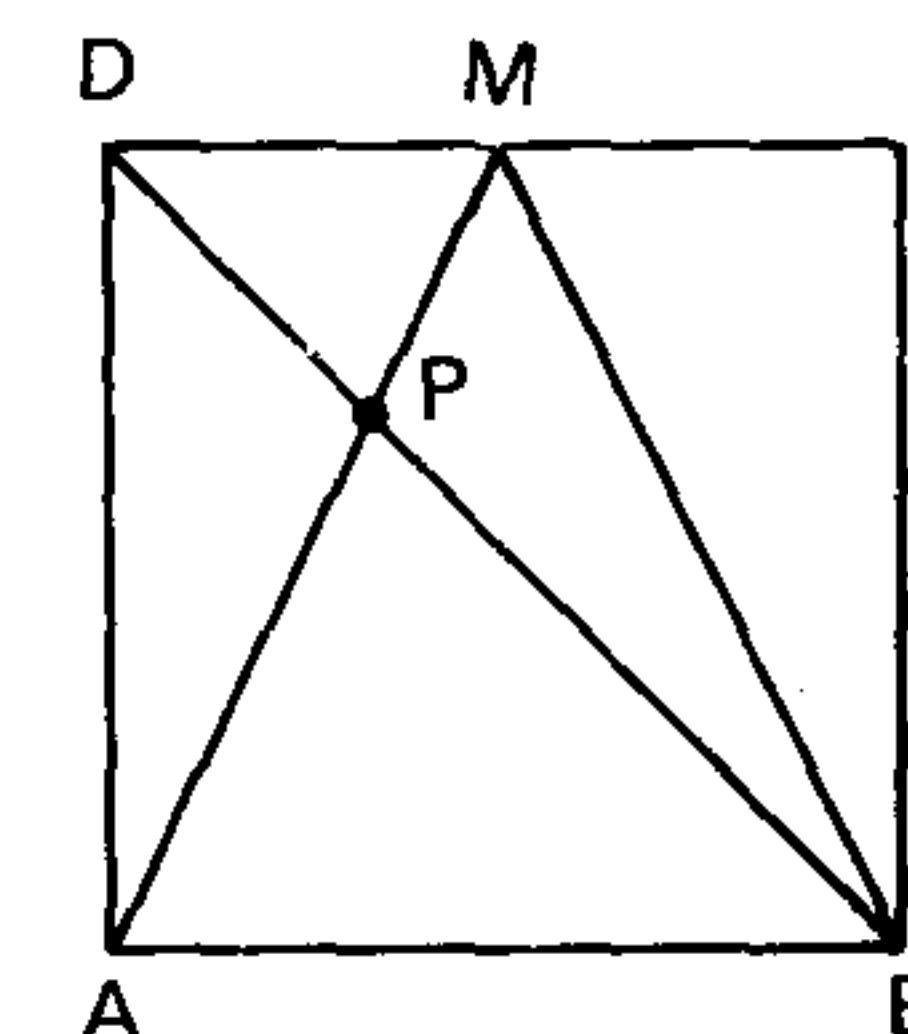
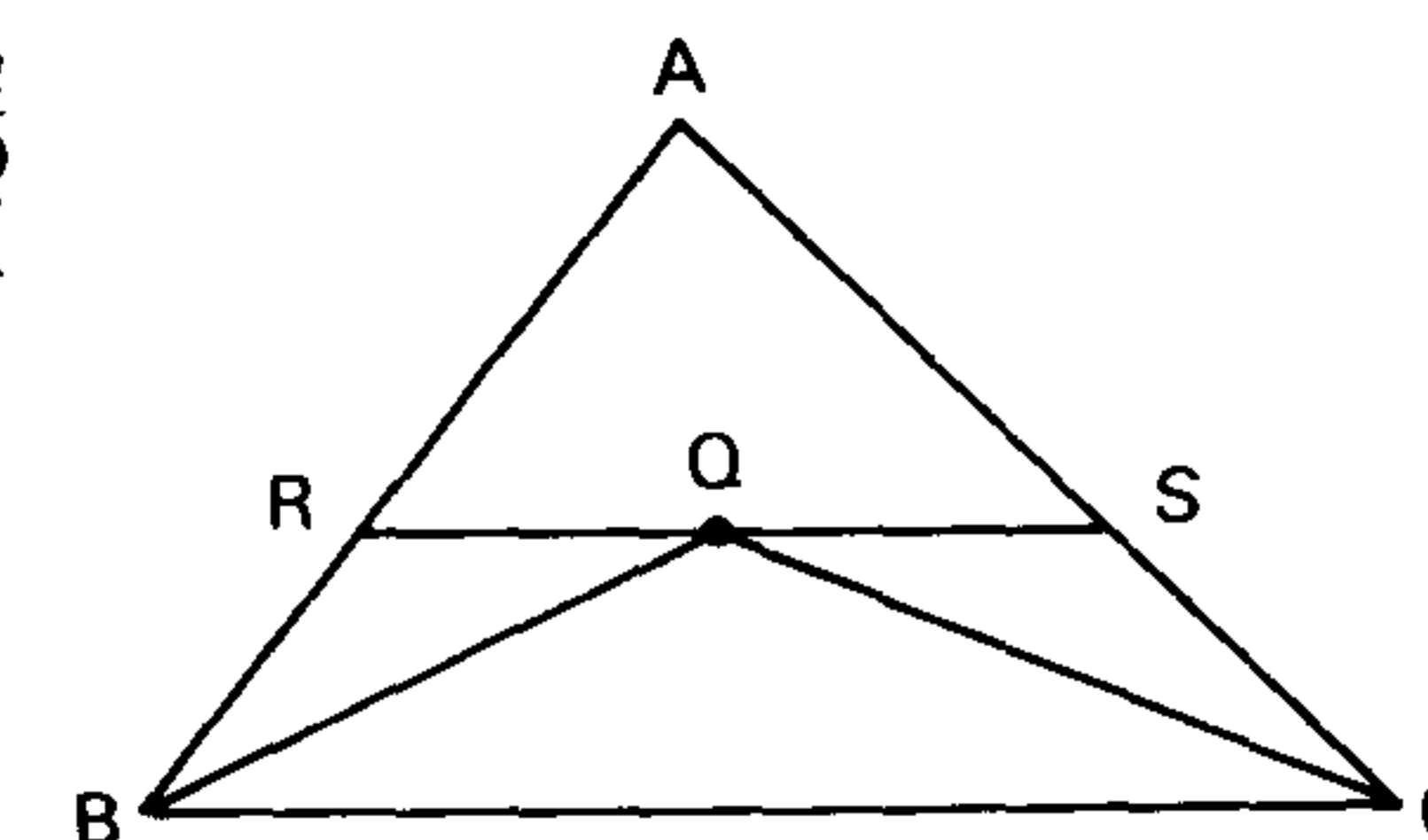
b) Qual o que pode ser ponto médio de um lado?

c) Qual o que pode ser vértice do triângulo?

285. Em um triângulo ABC, os ângulos A e B medem, respectivamente, $86°$ e $34°$. Determine o ângulo agudo formado pela mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$ e pela bissetriz do ângulo C.

286. Em um triângulo ABC os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem, respectivamente, $70°$ e $60°$. Determine a razão entre os dois maiores ângulos formados pelas interseções das três alturas.

287. Determine as medidas dos três ângulos obtusos formados pelas mediatrizes de um triângulo equilátero.

288. Na figura, Q é o ponto médio de $\overline{AB}$. $\overline{QP}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Sendo $\overline{AC} = 30\ cm$, determine $\overline{PO}$.

289. Na figura, $ABCD$ é retângulo, M é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo ABM é equilátero. Sendo $\overline{AB} = 15$, calcule $\overline{AP}$.

290. Determine o perímetro do triângulo ARS da figura, onde $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $15\ cm$ e $18\ cm$, respectivamente, sendo $\overline{BQ}$ e $\overline{CQ}$ as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC e $\overline{RS}$ paralelo a $\overline{BC}$.

291. As três bissetrizes de um triângulo ABC se encontram num ponto O. Determine as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ em função dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo.

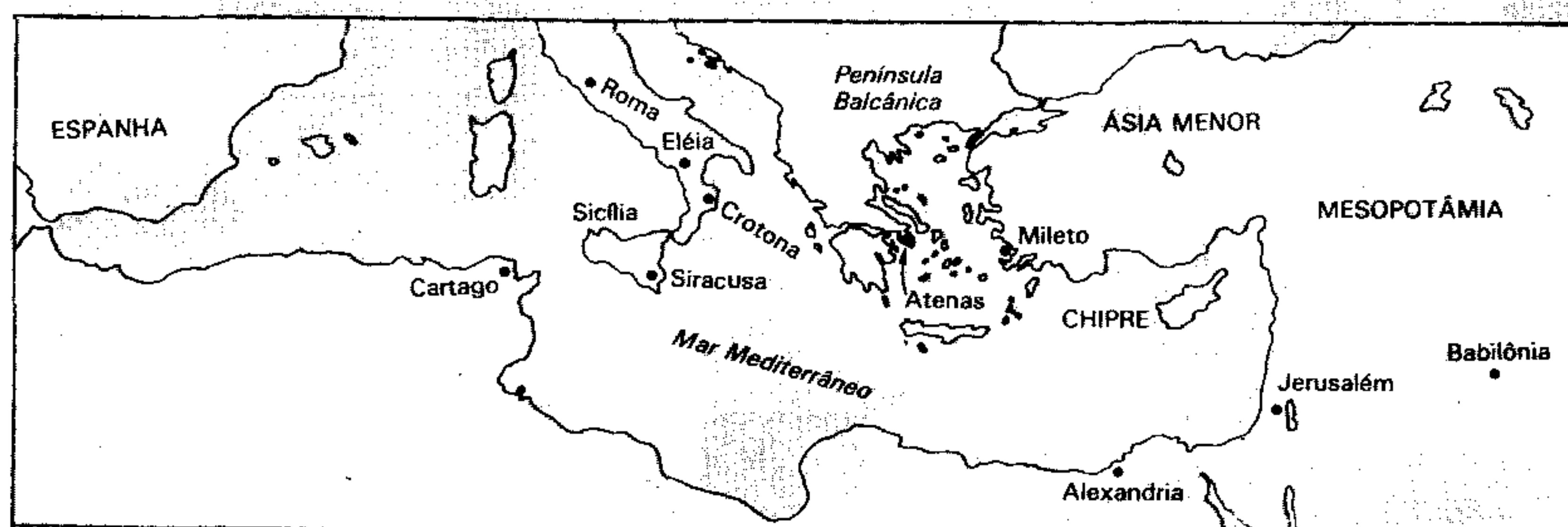
LEITURA

Papus: o Epílogo da Geometria Grega

Hygino H. Domingues

A partir do século III a.C., Roma começa a se impor como potência militar imperialista. Em 156 a.C., após uma sucessão de conquistas, anexou a Grécia aos seus já vastos domínios. A mesma sorte teria o Egito em 31 a.C. Mas alguns anos antes os romanos já haviam intervindo neste país, valendo-se da disputa pelo poder entre Cleópatra e seu irmão. César, no ano 47 a.C., mandara incendiar a esquadra egípcia ancorada no porto de Alexandria. O fogo se alastrou e atingiu a biblioteca, consumindo cerca de 500 mil textos.

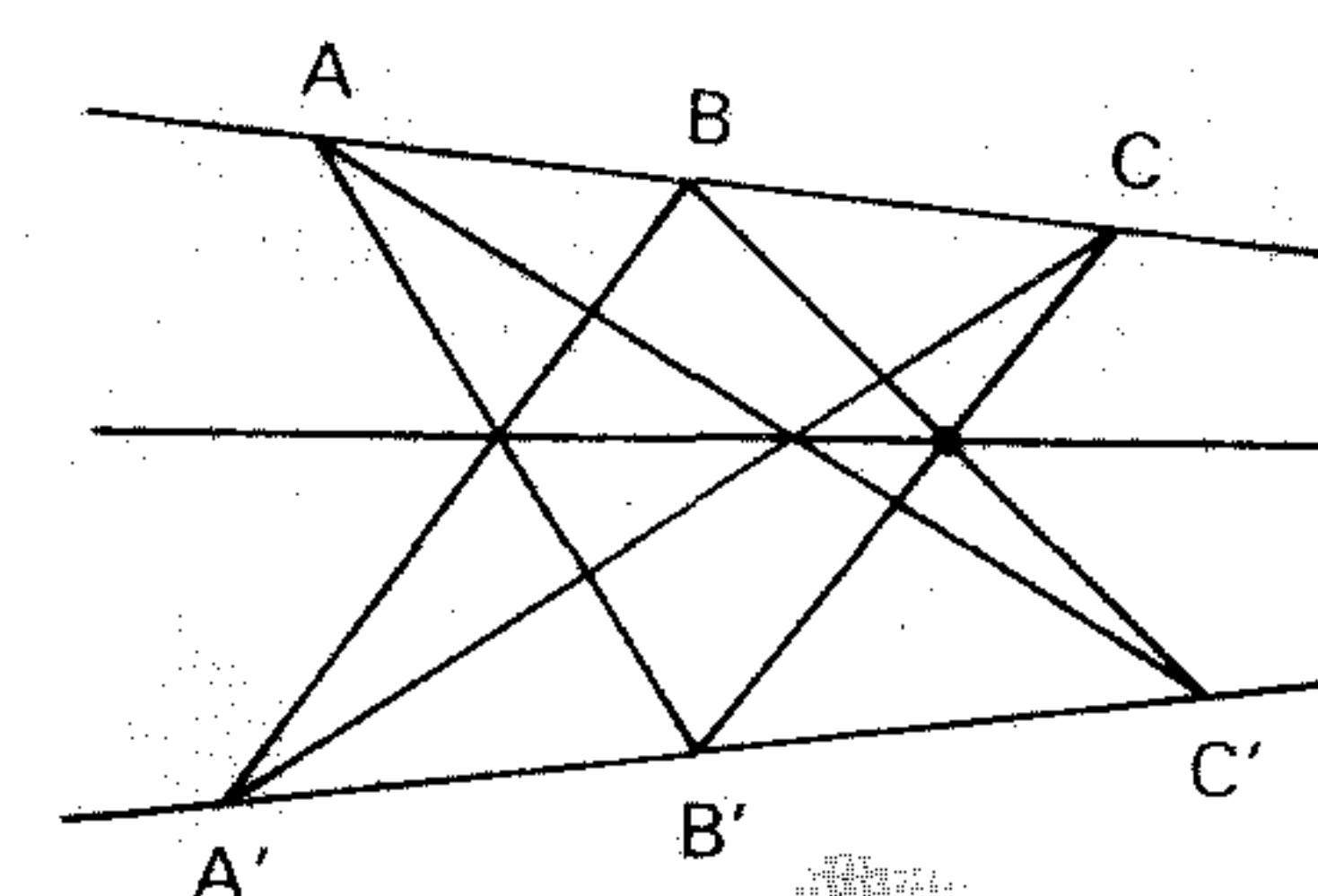
Apesar desses acontecimentos, Alexandria continuaria a ostentar por muito tempo a condição de capital cultural do mundo. Mas, por razões várias, aproximadamente por volta dessa época começa a declinar em intensidade sua pujança, inclusive no campo da matemática.

De um lado o modelo matemático dos gregos, com sua grande ênfase na geometria dedutiva, paralelamente à não-adoção de qualquer simbologia algébrica, estava se esgotando. Ademais, os romanos, embora a princípio não interferissem nas atividades científicas dos gregos, muito menos as incentivavam ou valorizavam, posto que só o conhecimento prático lhes interessasse. E, quando o cristianismo se tornou a religião oficial do Império Romano, essa isenção foi sendo abandonada, culminando com o fechamento das escolas gregas de filosofia no ano 529, incluindo a secular Academia de Platão, em Atenas. Nessa fase de decadência o último grande alento da matemática grega foi dado por Papus de Alexandria (c. 300 d.C.).

Papus provavelmente viveu e ensinou em Alexandria entre o final do século III e a primeira metade do século IV, conforme se deduz de comentário seu sobre o *Almagesto*, em que cita como episódio recente um eclipse do Sol ocorrido no ano 320. Dentre suas obras, apenas uma restou até nossos dias: a *Coleção Matemática*, em oito livros, dos quais o primeiro e parte do segundo se perderam.

Predominantemente uma obra de geometria, a grande importância da *Coleção Matemática* se assenta em três razões principais.

Uma delas se traduz nas preciosas informações históricas que inclui sobre a matemática grega; a outra, na tentativa de tornar mais acessível a geometria grega já conhecida, mediante novas demonstrações e lemas explanatórios; a última é a própria contribuição original de Papus, bastante significativa.

Um dos resultados de maior alcance deixados por Papus é conhecido hoje como *teorema de Guldin* — em homenagem a P. Guldin, que o redescobriu no século XVII. Esse teorema assegura que, se uma reta e uma curva fechada são coplanares e não se interceptam, o volume do sólido obtido girando-se a superfície delimitada pela curva em torno da reta é igual ao produto da área dessa superfície pelo comprimento da trajetória de seu centro de gravidade.

É digna de registro também a proposição 139, no livro VII, conhecida em geometria projetiva como *teorema de Papus*: "Se A, B e C são pontos de uma reta e A', B' e C' pontos de outra, conforme a figura, então AB' e A'B, AC' e A'C, BC' e B'C se encontram em três pontos colineares".

A Papus se deve ainda o conceito de *foco* e *diretriz* de uma cônica. É dele o teorema: "O lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão das distâncias a um ponto (foco) e uma reta (diretriz) é constante, é uma cônica".

Enfim, bem que Papus se empenhou para reerguer a geometria grega. Mas as forças inexoráveis da história estavam contra ele.

CAPÍTULO IX

Polígonos

I. Definições e elementos

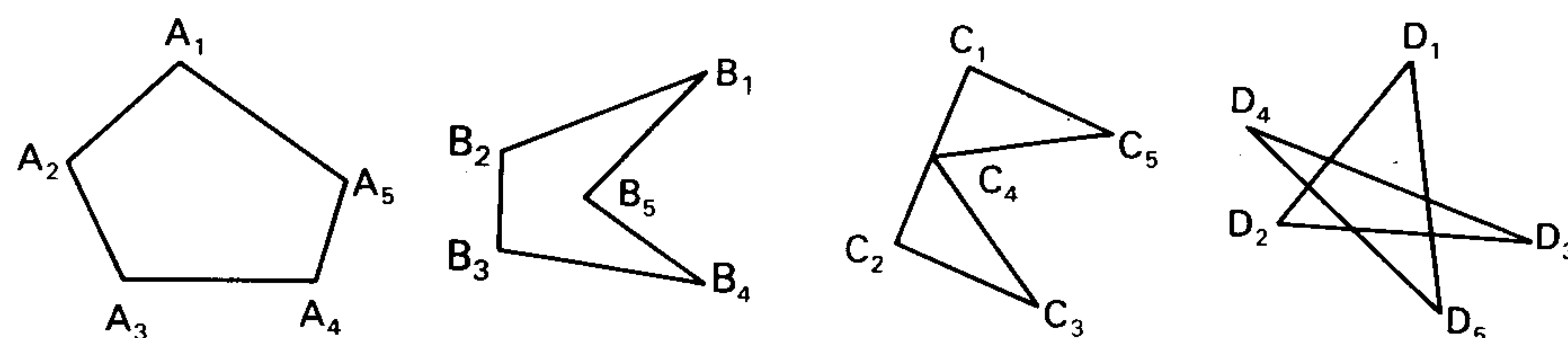
123. *Polígonos — definição*

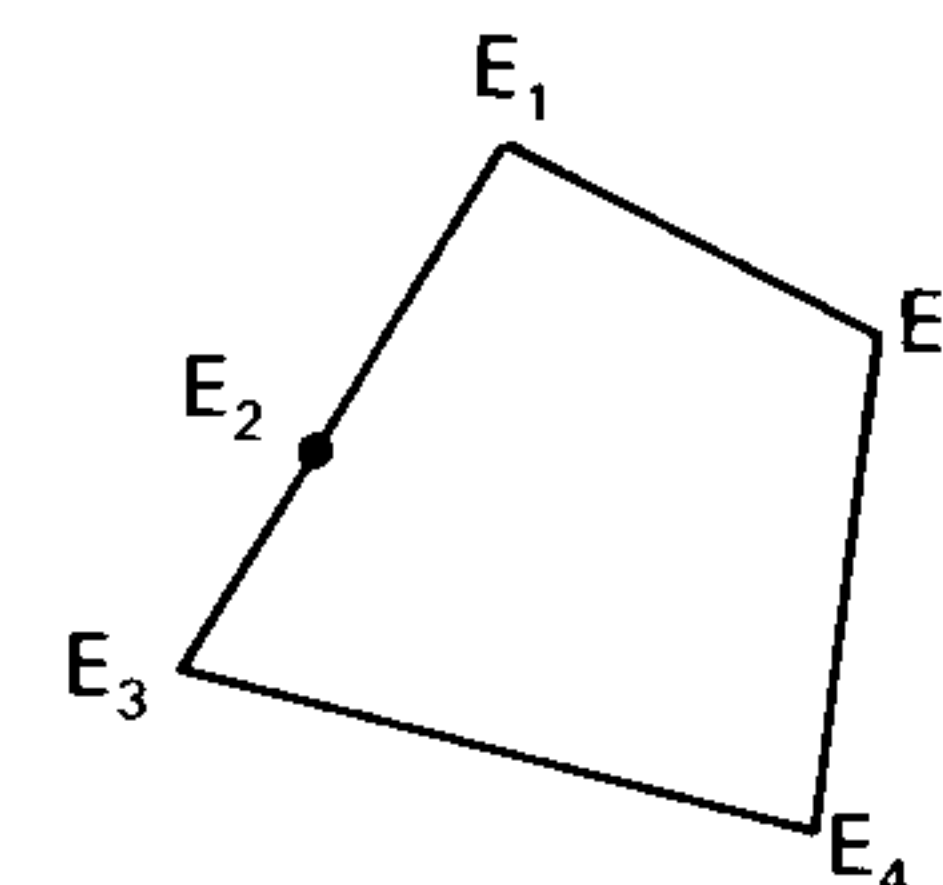
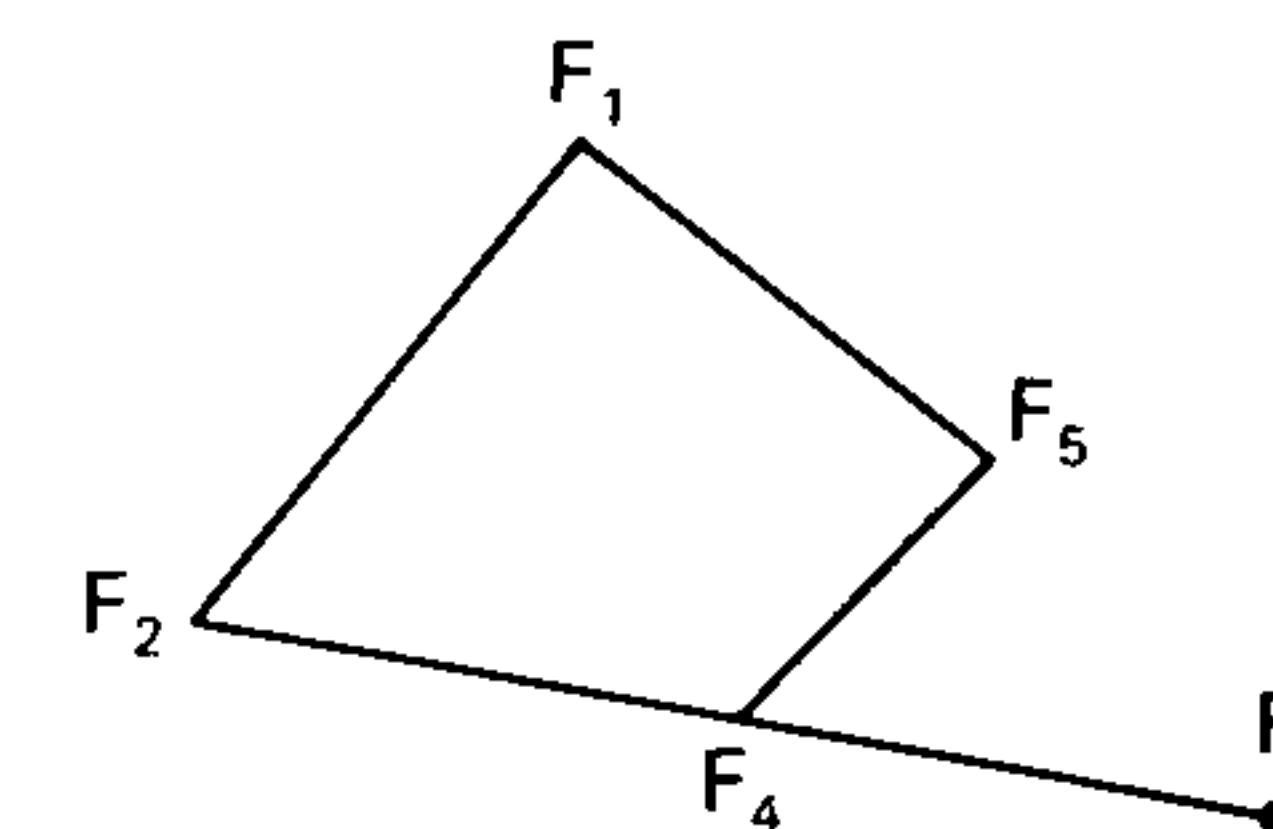
Dada uma *seqüência* de pontos de um plano (A_1, A_2, ..., A_n) com $n \geqslant 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

Indicação:

polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ ou, simplesmente, $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$

$A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$

124. *Exemplos*

$A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$ e $D_1D_2D_3D_4D_5$ são polígonos.

Para $n = 5$, os dois casos abaixo não são polígonos.

$E_1E_2E_3E_4E_5$ apresenta E_1, E_2 e E_3 colineares e $F_1F_2F_3F_4F_5$ apresenta F_2, F_3 e F_4 colineares.

125. *Elementos*

Considerando o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$, temos:

os pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n são os vértices do polígono

os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ são os *lados* do polígono; e os ângulos

$$\hat{A}_1 = A_n\hat{A}_1A_2, \quad \hat{A}_2 = A_1\hat{A}_2A_3, \quad \dots, \quad \hat{A}_n = A_{n-1}\hat{A}_nA_1$$

são os *ângulos* do polígono.

Dois lados que têm um vértice comum (ou uma extremidade comum) são lados consecutivos.

Dois lados não consecutivos não têm vértice (ou extremidade) comum.

Dois ângulos de um polígono são consecutivos se têm um lado do polígono comum.

Um polígono de *n* vértices possui *n* lados e *n* ângulos.

A soma dos lados é o *perímetro* do *polígono*.

perímetro de $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1}$

126. *Polígono simples*

Um polígono é *simples* se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia.

Dos polígonos do exemplo anterior (item 124), temos:

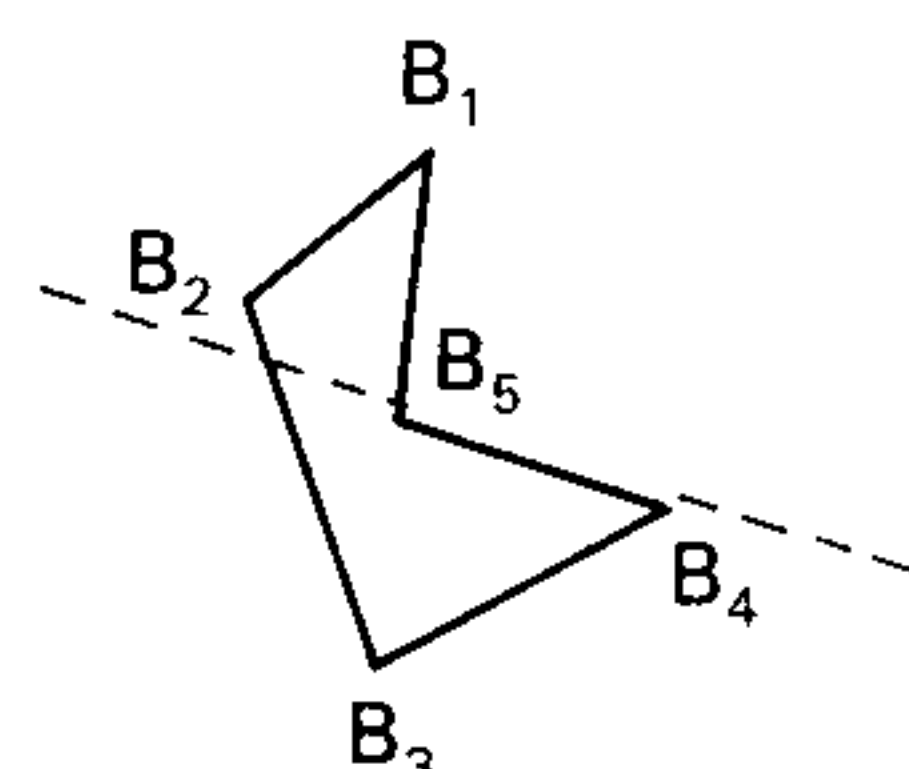
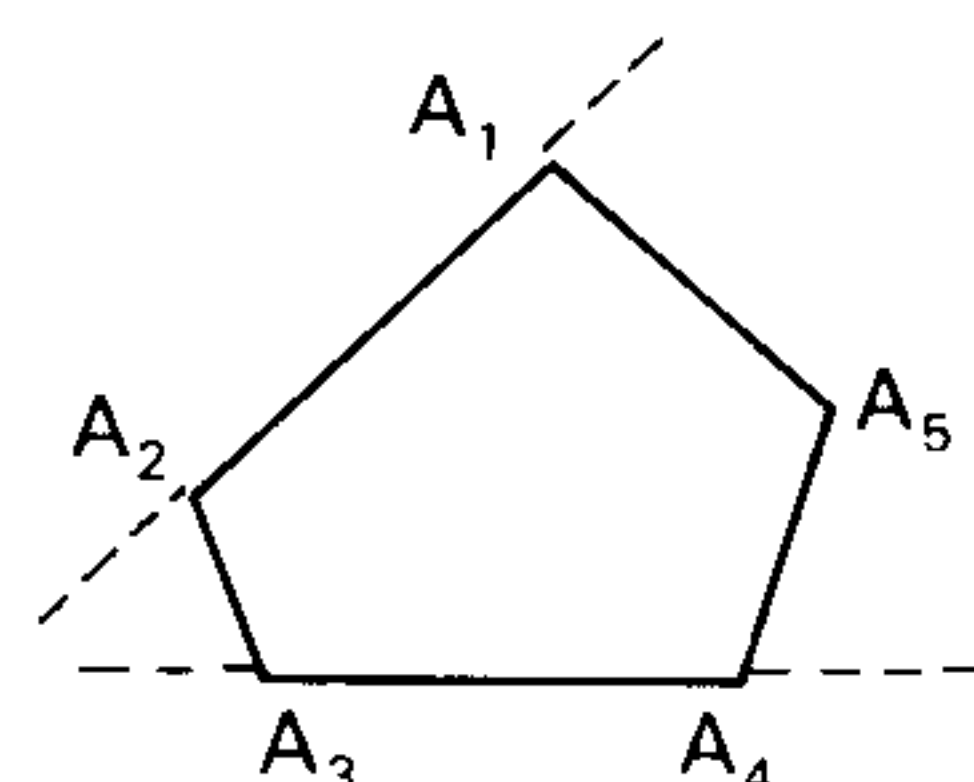
$A_1A_2A_3A_4A_5$ e $B_1B_2B_3B_4B_5$ são polígonos simples

$C_1C_2C_3C_4C_5$ não é polígono simples (é complexo) e

$D_1D_2D_3D_4D_5$ não é polígono simples (é complexo e ainda entrelaçado).

127. *Polígono convexo e polígono côncavo*

Um polígono simples é um *polígono convexo* se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais ($n - 2$) vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.

Se um polígono não é polígono convexo, diremos que ele é um *polígono côncavo*.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ é polígono convexo. $B_1B_2B_3B_4B_5$ é polígono côncavo.

128. *Interior e exterior de um polígono*

Dado um polígono simples e um ponto não pertencente a ele, se conduzirmos uma semi-reta com origem no ponto e que não passe por nenhum vértice, mas intercepte o polígono, se o número de pontos de interseção:

a) for ímpar, então o ponto é *interno* ao polígono;

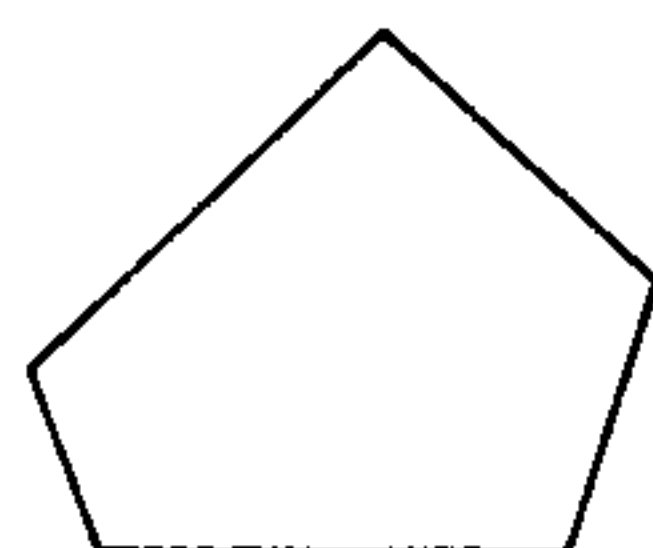
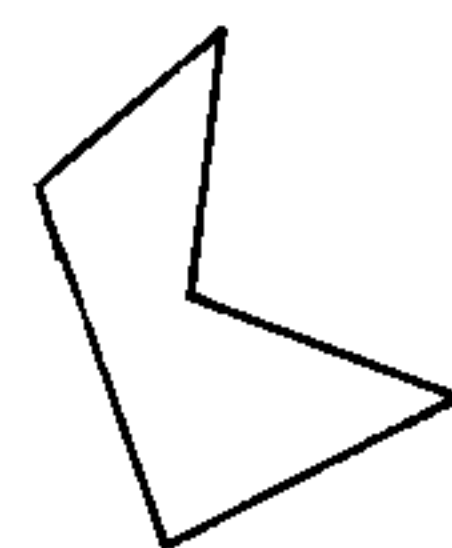
b) for par, o ponto é *externo* ao polígono.

O conjunto dos pontos internos de um polígono é seu *interior* e o conjunto dos pontos externos ao polígono é seu *exterior*.

O interior de um polígono convexo é uma região convexa.

O interior de um polígono côncavo é uma região côncava.

129. *Superfície poligonal*

A reunião de um polígono com o seu interior é uma *região poligonal* ou *superfície poligonal*.

Superfície poligonal (convexa)

Superfície poligonal (côncava)

130. *Observação*

Sob uma outra orientação, até este ponto não adotada neste texto, o ente *polígono* corresponde ao que denominamos *superfície poligonal* ou *região poligonal*; o ente *poligonal fechada* ou *contorno do polígono* corresponde ao que chamamos de *polígono*. As conclusões práticas a que se chega com uma ou outra orientação são as mesmas.

131. *Nome dos polígonos*

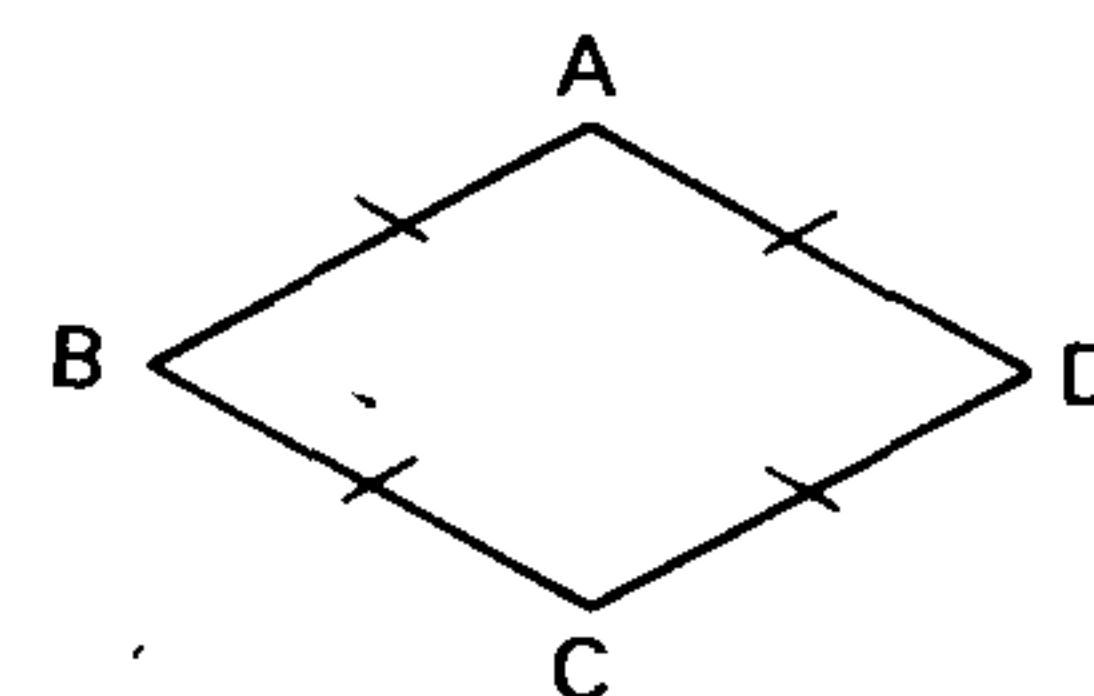
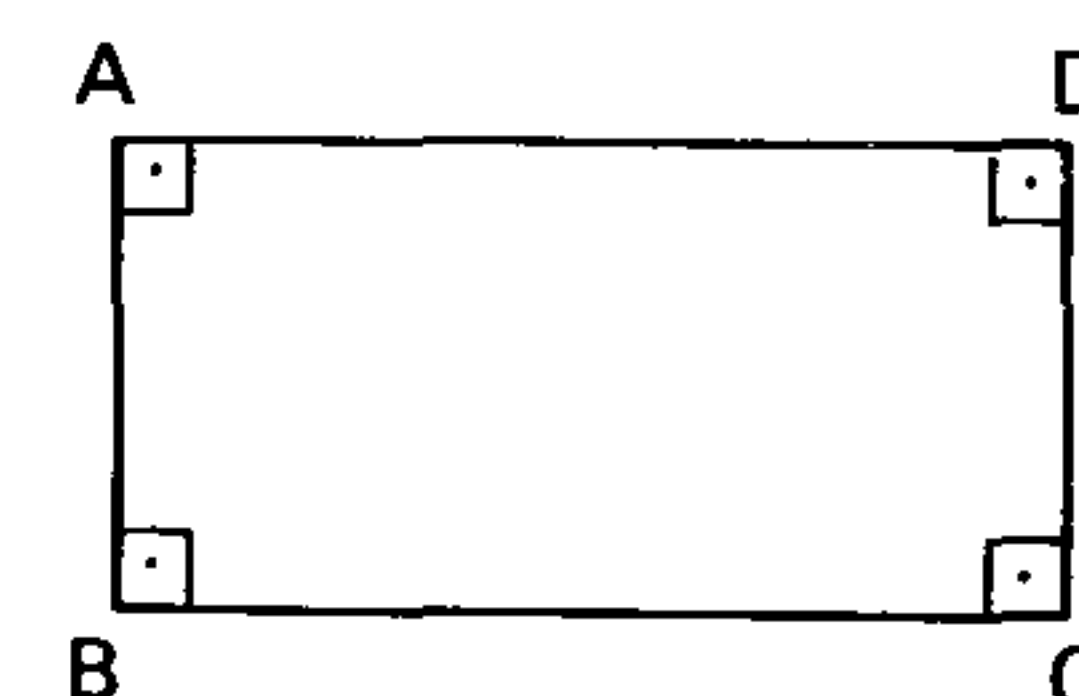
De acordo com o número n de lados, os polígonos recebem nomes especiais. Veja a seguir as correspondências:

n	nome	lados
n = 3	→ triângulo ou trilátero →	3 lados
n = 4	→ quadrângulo ou quadrilátero →	4 lados
n = 5	→ pentágono →	5 lados
n = 6	→ hexágono →	6 lados
n = 7	→ heptágono →	7 lados
n = 8	→ octógono →	8 lados
n = 9	→ eneágono →	9 lados
n = 10	→ decágono →	10 lados
n = 11	→ undecágono →	11 lados
n = 12	→ dodecágono →	12 lados
n = 15	→ pentadecágono →	15 lados
n = 20	→ icoságono →	20 lados

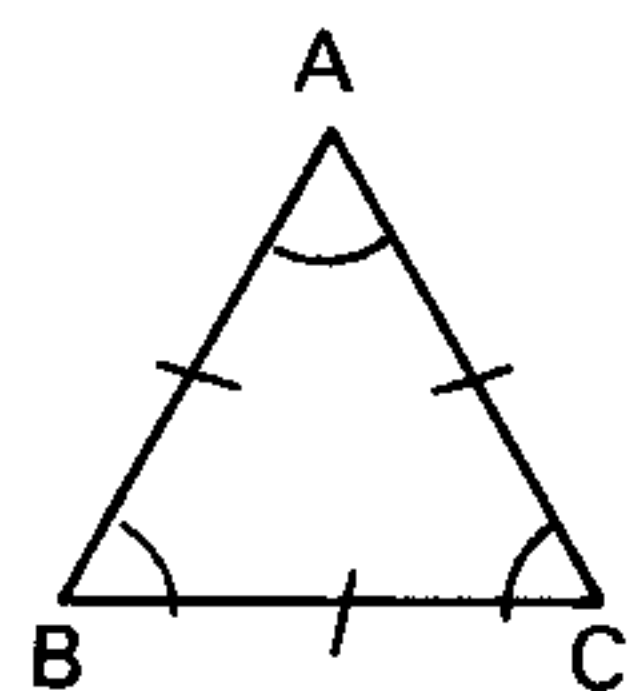
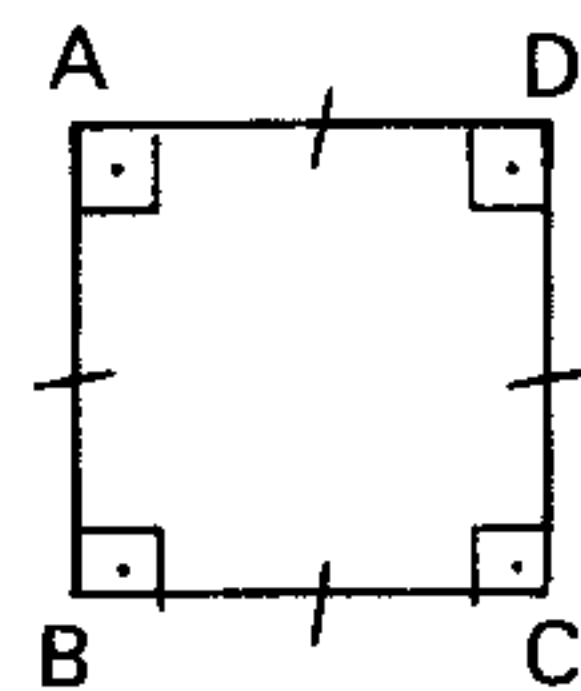
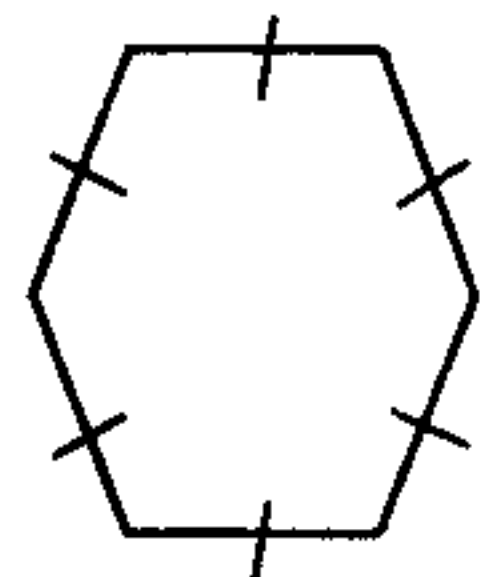
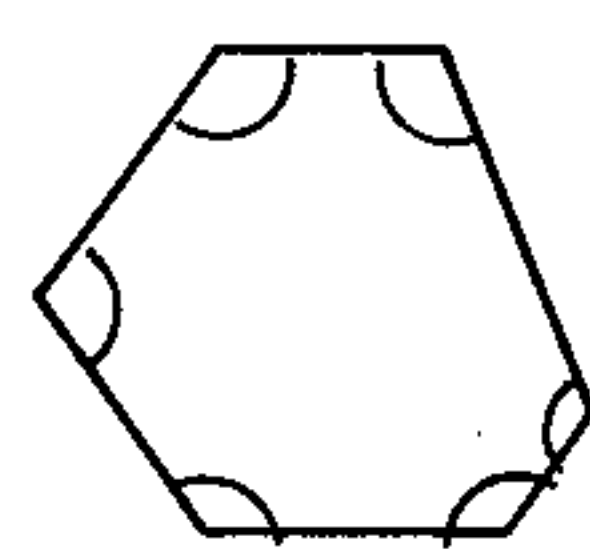
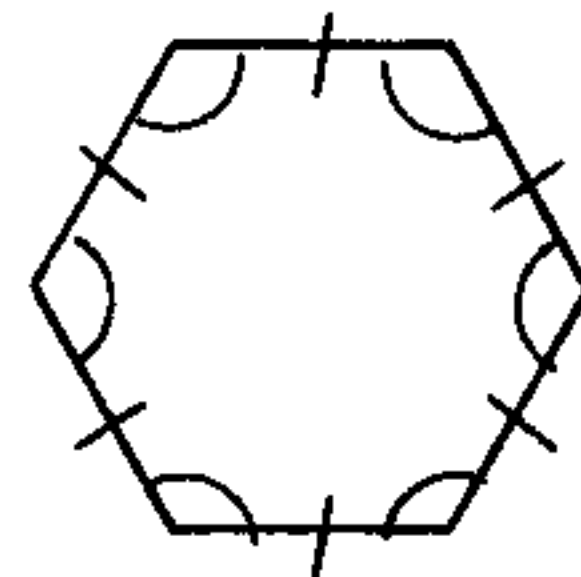
Em geral, para um número $n (n \geqslant 3)$ qualquer de lados dizemos que o polígono é um:

n-látero.

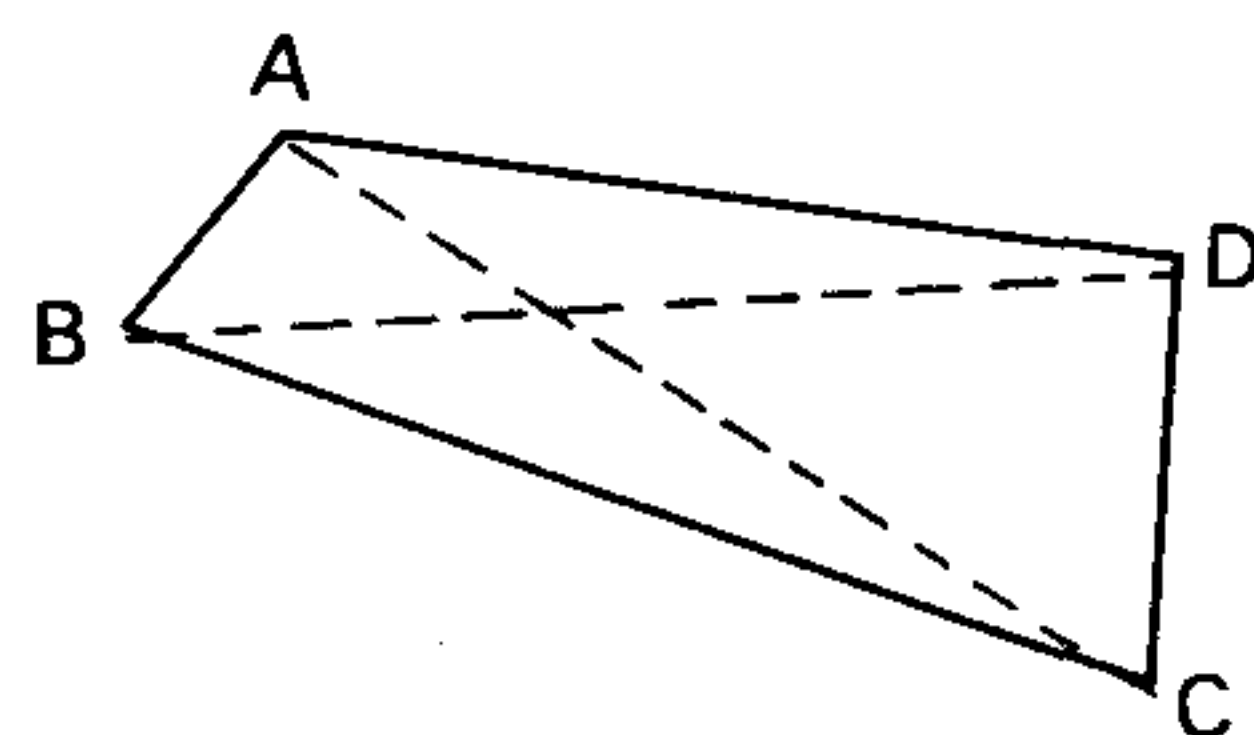
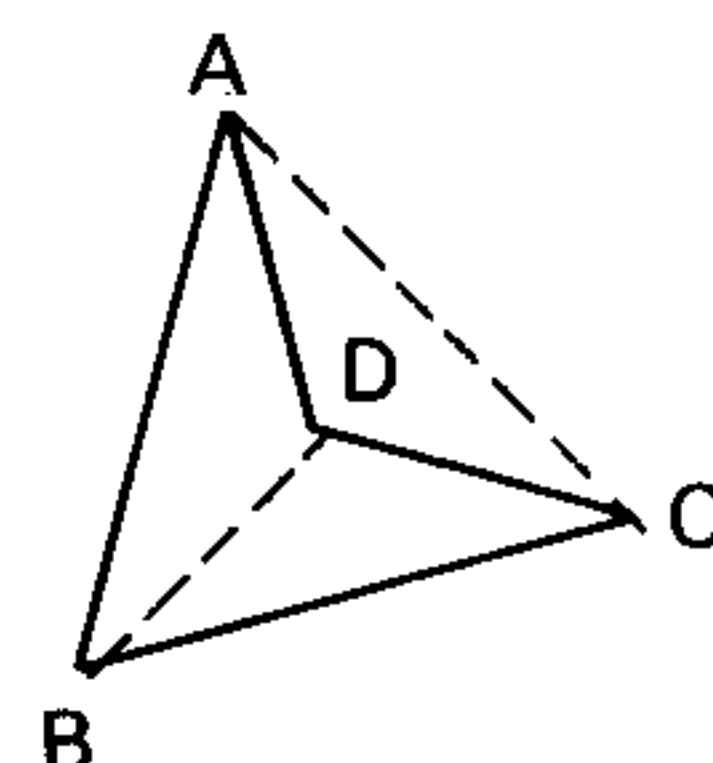
132. *Polígono regular*

Um polígono que possui os lados congruentes é equilátero. Se possui os ângulos congruentes, é equiângulo.

Quadrilátero equilátero

Quadrilátero equiângulo

Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem
todos os lados congruentes (é equilátero)
e
todos os ângulos congruentes (é equiângulo).

Exemplos

O triângulo regular é o triângulo equilátero.

O quadrilátero regular é o quadrado.

Hexágono equilátero Hexágono equiângulo Hexágono regular

II. Diagonais — Ângulos internos — Ângulos externos

1º) **Número d de diagonais de um polígono de n lados ($n \geqslant 3$)**

133. *Diagonal* de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

ABCD é um quadrilátero convexo. AC e BD são suas diagonais.

ABCD é um quadrilátero côncavo. AC e BD são suas diagonais.

134. O número de diagonais d de um polígono de n lados ($n \geqslant 3$) é dado por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Dedução

Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono de n lados.

Com extremidade num dos vértices do polígono (vértice A_1, por exemplo), temos:

$(n-3)$ diagonais.

Se com extremidade em *cada* vértice temos

$(n-3)$ diagonais,

então com extremidades nos n vértices, temos:

$n(n-3)$ diagonais.

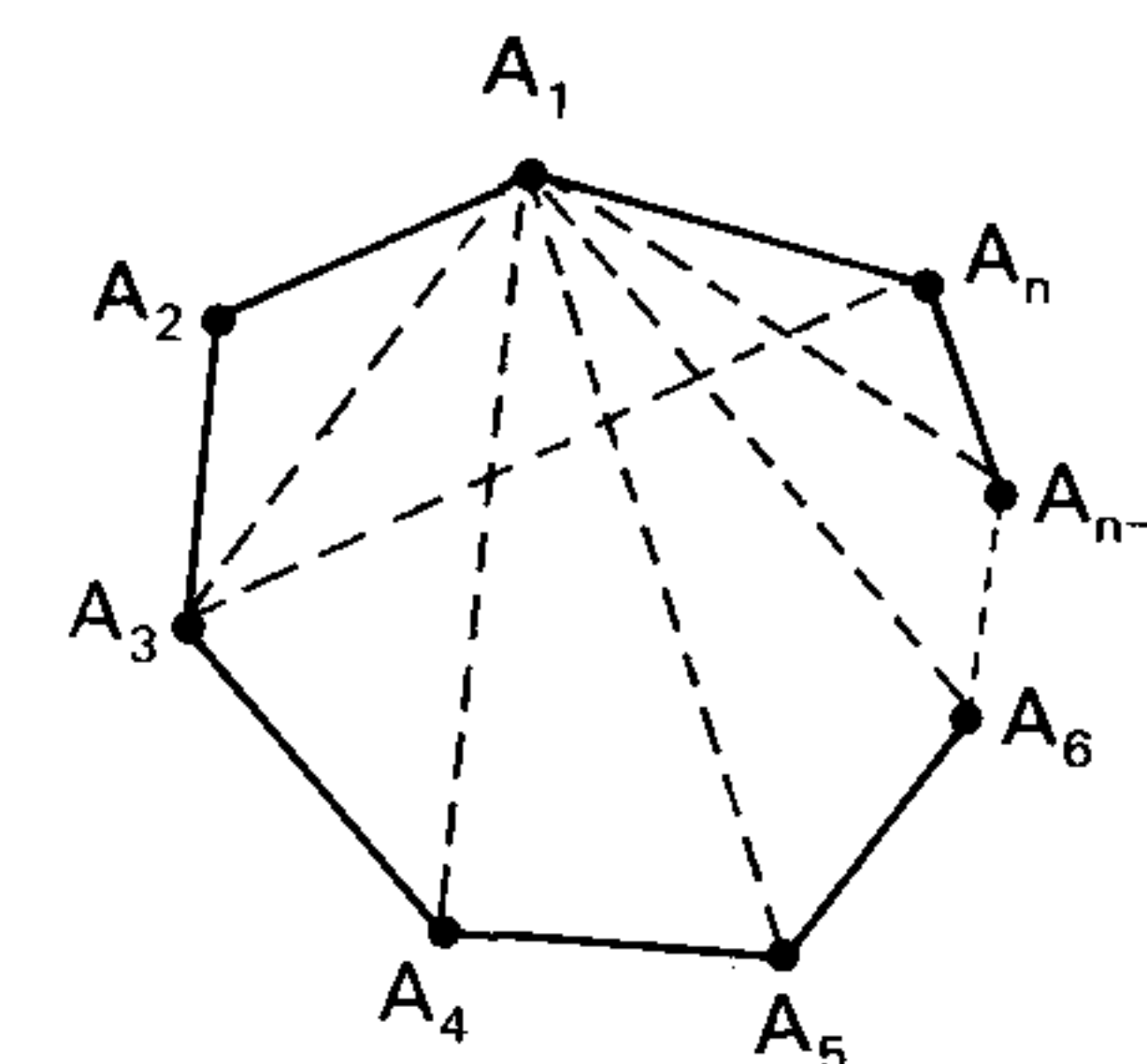
Porém, nesta conta

$n(n-3)$

cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidades em 2 vértices.

(Por exemplo, na conta acima, $\overline{A_1A_3}$ e $\overline{A_3A_1}$ são contadas como duas diagonais, quando na realidade é uma só $\overline{A_1A_3} = \overline{A_3A_1}$.)

Logo, o número d de diagonais é:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

2º) **Soma S_i dos ângulos internos de um polígono *convexo***

135. A soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados ($n \geqslant 3$) é dada por:

$$S_i = (n-2) \cdot 2 \text{ retos}$$

ou, simplesmente,

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Dedução

Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono convexo de n lados.

De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que têm esse vértice como extremo.

O polígono fica então dividido em

$(n - 2)$ triângulos e

a soma S_i dos ângulos internos do polígono

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n$$

é igual à soma dos ângulos internos dos $(n - 2)$ triângulos.

Logo,

$$\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 2 \text{ retos}} \quad \text{ou} \quad \boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ}$$

3º **Soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo**

136. *Ângulo externo* de um polígono convexo é um ângulo suplementar adjacente a um ângulo (interno) do polígono.

137. A soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados $(n \geqslant 3)$ é dada por:

$$S_e = 4 \text{ retos}$$

ou, simplesmente:

A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é:

$$S_e = 360^\circ$$

Dedução

Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono convexo de n lados.

Considerando os ângulos externos

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$$

suplementares adjacentes aos respectivos ângulos internos

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$$

temos:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 + i_1 = 180^\circ \\ e_2 + i_2 = 180^\circ \\ e_3 + i_3 = 180^\circ \\ \vdots \qquad \vdots \\ e_n + i_n = 180^\circ \end{array}\right\} \text{ somando membro a membro as } n \text{ igualdades}$$

$$S_e + S_i = n \cdot 180^\circ$$

Substituindo-se S_i por $(n - 2) \cdot 180^\circ$, vem:

$$S_e + (n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e + n \cdot 180^\circ - 360^\circ = n \cdot 180^\circ$$

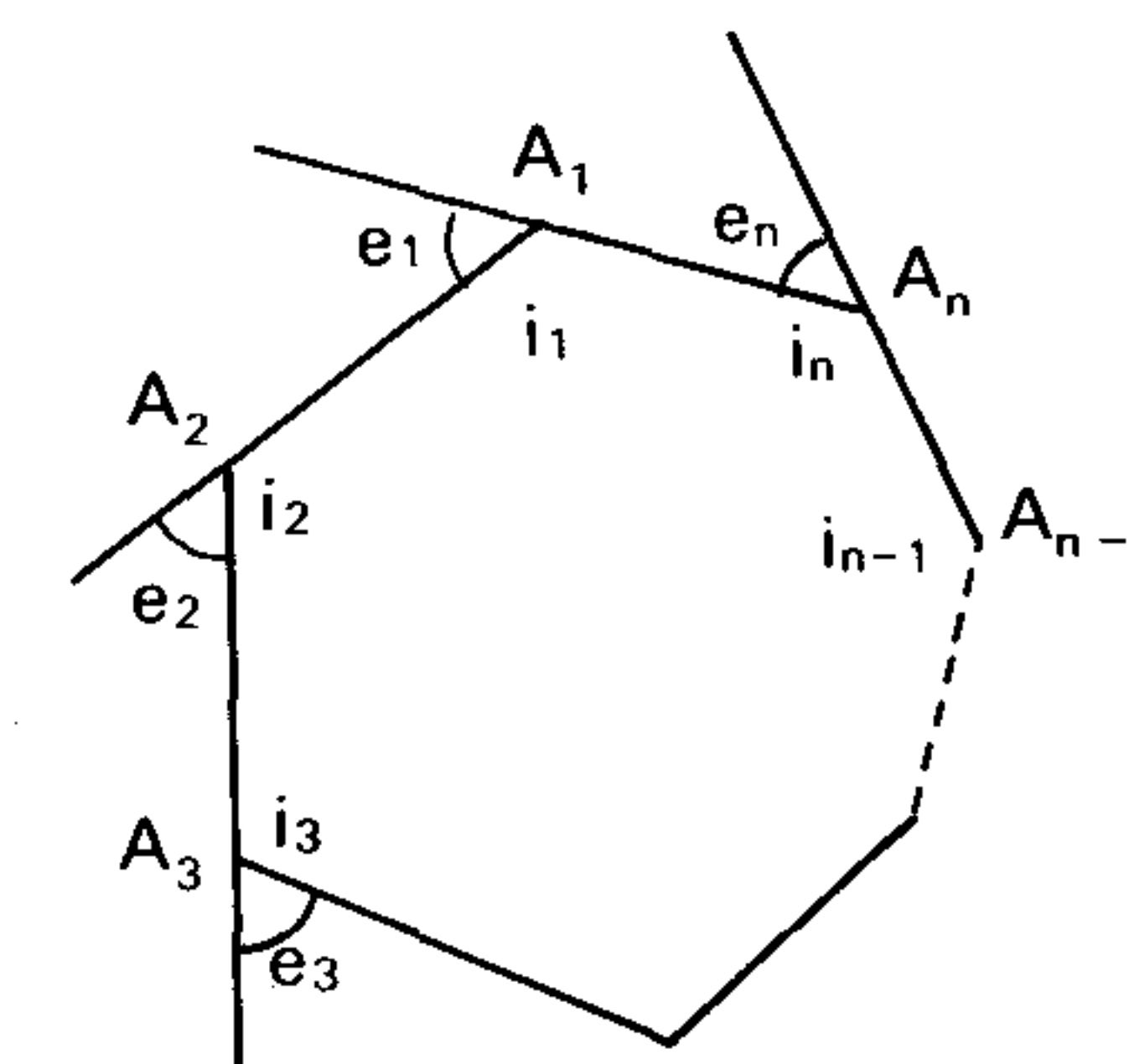
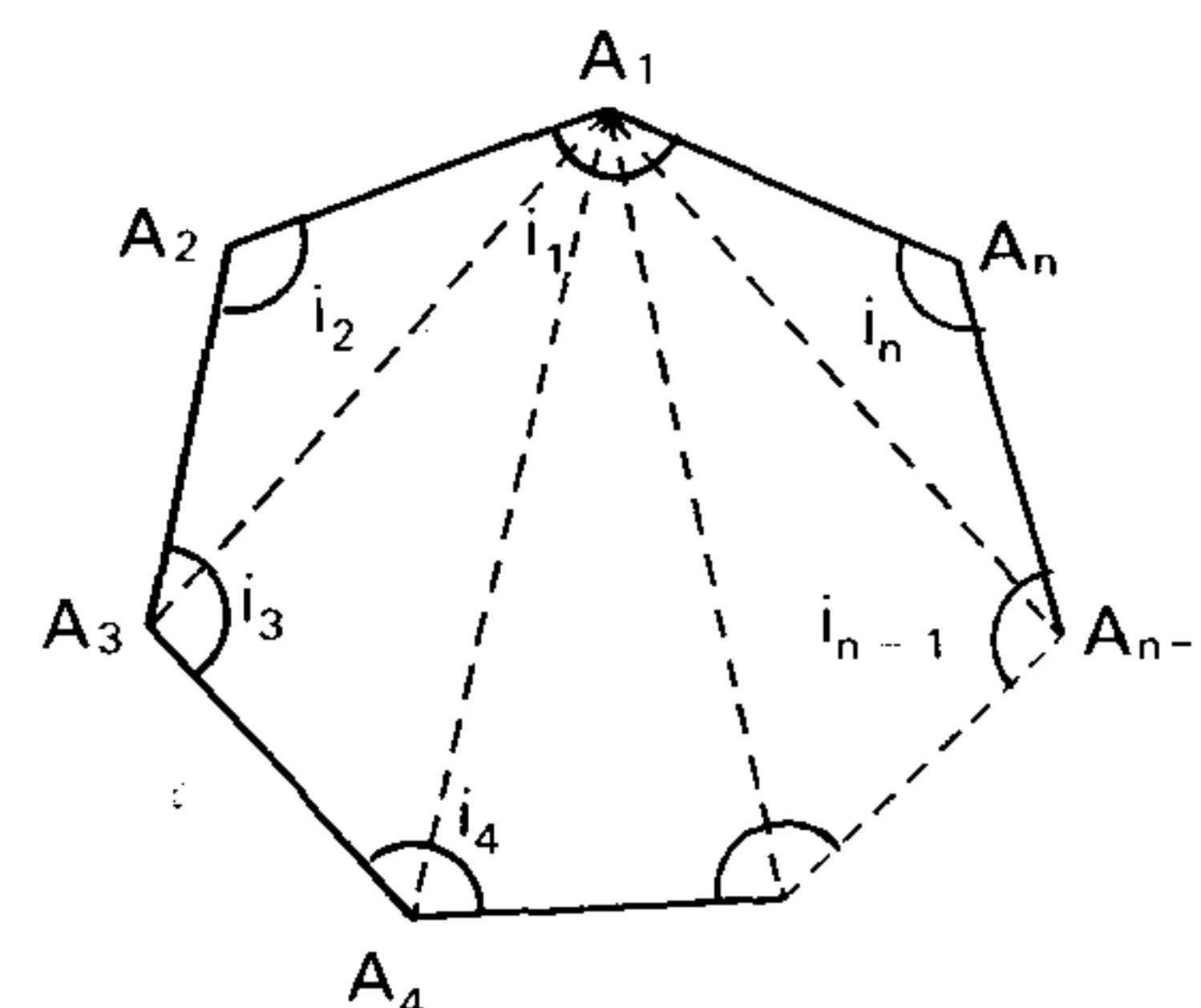
$$\boxed{S_e = 360^\circ}$$

138. *Expressões do ângulo interno* (a_i) *e do ângulo externo* (a_e) *de um polígono regular*

Os ângulos internos de um polígono regular são congruentes.

$$n \cdot a_i = S_i \implies \boxed{n \cdot a_i = (n - 2) \cdot 180^\circ} \implies a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Os ângulos externos de um polígono regular são congruentes.

$$n \cdot a_e = S_e \implies \boxed{n \cdot a_e = 360^\circ} \implies a_e = \frac{360^\circ}{n}$$

E, ainda:

$$a_i + a_e = 180°$$

Nota

Para se calcular a medida do ângulo interno (a_i) de um polígono regular é mais prático se obter, em primeiro lugar, a medida do ângulo externo (a_e) e, pelo suplemento, se encontra a medida do ângulo interno.

EXERCÍCIOS

292. Determine, de preferência sem usar a fórmula, a soma dos ângulos internos de um:

a) pentágono convexo   b) hexágono convexo

293. Determine o valor de x nos casos:

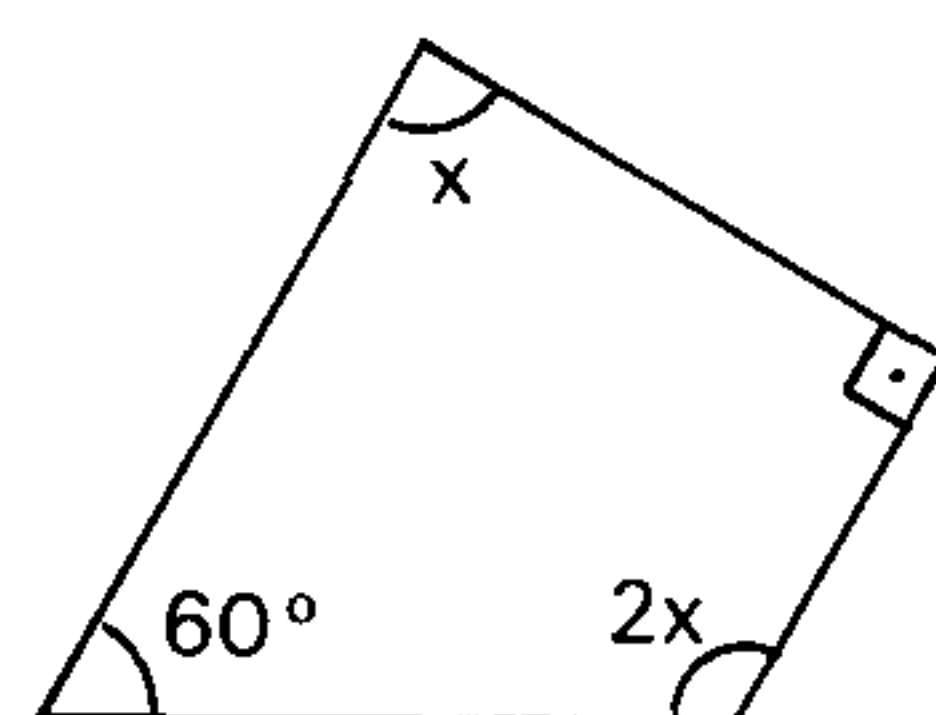
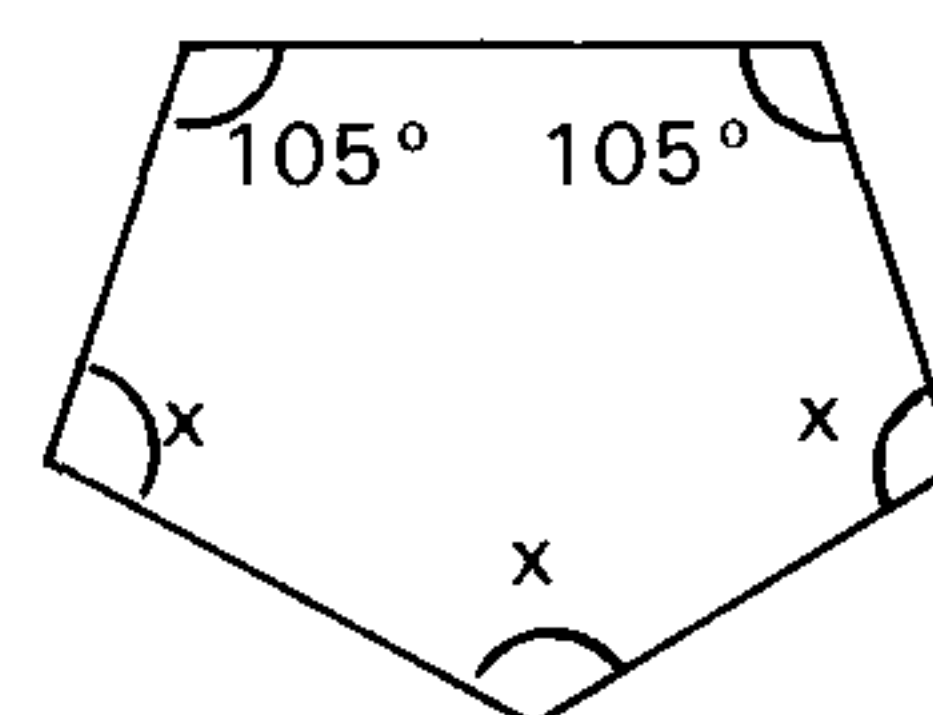
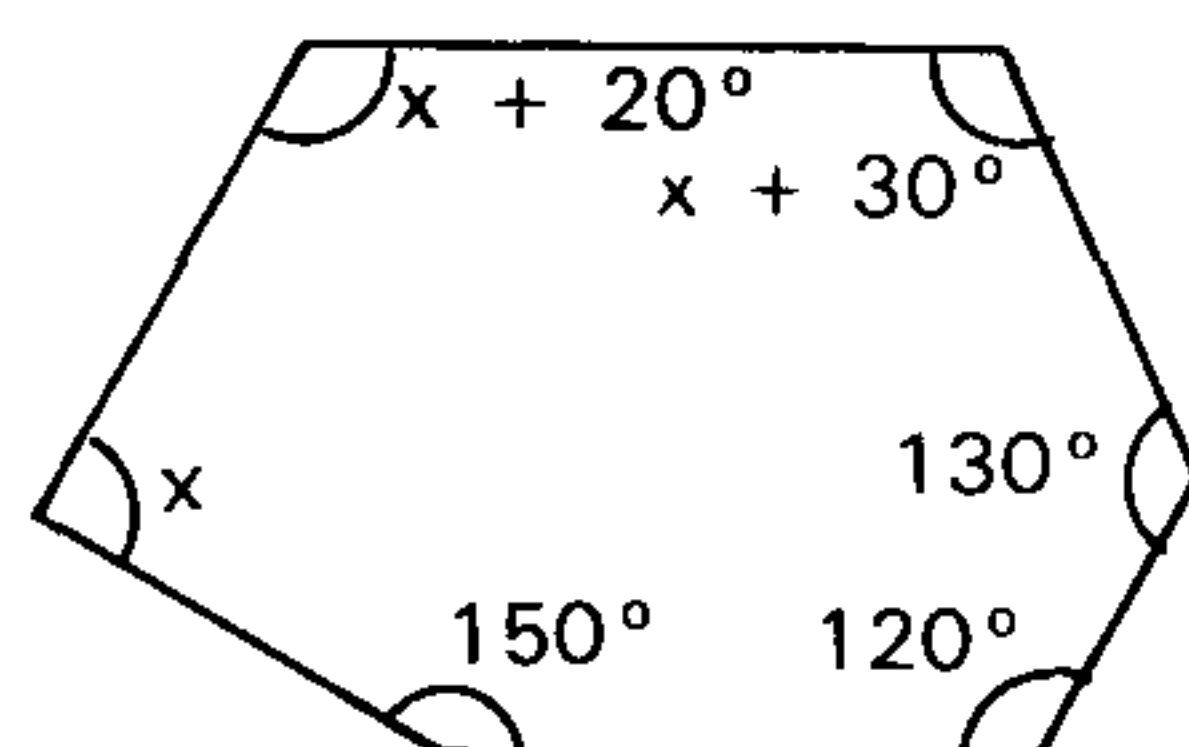
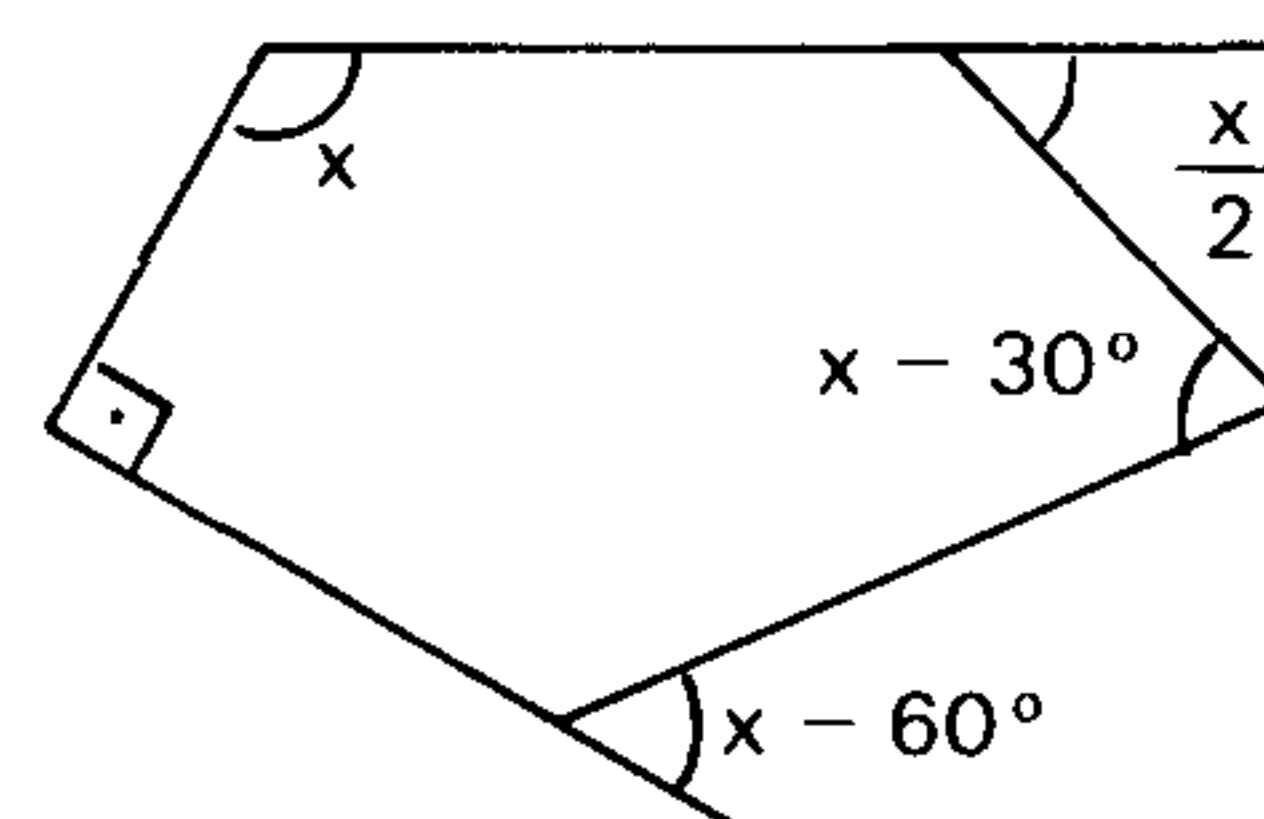
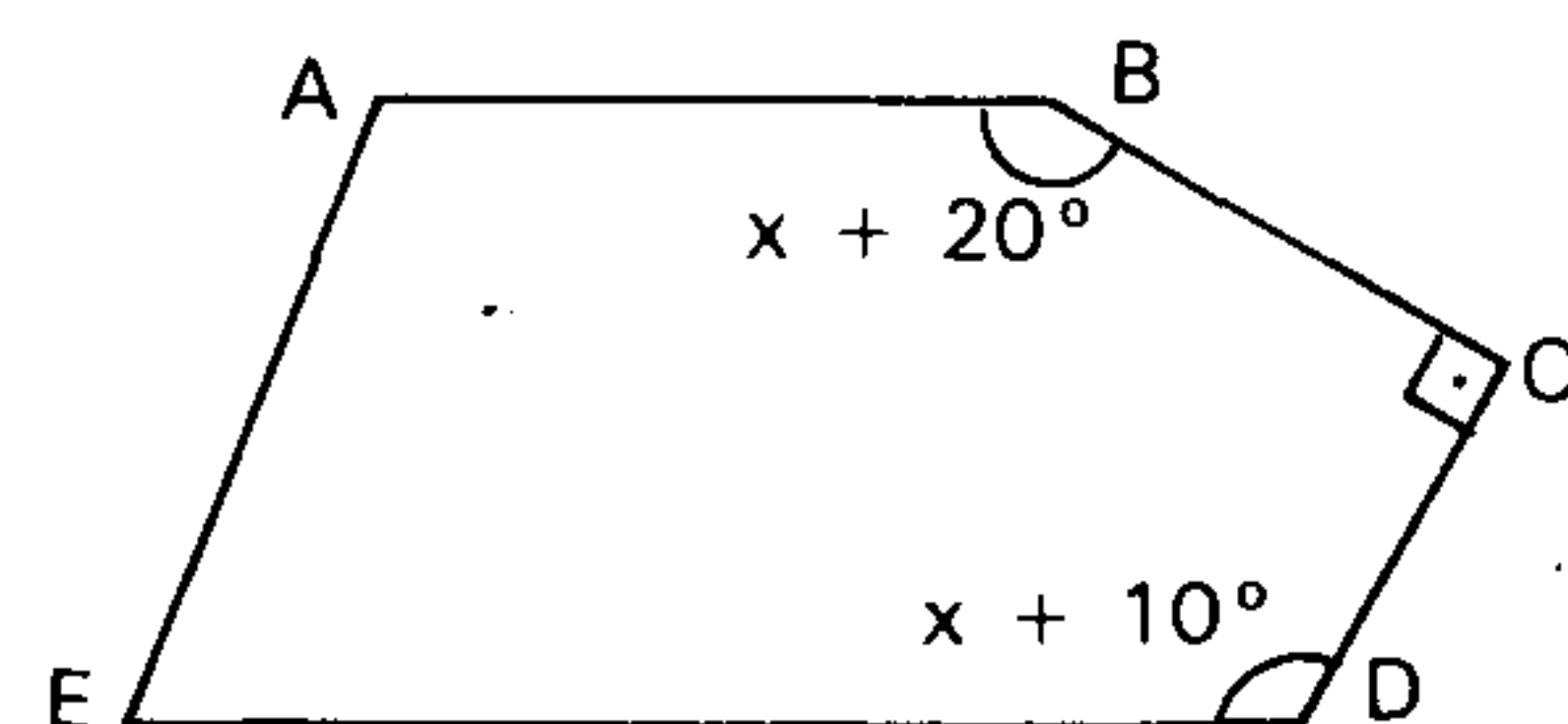
a) x, 60°, 2x

b) 105°, 105°, x, x, x

c) x + 20°, x + 30°, x, 130°, 150°, 120°

d) x, $\frac{x}{2}$, x − 30°, x − 60°

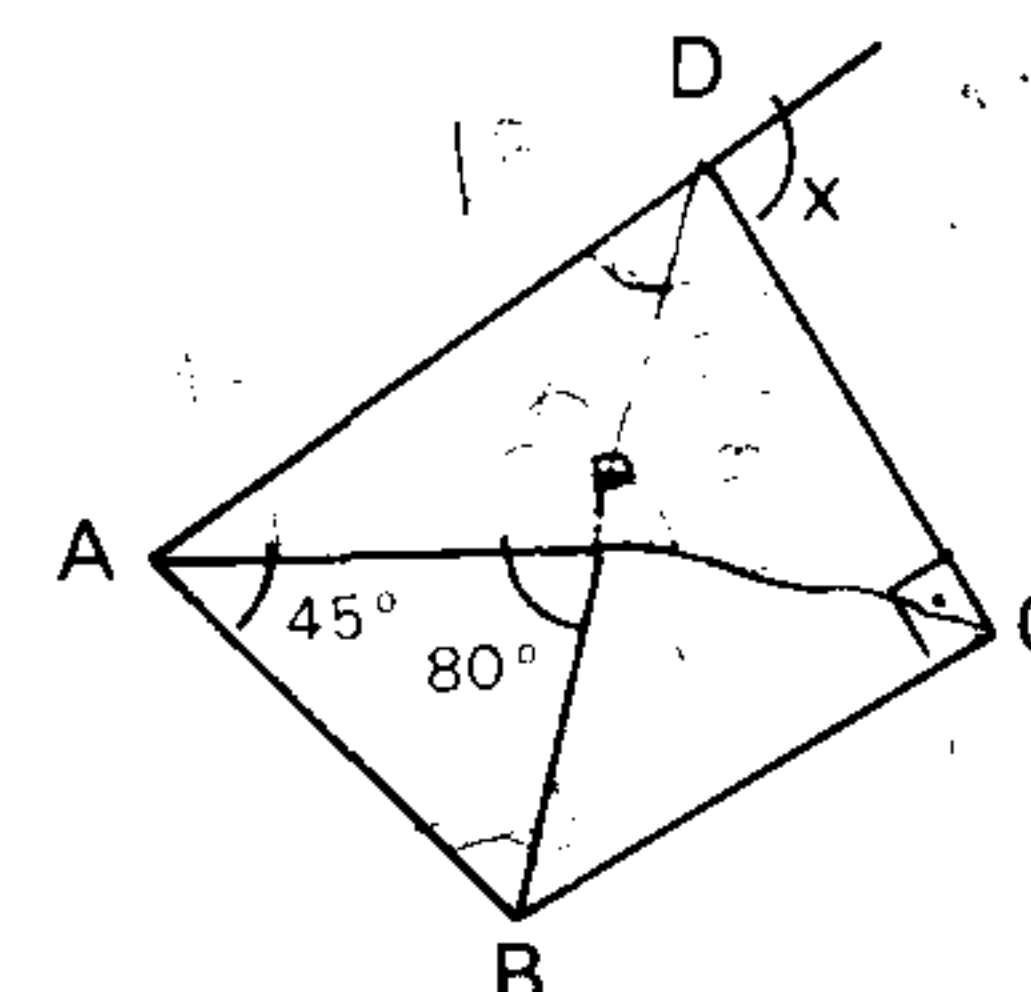
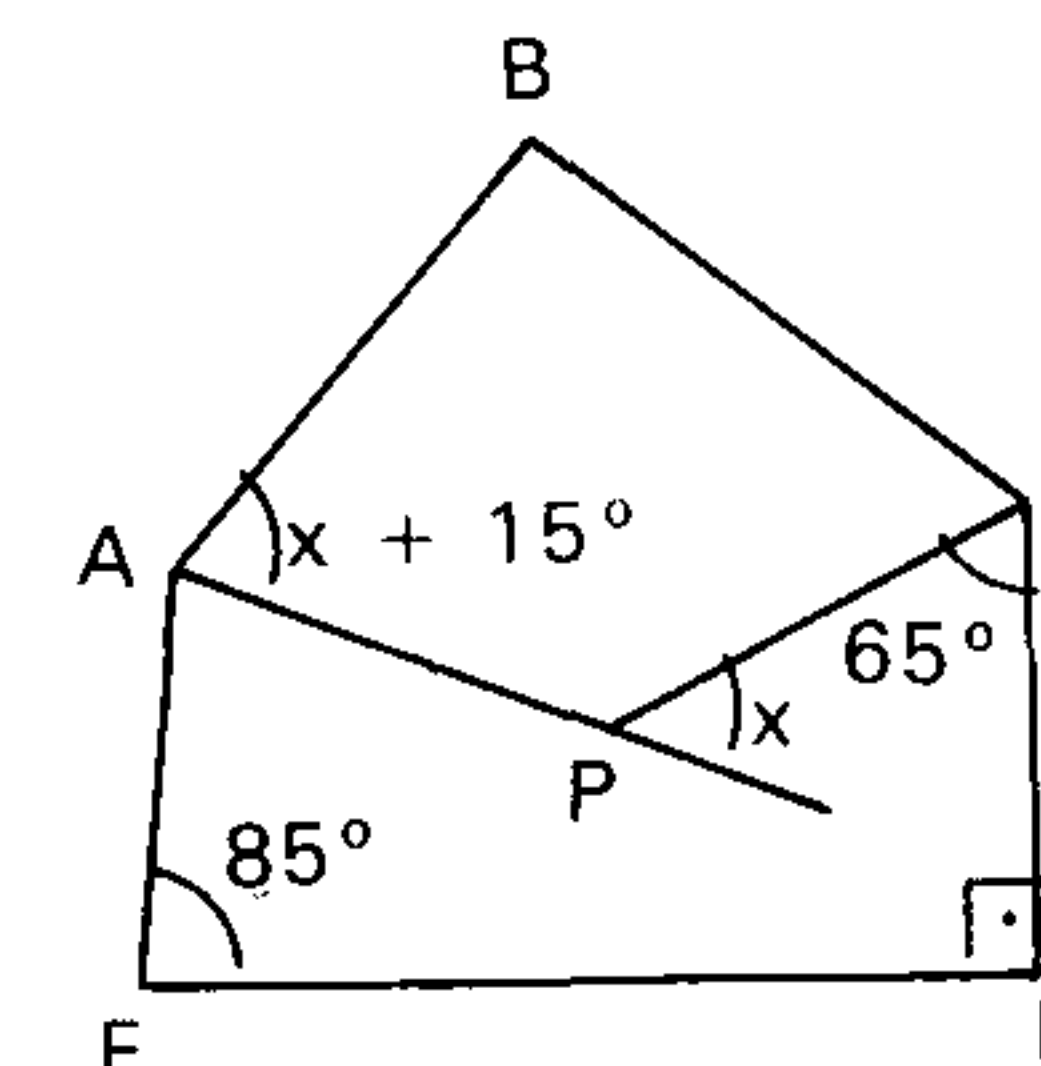
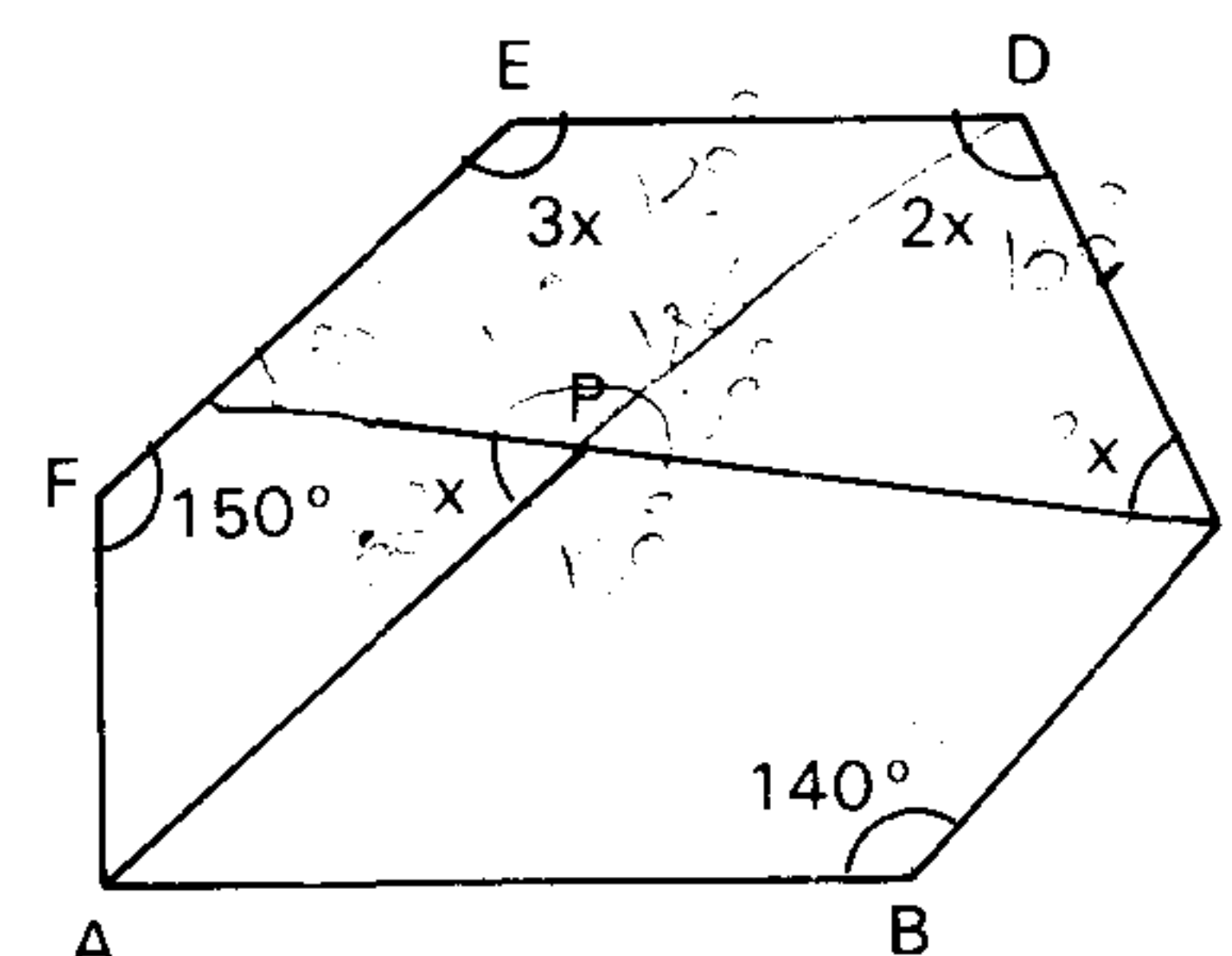
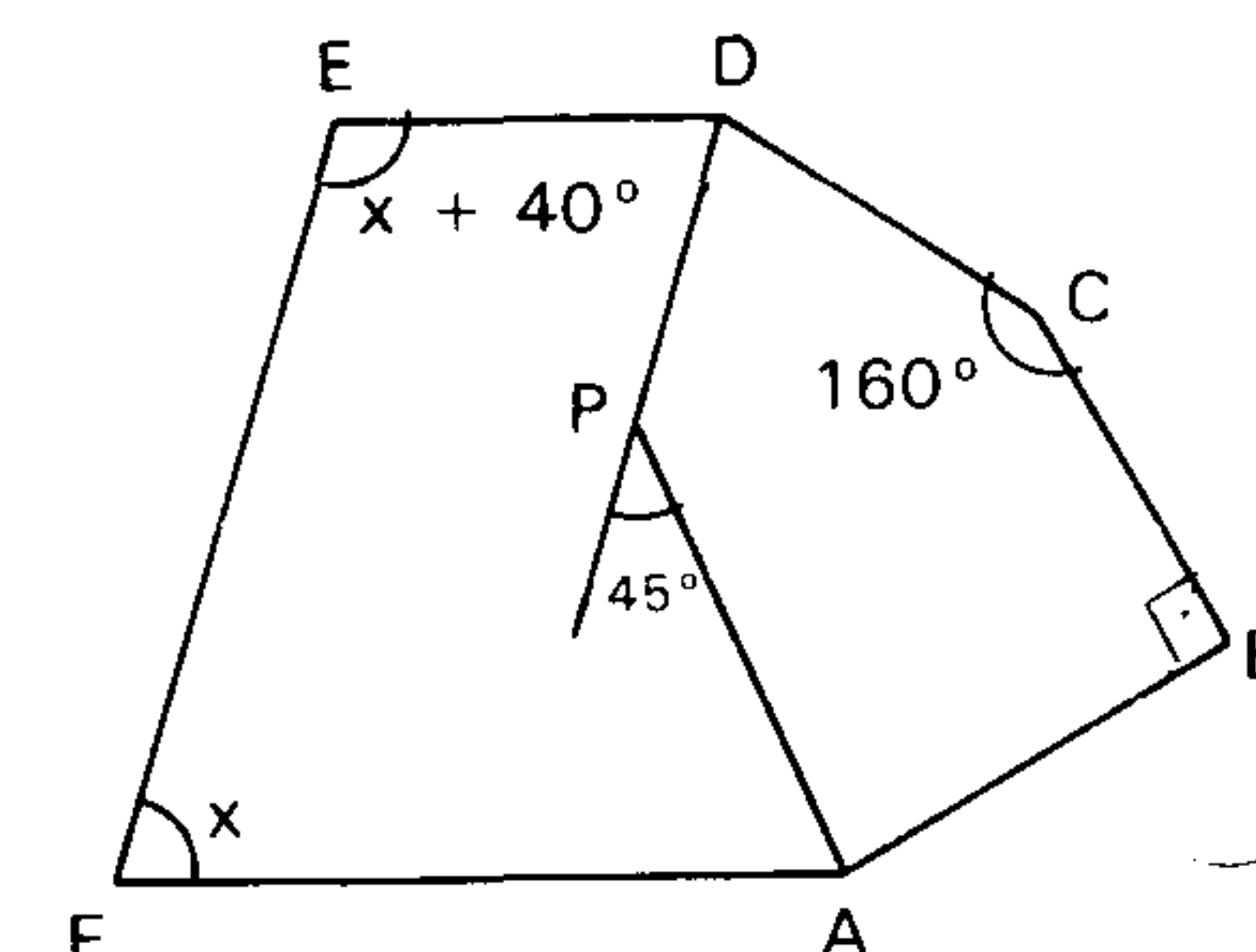
e) $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$

A, B, C, D, E, x + 20°, x + 10°

294. Nos casos abaixo, determine x, sabendo que os segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ e $\overline{DP}$ nas figuras em que aparecem são bissetrizes.

a) D, x, P, A, 45°, 80°, C, B

b) B, A, x + 15°, C, x, 65°, P, 85°, E, D

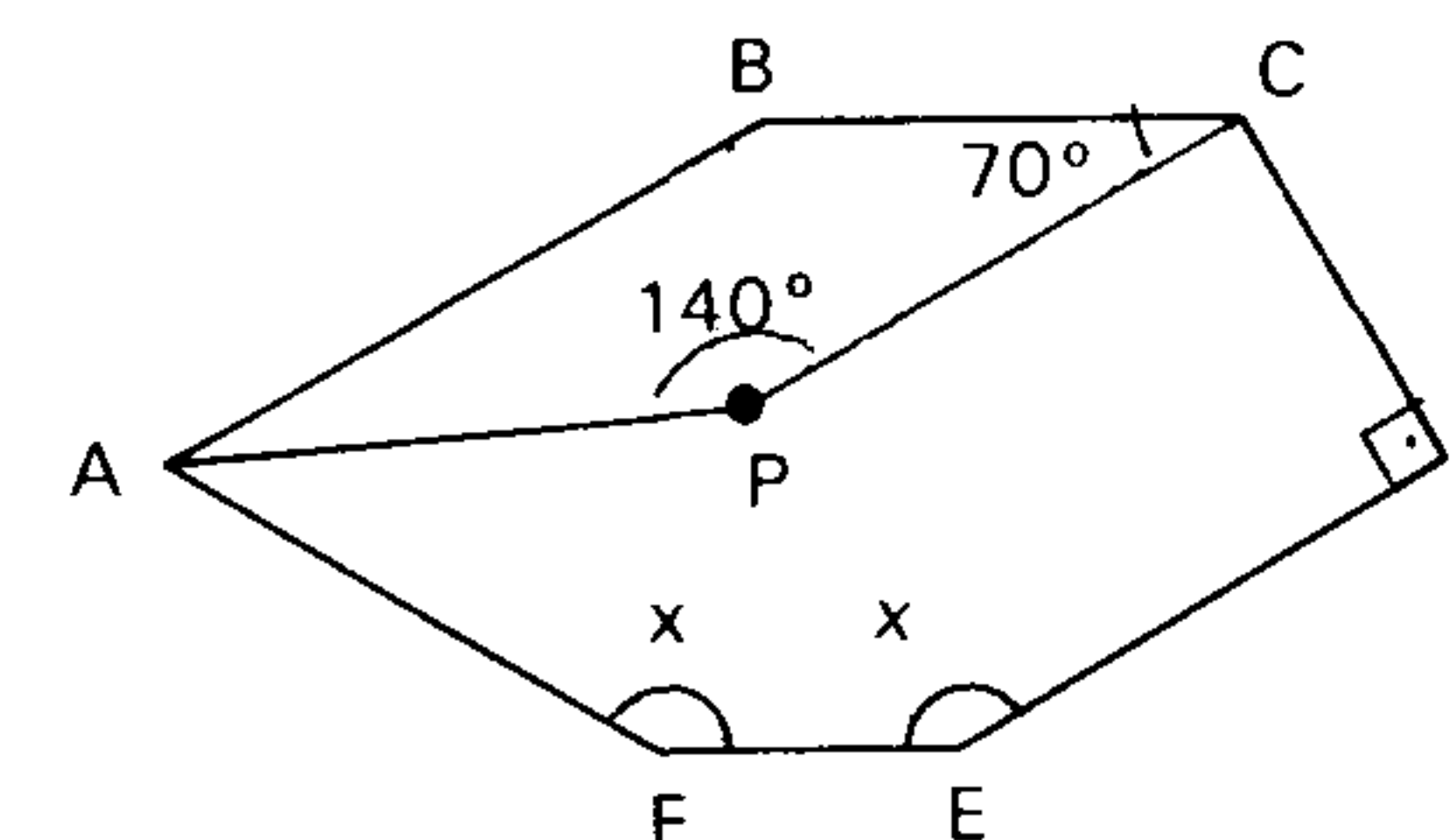
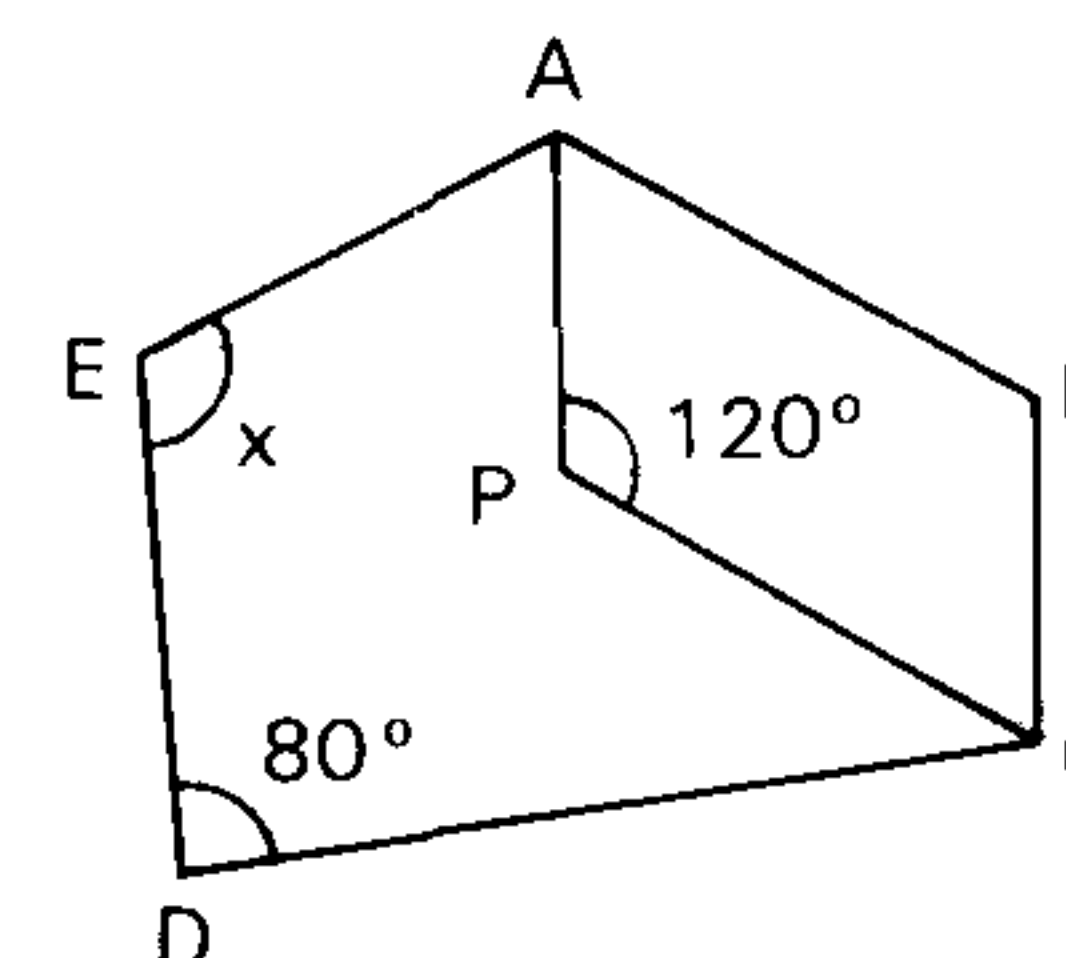
c) E, D, 3x, 2x, P, F, 150°, x, C, 140°, A, B

d) E, D, x + 40°, C, P, 160°, 45°, B, x, F, A

295. Sendo $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{C}$, determine x.

a) $\overline{AB} \parallel \overline{PC}$
$\overline{AP} \parallel \overline{BC}$

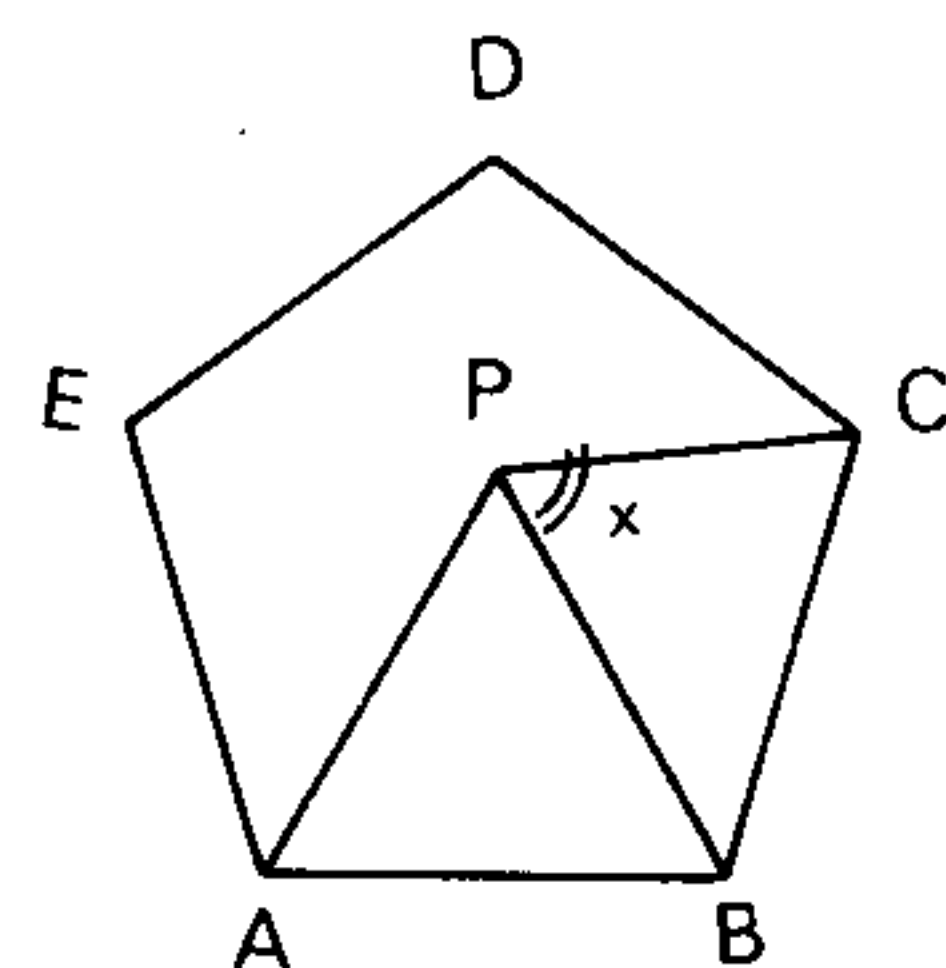
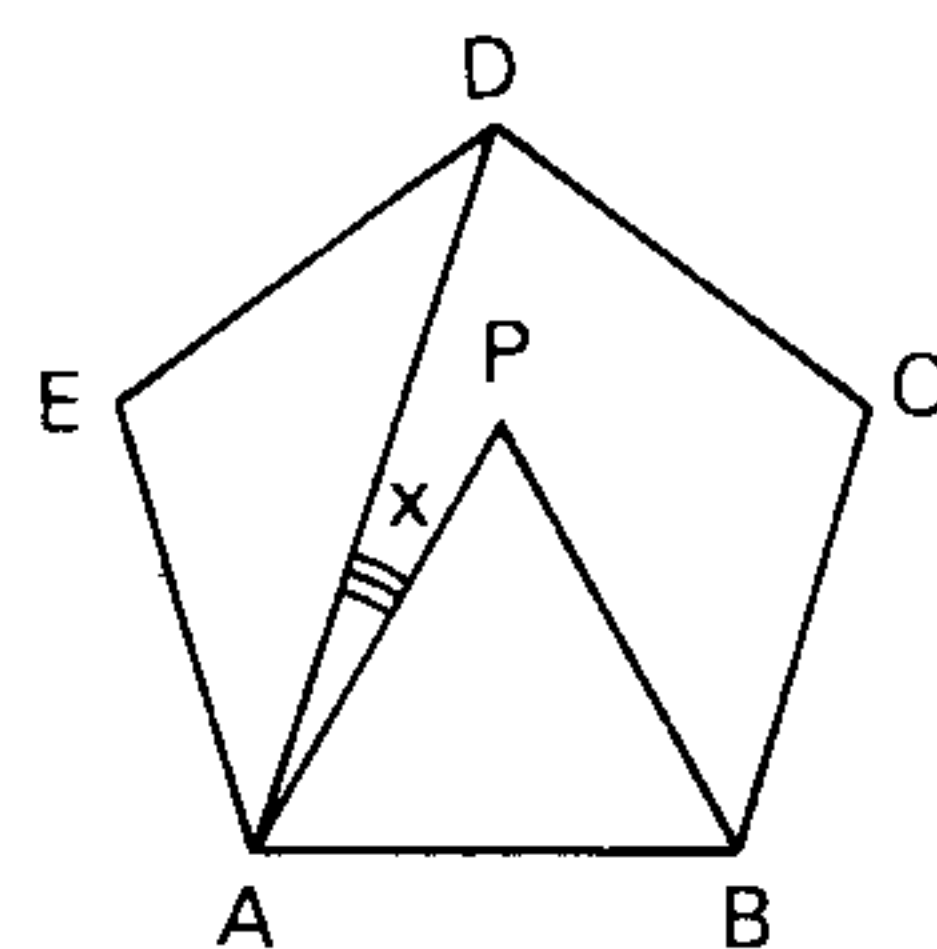
A, E, x, P, 120°, B, 80°, C, D

b) $\overline{AB} \parallel \overline{PC}$

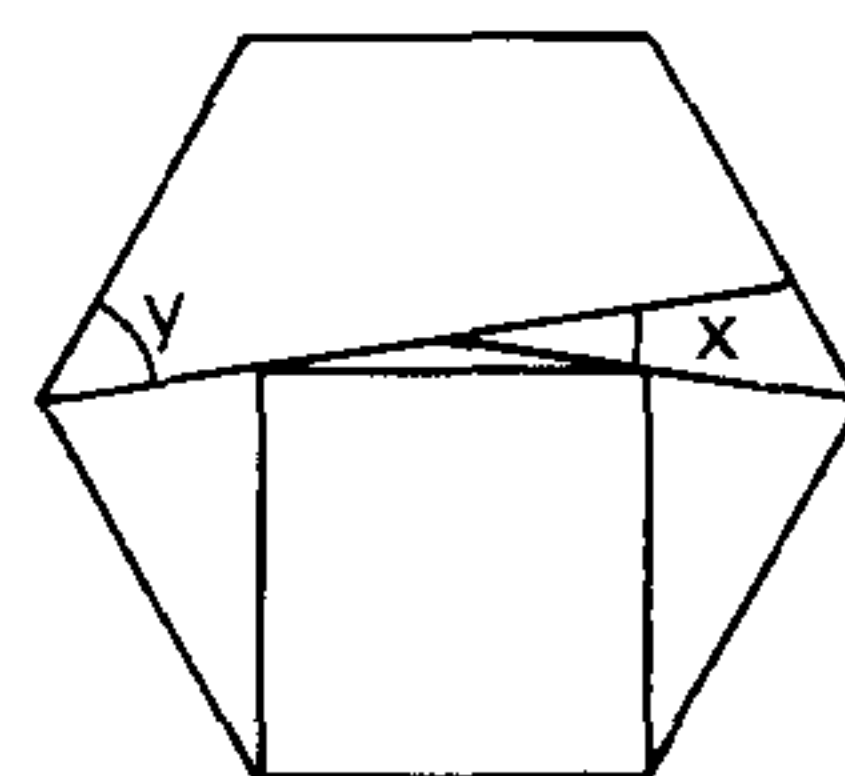
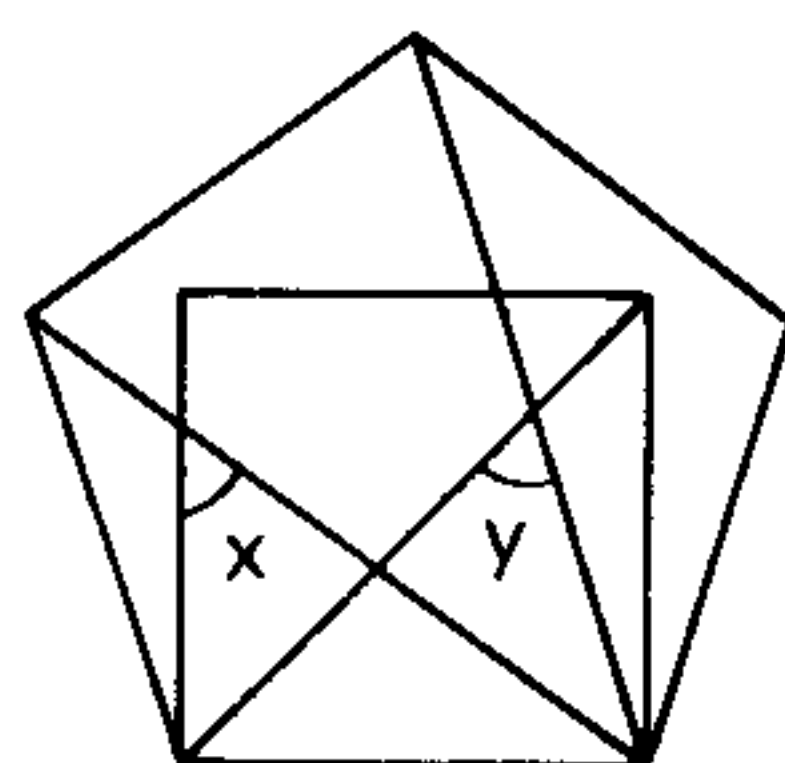
B, C, 70°, 140°, A, P, D, x, x, F, E

296. Determine o ângulo interno e o ângulo externo de um:

a) triângulo equilátero;
b) quadrado;
c) pentágono regular;
d) hexágono regular.

297. Se o triângulo *ABP* é equilátero e *ABCDE* é pentágono regular, determine *x* nos casos:

a)

b)

298. Determine os valores de *x* e *y* nos casos:

a) pentágono regular e quadrado

b) hexágono regular e quadrado

299. Calcule a soma dos ângulos internos de um eneágono.

300. Calcule a soma dos ângulos internos de um decágono.

301. Calcule a soma dos ângulos internos de um icoságono.

302. Qual é o polígono cuja soma dos ângulos internos vale *1800°*?

303. Calcule o número de diagonais de um decágono.

304. Calcule o número de diagonais de um icoságono.

305. Determine o polígono cujo número de diagonais é o triplo do número de lados.

306. Determine o polígono cujo número de diagonais é o quádruplo do número de lados.

307. Determine o polígono que tem *9* diagonais distintas.

308. Determine o maior ângulo de um pentágono cujos ângulos internos estão na razão *3 : 3 : 3 : 4 : 5*.

309. Um polígono regular possui a partir de um de seus vértices tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Ache:

a) o polígono;
b) o total de diagonais;
c) a soma dos ângulos internos;
d) a soma dos ângulos externos;
e) a medida de cada ângulo interno e de cada ângulo externo.

Solução

1) Número de diagonais do hexágono

$$\left(n = 6,\ d = \frac{n(n-3)}{2}\right) \Longrightarrow d = \frac{6(6-3)}{2} \Longrightarrow d = 9$$

2) Novo polígono

De cada vértice partem n − 3 diagonais. Então:

$n - 3 = 9 \Longrightarrow n = 12.$

a) O polígono é o dodecágono (n = 12).

b) $d = \frac{n(n-3)}{2} \Longrightarrow d = \frac{12(12-3)}{2} \Longrightarrow d = 54$ (diagonais).

c) $S_i = (n-2) \cdot 180° \Longrightarrow S_i = (12-2) \cdot 180° \Longrightarrow S_i = 1\,800°$

d) A soma dos ângulos externos é constante: $S_e = 360°$.

e) $n \cdot a_e = 360° \Longrightarrow 12 \cdot a_e = 360° \Longrightarrow a_e = 30°$
$a_i + a_e = 180° \Longrightarrow a_i = 180° - 30° \Longrightarrow a_i = 150°.$

310. Quantas diagonais podemos traçar, partindo de um vértice de um polígono convexo de *20* lados?

311. Determine o número de lados de um polígono convexo, sabendo que de um de seus vértices partem *25* diagonais.

312. Determine o polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é igual ao número de diagonais multiplicado por *180°*.

313. Podem os ângulos internos e externos de um polígono regular apresentar medidas iguais? Em que caso isso ocorre?

314. Determine o número de diagonais de um polígono regular convexo cujo ângulo externo vale *24°*.

315. A razão entre o ângulo interno e o ângulo externo de um polígono regular é *9*. Determine o número de lados do polígono.

316. O ângulo interno de um polígono regular vale *1,5* vez o seu ângulo externo. Determine o número de lados do polígono.

317. O ângulo externo de um polígono regular é igual ao dobro do seu ângulo interno. Determine o número de diagonais desse polígono.

318. A soma dos ângulos internos com a dos ângulos externos de um polígono regular vale *1 800°*. Determine o número de diagonais do polígono.

319. Determine o número de lados de um polígono convexo regular cujo ângulo interno é o quíntuplo do externo.

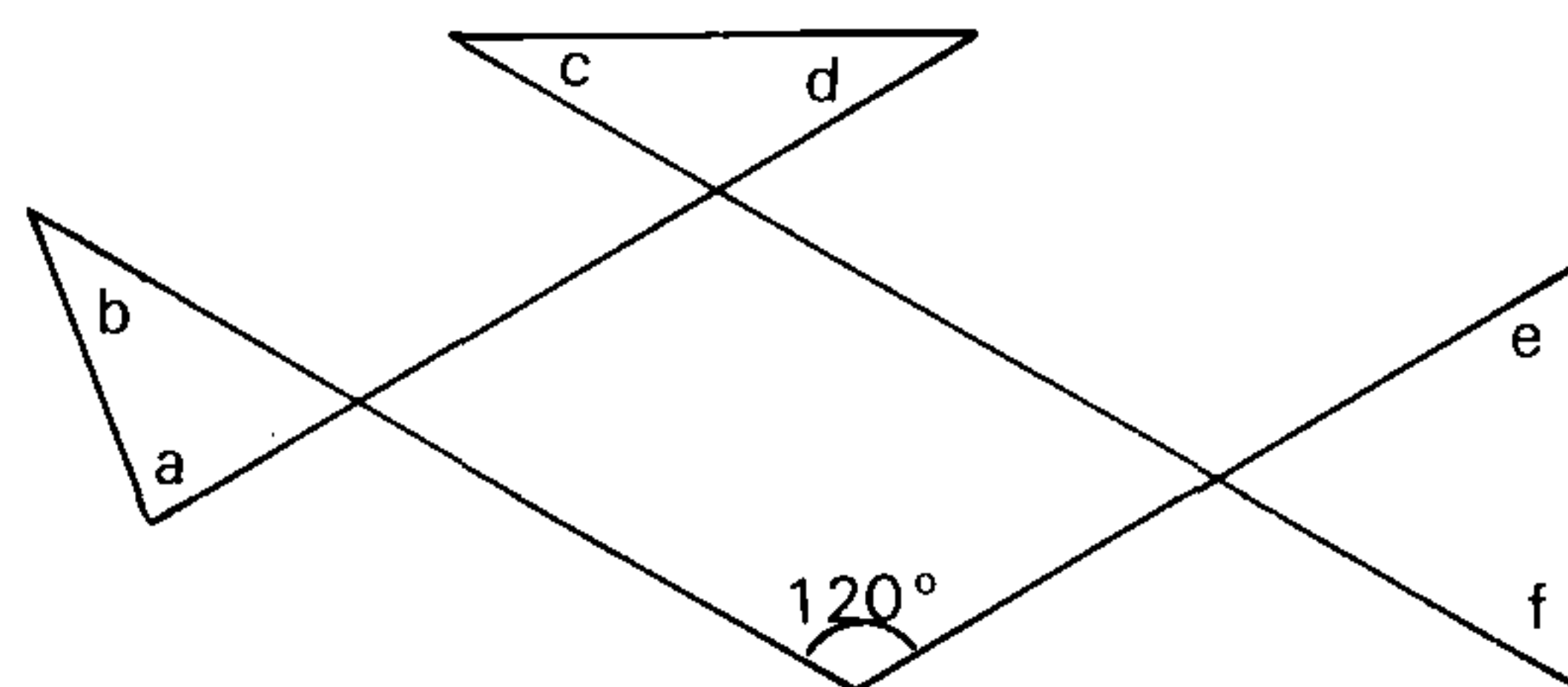
320. Determine o número de lados de um polígono regular *ABCDE* ..., sabendo que as bissetrizes $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo que vale $\frac{2}{9}$ do seu ângulo interno.

321. Determine a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um polígono regular *ABCD* ... de *20* lados.

322. As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de *24°*. Determine o número de diagonais desse polígono.

323. Aumentando o número de lados de um polígono em *3*, seu número de diagonais aumenta em *21*. Determine o número de diagonais desse polígono.

324. Na figura abaixo, determine a soma das medidas dos ângulos.

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} + \hat{f}$.

325. Dados dois polígonos com *n* e *n + 6* lados, respectivamente, calcule *n*, sabendo que um dos polígonos tem *39* diagonais mais do que o outro.

326. Três polígonos convexos têm *n*, *n + 1*, *n + 2* lados, respectivamente. Sendo *2 700°* a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos, determine o valor de *n*.

327. Os números que exprimem o número de lados de três polígonos são *n − 3*, *n* e *n + 3*. Determine o número de diagonais de cada um dos polígonos, sabendo que a soma de todos os seus ângulos internos vale *3 240°*.

Solução

$$n_1 = n - 3; \quad n_2 = n; \quad n_3 = n + 3$$

$(n - 3 - 2)180° + (n - 2)180° + (n + 3 - 2)180° = 3\,240°$

$(n - 5)180° + (n - 2)180° + (n + 1)180° = 3\,240°$

$(n - 5 + n - 2 + n + 1)180° = 3\,240°$

$3n - 6 = 18 \implies 3n = 24 \implies n = 8.$

Então:

$n_1 = 5$ e $d_1 = \dfrac{5(5 - 3)}{2} = 5$ $\qquad$ $n_2 = 8$ e $d_2 = \dfrac{8(8 - 3)}{2} = 20$

$n_3 = 11$ e $d_3 = \dfrac{11(11 - 3)}{2} = 44.$

328. Três polígonos têm o número de lados expressos por números inteiros consecutivos. Sabendo que o número total de diagonais dos três polígonos é igual a *28*, determine o polígono com maior número de diagonais.

329. Dois polígonos convexos têm o número de lados expresso pelos números *n* e *n + 4*. Determine o valor de *n*, sabendo que um dos polígonos tem *34* diagonais mais do que o outro.

330. Um polígono convexo tem *5* lados mais do que o outro. Sabendo que o número total de diagonais vale *68*, determine o número de diagonais de cada polígono.

331. Dados dois polígonos regulares, com *(n + 1)* lados e *n* lados, respectivamente, determine *n*, sabendo que o ângulo interno do primeiro polígono excede o ângulo interno do segundo em *5°*.

332. Um polígono regular possui *30* diagonais que não passam pelo seu centro. Quanto mede cada ângulo interno dele?

Solução

Um polígono regular só tem diagonais passando pelo centro se o número *n* de lados for par e o número de diagonais que passam pelo centro for $\frac{n}{2}$.

Neste problema temos que considerar 2 casos:

1º) n é ímpar — Não há diagonal passando pelo centro.
Neste caso o número total de diagonais é $d = 30$.
Vamos calcular o número de lados:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 30 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n - 60 = 0$$

As raízes da equação não são números naturais ($\Delta = 249$). Logo, não existe polígono com *30* diagonais e com número ímpar de lados.

2º) n é par — Há $\frac{n}{2}$ diagonais passando pelo centro.

Neste caso o número total de diagonais é $d = \frac{n}{2} + 30$.

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow \frac{n}{2} + 30 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 4n - 60 = 0$$

A raiz da equação que é número natural é $n = 10$.
O polígono é o decágono regular.
Cálculo do ângulo interno:

$$a_i = 180° - a_e = 180° - \frac{360°}{10} \Rightarrow a_i = 144°$$

333. Qual o polígono regular que tem *6* diagonais passando pelo seu centro?

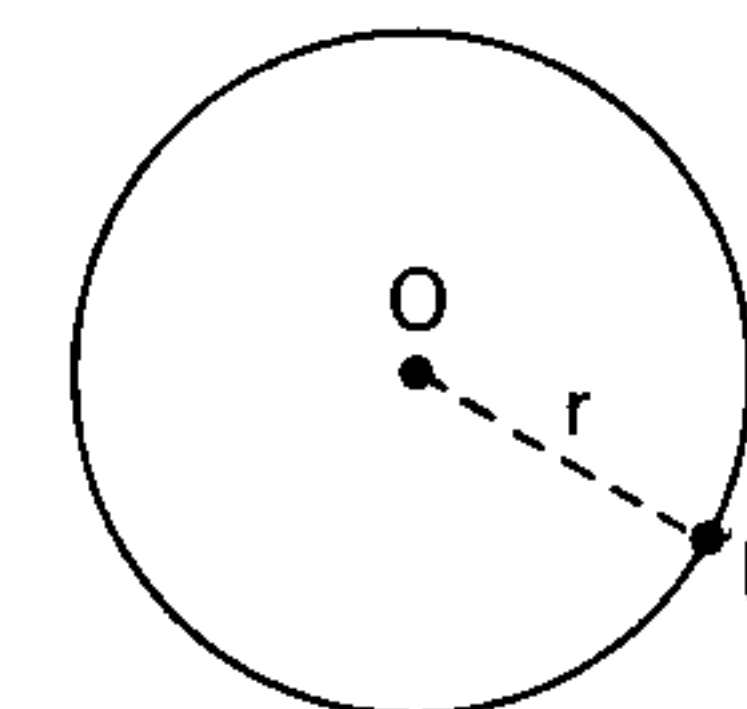
334. Um polígono regular tem *170* diagonais. Quantas passam pelo centro?

335. O ângulo interno de um polígono regular mede *140°*. Quantas diagonais passam pelo centro?

CAPÍTULO X

Circunferência e Círculo

I. Definições — Elementos

139. *Circunferência* é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é *igual* a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o *centro* e a distância dada é o *raio* da circunferência.

Dados: um plano α, um ponto O de α e uma distância r,

$$\lambda(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} = r\}$$

onde $\lambda(O, r)$ representa a circunferência de centro O e raio r.

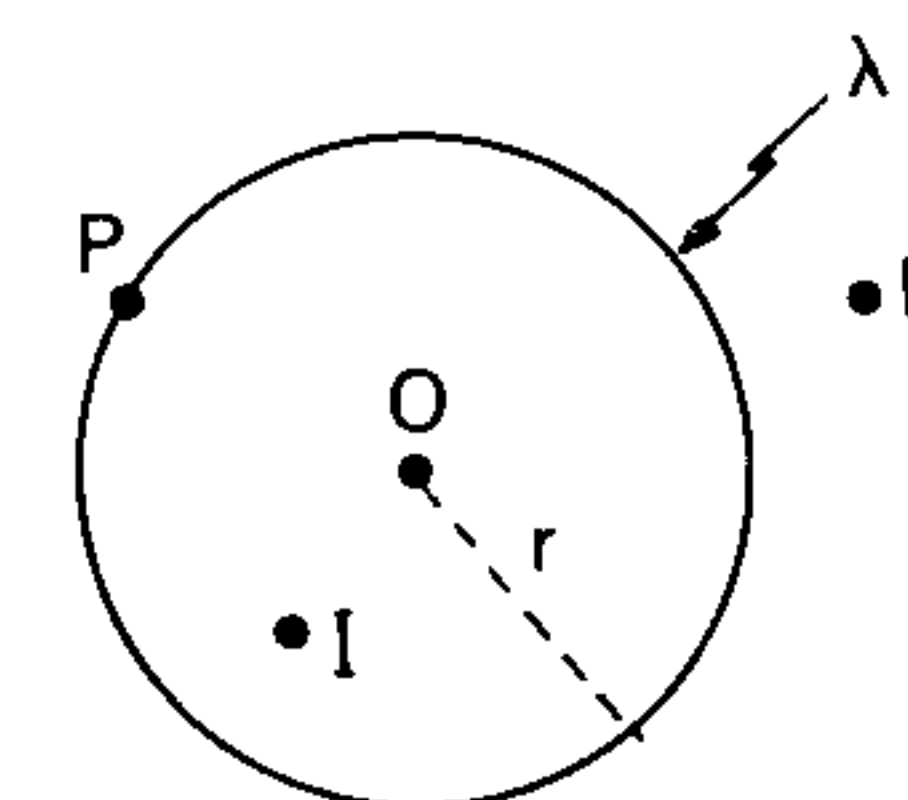
140. *Posição de ponto e circunferência*

Dado um ponto X e uma circunferência $\lambda(O, r)$,

X é *interno* a $\lambda \Leftrightarrow d_{X,O} < r$

X *pertence* a $\lambda \Leftrightarrow d_{X,O} = r$

X é *externo* a $\lambda \Leftrightarrow d_{X,O} > r$

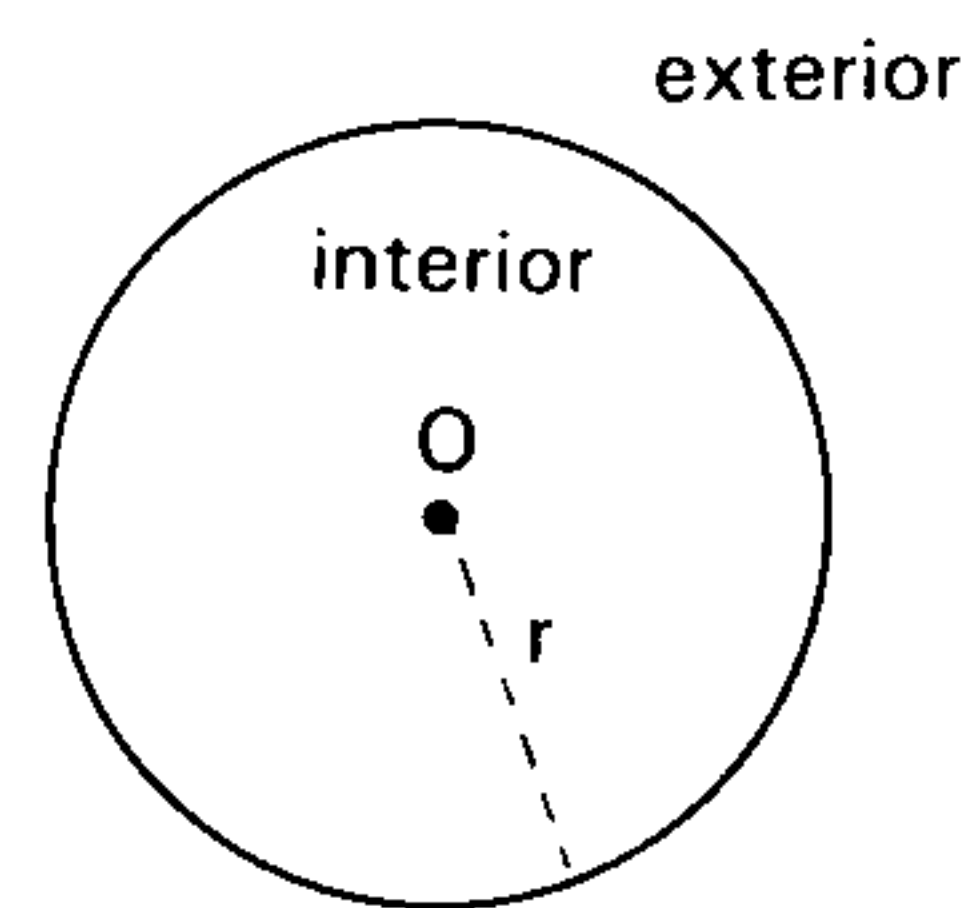
Na figura, I é interno a λ, P pertence a λ e E é externo a λ.

141. *Interior e exterior*

O conjunto dos pontos internos a uma circunferência é seu *interior*.

O conjunto dos pontos externos a uma circunferência é seu *exterior*.

Sendo $\lambda(O, r)$ uma circunferência de um plano α:

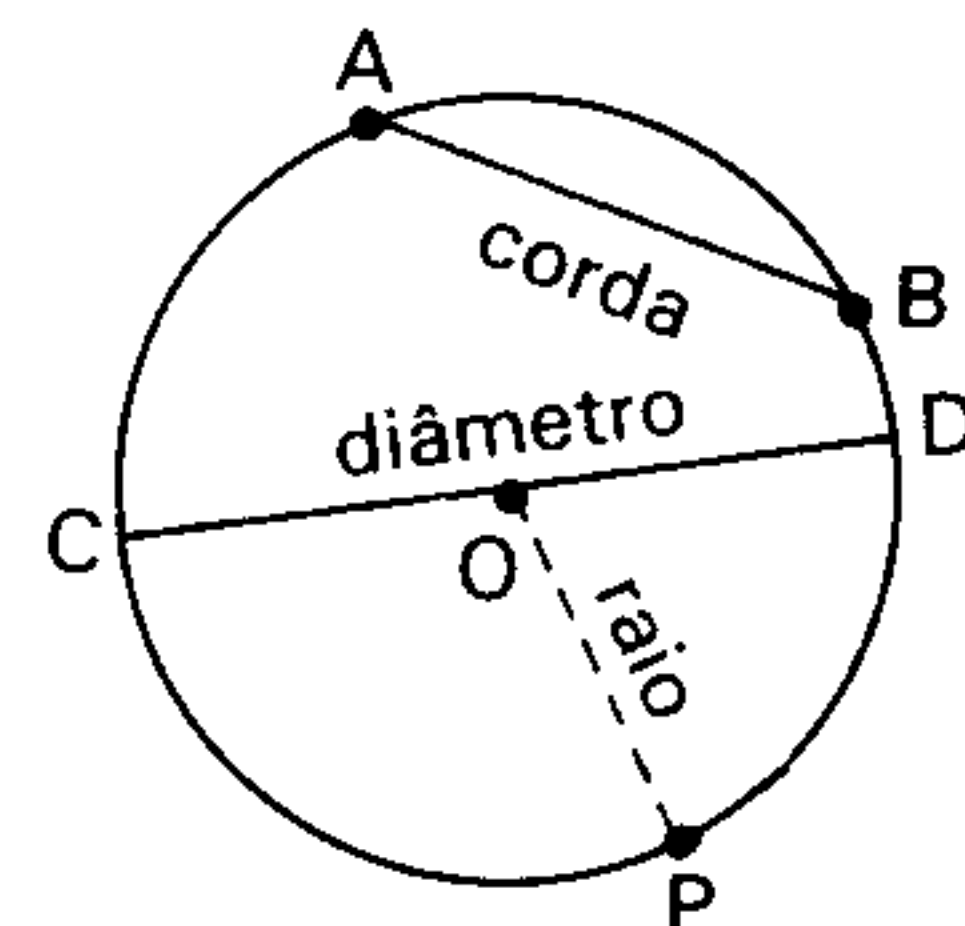
interior de $\lambda = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} < r\}$

exterior de $\lambda = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} > r\}$

142. *Corda, diâmetro e raio*

Corda de uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.

$\overline{AB}$ é uma corda.

Diâmetro de uma circunferência é uma corda que passa pelo centro.

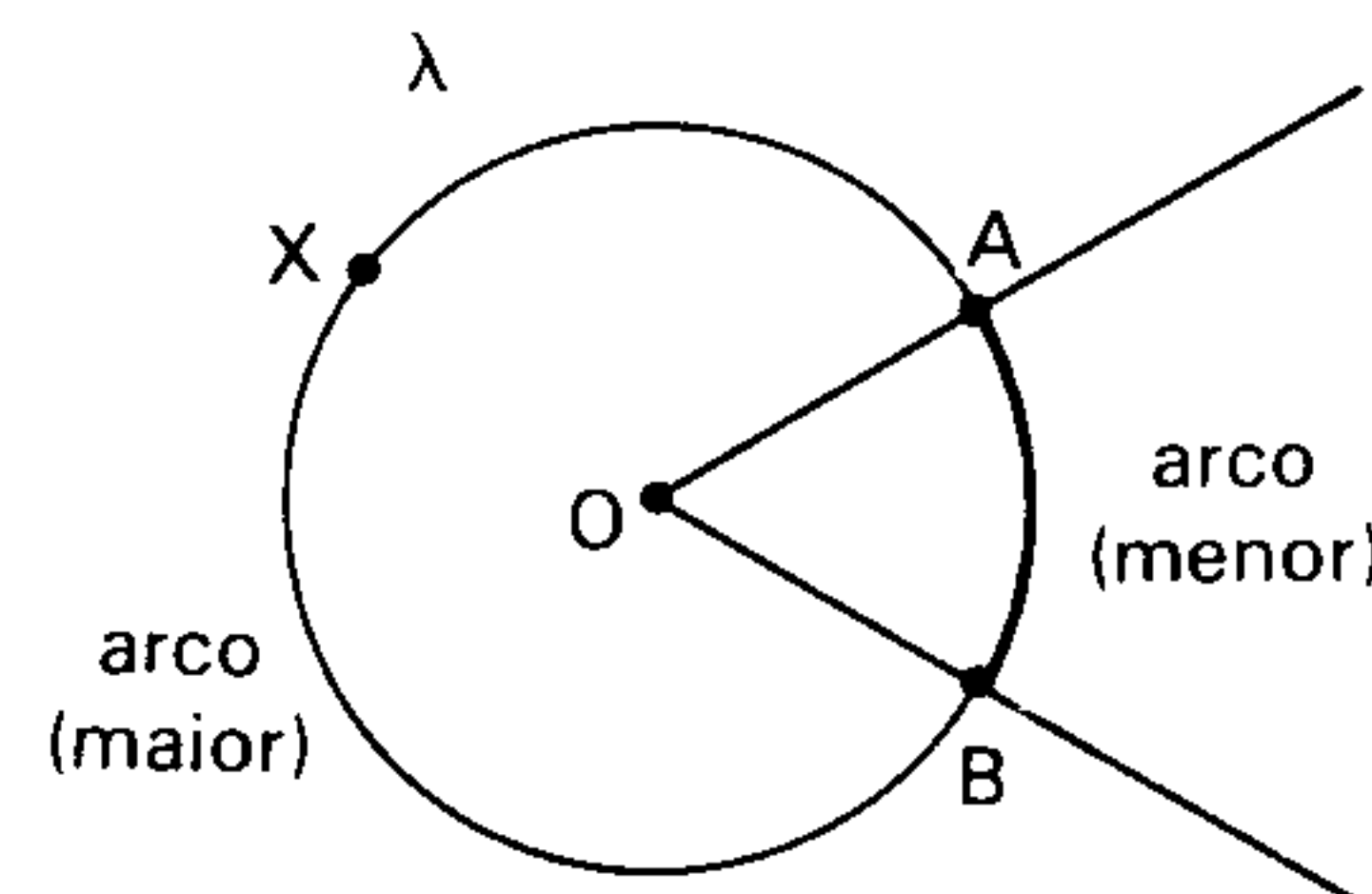
$\overline{CD}$ é um diâmetro.

Um *raio* de uma circunferência é um segmento com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência.

$\overline{OP}$ é um raio.

143. *Arco de circunferência e semicircunferência*

Consideremos uma circunferência λ de centro O e sejam A e B dois pontos de λ que não sejam extremidades de um diâmetro. Nessas condições, temos:

a) *arco menor* $\widehat{AB}$ é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de λ que estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$;

b) *arco maior* $\widehat{AB}$ é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de λ que estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$.

Se considerarmos $A\hat{O}B$ como sendo o *setor angular* ou o *ângulo completo*, podemos ter:

$$\text{arco menor } \widehat{AB} = \lambda \cap A\hat{O}B$$

Os pontos A e B são as extremidades do arco.

Seguindo a figura, indicaremos os arcos como segue:

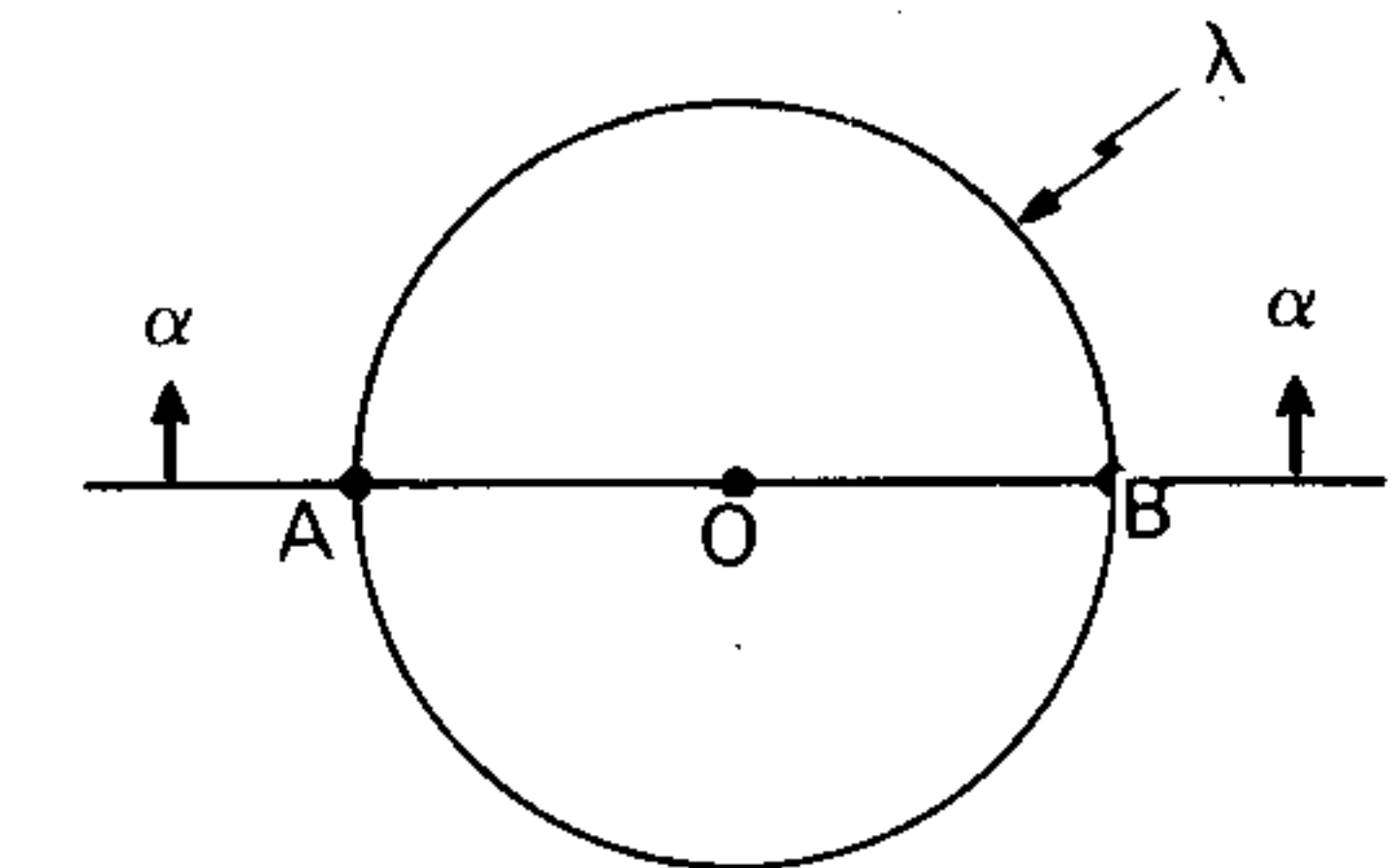
$$\widehat{AB} = \text{arco menor } \widehat{AB} \qquad \widehat{AXB} = \text{arco maior } \widehat{AB}$$

Salvo aviso contrário, ao nos referirmos ao *arco* $\widehat{AB}$, estamos considerando o arco *menor*.

Se A e B são extremidades de um diâmetro de λ,

semicircunferência $\widehat{AB}$ é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de λ que estão num mesmo semiplano dos determinados pela reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Se α é um desses semiplanos, podemos ter:

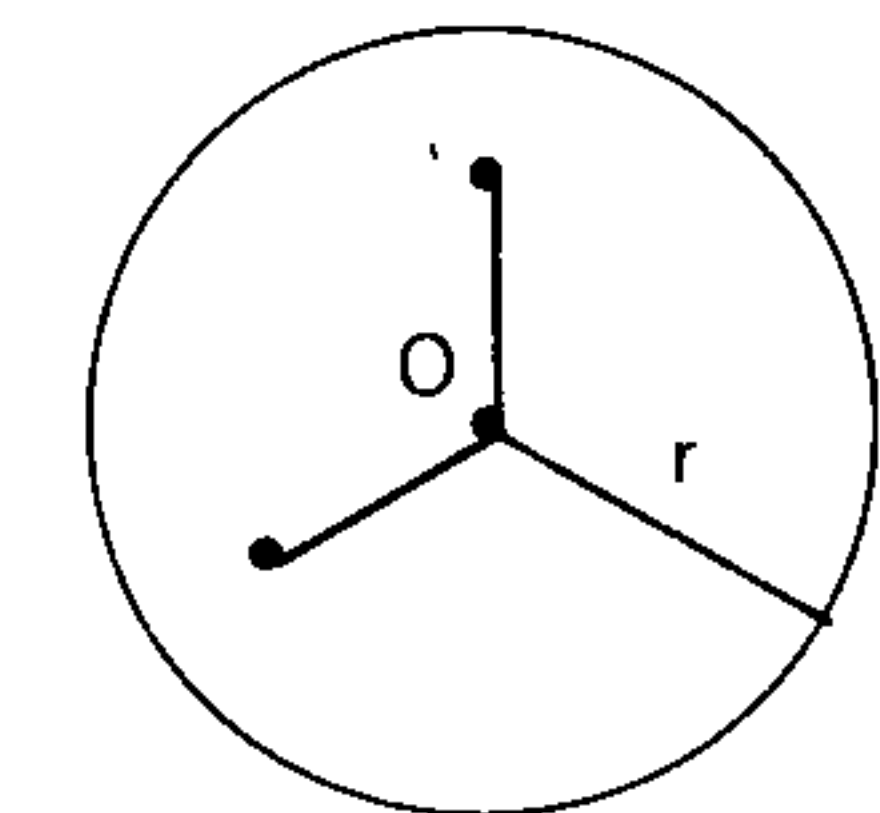
semicircunferência $\widehat{AB} = \lambda \cap \alpha$.

144. *Círculo*

Círculo (ou *disco*) é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é *menor* ou *igual* a uma distância (não nula) dada.

Dados um plano α, um ponto O de α e uma distância r,

$$\text{círculo de centro O e raio } r = c(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} \leqslant r\}$$

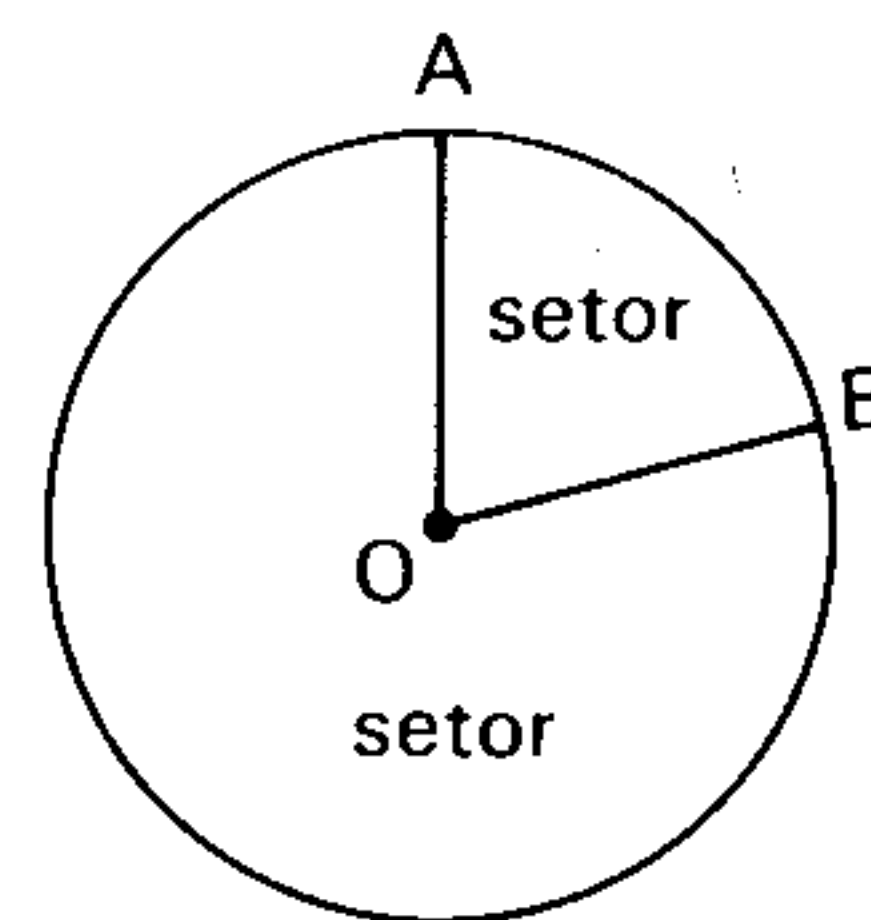
O círculo é a reunião da circunferência com seu interior.

Centro, raio, corda, diâmetro e arco de um círculo são o centro, o raio, a corda, o diâmetro e o arco da respectiva circunferência.

145. *Setor circular, segmento circular e semicírculo*

Consideremos um círculo *c* de centro *O* e sejam *A* e *B* dois pontos da circunferência de *c* que não sejam extremidades de um diâmetro.

1º) *setor circular*

a) Setor circular menor *AOB* é a reunião dos conjuntos dos pontos dos raios *OA* e *OB* e de todos os pontos do círculo *c* que estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$.

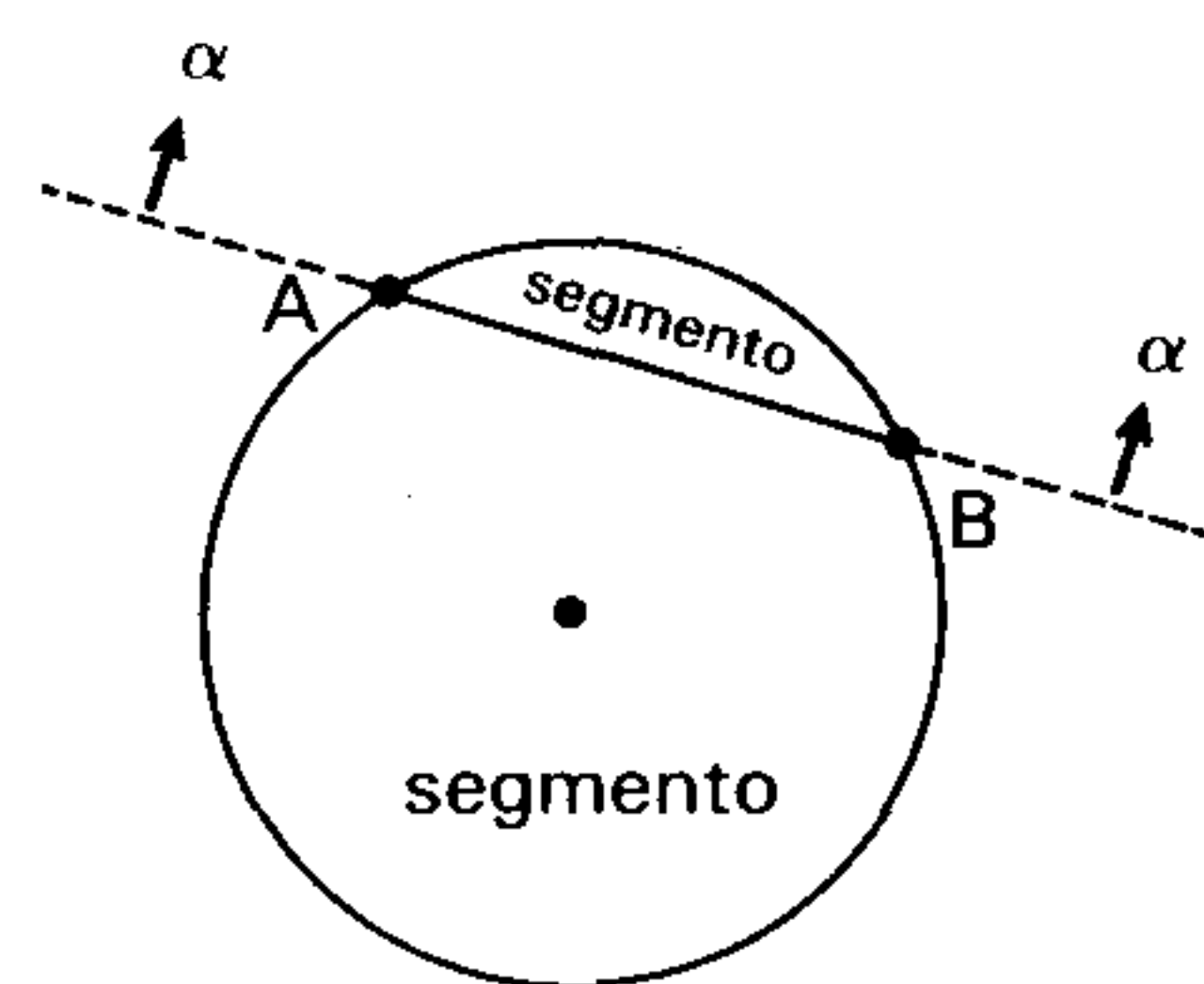
b) Setor circular maior *AOB* é a reunião dos conjuntos dos pontos dos raios *OA* e *OB* e de todos os pontos do círculo *c* que estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$.

Salvo aviso contrário, quando nos referimos ao setor circular *AOB*, estaremos considerando o setor circular menor.

Se considerarmos $A\hat{O}B$ como sendo o *setor angular (ângulo completo)*, poderemos ter:

$$\text{setor circular AOB} = A\hat{O}B \cap c.$$

2º) *Segmento circular*

a) Segmento circular menor *AB* é a interseção do círculo *c* com o semiplano de origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que não contém o centro de *c*.

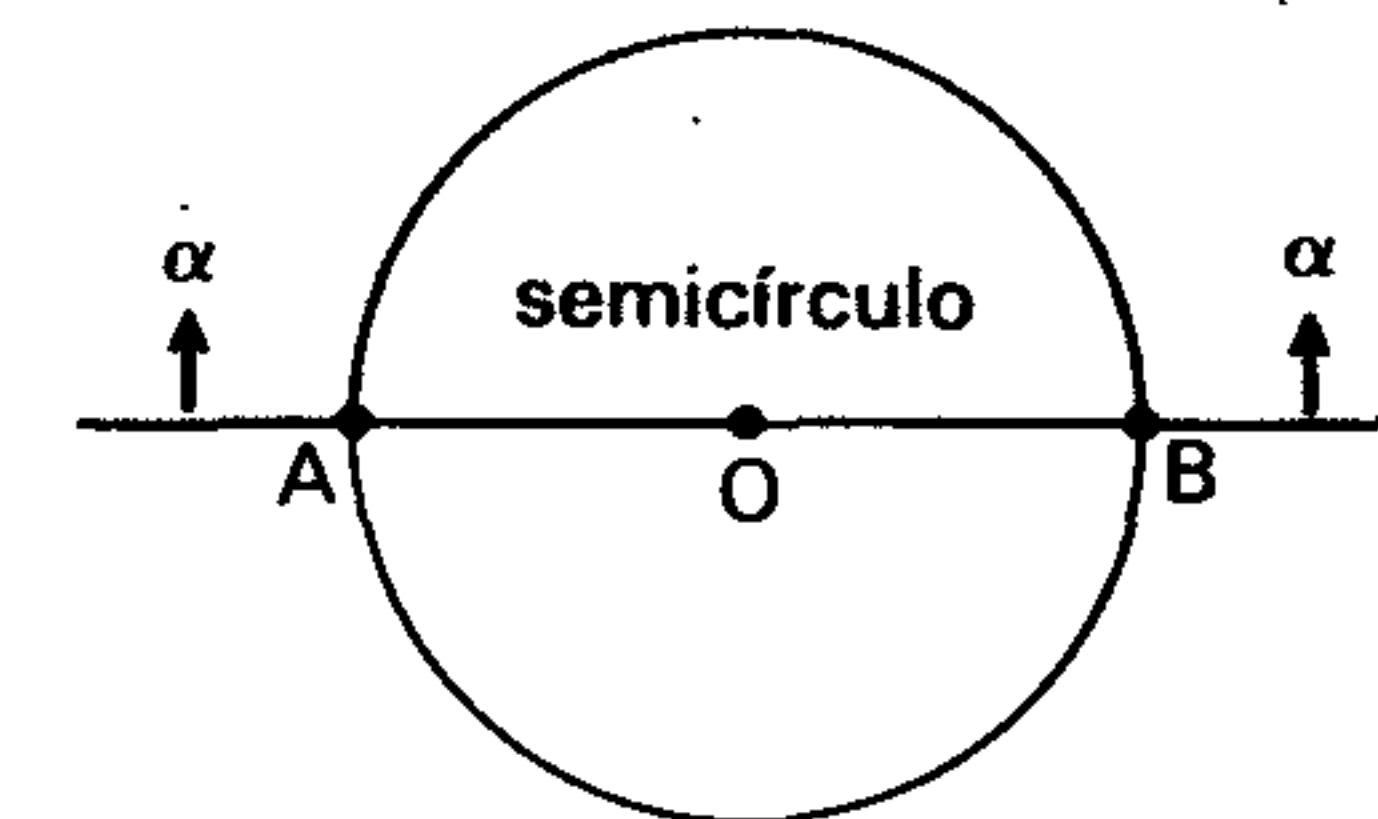
Sendo α esse semiplano (vide figura)

$$\text{Segmento circular menor AB} = \alpha \cap c.$$

b) Segmento circular maior *AB* é a interseção do círculo *c* com o semiplano de origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que contém o centro de *c*.

Quando nos referimos ao segmento circular, salvo aviso em contrário, consideramos o menor.

3º) *Semicírculo*

Se *A* e *B* são extremidades de um diâmetro de *c*, semicírculo *AB* é a interseção do círculo *c* com um dos semiplanos de origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

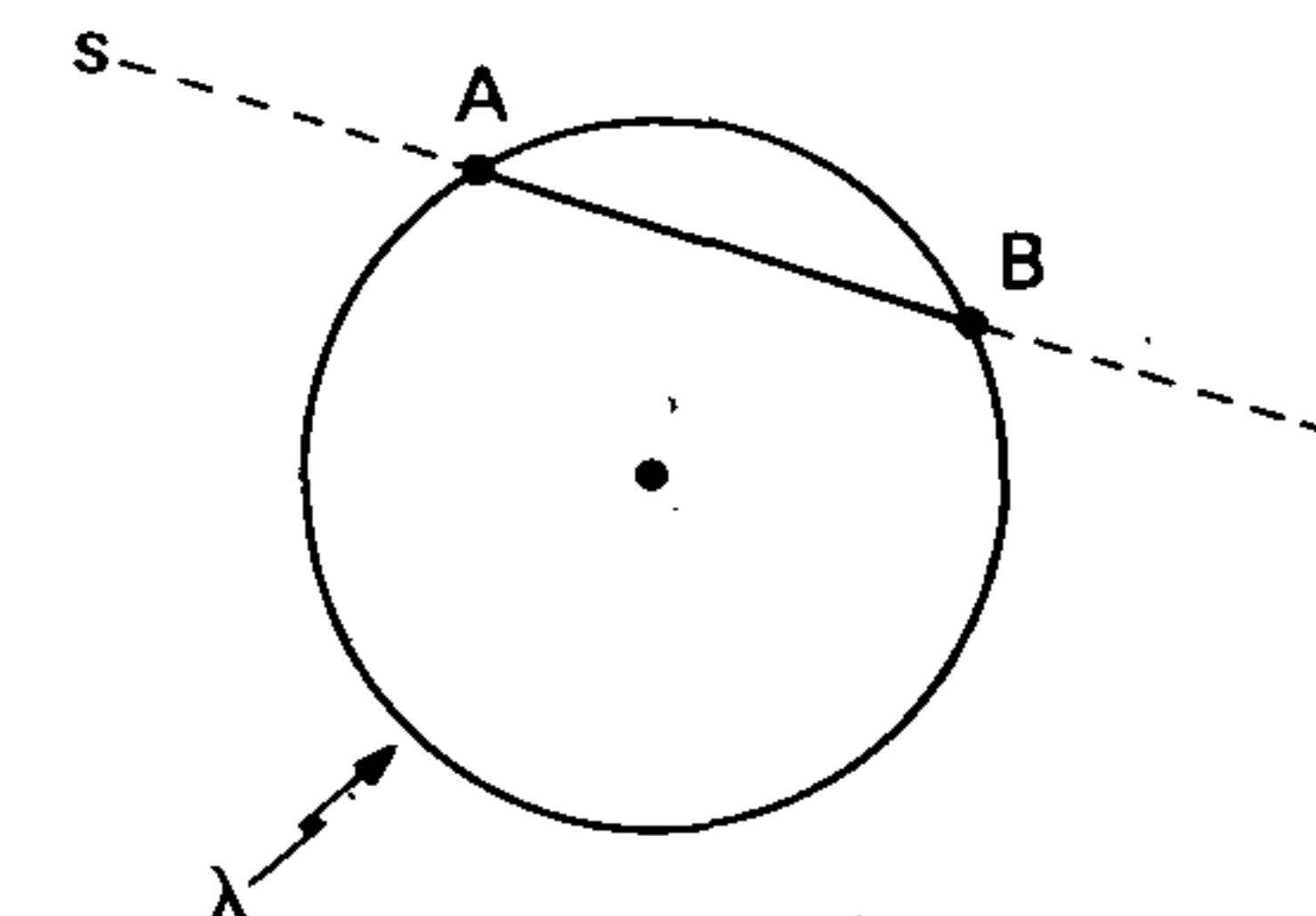
$$\text{Semicírculo AB} = \alpha \cap c.$$

II. Posições relativas de reta e circunferência

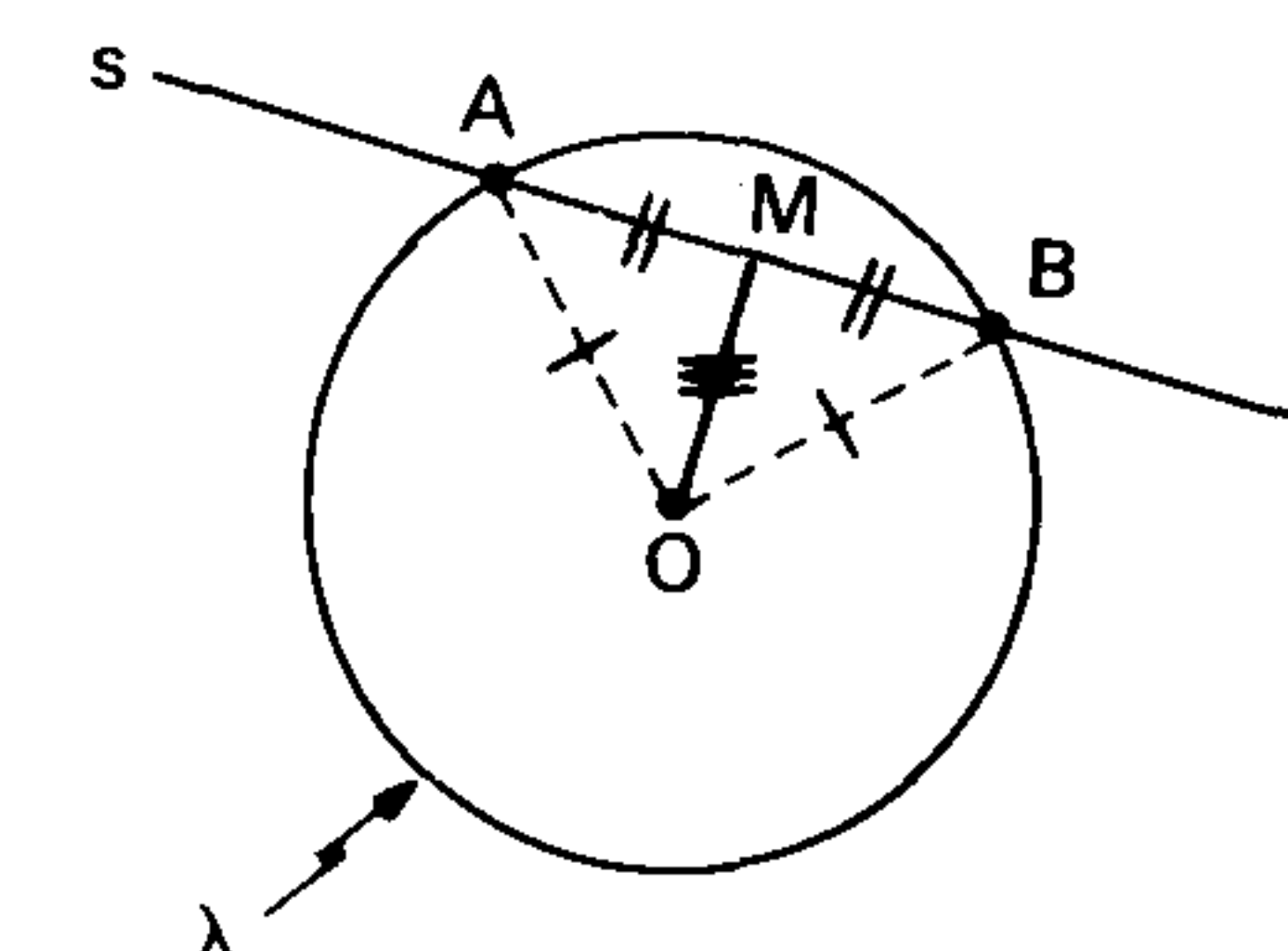
146. *Secante — definição*

Uma reta *secante* a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.

Dizemos que a reta e a circunferência são secantes.

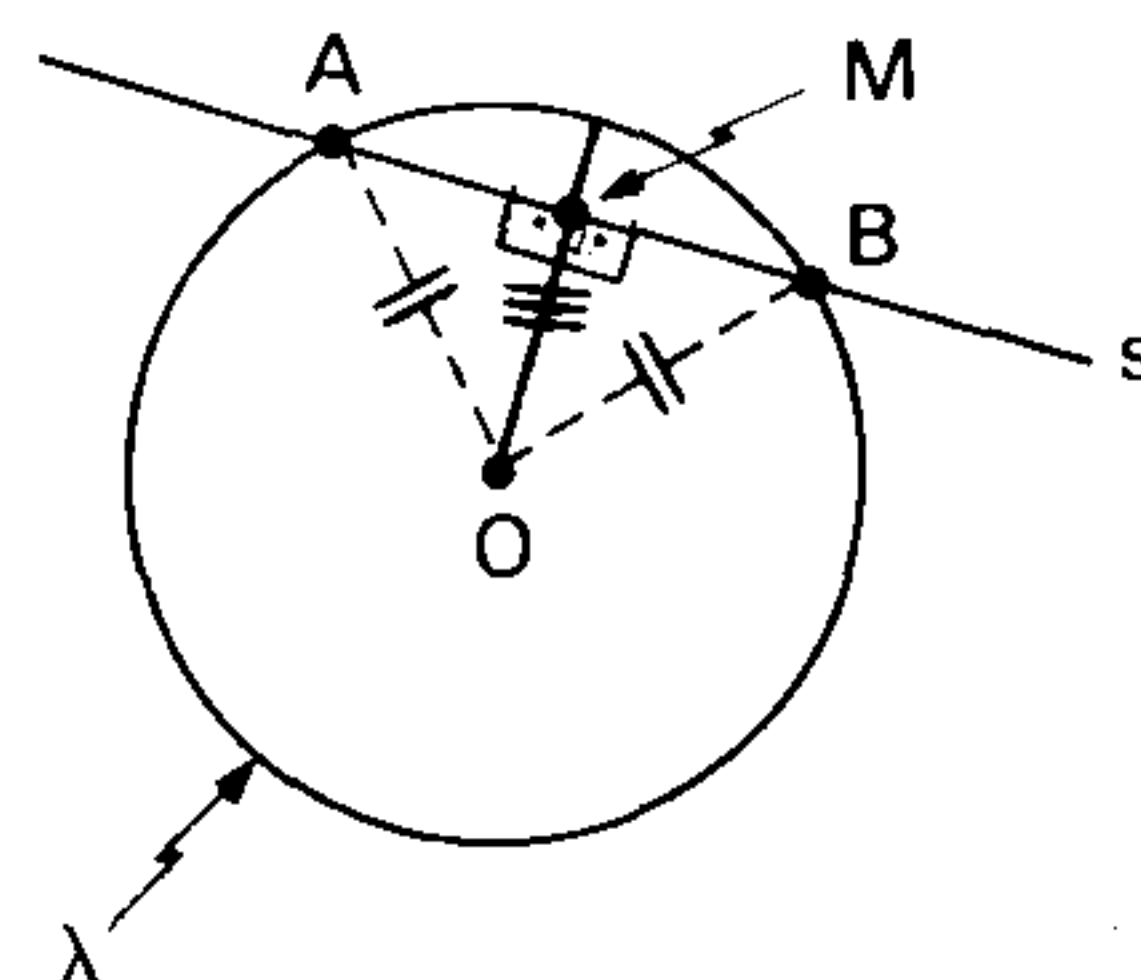
Na figura:

$$s \cap \lambda = \{A, B\}$$

147. *Propriedade da secante*

> **a) Se uma reta *s*, secante a uma circunferência λ(*O*, *r*), não passa pelo centro *O*, intercepta λ nos pontos distintos *A* e *B*, e se *M* é o ponto médio da corda $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{OM}$ é perpendicular à secante *s* (ou à corda $\overline{AB}$).**

Hipótese		*Tese*
(*M* é ponto médio da corda $\overline{AB}$, M ≠ O)	⟹	$\overline{OM} \perp \overline{AB}$

Demonstração

Pelo caso LLL, os triângulos *OAM* e *OBM* são congruentes. Daí decorre que $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ e $OM \perp s$.

b) Se uma reta s, secante a uma circunferência $\lambda(O, r)$, não passa pelo centro O, intercepta λ nos pontos distintos A e B, então a perpendicular a s conduzida pelo centro passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$.

Hipótese — *Tese*

OM perpendicular à corda $\overline{AB} \implies \overline{AM} \equiv \overline{MB}$

Demonstração

Pelo caso especial de congruência de triângulos (cateto-hipotenusa), os triângulos OAM e OBM são congruentes. Daí vem $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$, ou seja, M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$.

Observações

1ª) Usando o caso de congruência LLL, pode-se provar a propriedade:
A mediatriz de uma corda passa pelo centro da circunferência.

2ª) Sendo s secante a $\lambda(O, r)$, então $d_{O,s} < r$ e reciprocamente.

148. Tangente — definição

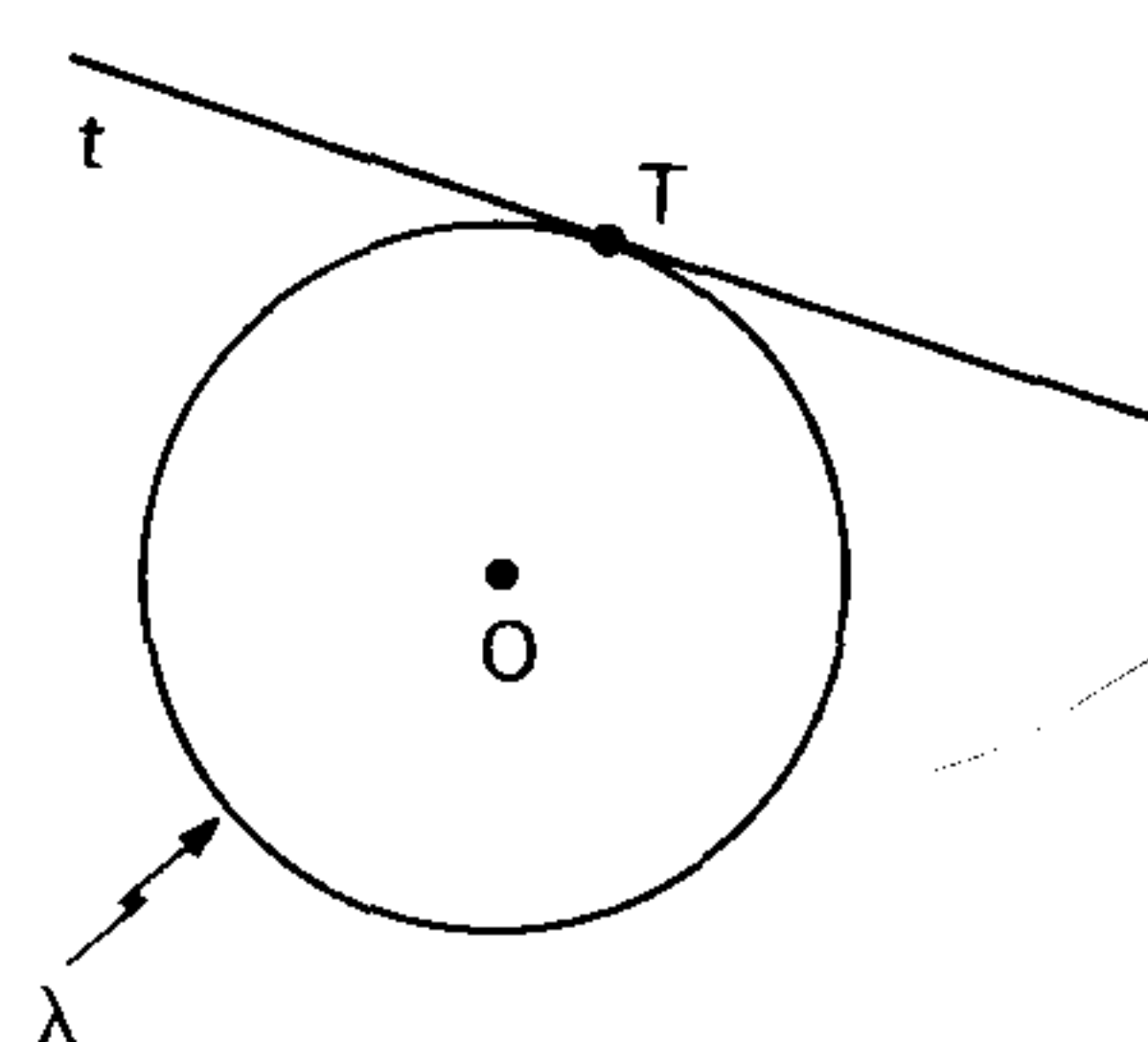
Uma reta *tangente* a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência num único ponto.

A reta tangente a uma circunferência tem um ponto comum com a circunferência e os demais pontos da reta são externos à circunferência.

O ponto comum é o ponto de tangência.

Dizemos que a reta e a circunferência são tangentes.

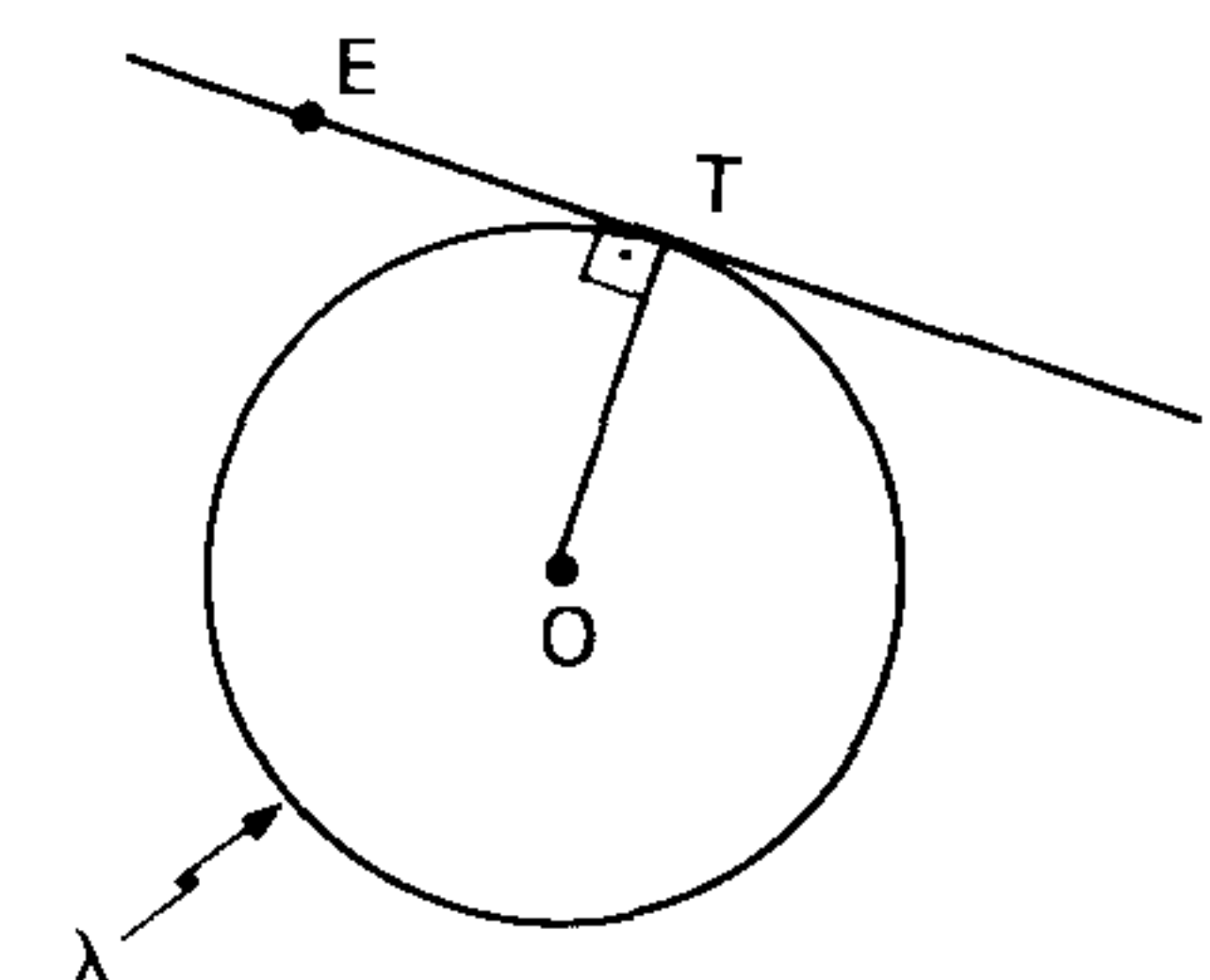
Na figura:

$$t \cap \lambda = \{T\}$$

149. Propriedade da tangente

a) Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade da circunferência é tangente à circunferência.

Seja a circunferência $\lambda(O, r)$ e T um de seus pontos.

Hipótese — *Tese*

$t \perp \overline{OT}$ em T $\implies$ t é tangente a λ

Demonstração

Seja E outro ponto de t, distinto do ponto T.

$(\overline{OT} \perp t$ e $\overline{OE}$ oblíquo a t$) \implies \overline{OE} > \overline{OT} \implies \overline{OE} > r \implies$ E é externo a λ.

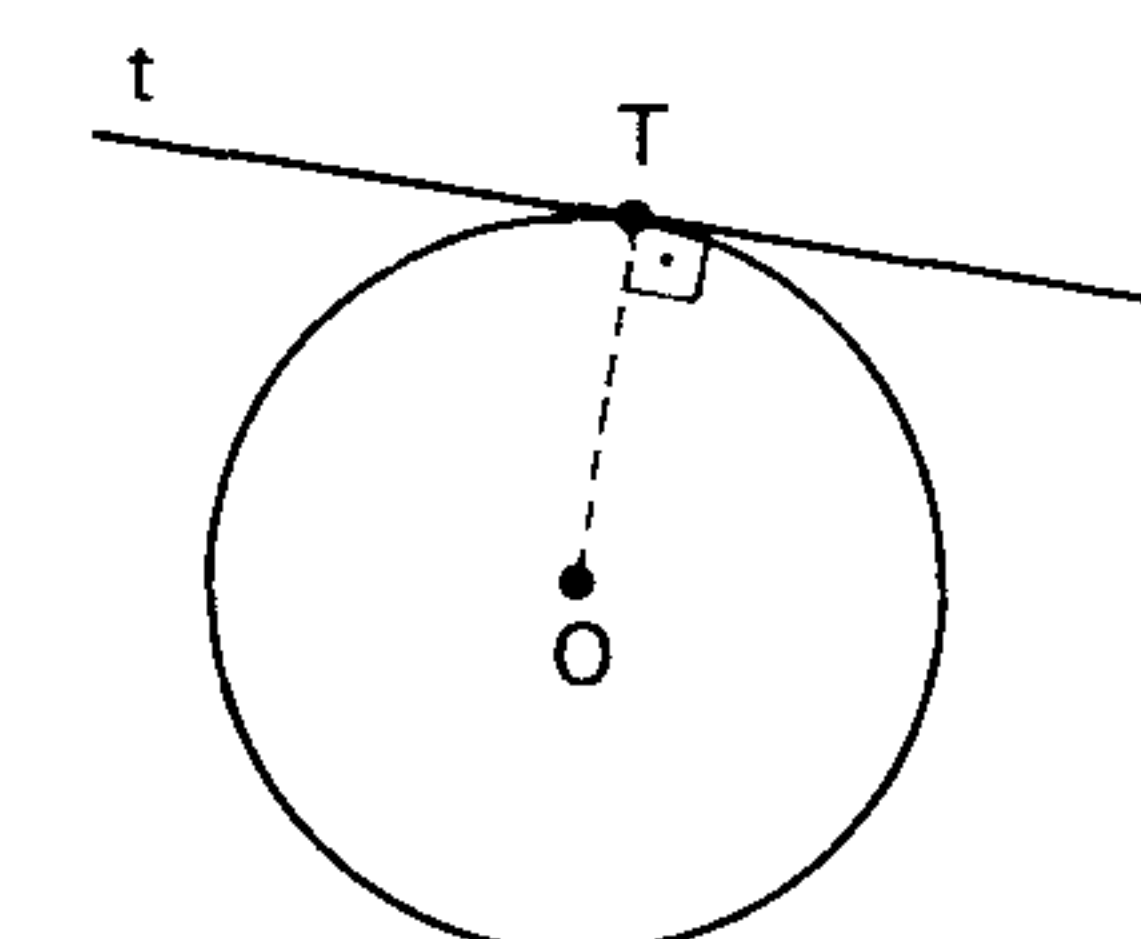
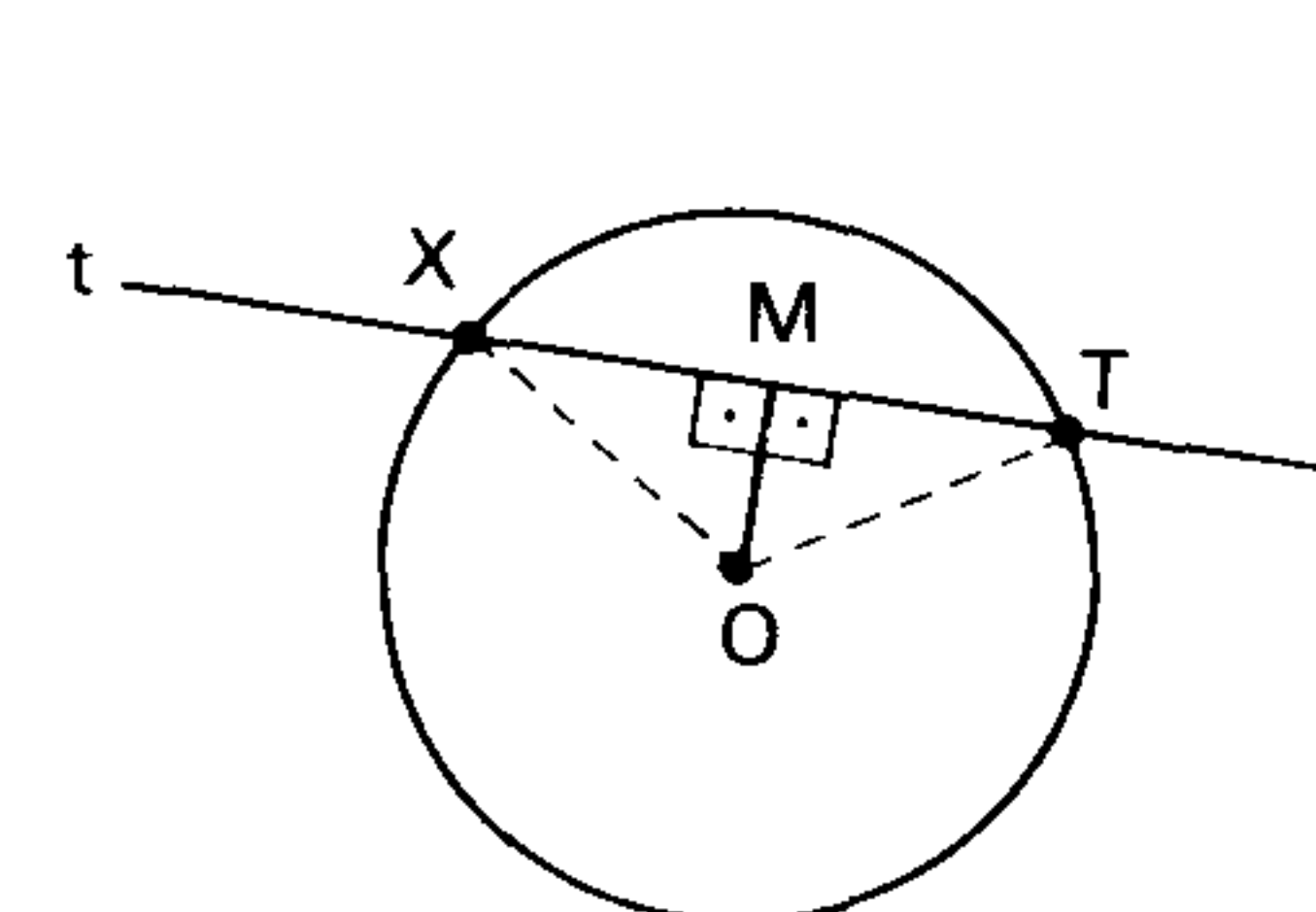
Logo, a reta t tem um único ponto T comum com λ, pois os demais são externos.

Portanto, t é tangente a λ.

b) Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto da tangência.

Hipótese — *Tese*

t tangente a λ em $T \implies t \perp \overline{OT}$ em T

Demonstração

Se t não fosse perpendicular a $\overline{OT}$, teríamos o que segue.

Seja M pé da perpendicular à reta t por O. O ponto M seria distinto de T.

Tomando na semi-reta oposta a $\overrightarrow{MT}$ um ponto X tal que $\overline{MX} \equiv \overline{MT}$, teríamos:

$(\overline{OM}$ comum, $\overline{OM} \perp \overline{TX}$, $\overline{MX} \equiv \overline{MT}$ $\overset{LAL}{\Longrightarrow}$ $\Delta OMX \equiv \Delta OMT \Longrightarrow \overline{OX} \equiv \overline{OT}$
$\Longrightarrow$ $\overline{OX} = r$ $\Longrightarrow$ $X \in \lambda$.

Portanto, t interceptaria λ em dois pontos distintos, T e X, o que é absurdo, de acordo com a hipótese.

Logo, t é perpendicular a $\overline{OT}$ em T.

Observação

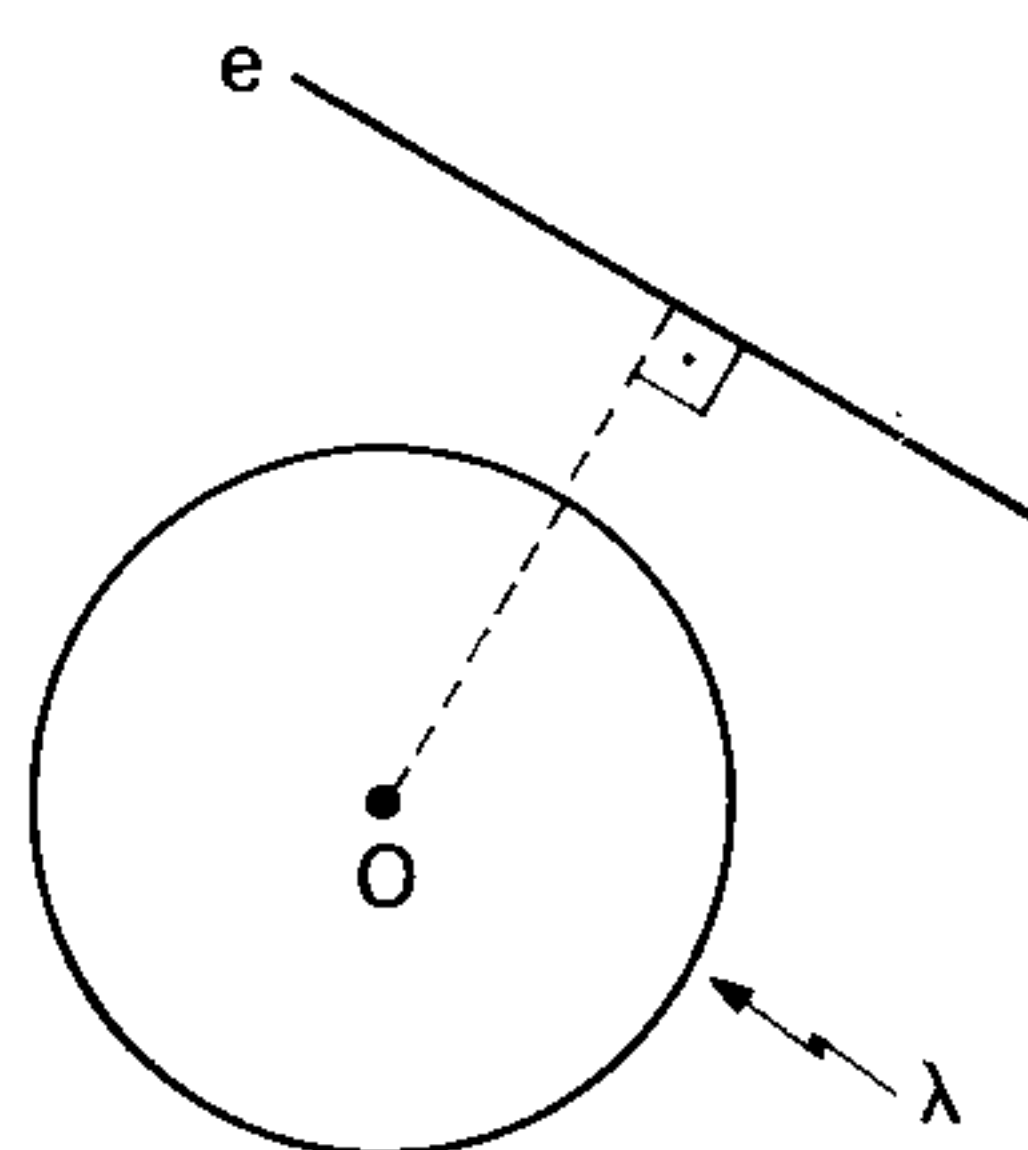
Se t é tangente à circunferência $\lambda(O, r)$, então $d_{O,t} = r$ e reciprocamente.

150. *Exterior — definição*

Uma reta *exterior* a uma circunferência é uma reta que não intercepta a circunferência.

Dizemos que a reta e a circunferência são exteriores.

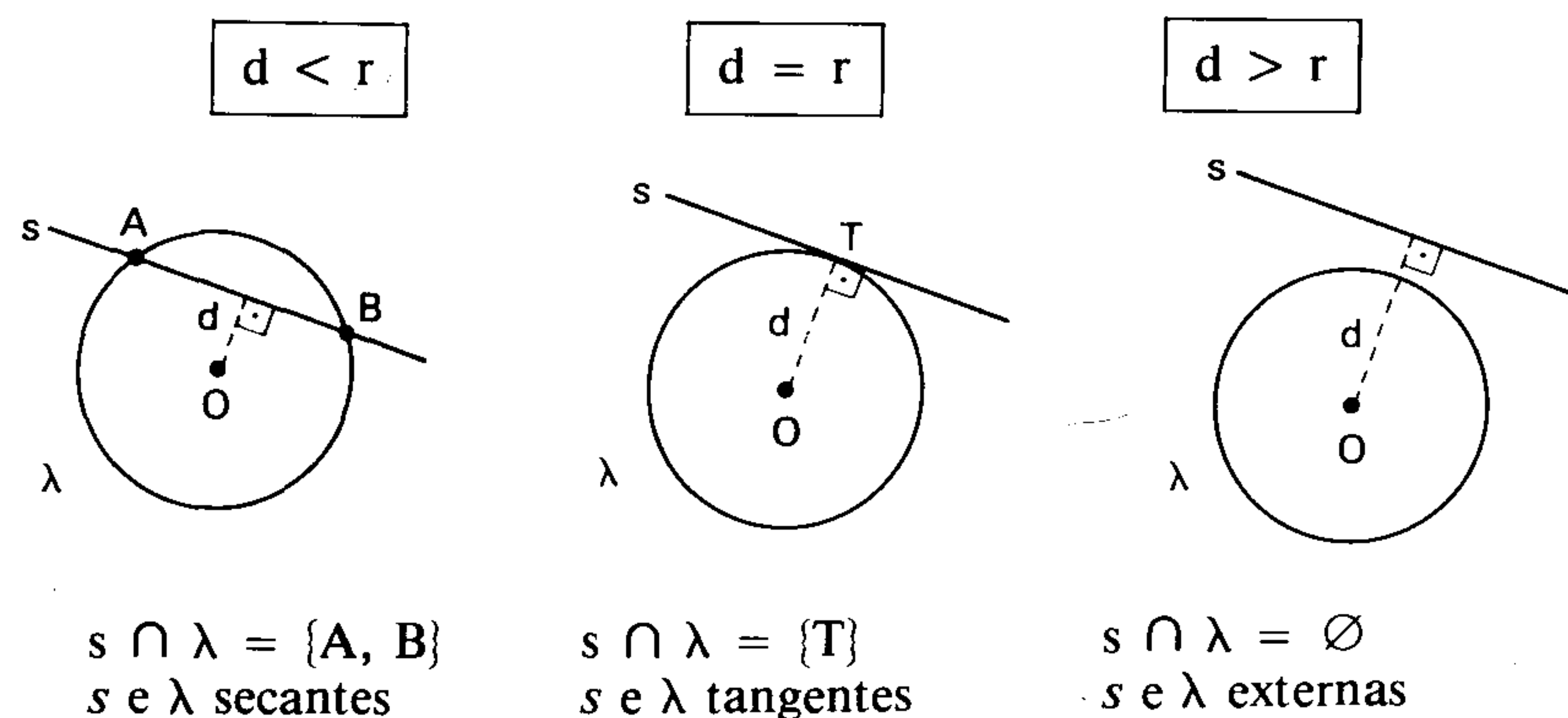
Na figura:

$e \cap \lambda = \varnothing$

151. *Posições*

Considerando uma reta s, uma circunferência $\lambda(O, r)$ e sendo d a distância do centro O à reta s ($d = d_{O,s}$), há três possibilidades para s e λ:

$s \cap \lambda = \{A, B\}$ — s e λ secantes

$s \cap \lambda = \{T\}$ — s e λ tangentes

$s \cap \lambda = \varnothing$ — s e λ externas

III. Posições relativas de duas circunferências

152. *Definições*

Uma circunferência é *interna* a outra se todos os seus pontos são pontos internos da outra.

Uma circunferência é *tangente interna* a outra se têm um único ponto comum e os demais pontos da primeira são pontos internos da segunda.

Duas circunferências são *secantes* se têm em comum somente dois pontos distintos.

Duas circunferências são *tangentes externas* se têm um único ponto comum e os demais pontos de uma são externos à outra.

Duas circunferências são *externas* se os pontos de uma delas são externos à outra.

153. *Posições*

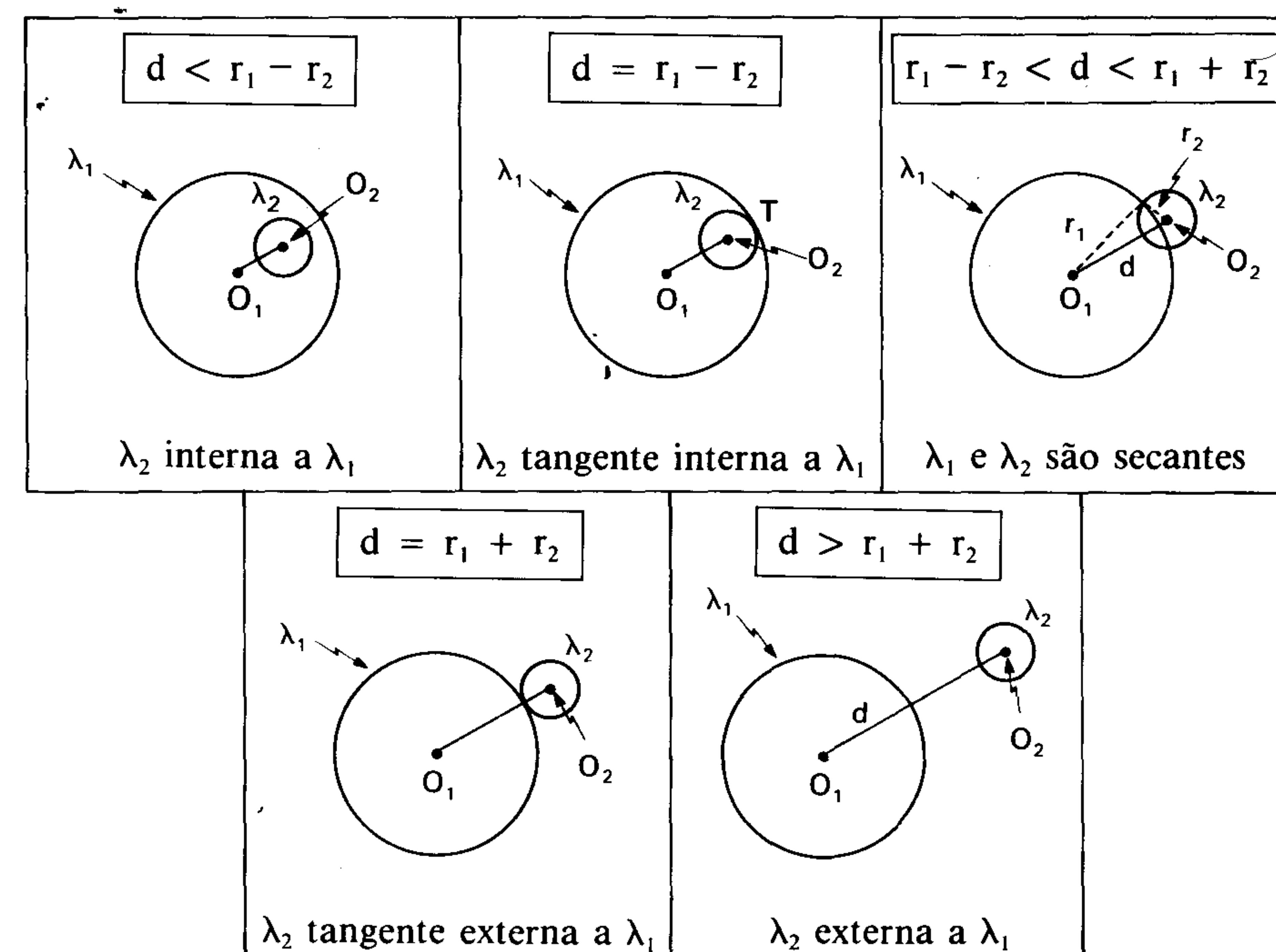
Considerando duas circunferências $\lambda_1(O_1, r_1)$ e $\lambda_2(O_2, r_2)$ com $r_1 > r_2$ e sendo d a distância entre os centros, prova-se que há cinco possibilidades para λ_1 e λ_2:

λ_2 interna a λ_1

λ_2 tangente interna a λ_1

λ_1 e λ_2 são secantes

λ_2 tangente externa a λ_1

λ_2 externa a λ_1

IV. Segmentos tangentes — Quadriláteros circunscritíveis

154. **Se de um ponto P conduzirmos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a uma circunferência, com A e B na circunferência, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.**

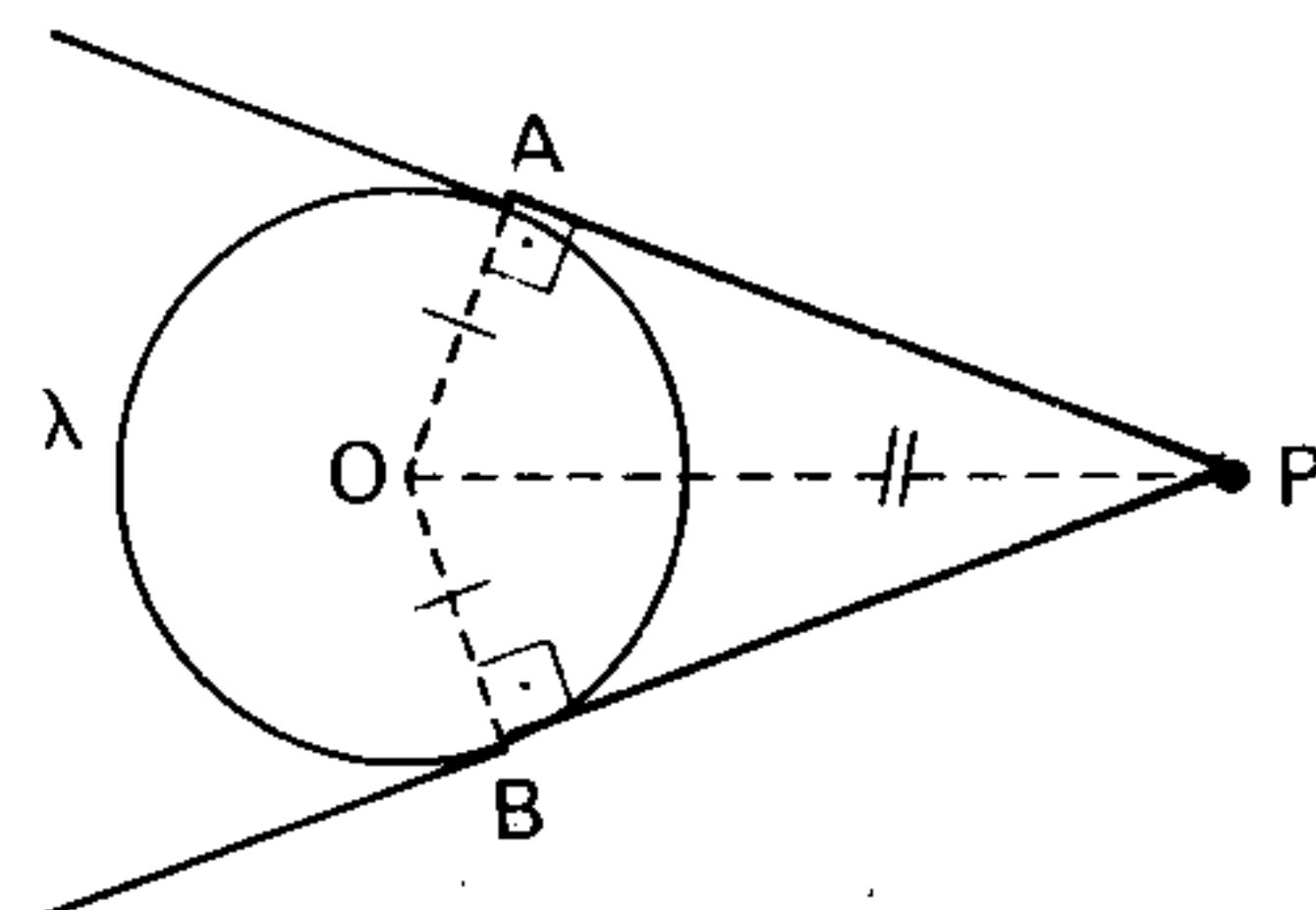
Hipótese / *Tese*

$\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a λ; $A, B \in \lambda \implies \overline{PA} \equiv \overline{PB}$

Demonstração

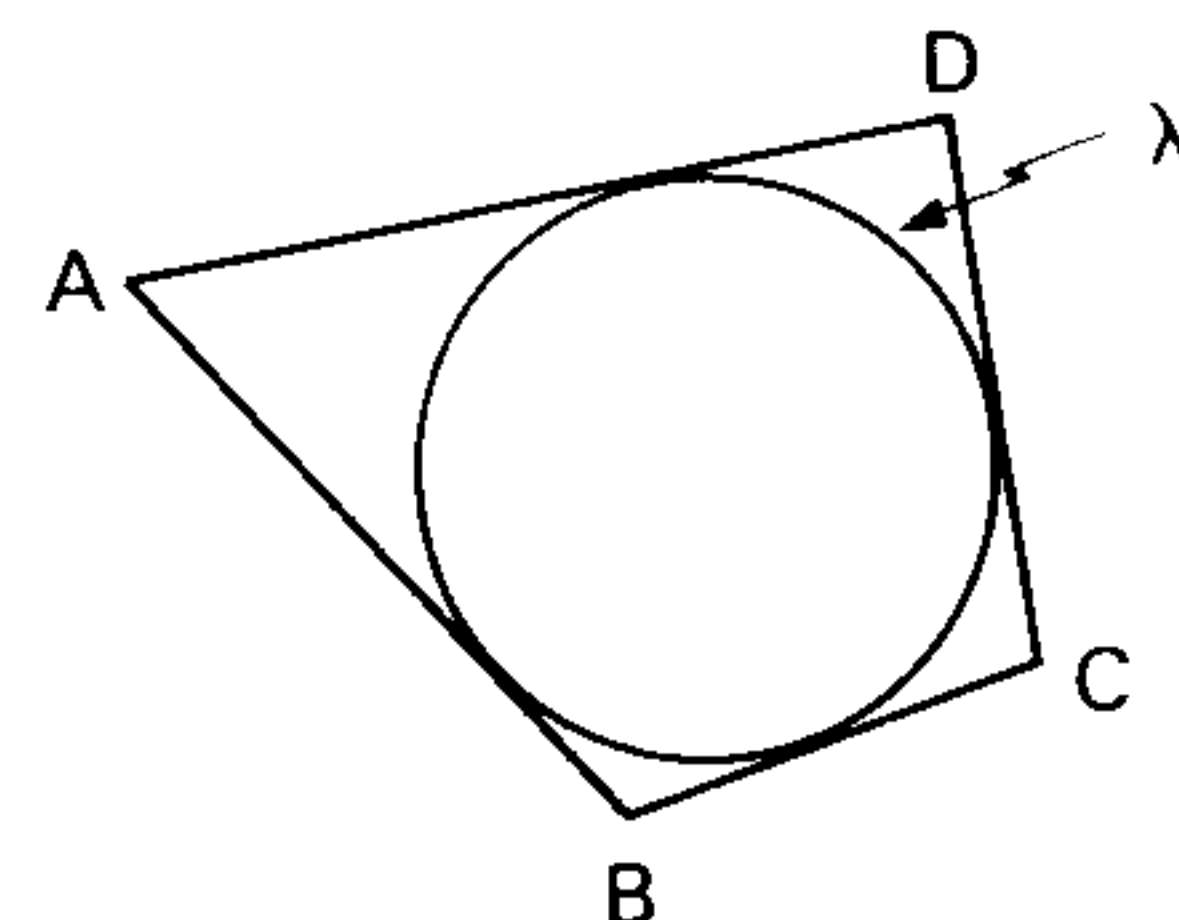
Seja O o centro de λ.

Aplicando o caso especial de congruência de triângulos retângulos:

$\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ (cateto), $\overline{OP}$ comum (hipotenusa) $\implies \Delta PAO \equiv \Delta PBO \implies \overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

Nota

O centro O de λ pertence à bissetriz de $A\hat{P}B$.

155. *Quadrilátero circunscrito — definição*

Um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.

Na figura:

$ABCD$ é circunscrito a λ ou λ é inscrita em $ABCD$.

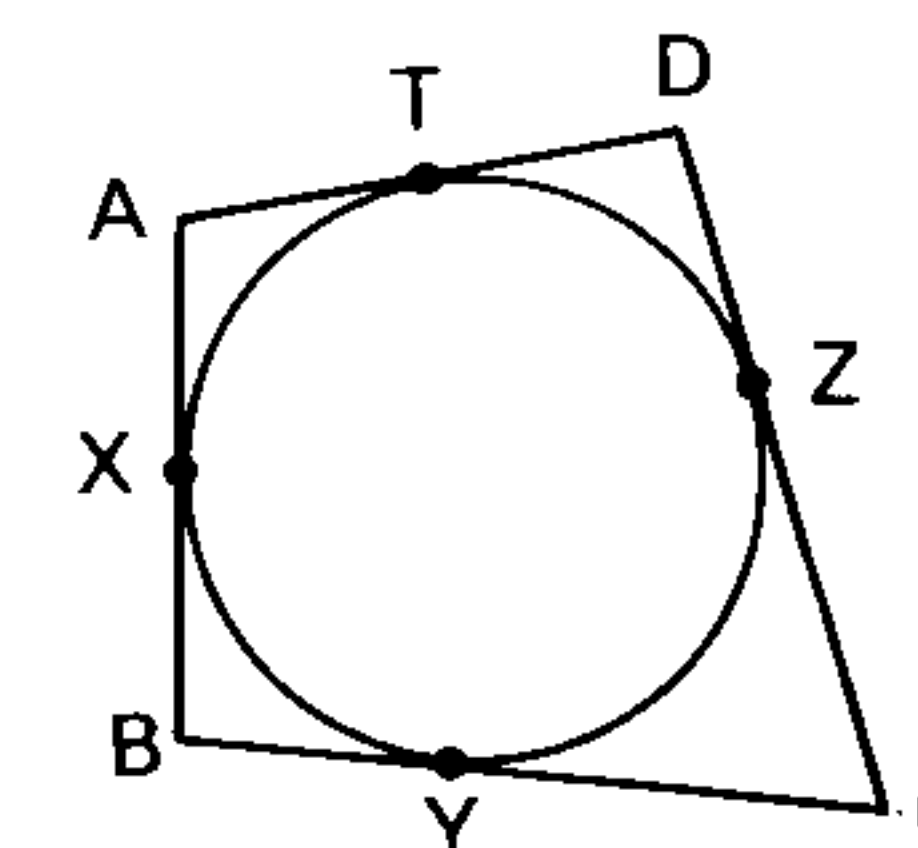
156. *Propriedade*

a) Se um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

Hipótese / *Tese*

$ABCD$ circunscrito a $\lambda \implies AB + CD = AD + BC$

Demonstração

Sejam X, Y, Z e T os pontos de tangência de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.

Aplicando a propriedade dos segmentos tangentes:

$$\left.\begin{array}{l} AX \equiv AT \\ BX \equiv BY \\ CZ \equiv CY \\ DZ \equiv DT \end{array}\right\} \overset{+}{\implies} \underbrace{AX + BX}_{AB} + \underbrace{CZ + DZ}_{CD} = \underbrace{AT + BY + CY + DT}_{AD \; + \; BC}$$

$$AB + CD = AD + BC$$

b) Se num quadrilátero convexo a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois, então o quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.

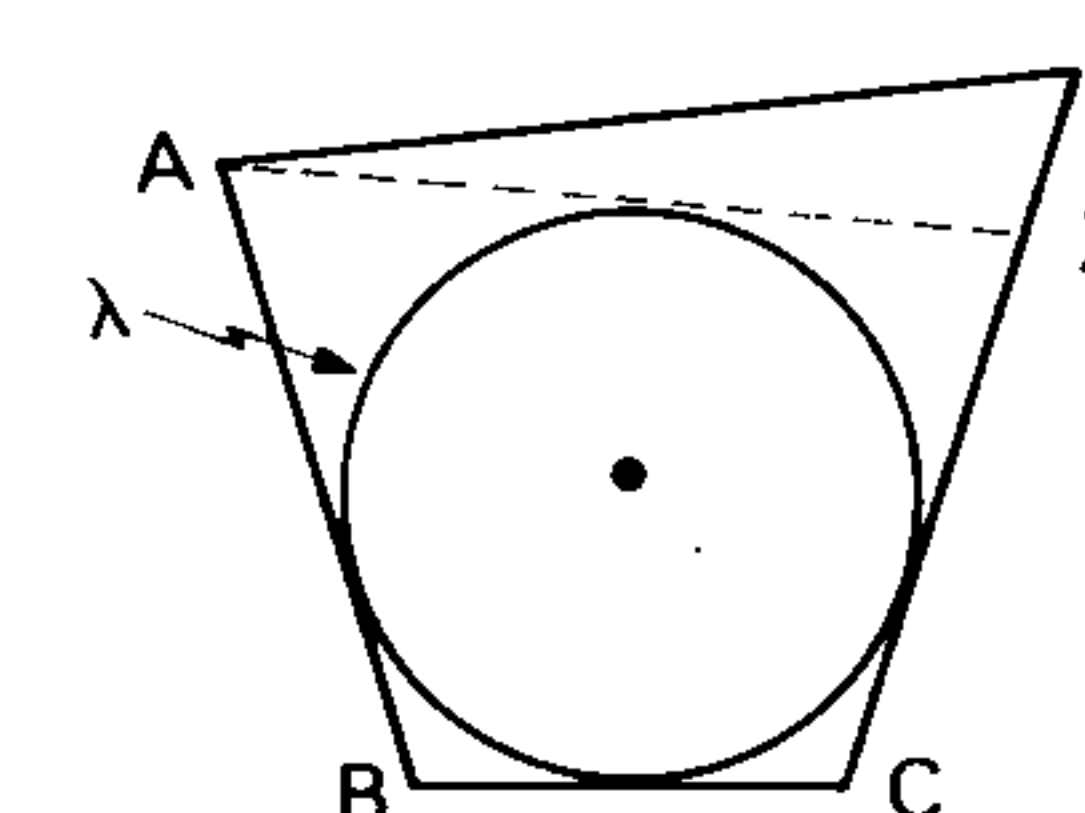
Sendo $ABCD$ um quadrilátero convexo,

Hipótese / *Tese*

$AB + CD = AD + BC \implies ABCD$ é circunscritível a uma circunferência.

Demonstração

Seja λ a circunferência tangente aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ do quadrilátero.

Se $ABCD$ não é circunscritível a λ, existe $ABCX$, com X na reta $\overleftrightarrow{CD}$ que é circunscrito a λ.

$ABCX$ circunscrito a $\lambda \implies \overline{AB} + \overline{CX} = \overline{BC} + \overline{AX}$ (1)

Hipótese $\implies \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} \implies \overline{AB} + \underbrace{\overline{CX} \pm \overline{XD}}_{\overline{CD}} = \overline{AD} + \overline{BC} \implies$

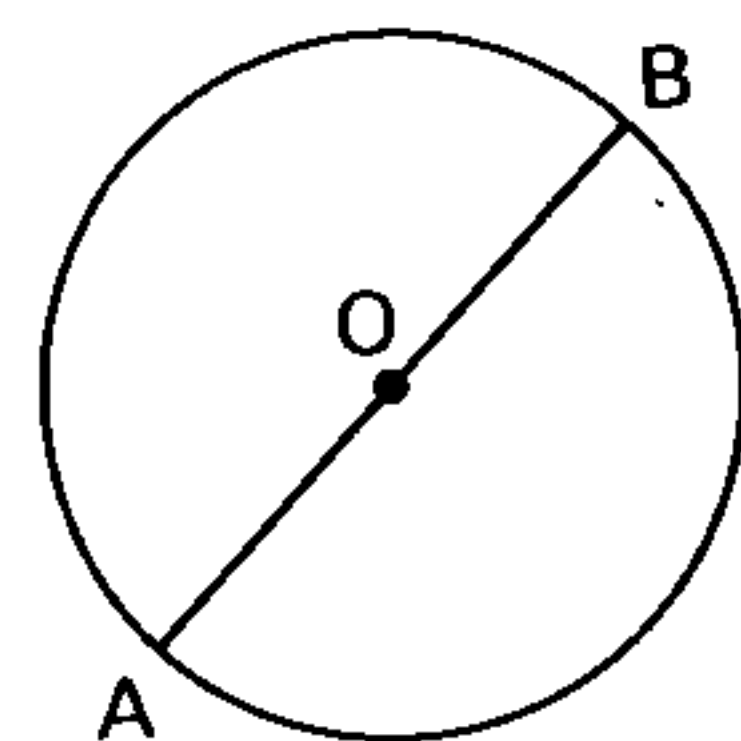
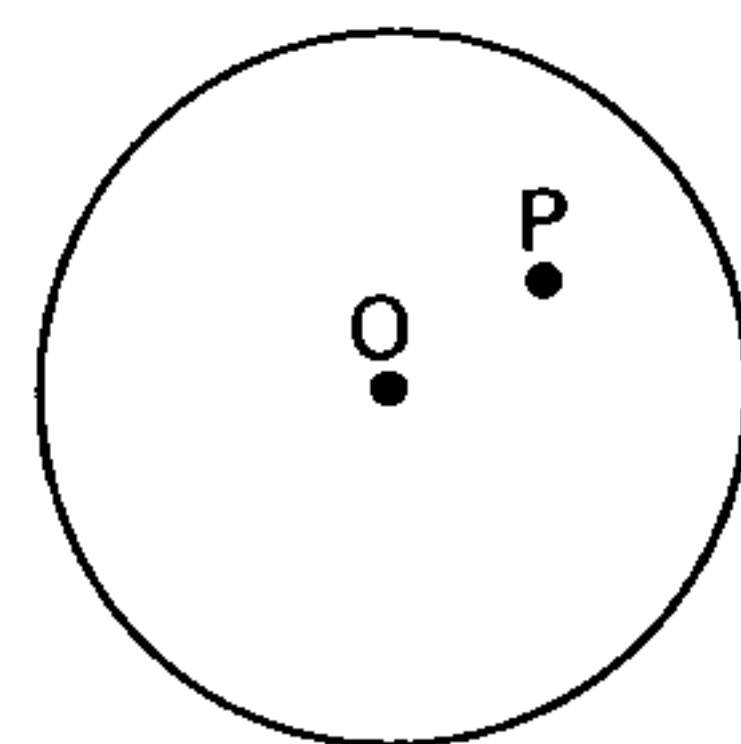
$\implies \overline{AB} + \overline{CX} = \overline{AD} + \overline{BC} \pm \overline{XD}$ (2)

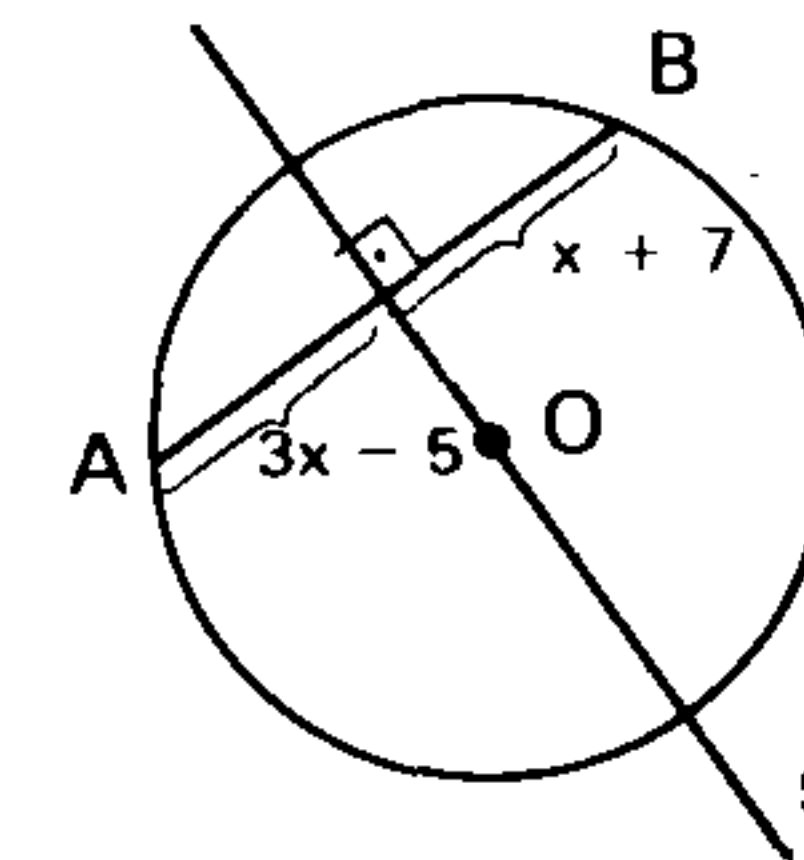
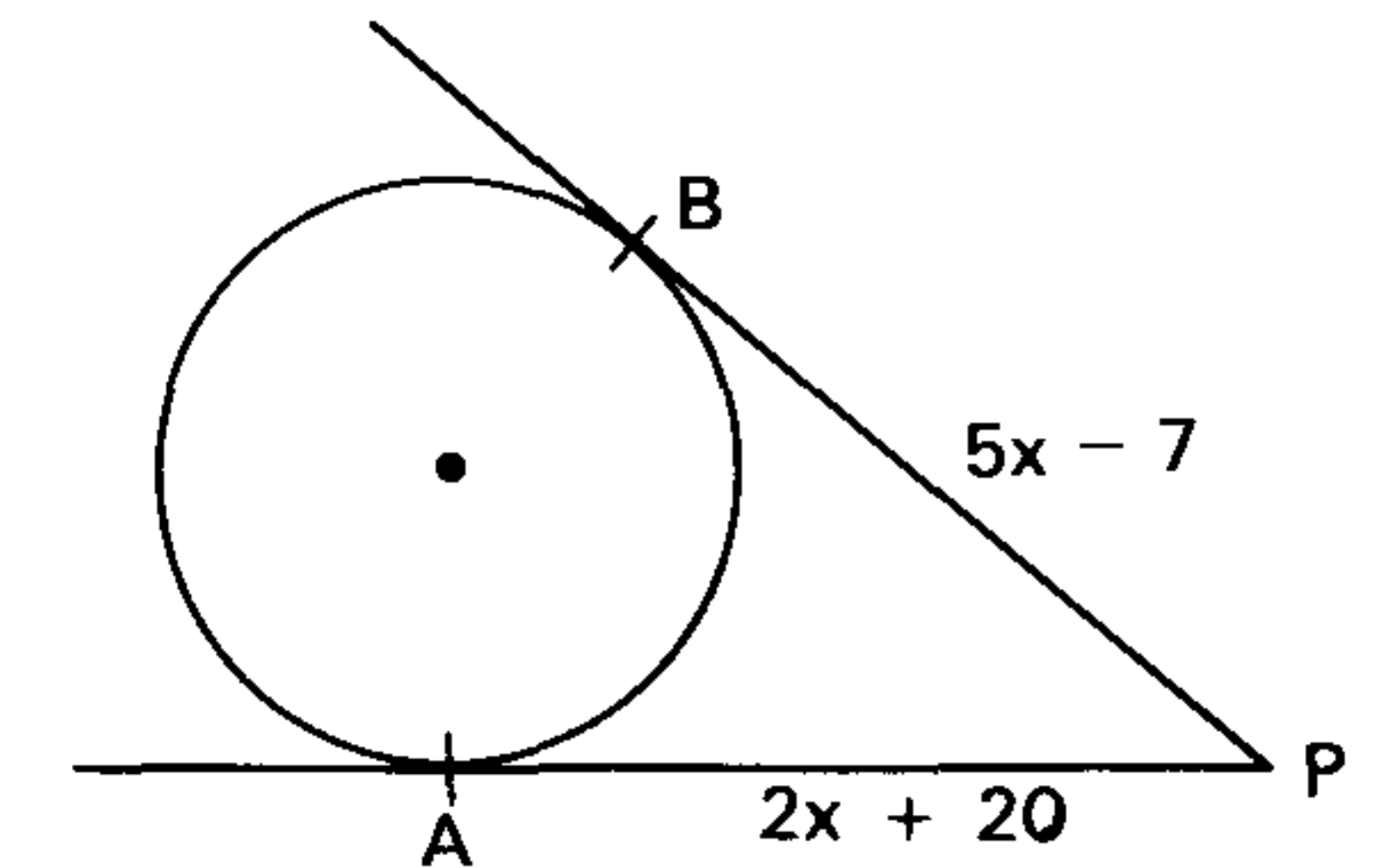
De (1) e (2) decorre que $\overline{AX} = \overline{AD} \pm \overline{XD}$, o que é absurdo no ΔADX. Logo, $ABCD$ é circunscritível a uma circunferência.

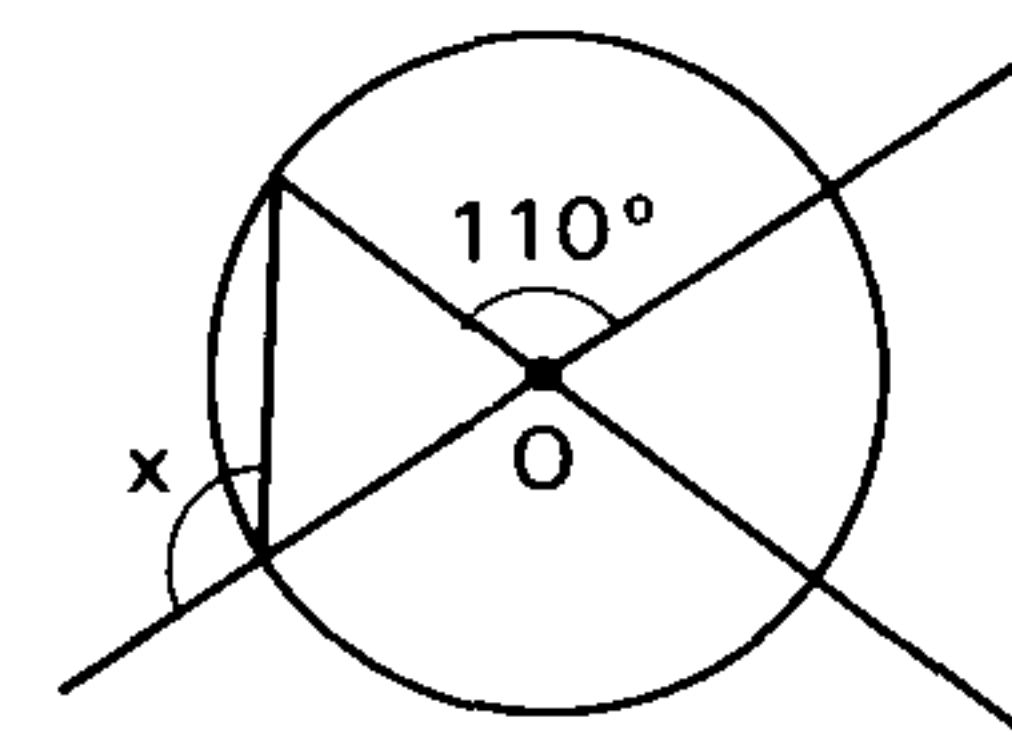
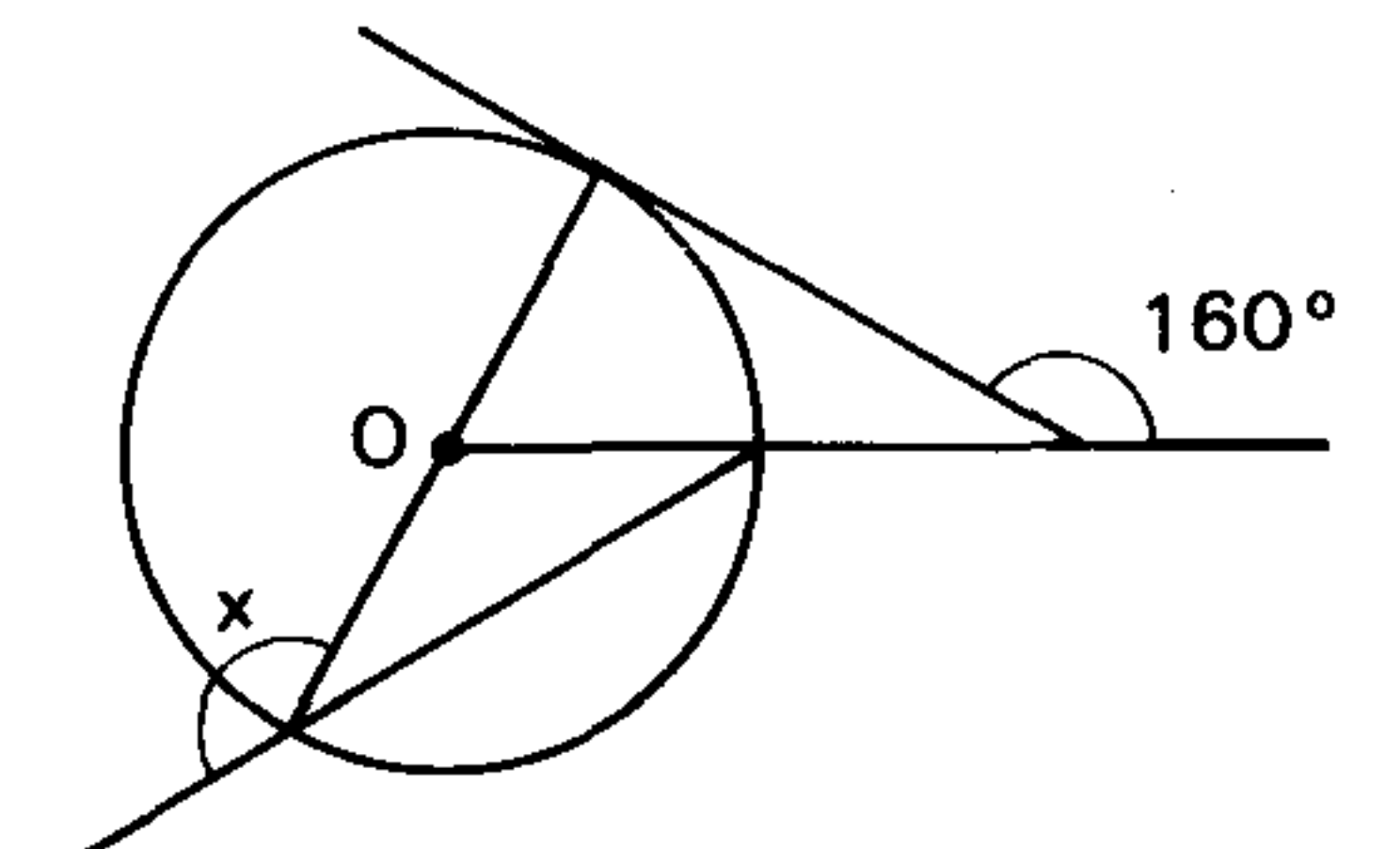
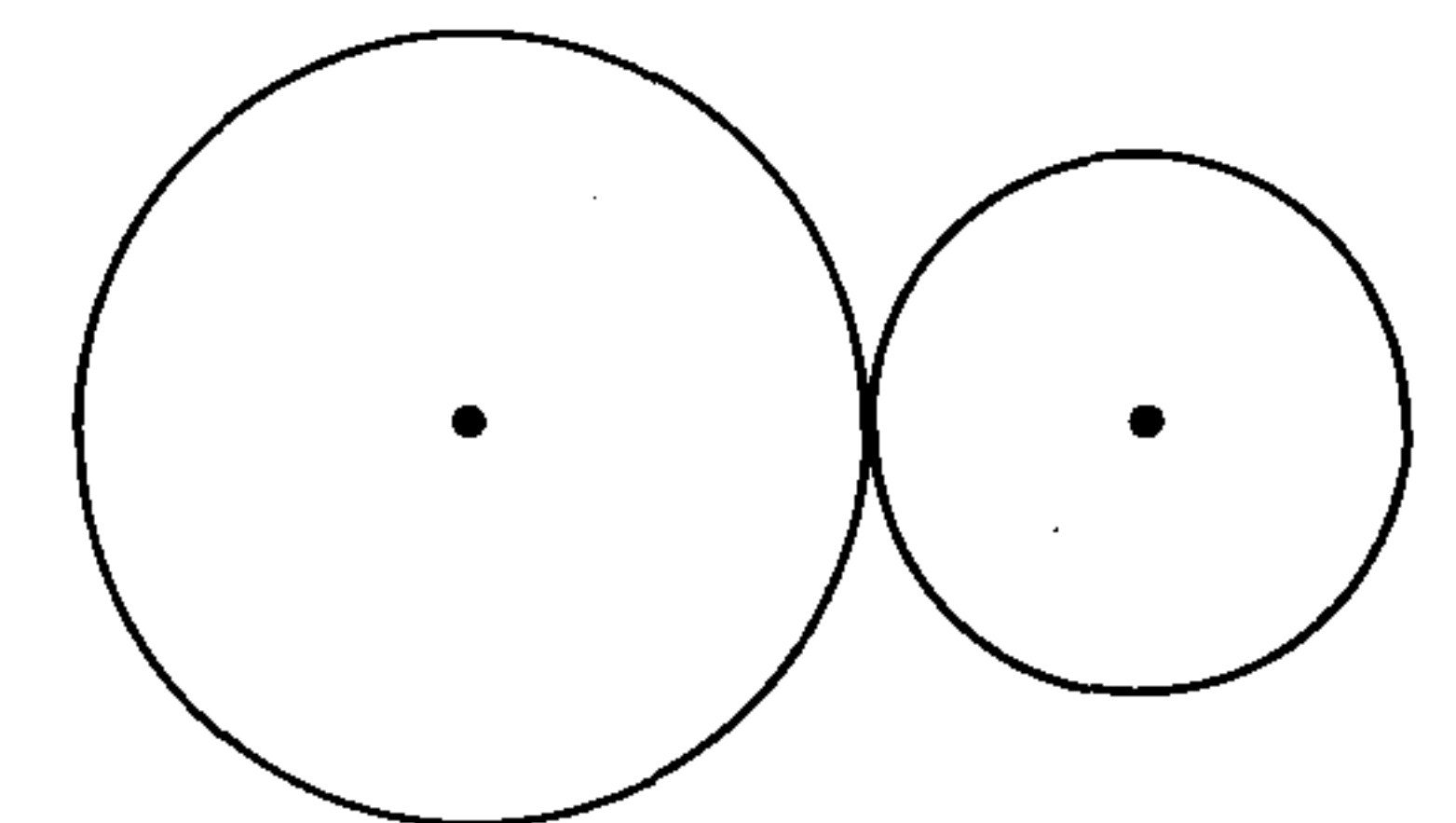
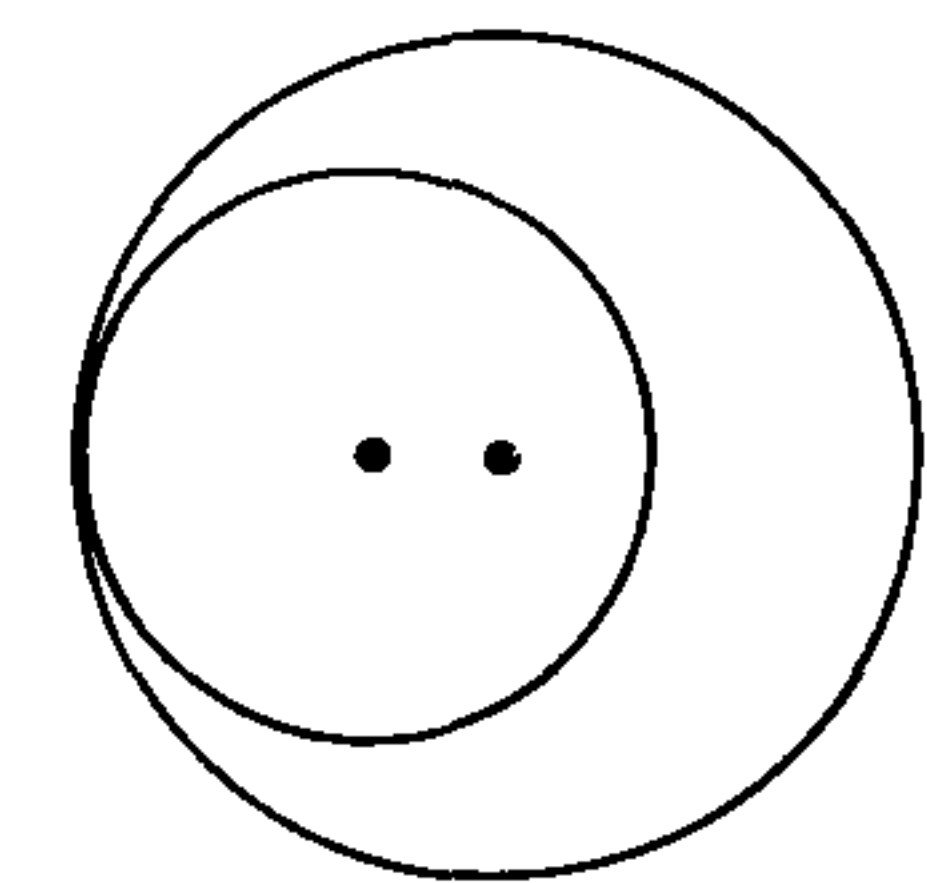
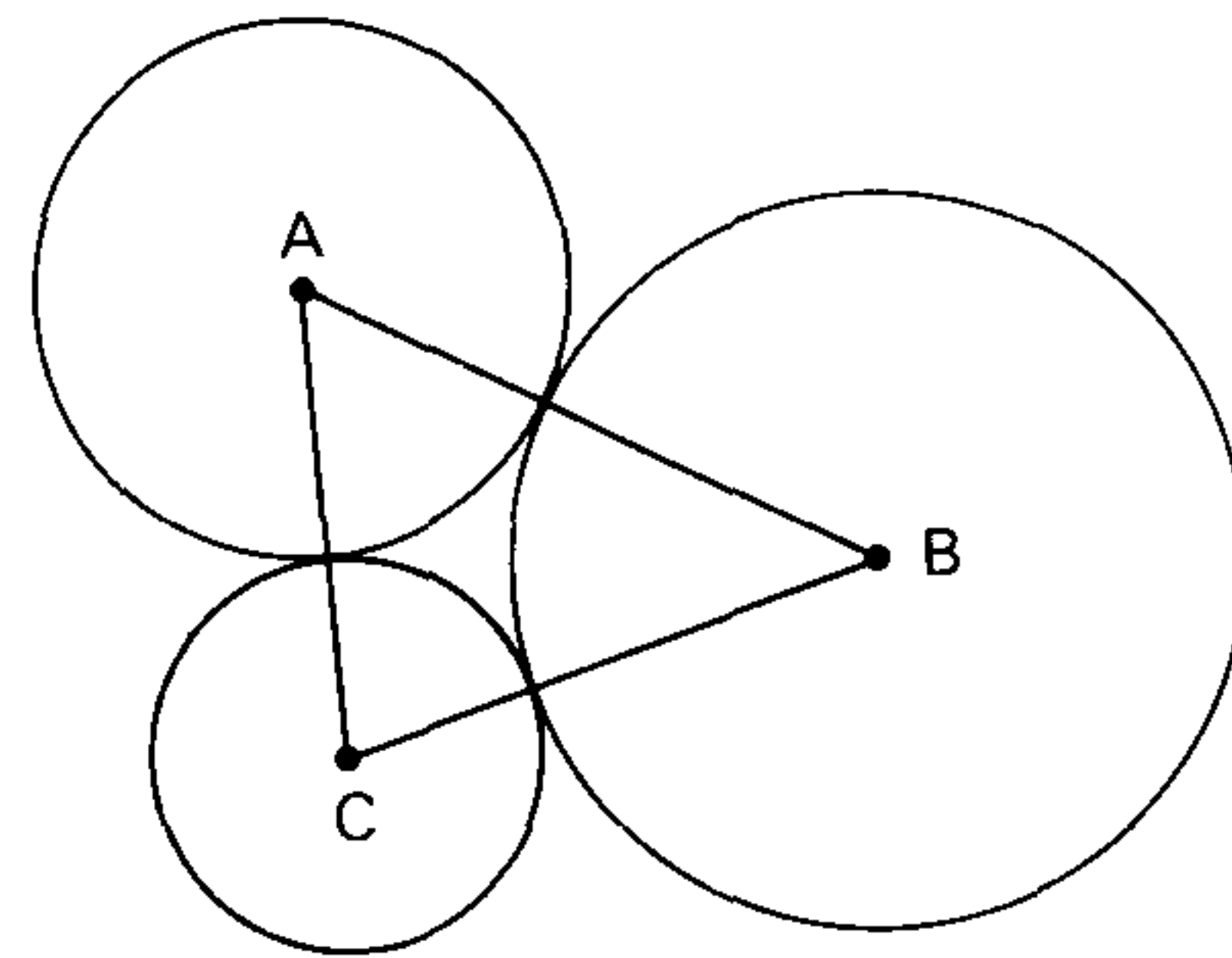
157. Condição necessária e suficiente

Uma condição necessária e suficiente para um quadrilátero convexo ser circunscritível a uma circunferência é a soma de dois lados opostos ser igual à soma dos outros dois.

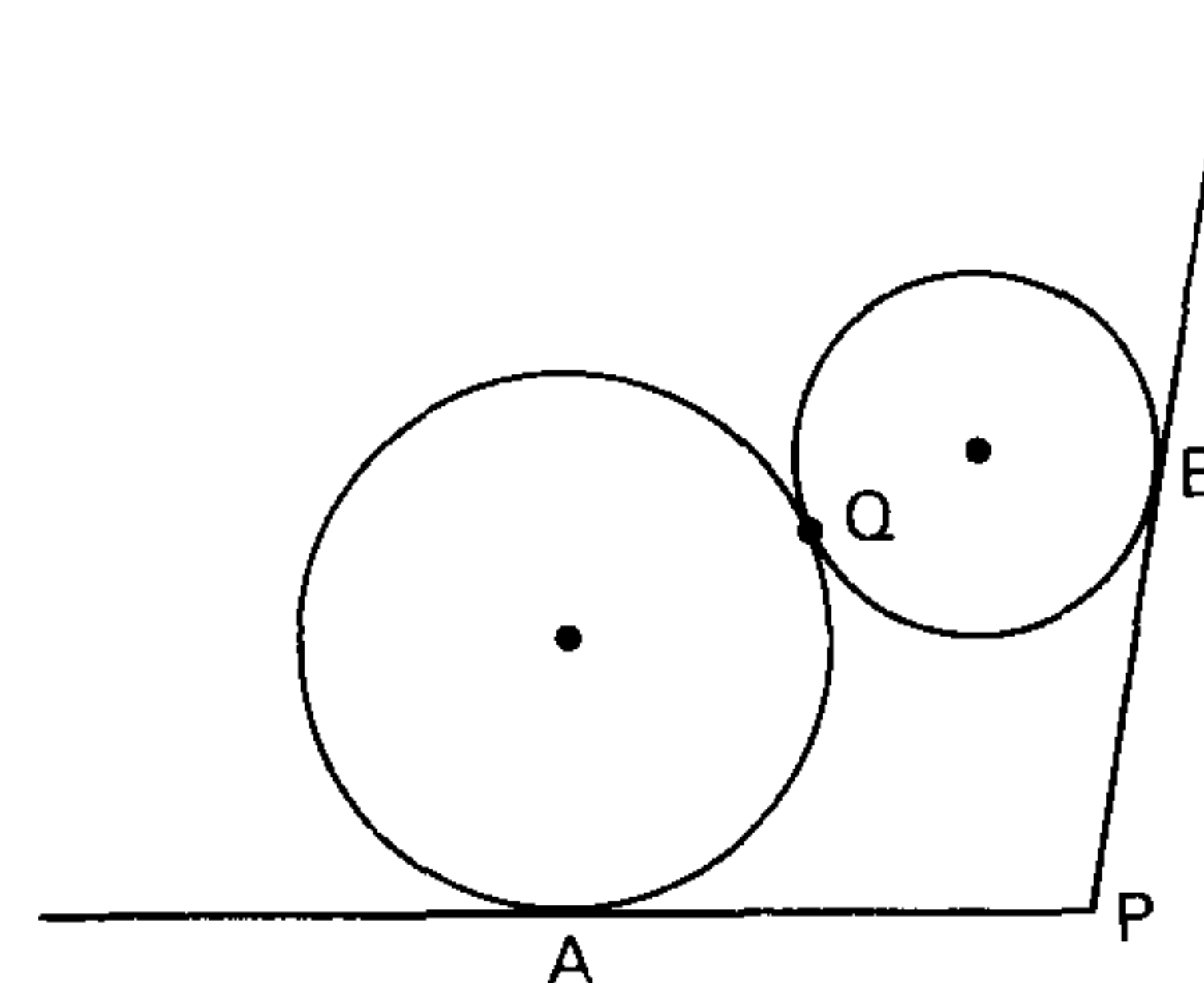
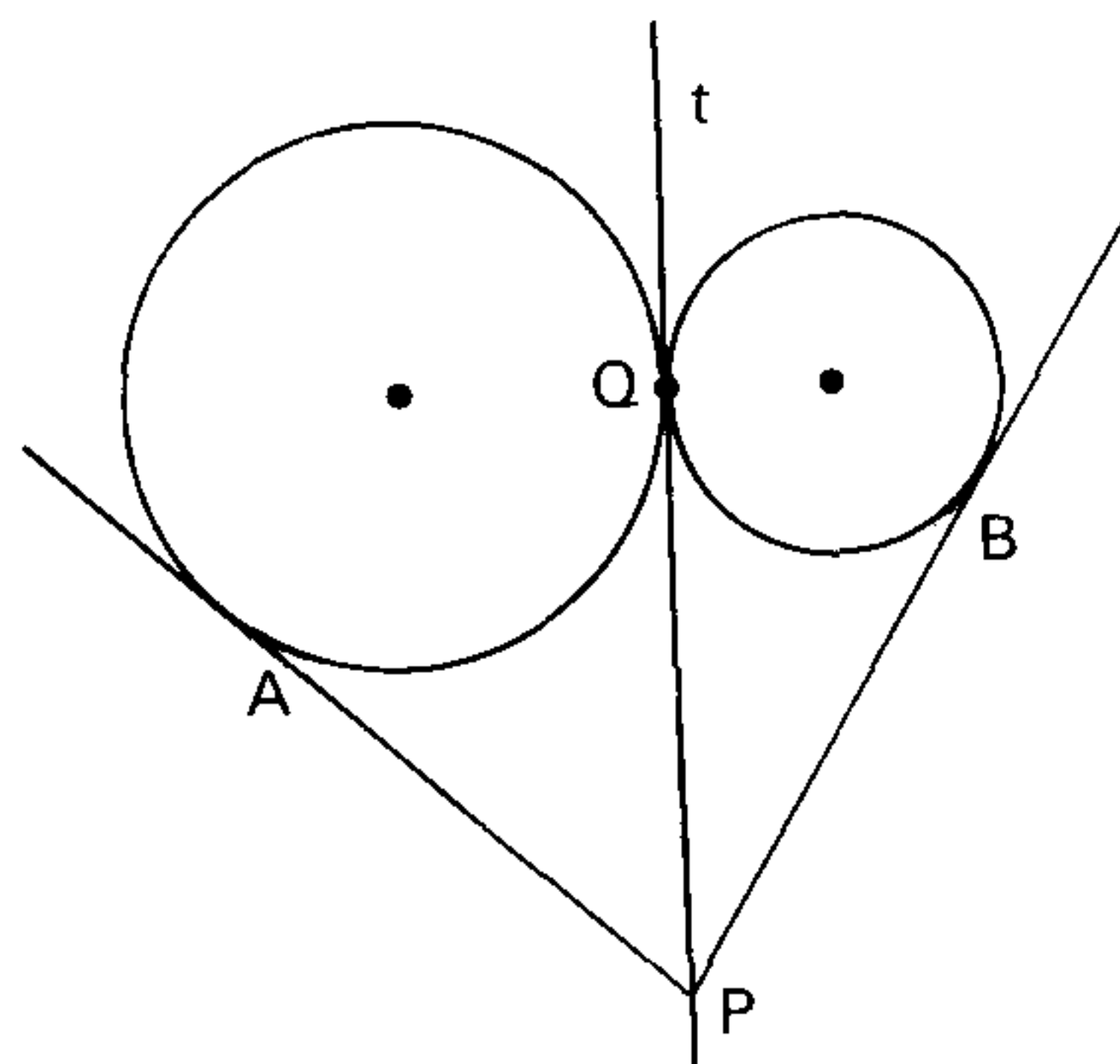
EXERCÍCIOS

336. Determine o raio do círculo de centro O, dados: $AB = 3x - 3$ e $OA = x + 3$.

337. A circunferência ao lado tem raio de *16 cm* e o ponto P dista *7 cm* do centro. Determine a distância entre P e a circunferência.

338. Determine o valor de x nos casos:

a) s é perpendicular a $\overline{AB}$

b) $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência

339. Determine o valor de x, sendo O o centro da circunferência nos casos:

a)

b)

340. As circunferências da figura são tangentes externamente. Se a distância entre os centros é *28 cm* e a diferença entre os raios é *8 cm*, determine os raios.

341. Duas circunferências são tangentes internamente e a soma dos raios é *30 cm*. Se a distância entre os centros é *6 cm*, determine os raios.

342. Na figura, as circunferências são tangentes duas a duas e os centros são os vértices do triângulo ABC. Sendo $AB = 7\,cm$, $AC = 5\,cm$ e $BC = 6\,cm$, determine os raios das circunferências.

343. As circunferências são tangentes externamente em Q e $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são tangentes às circunferências. Determine a medida do ângulo $A\hat{Q}B$ nos casos:

a) onde t é tangente comum e $A\hat{P}B = 80°$

b) com $A\hat{P}B = 100°$

344. Diga o número de retas que passam pelo ponto P e tangenciam a circunferência λ nos casos:

a) P pertence a λ

b) P é interior a λ

c) P é externo a λ

345. Determine o número de retas tangentes comuns que podemos traçar a duas circunferências nos casos abaixo.

a) As circunferências são concêntricas distintas.

b) As circunferências são exteriores.

c) As circunferências são secantes.

d) As circunferências são tangentes exteriormente.

e) As circunferências são tangentes interiormente.

346. Pode um setor circular coincidir com um segmento circular? Cite o caso.

347. Em que caso um setor circular é um semicírculo?

348. O que podemos dizer da reta que passa pelo ponto de tangência de duas circunferências tangentes entre si, sabendo que essa reta é perpendicular à reta que passa pelos centros dessas circunferências?

349. É possível obtermos uma corda que passa pelo ponto médio do diâmetro de uma circunferência?

350. Dê a posição de duas circunferências de raios r e R, sendo d a distância entre seus centros, nos casos abaixo:

a) r = 2 cm; R = 5 cm; d = 10 cm

b) r = 5 cm; R = 10 cm; d = 15 cm

c) r = 3 cm; R = 7 cm; d = 4 cm

d) r = 6 cm; R = 10 cm; d = 0 cm

e) r = 6 cm; R = 8 cm; d = 10 cm

351. A distância entre os centros de duas circunferências tangentes exteriormente é de $33\,cm$. Determine seus diâmetros, sabendo que a razão entre seus raios é $\frac{4}{7}$.

352. A distância entre os centros de duas circunferências tangentes internamente é $5\,cm$. Se a soma dos raios é $11\,cm$, determine os raios.

353. Duas circunferências são secantes, sendo $20\,cm$ a distância entre seus centros. Sabendo que o raio da menor circunferência mede $11\,cm$, determine o raio da maior, que é múltiplo de 6.

354. Duas circunferências de centros A e B são tangentes externamente e tangenciam internamente uma circunferência de centro C. Sendo $AB = 12\,m$, $AC = 17\,m$ e $BC = 13\,m$, determine os raios dessas circunferências.

355. Seja P o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo ABC, com o lado $\overline{AB}$. Se $AB = 7$, $BC = 6$ e $AC = 8$, quanto vale AP?

356. Considere um triângulo ABC de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, e sejam P, Q e R os pontos em que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ tangenciam a circunferência inscrita. Calcule os segmentos $AR = x$, $BP = y$ e $CQ = z$.

Solução

Temos:

$AR = x \implies AQ = x$
$BP = y \implies BR = y$
$CQ = z \implies CP = z$

Daí vem:

$x + y = c \quad (1)$
$x + z = b \quad (2)$
$y + z = a \quad (3)$

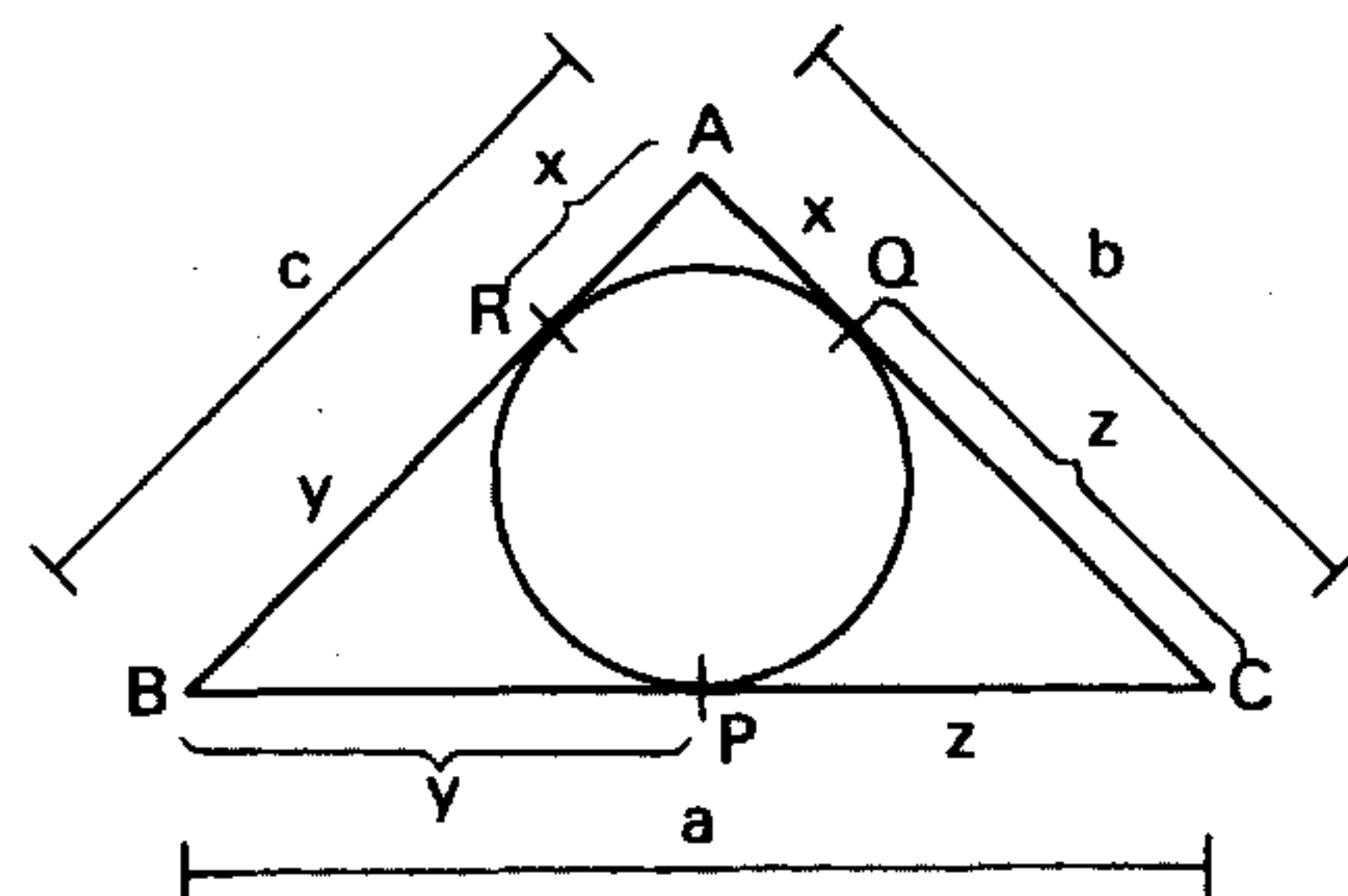
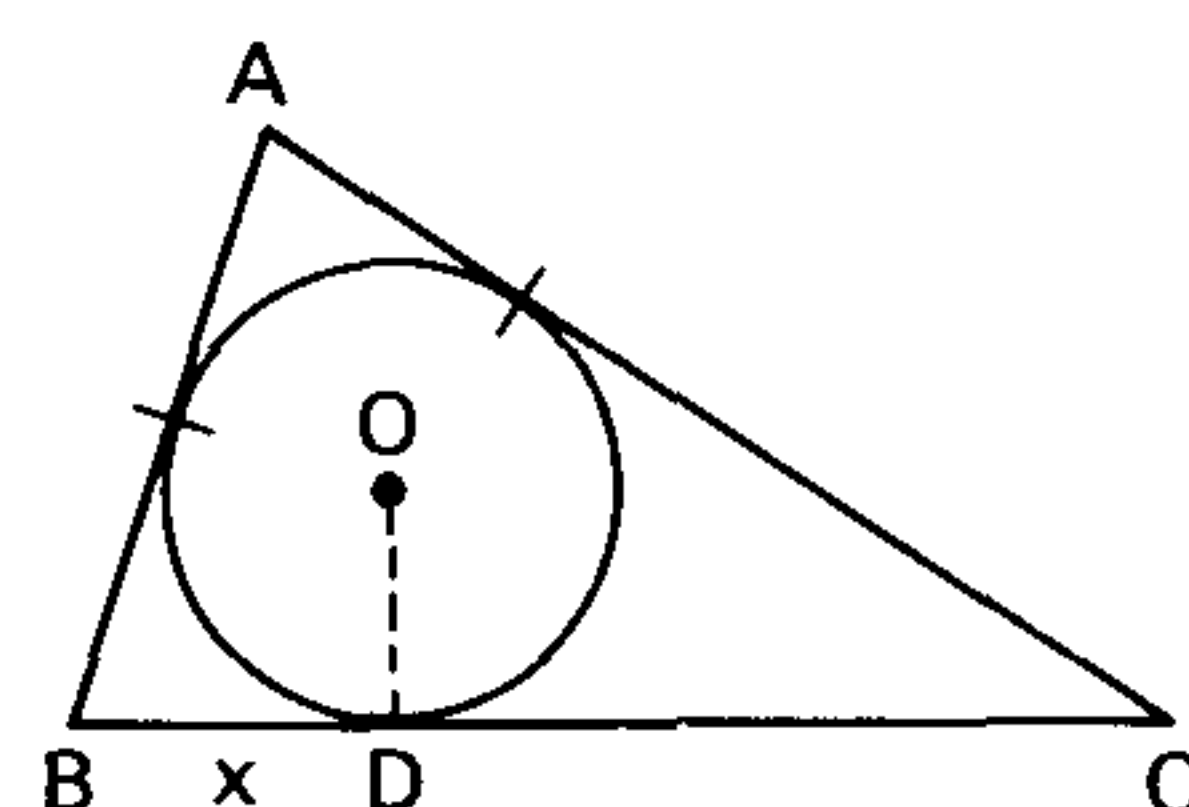
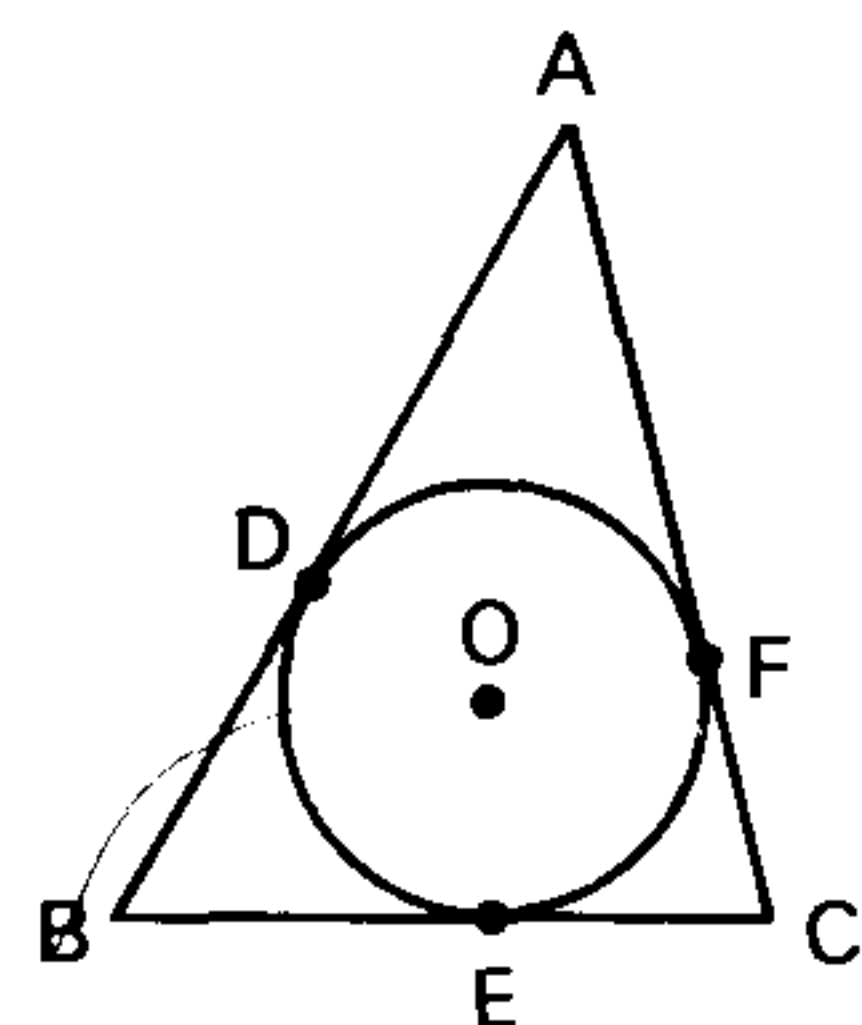
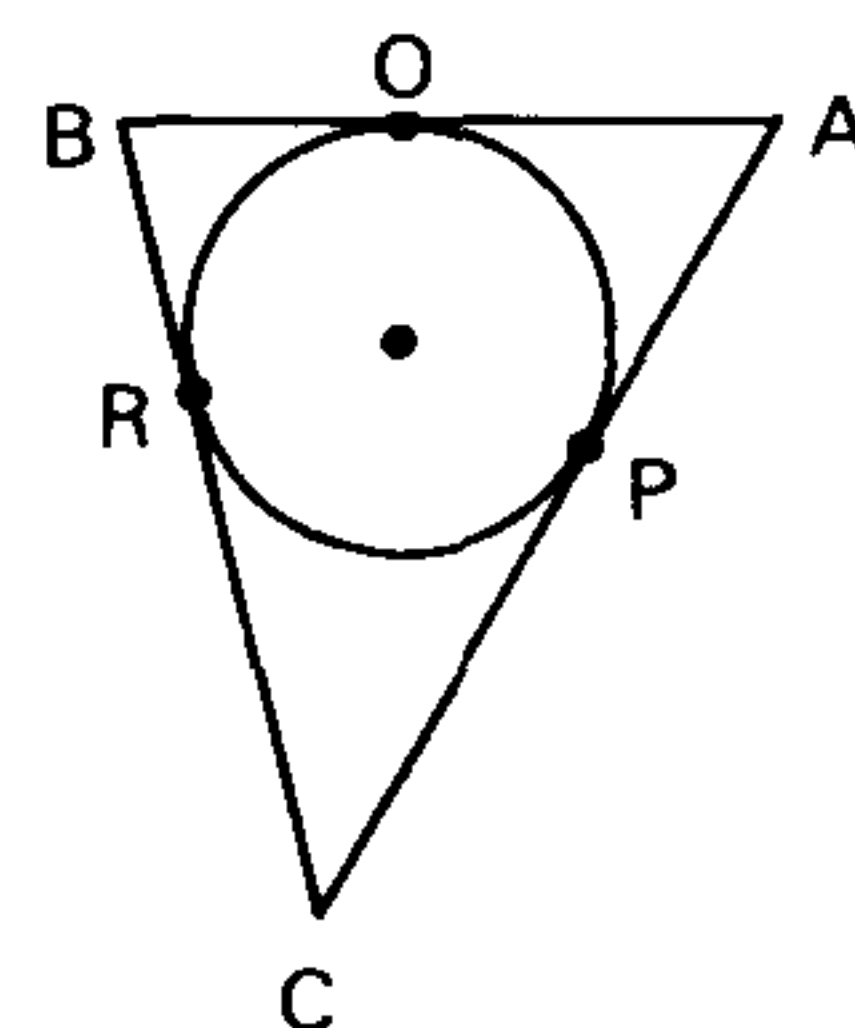
$2x + 2y + 2z = a + b + c$

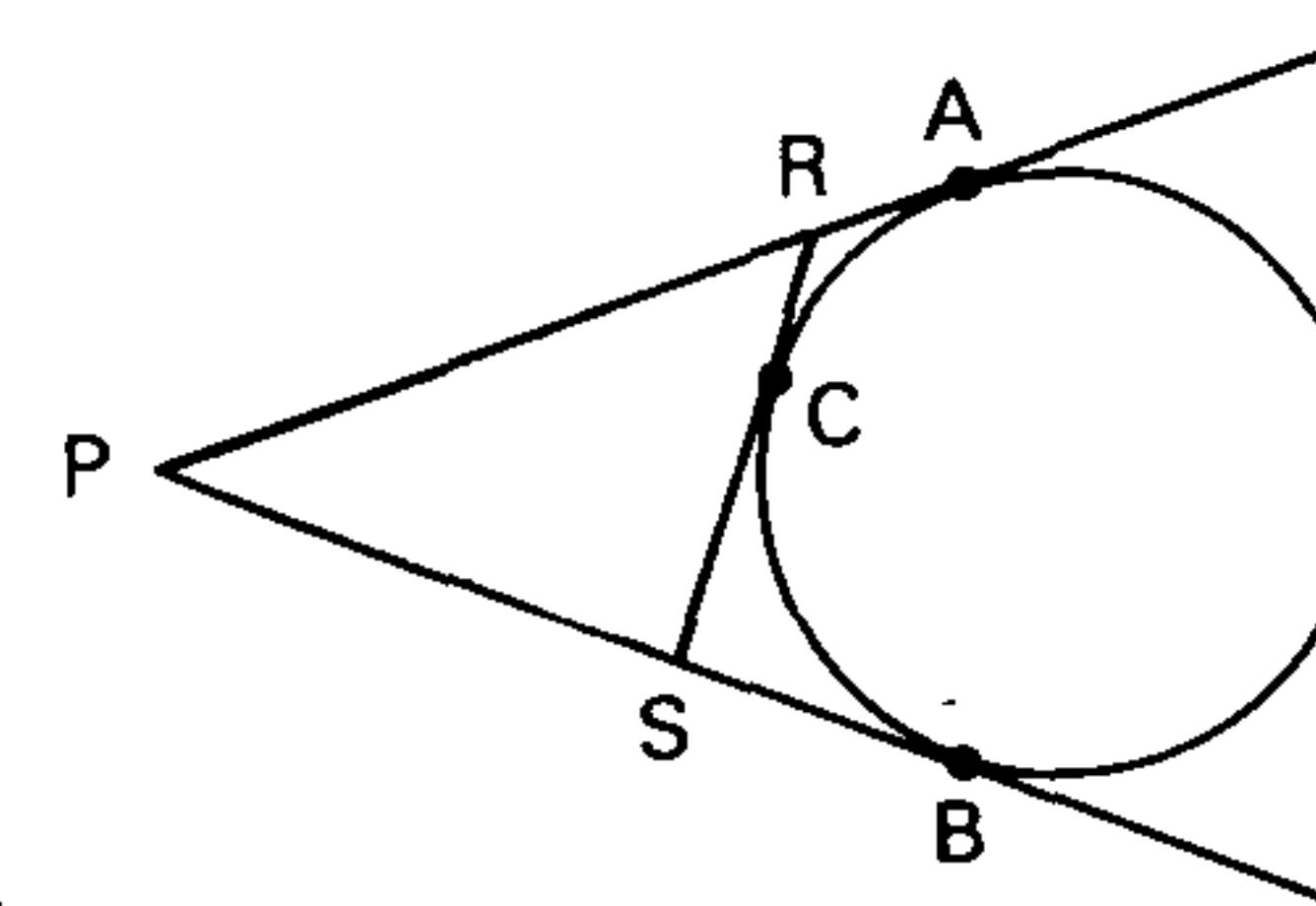
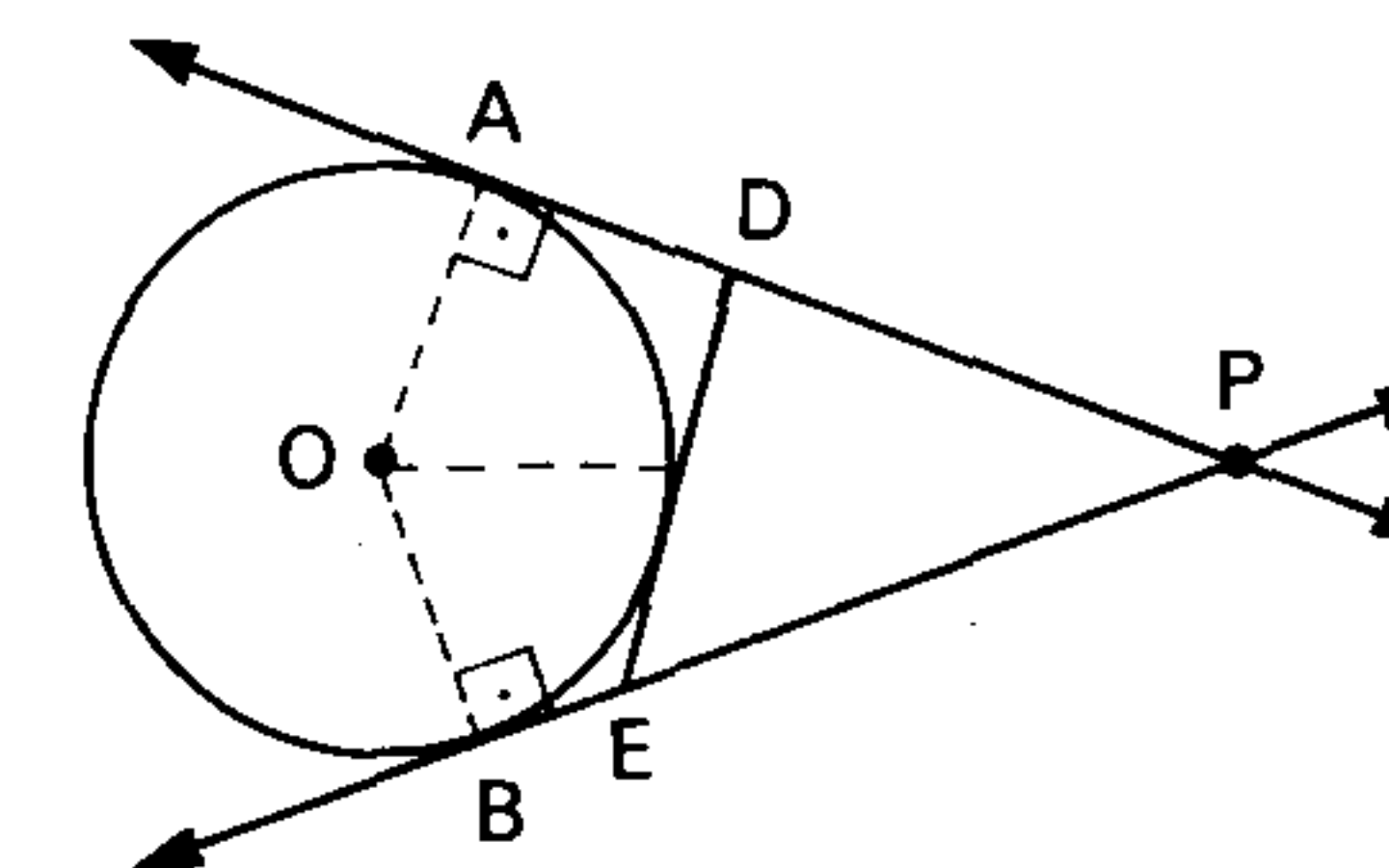
Fazendo $a + b + c = 2p$

(em que p é semiperímetro)

$2(x + y + z) = 2p \implies x + y + z = p \quad (4)$

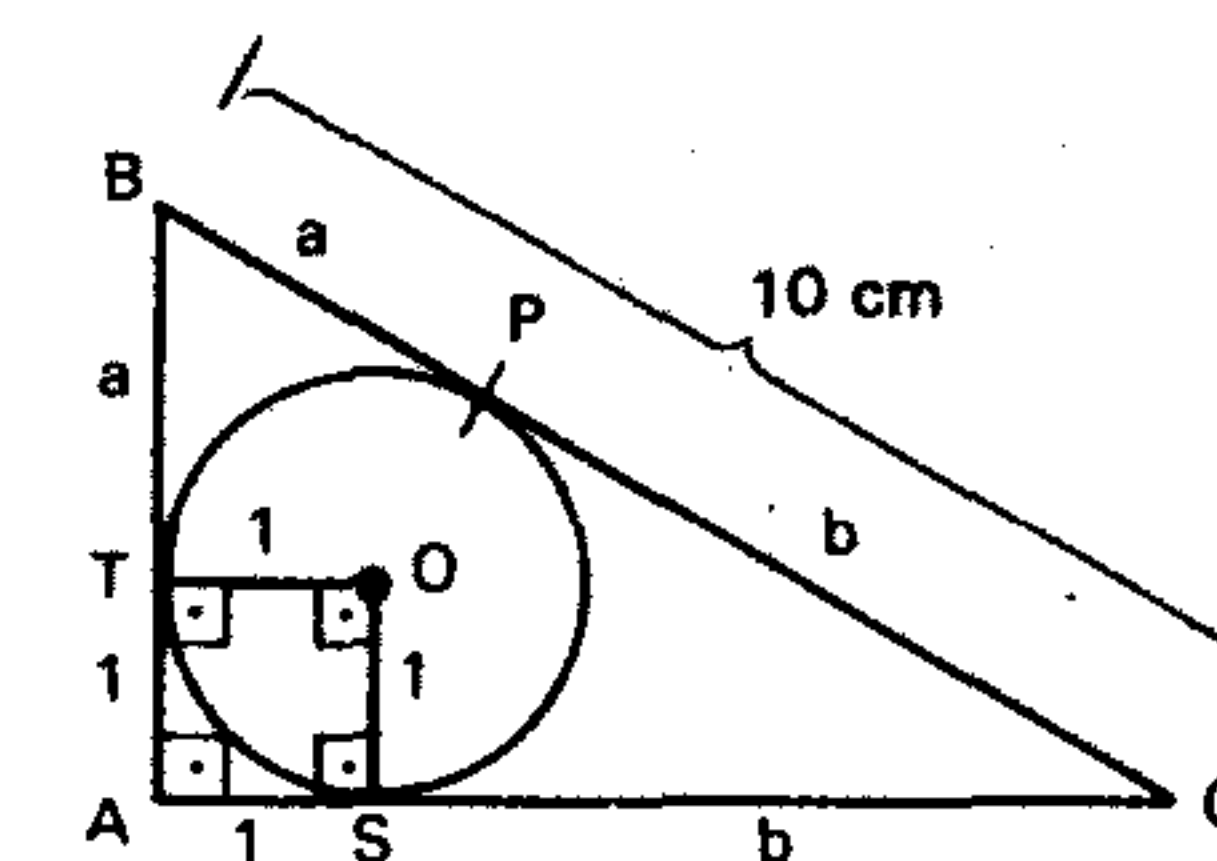
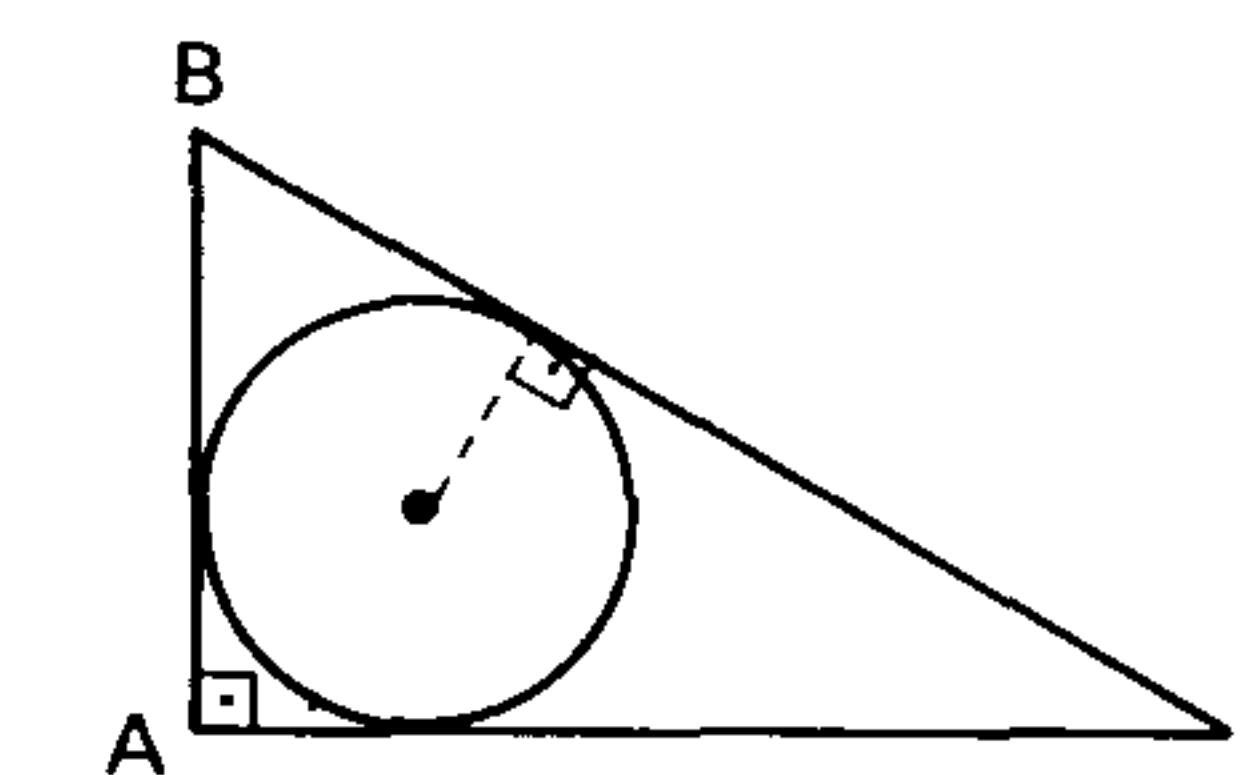
$(4) - (1) \implies z = p - c$; $(4) - (2) \implies y = p - b$;

$(4) - (3) \implies x = p - a$

357. Na figura, determine a medida do segmento $\overline{BD}$, sabendo que a circunferência de centro O está inscrita no triângulo ABC, e que os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente *6 cm*, *8 cm* e *10 cm*.

358. Na figura, o círculo de centro O é inscrito no triângulo ABC. $BD = 4$, $AF = 3$ e $EC = 5$. Qual é o perímetro do triângulo ABC?

359. Na figura, sabendo que $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ e p o semiperímetro do triângulo, prove que AP é igual a $p - a$.

360. Um círculo é inscrito num triângulo ABC e tangencia os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente em P, Q e R. Se $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ e o semiperímetro é p, calcule AR, BP e CQ.

361. Na figura $PA = 10\ cm$. Calcule o perímetro do triângulo PRS.

362. Na figura, $\overline{PA}$ é igual ao triplo do diâmetro da circunferência. Determine a medida do perímetro do triângulo PDE em função do raio r dessa circunferência.

363. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede *10 cm* e o raio do círculo inscrito mede *1 cm*. Calcule o perímetro do triângulo.

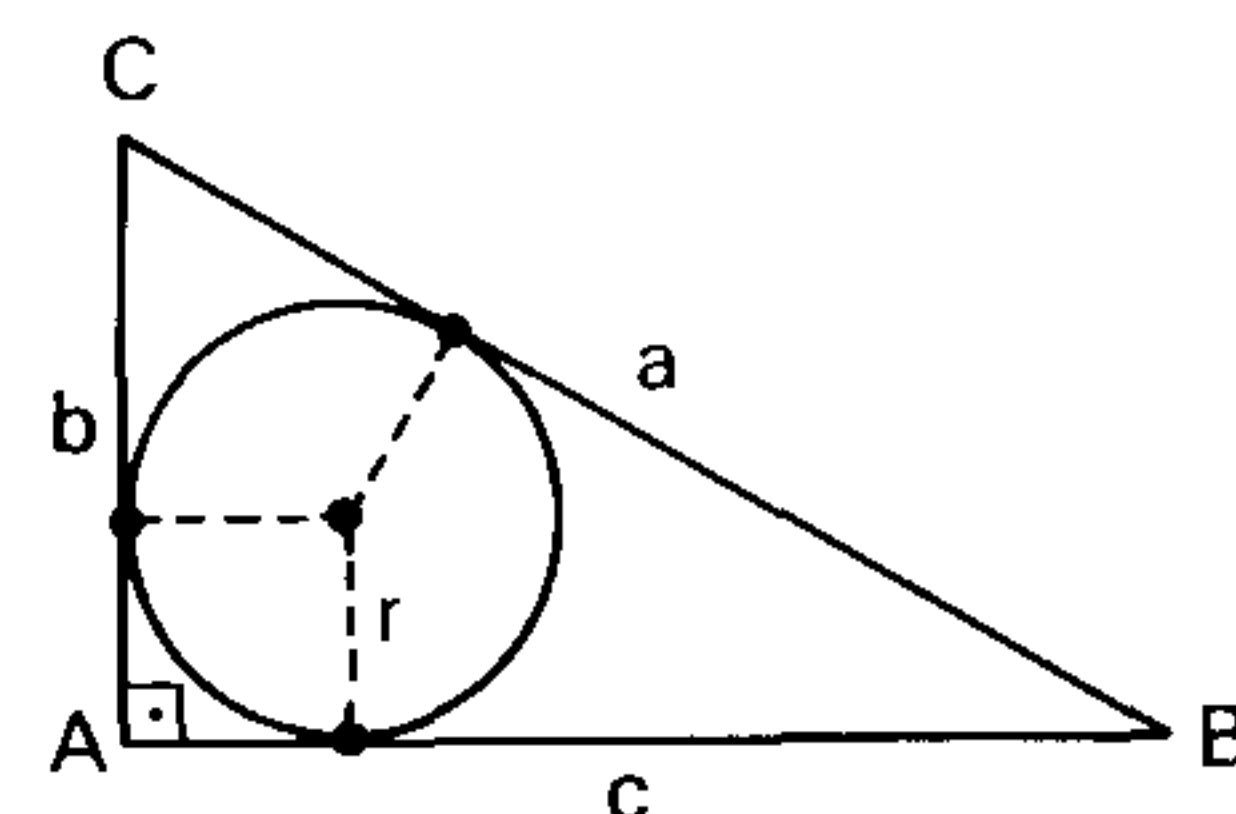
Solução

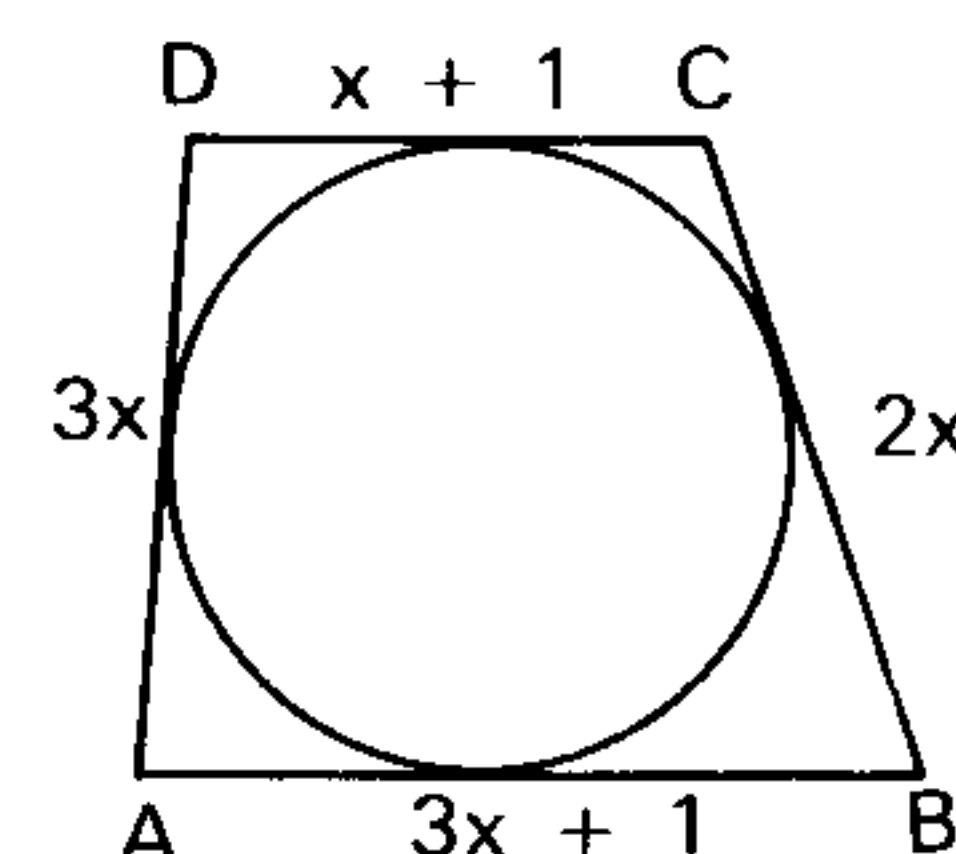
Note que $SATO$ é quadrado de lado *1 cm*.
Indicando: $BP = BT = a$ e $CP = CS = b$, obtemos:

$2p = (a+1) + (b+1) + a + b$
$2p = a+b + 2 + a+b$
$2p = 10 + 2 + 10$
$2p = 22$ cm

364. Na figura, calcule a medida do raio r da circunferência inscrita no triângulo retângulo ABC, sendo $AB = 10\ cm$, $AC = 24\ cm$ e $BC = 26\ cm$.

365. Determine a medida do diâmetro de um círculo inscrito em um triângulo retângulo cujos lados medem *9 cm, 12 cm* e *15 cm*.

366. Determine o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a.

367. Na figura, sendo $2p = a + b + c$ e r o raio do círculo inscrito, calcule a medida da hipotenusa a em função de p e r.

AB = C, AC = b, AB = a

368. Determine o perímetro do quadrilátero *ABCD*, circunscritível, da figura.

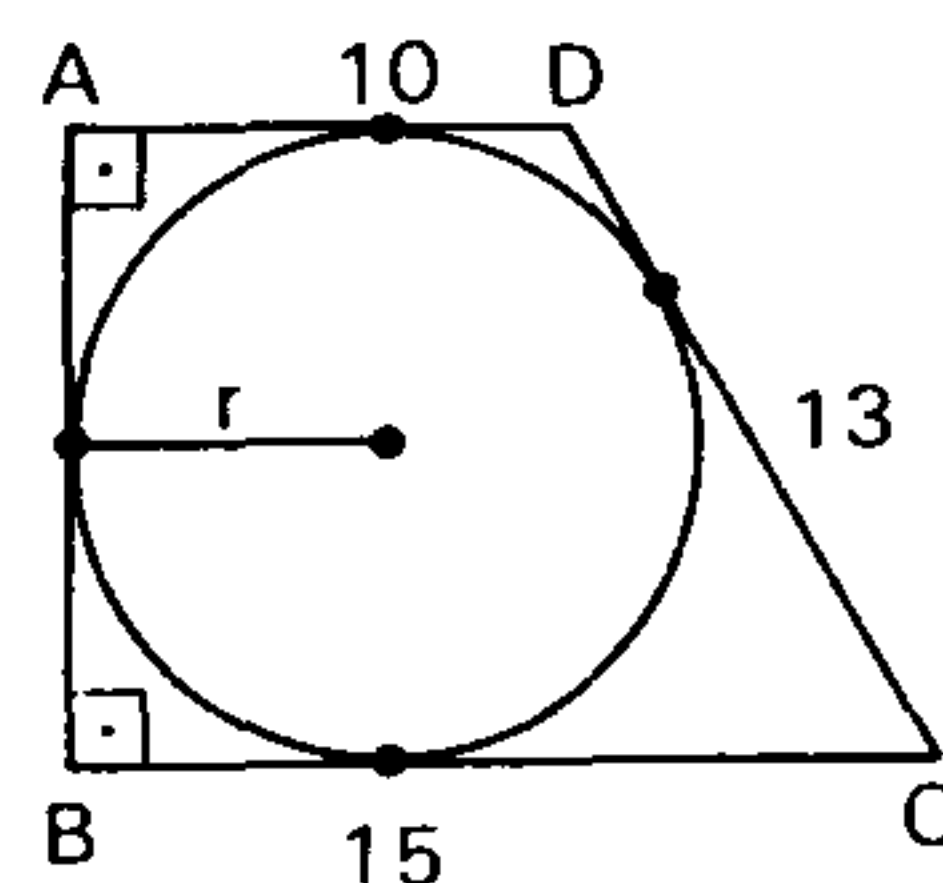
AB = 3x + 1, BC = 2x
CD = x + 1 e DA = 3x

Solução

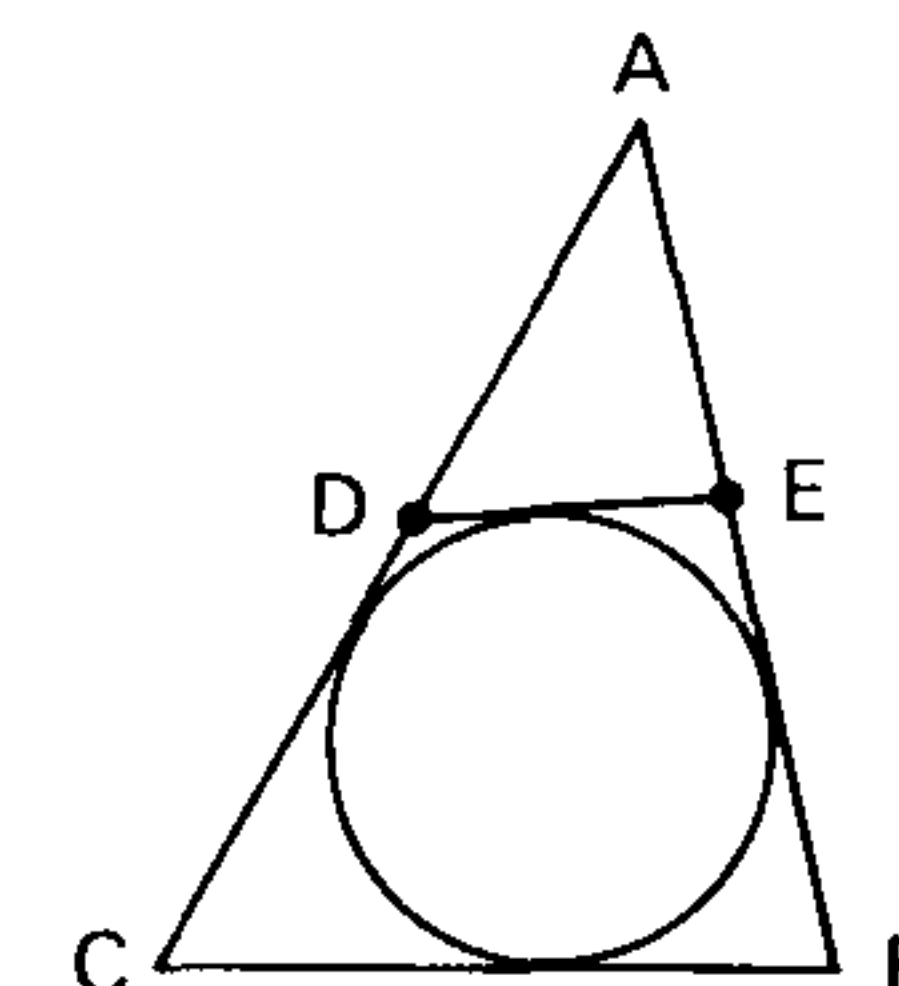
ABCD é circunscrito $\Longrightarrow$ AB + CD = BC + AD

Então:

$(3x + 1) + (x + 1) = 2x + 3x \Longrightarrow x = 2$
perímetro $= 2p = (3x + 1) + 2x + (x + 1) + 3x \Longrightarrow 2p = 9x + 2$
Logo: $2p = 20$.

369. *ABCD* é um quadrilátero circunscritível cujos lados medem $AD = 12$ *cm*, $DC = 9$ *cm*, $BC = x + 7$ e $AB = 2x + 1$. Determine o perímetro desse quadrilátero.

370. Calcule o valor do raio r do círculo inscrito no trapézio retângulo.

371. A diferença de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível é igual a *8 cm* e a diferença dos outros dois lados é *4 cm*. Determine os lados do quadrilátero, sendo *56 cm* a sua soma.

372. Na figura ao lado, determine o perímetro do triângulo *ADE*, sabendo que o perímetro do triângulo *ABC* vale *10 cm*, a base $\overline{BC}$ mede *4 cm* e que o círculo está inscrito no quadrilátero *BCDE*.

373. Determine a medida de um dos lados não paralelos de um trapézio isósceles, circunscrito a um círculo, sabendo que suas bases medem *30 cm* e *10 cm*, respectivamente.

374. Prove que qualquer paralelogramo circunscrito a uma circunferência é losango.

375. Prove que o diâmetro é a maior corda de uma circunferência.

376. Prove que, se duas cordas de uma circunferência estão a uma mesma distância do centro, então elas são congruentes.

CAPÍTULO XI

Ângulos na Circunferência

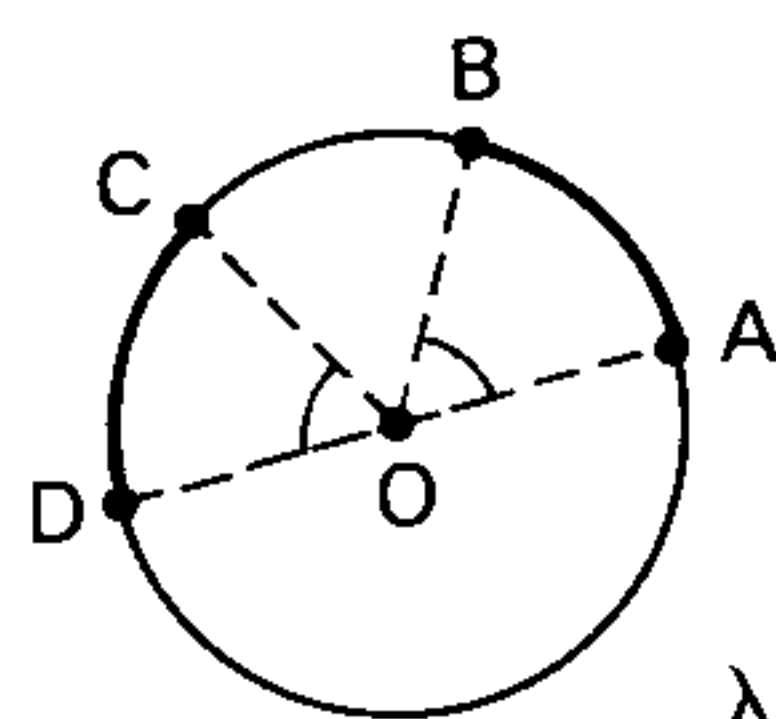
I. Congruência, adição e desigualdade de arcos

158. Circunferências congruentes

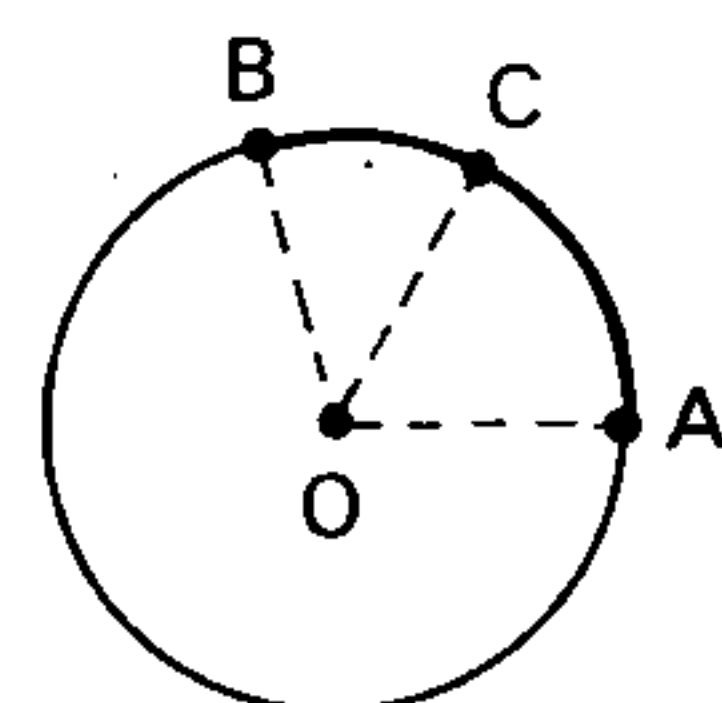
Duas circunferências são congruentes quando têm raios iguais.

159. Arcos congruentes

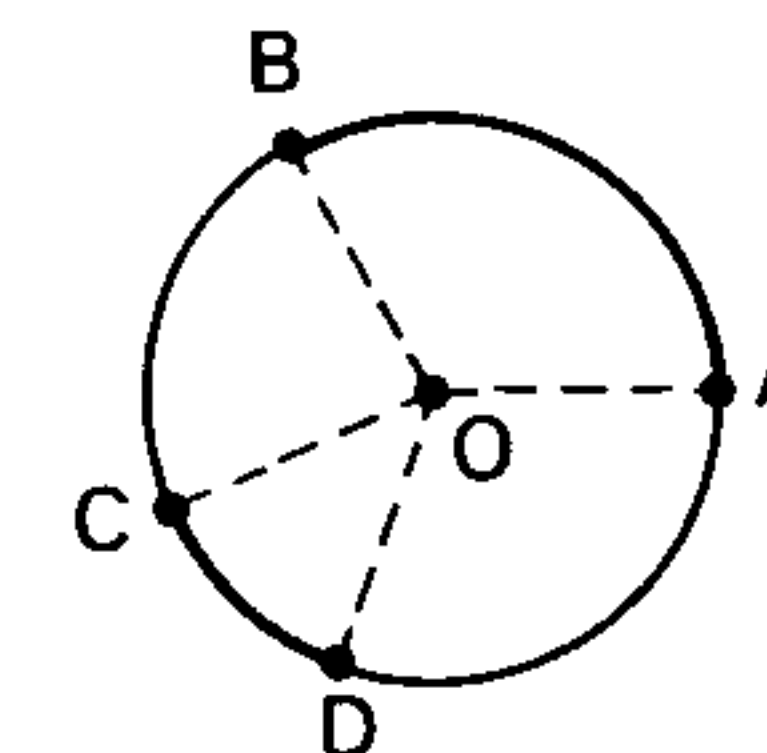
Dois arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ de uma circunferência de centro O são congruentes se, e somente se, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes.

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{CD} \iff A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$$

160. Adição de arcos

Numa circunferência de centro O, o arco $\widehat{AB}$ é soma dos arcos $\widehat{AC}$ e $\widehat{CB}$ se, e somente se, o ângulo $A\hat{O}B$ é soma dos ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$.

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB} \iff A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$$

161. Desigualdade de arcos

Numa circunferência de centro O, o arco $\widehat{AB}$ é maior que o arco $\widehat{CD}$ se, e somente se, o ângulo $A\hat{O}B$ é maior que o ângulo $C\hat{O}D$.

$$\widehat{AB} > \widehat{CD} \iff A\hat{O}B > C\hat{O}D$$

162. Notas

1ª) Para *círculos* congruentes, *setores circulares* congruentes ou desiguais e *segmentos circulares* congruentes, adaptam-se os conceitos vistos para *circunferência* e *arcos*.

2ª) Os conceitos sobre arcos que emitimos são de arcos de uma mesma circunferência, porém eles podem ser estendidos para arcos de circunferências congruentes.

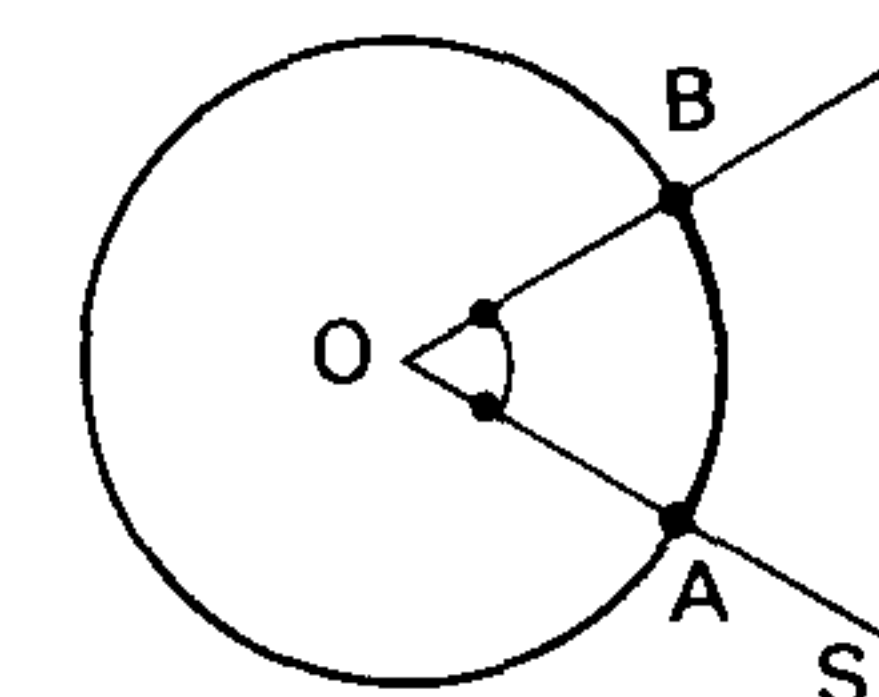
II. Ângulo central

163. Definição

Ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

Se numa circunferência de centro O um ângulo central determina um arco $\widehat{AB}$, dizemos que:

$\widehat{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$, ou

$\widehat{AB}$ é o arco subentendido por $A\hat{O}B$.

$A\hat{O}B$ ângulo central
$\widehat{AB}$ arco correspondente

164. Medida do ângulo central e do arco correspondente

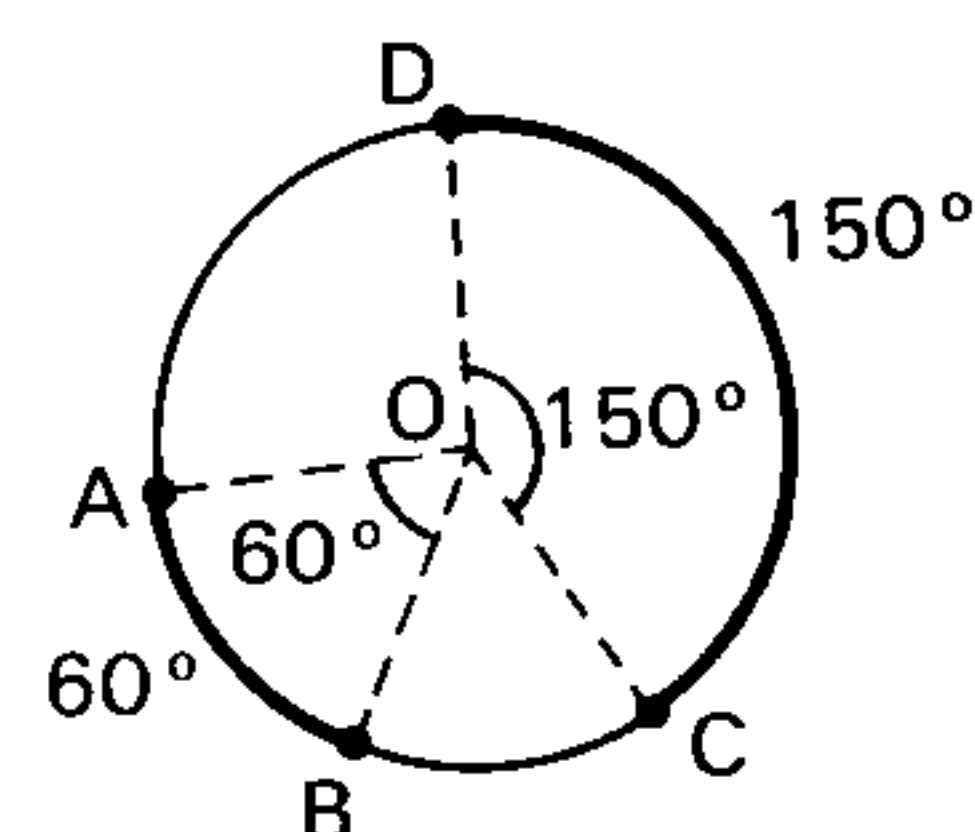
A *congruência*, a *adição* e a *desigualdade* de *arcos* foram estabelecidas em correspondência com a congruência, a adição e a desigualdade dos ângulos

centrais correspondentes. Portanto, para *medir* um arco tomando outro arco da mesma circunferência como *unidade* (arco unitário) basta utilizar os respectivos ângulos centrais.

> **Tomando-se para *unidade de arco* (arco unitário) o arco definido na circunferência por um *ângulo central unitário* (unidade de ângulo), temos:**
> ***a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.***

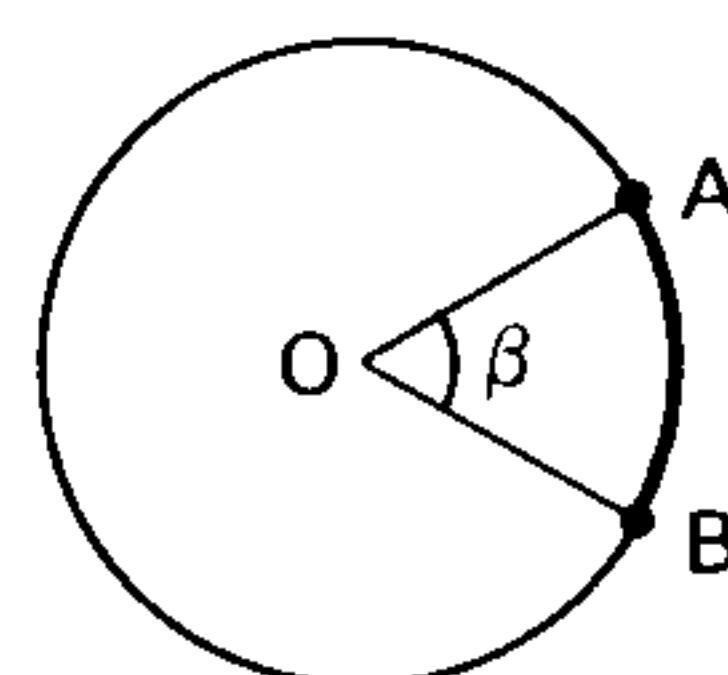
Assim, na circunferência de centro O ao lado:

1) se $m(A\hat{O}B) = 60°$, então
$m(\widehat{AB}) = 60°$ e reciprocamente.
$A\hat{O}B = 60° \iff \widehat{AB} = 60°$

2) Se $m(C\hat{O}D) = 150°$, então
$m(\widehat{CD}) = 150°$ e reciprocamente.
$C\hat{O}D = 150° \iff \widehat{CD} = 150°$

165. *Observação*

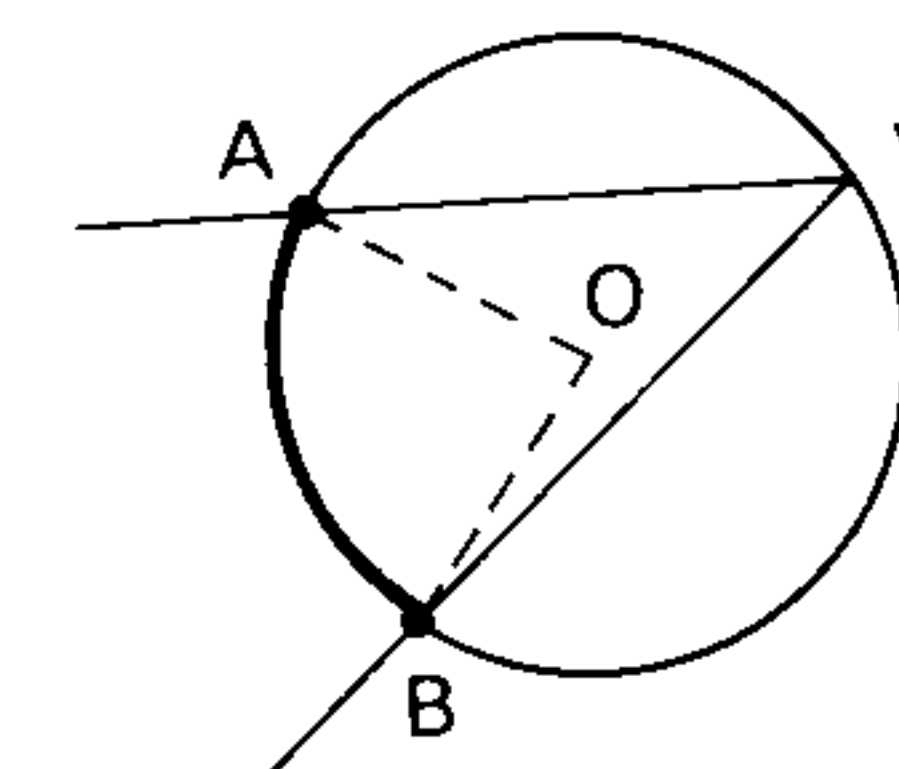
Para simplificar a simbologia, na maioria dos casos, vamos confundir um arco AB com sua medida $m(\widehat{AB})$, indicando ambos por $\widehat{AB}$.

Na figura ao lado:

$$\beta = \widehat{AB}$$

III. Ângulo inscrito

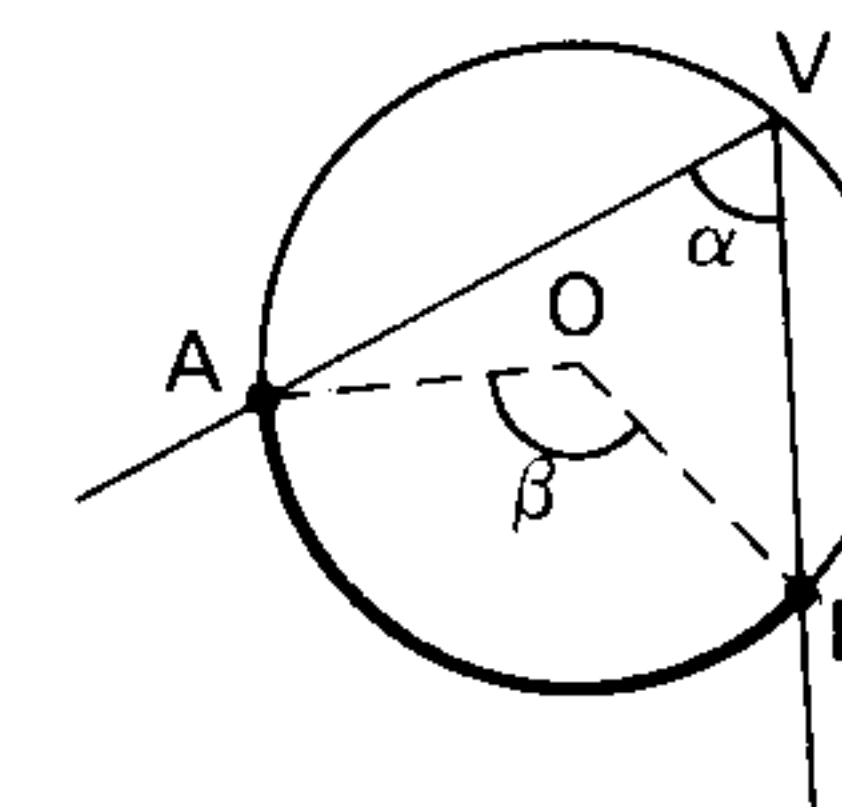
166. *Definição*

Ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.

Na figura,
$A\hat{V}B$ é ângulo inscrito,
$\widehat{AB}$ é o arco correspondente ao arco subentendido
$A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $A\hat{V}B$.

167. *Medida do ângulo inscrito*

> **Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente**
> **ou**
> **a medida de um ângulo inscrito é metade da medida do arco correspondente.**

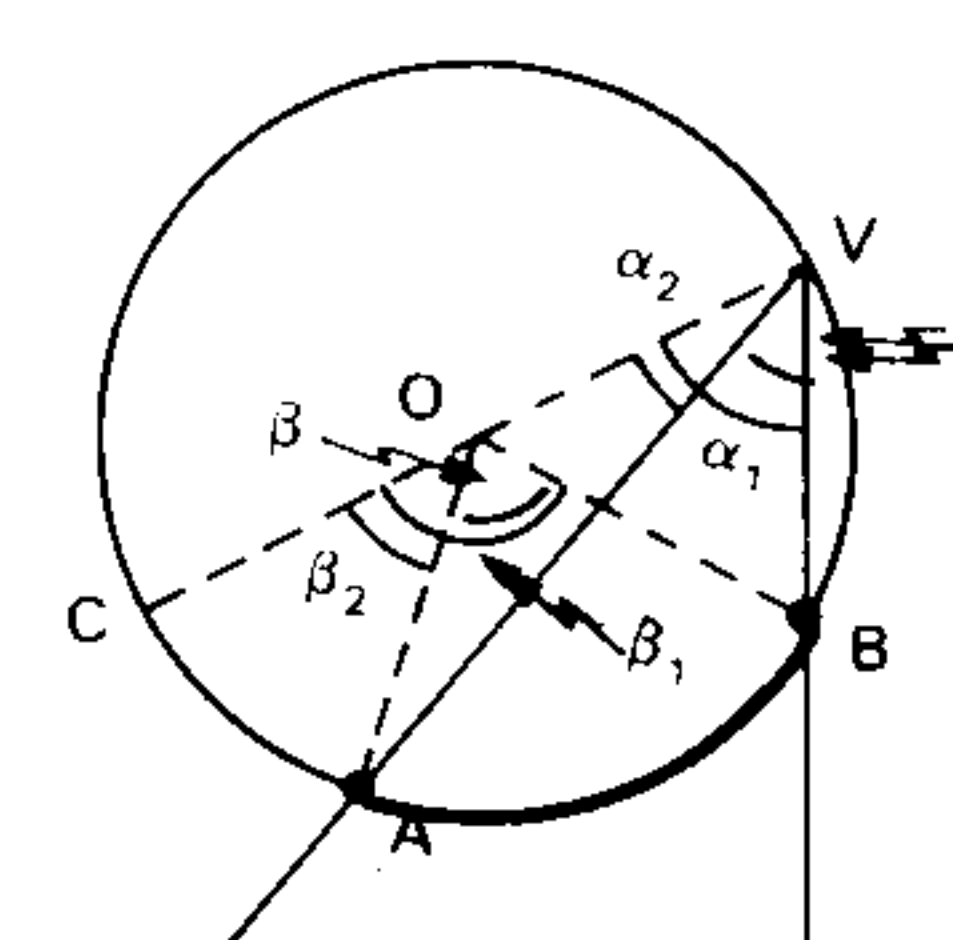
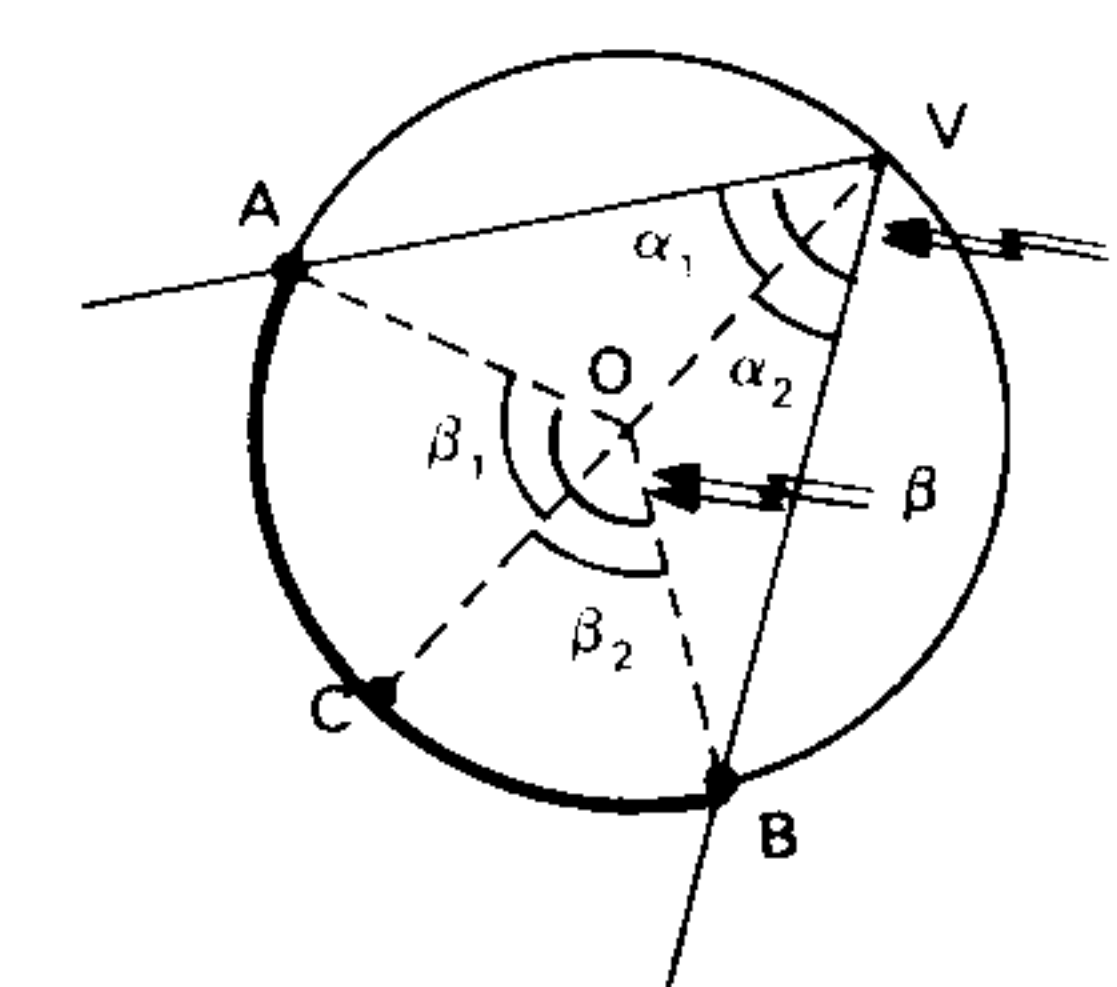
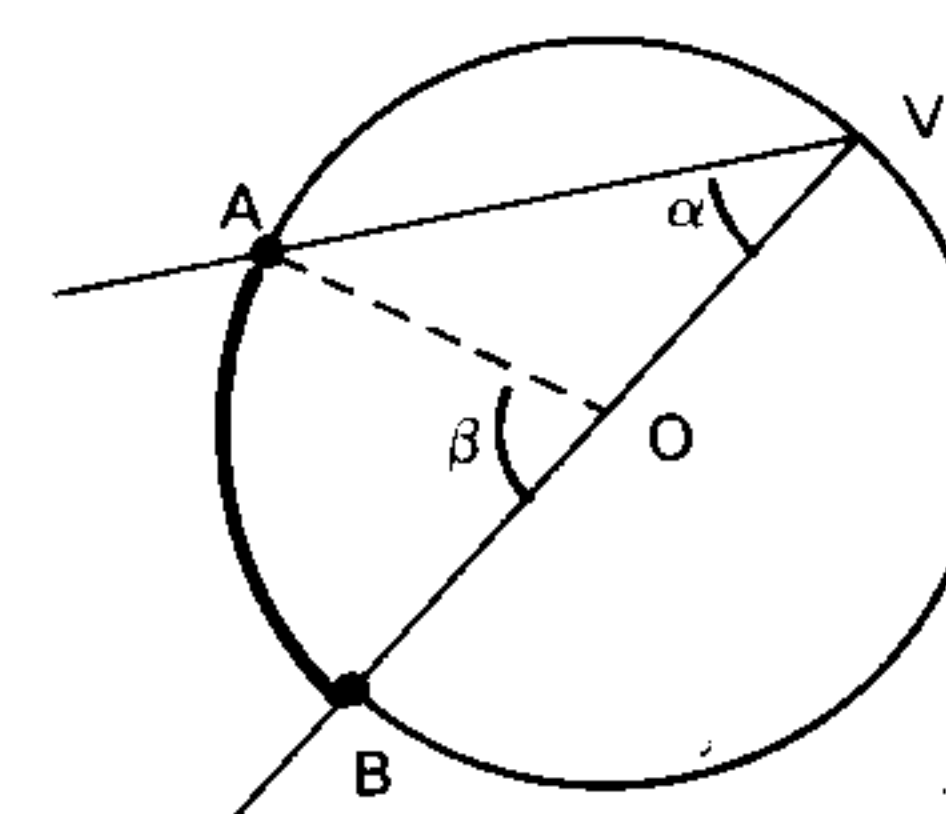
Seja $A\hat{V}B$ o ângulo inscrito de medida α e $A\hat{O}B$ o ângulo central correspondente de medida β. Vamos provar que:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Demonstração

Temos três casos a considerar:

1º caso — O está num lado do ângulo

2º caso — O é interno ao ângulo

3º caso — O é externo ao ângulo

No 1º caso:

$\overline{OV} \equiv \overline{OA}$ (raio) $\Longrightarrow$ ΔOVA isósceles $\Longrightarrow$ $\hat{V} = \alpha$ e $\hat{A} = \alpha$

β é ângulo externo no ΔOVA $\Longrightarrow$ $\beta = \hat{A} + \hat{V}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\beta = \alpha + \alpha$ $\Longrightarrow$ $\beta = 2\alpha$

Logo, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e, como $\beta = \widehat{AB}$, vem $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

No 2º caso:

Sendo C ponto de interseção de $\overrightarrow{VO}$ com a circunferência e, sendo $A\hat{V}C = \alpha_1$, $A\hat{O}C = \beta_1$, $C\hat{V}B = \alpha_2$, $C\hat{O}B = \beta_2$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ}\text{ caso: } \beta_1 = 2\alpha_1 \\ 1^{\circ}\text{ caso: } \beta_2 = 2\alpha_2 \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} \underbrace{\beta_1 + \beta_2}_{\beta} = 2\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\alpha} \Longrightarrow \beta = 2\alpha$$

Logo, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e, como $\beta = \widehat{AB}$, vem $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

No 3º caso:

Sendo C ponto de interseção de $\overrightarrow{VO}$ com a circunferência e, sendo $B\hat{V}C = \alpha_1$, $B\hat{O}C = \beta_1$, $A\hat{V}C = \alpha_2$ e $A\hat{O}C = \beta_2$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ}\text{ caso: } \beta_1 = 2\alpha_1 \\ 1^{\circ}\text{ caso: } \beta_2 = 2\alpha_2 \end{array}\right\} \overset{-}{\Longrightarrow} \underbrace{\beta_1 - \beta_2}_{\beta} = 2\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\alpha} \Longrightarrow \beta = 2\alpha$$

Logo, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e, como $\beta = \widehat{AB}$, vem $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

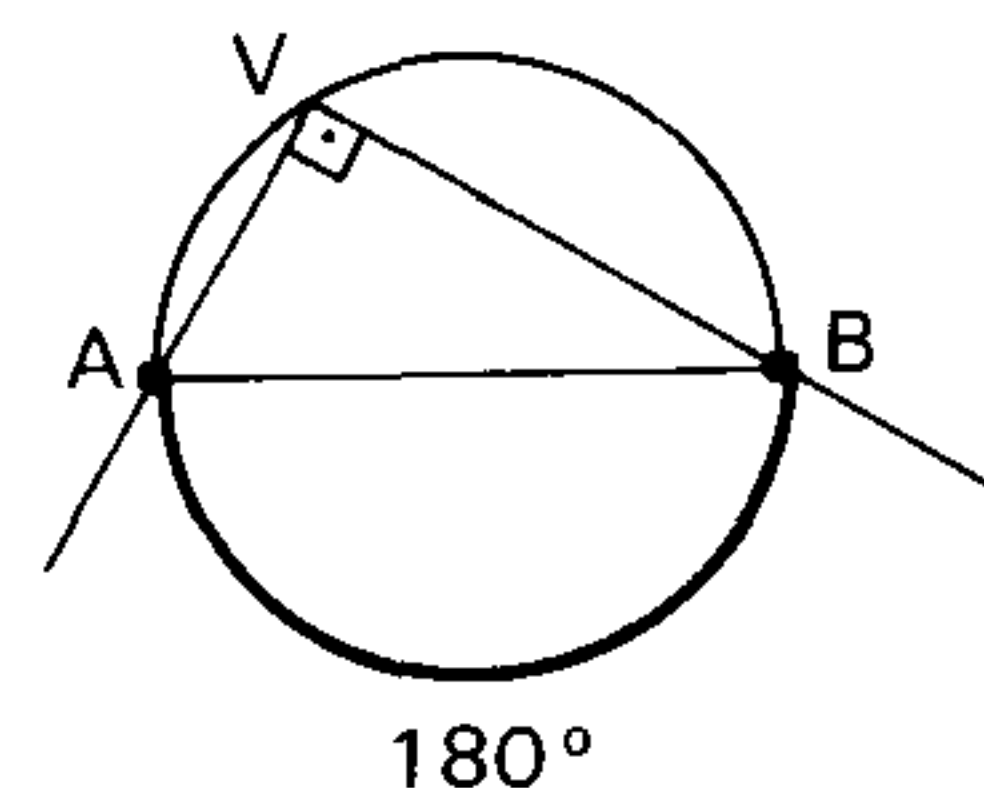
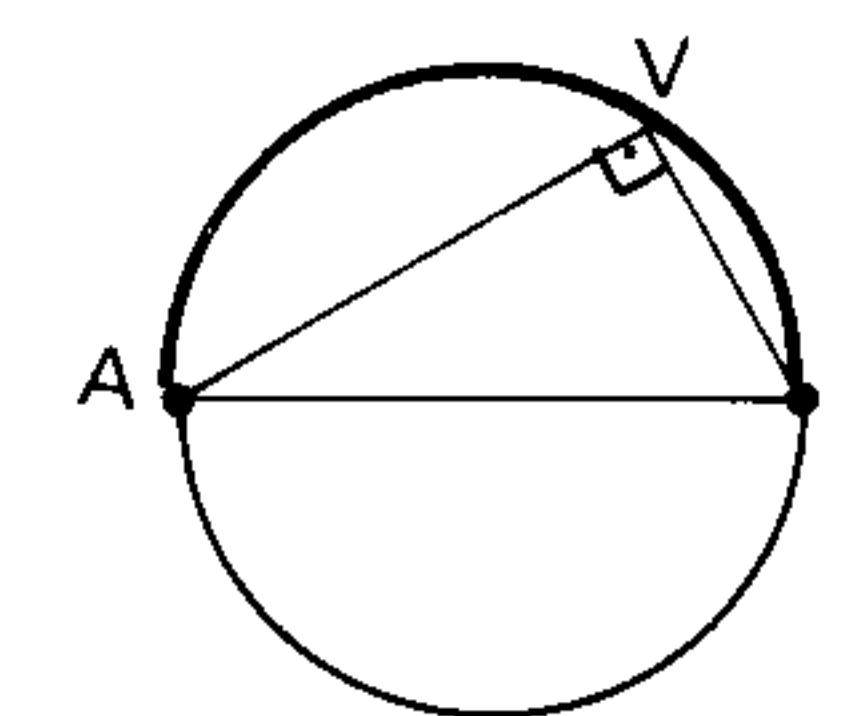
168. *Ângulo inscrito numa semicircunferência*

a) Todo ângulo reto inscrito subentende uma semicircunferência.

De fato,

($A\hat{V}B = 90°$, $A\hat{V}B$ inscrito) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\widehat{AB} = 180°$ $\Longrightarrow$ $\widehat{AB}$ é uma semicircunferência.

V
A
B
180°

b) Um triângulo que tem os vértices numa semicircunferência é inscrito nela.

Se um triângulo inscrito numa semicircunferência tem um lado igual ao diâmetro, então ele é triângulo retângulo.

V
A
B

De fato, sendo AVB o triângulo, A e B os extremos da semicircunferência, $\widehat{AB} = 180°$ $\Longrightarrow$ $A\hat{V}B = 90°$ $\Longrightarrow$ ΔAVB é retângulo em V.

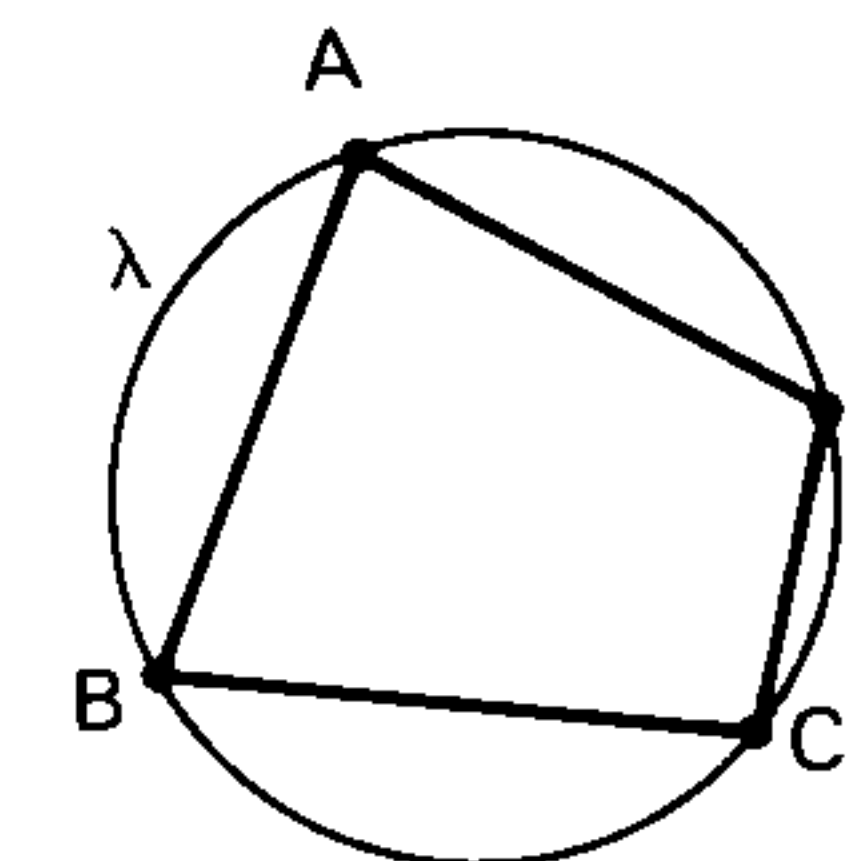
c) Em resumo

Todo ângulo reto é inscritível numa semicircunferência e, reciprocamente, todo ângulo inscrito numa semicircunferência, com os lados passando pelas extremidades, é ângulo reto.

169. *Quadrilátero inscritível — propriedade*

Um quadrilátero que tem os vértices numa circunferência é quadrilátero inscrito na circunferência.

a) Se um quadrilátero convexo é inscrito numa circunferência, então os ângulos opostos são suplementares.

A
λ
D
B
C

Seja λ uma circunferência.

Hipótese		*Tese*
ABCD inscrito em λ	$\Longrightarrow$	$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180° \\ \hat{B} + \hat{D} = 180° \end{cases}$

Demonstração

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \text{ é inscrito} \implies \hat{A} = \dfrac{\widehat{BCD}}{2} \\ \\ \hat{C} \text{ é inscrito} \implies \hat{C} = \dfrac{\widehat{DAB}}{2}\end{array}\right\} \implies \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{DAB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$, decorre que $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

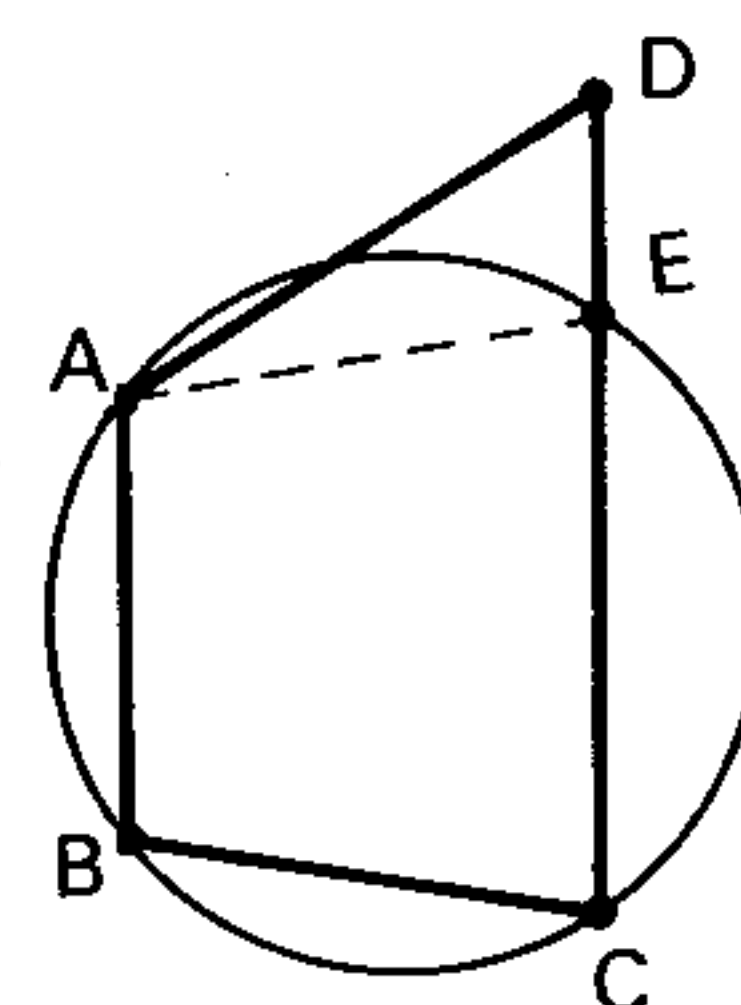
b) Se um quadrilátero convexo possui os ângulos opostos suplementares, então ele é inscritível.

Seja *ABCD* o quadrilátero convexo.

Hipótese		*Tese*
$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ e $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$	$\implies$	ABCD é inscritível

Demonstração

Se *ABCD* não fosse inscritível, considerando λ a circunferência pelos pontos *A*, *B* e *C*, ela não passaria por *D* e teríamos o que segue.

Sendo *E* o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com λ, o quadrilátero *ABCE* é inscrito.

ABCE inscrito $\implies \hat{B} + \hat{E} = 180^\circ$

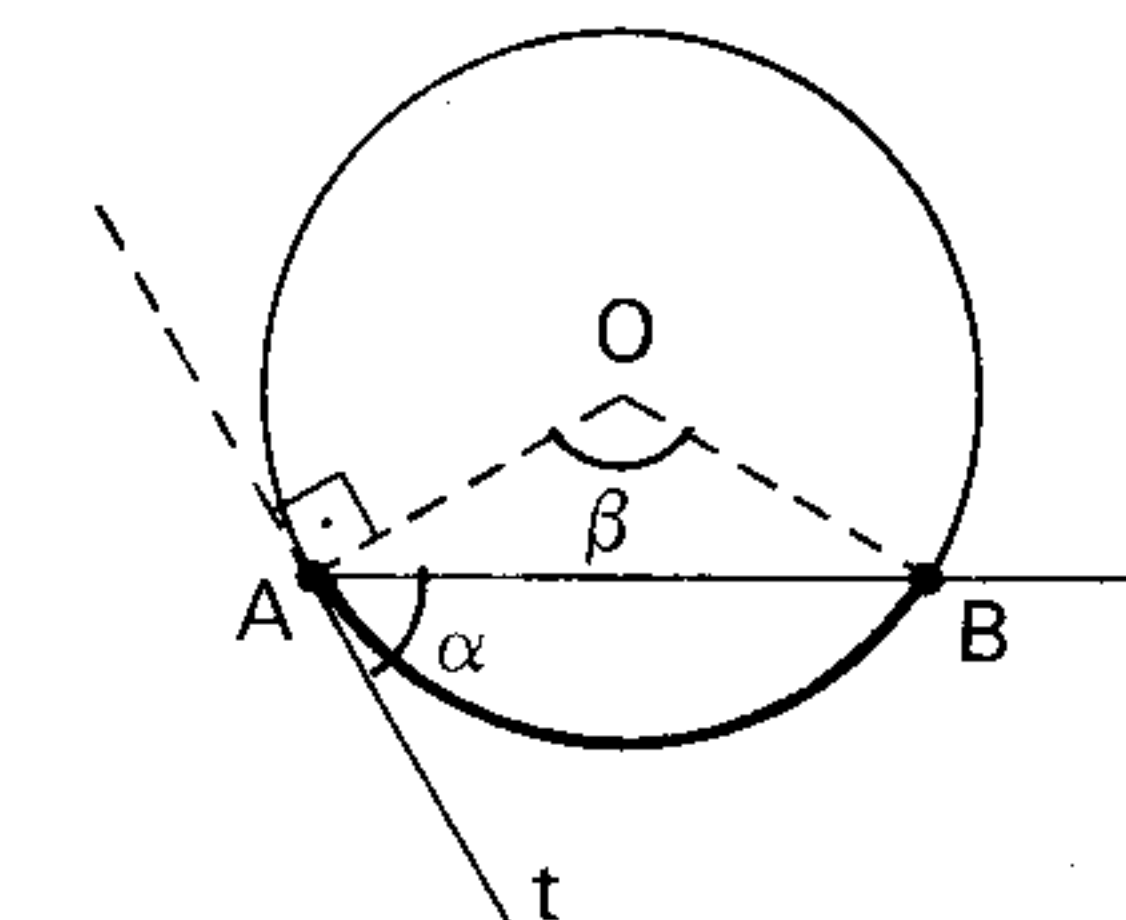
$(\hat{B} + \hat{E} = 180^\circ, \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ) \implies \hat{D} \equiv \hat{E}$, o que é absurdo, de acordo com o *teorema do ângulo externo* no ΔADE.

c) Resumo

> Uma condição necessária e suficiente para um quadrilátero convexo ser inscritível é possuir ângulos opostos suplementares.

IV. Ângulo de segmento ou ângulo semi-inscrito

170. Definição

Ângulo de segmento ou ângulo semi-inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e o outro lado tangente à circunferência.

Na figura,

$t\hat{A}B$ é ângulo de segmento

$\widehat{AB}$ é o arco correspondente ou subentendido

$A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao ângulo semi-inscrito $t\hat{A}B$.

O nome ângulo de segmento vem do segmento *circular AB*.

171. Medida do ângulo de segmento

> Um ângulo de segmento é metade do ângulo central correspondente.
>
> ou
>
> A medida de um ângulo de segmento é metade da medida do arco correspondente.

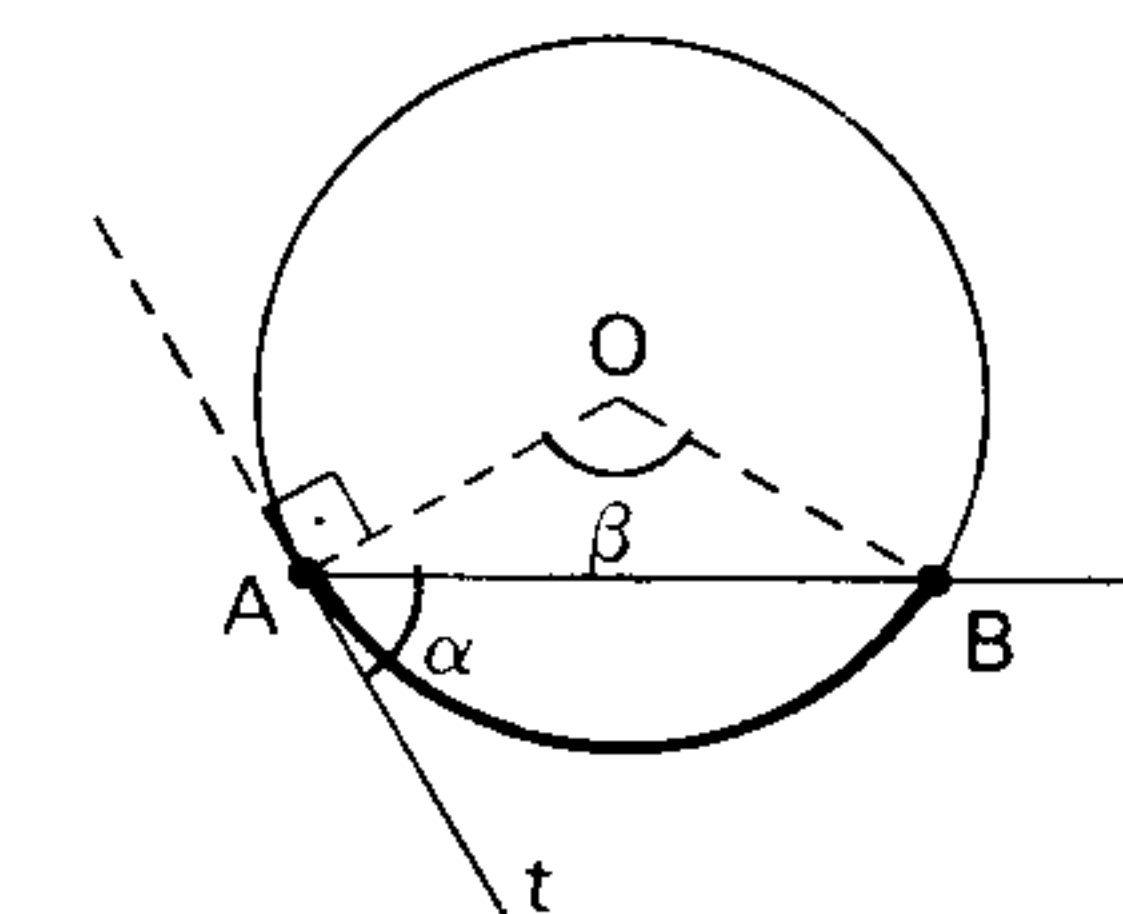
$$\alpha = \frac{\beta}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Demonstração

1º caso: $t\hat{A}B$ é agudo

No triângulo isósceles *OAB* calculemos a medida do ângulo $\hat{A}$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \beta = 180^\circ \implies \hat{A} + \hat{A} + \beta = 180^\circ \implies$$

$$\implies 2\hat{A} = 180^\circ - \beta \implies \hat{A} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad \textbf{(1)}$$

Sendo t tangente à circunferência:

$\alpha + \hat{A} = 90° \implies \hat{A} = 90° - \alpha \quad (2)$

De (1) e (2) decorre que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.

Logo, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e como $\beta = \widehat{AB}$ decorre que $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

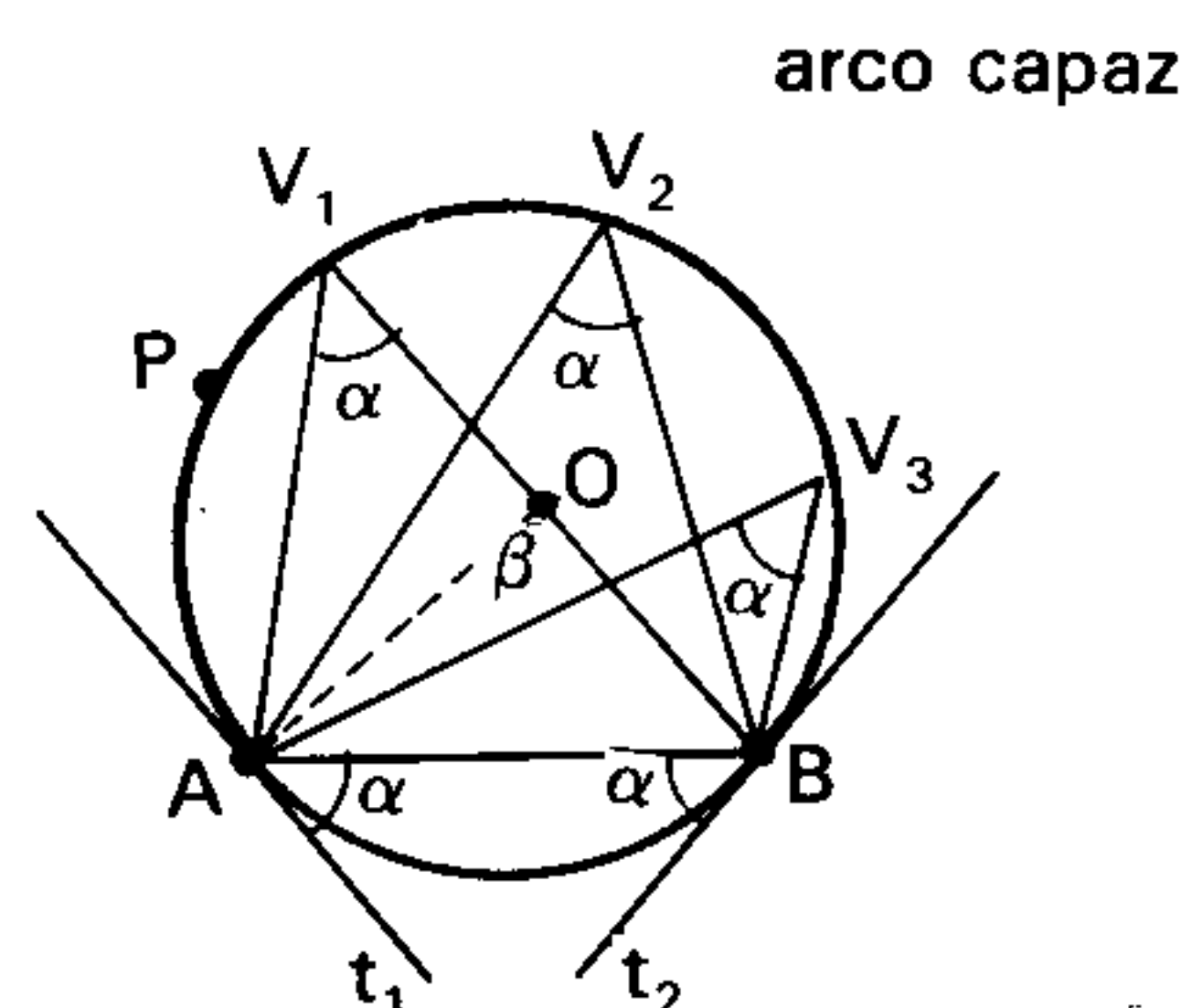
2º caso: $t\hat{A}B$ é reto

AB é um diâmetro e $\widehat{AB} = 180°$.

3º caso: $t\hat{A}B$ é obtuso

Usando o adjacente suplementar de $t\hat{A}B$, recai-se no 1º caso.

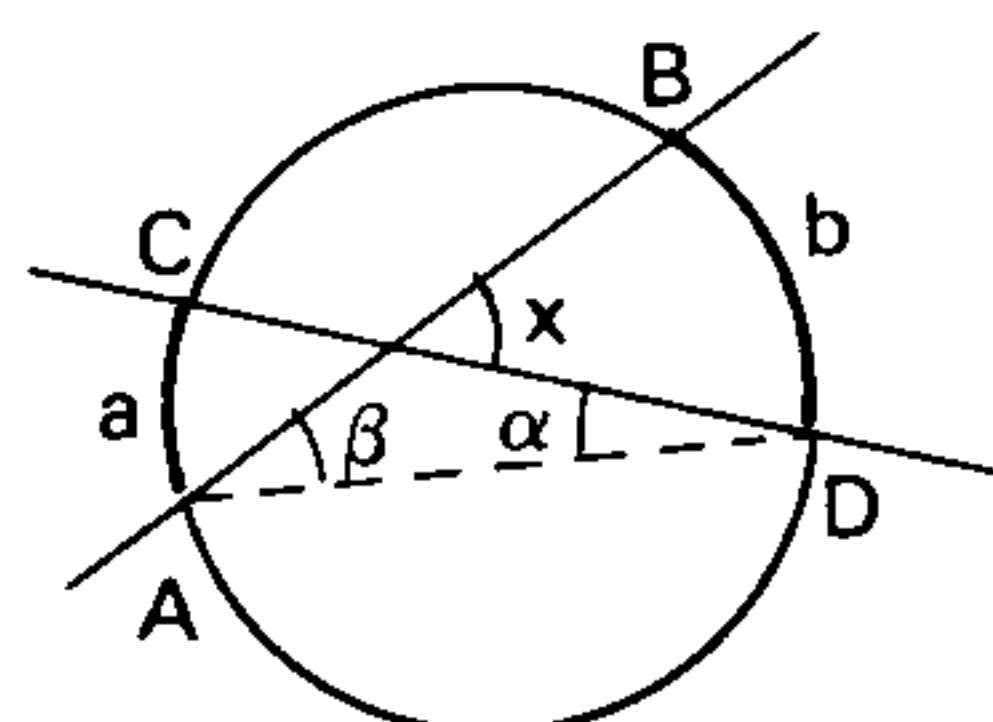
172. *Arco capaz — segmento (circular) capaz*

Consideremos uma circunferência λ de centro O e um ângulo de medida α. Seja $A\hat{O}B$ um ângulo central de medida $\beta = 2\alpha$. Os vértices dos ângulos inscritos (ou semi-inscritos) relativos a λ que têm os lados passando por A e B e têm medida α estão num arco $\widehat{APB}$. Este arco é chamado *arco capaz* de α.

Na figura os ângulos $A\hat{V}_1B$, $A\hat{V}_2B$, $A\hat{V}_3B$, $t_1\hat{A}B$ e $t_2\hat{B}A$ têm medida $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

O arco $\widehat{APB}$ é o arco capaz de α.

173. *Ângulos excêntricos*

a) *Ângulo excêntrico interior*

Se duas cordas se cortam em um ponto interior a uma circunferência, distinto do centro, então qualquer um dos ângulos que elas formam é chamado ângulo *excêntrico interior*.

A medida do ângulo excêntrico interior, considerando as indicações da figura, é dada por

$$\boxed{x = \frac{a + b}{2}}$$

em que a e b são as medidas das áreas.

De fato:

como x é ângulo externo do triângulo e como α e β são ângulos inscritos, obtemos:

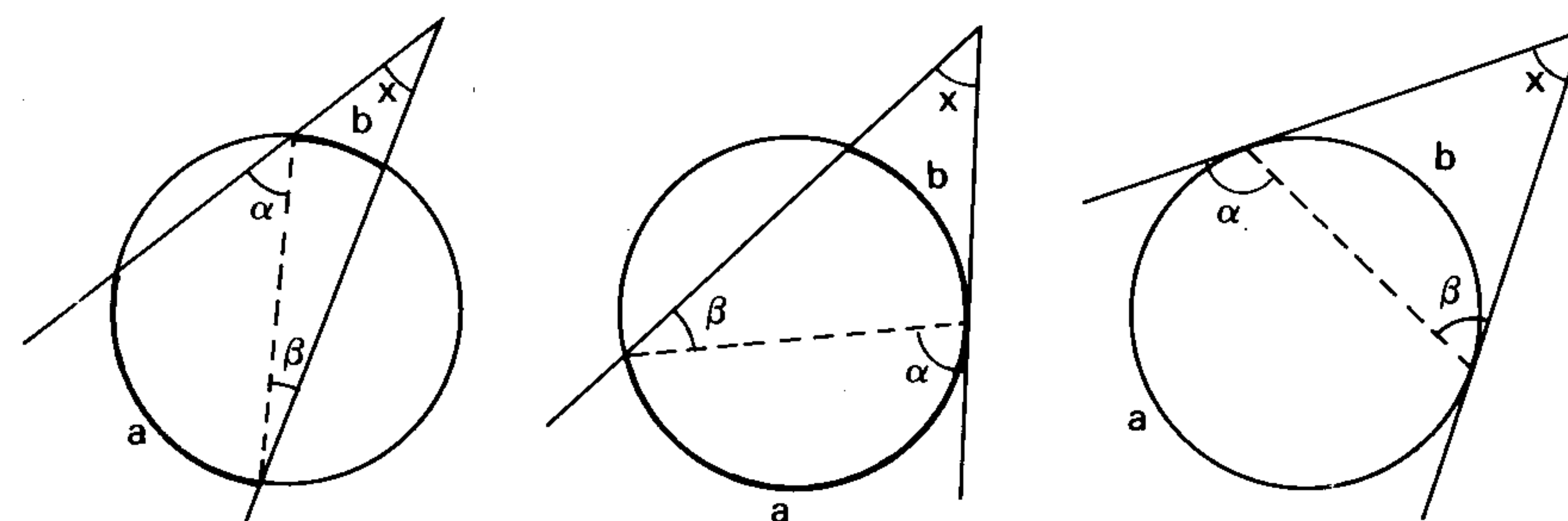
$$\left(x = \alpha + \beta,\ \alpha = \frac{a}{2},\ \beta = \frac{b}{2}\right) \implies x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \implies x = \frac{a + b}{2}$$

b) *Ângulo excêntrico exterior*

Se com origem num ponto exterior a uma circunferência traçarmos duas semi-retas, ambas secantes à circunferência, ou ambas tangentes ou uma secante e a outra tangente, estas semi-retas formam um ângulo que é chamado *ângulo excêntrico exterior*.

A medida do ângulo excêntrico exterior, considerando as indicações das figuras, é dada por

$$\boxed{x = \frac{a - b}{2}}$$

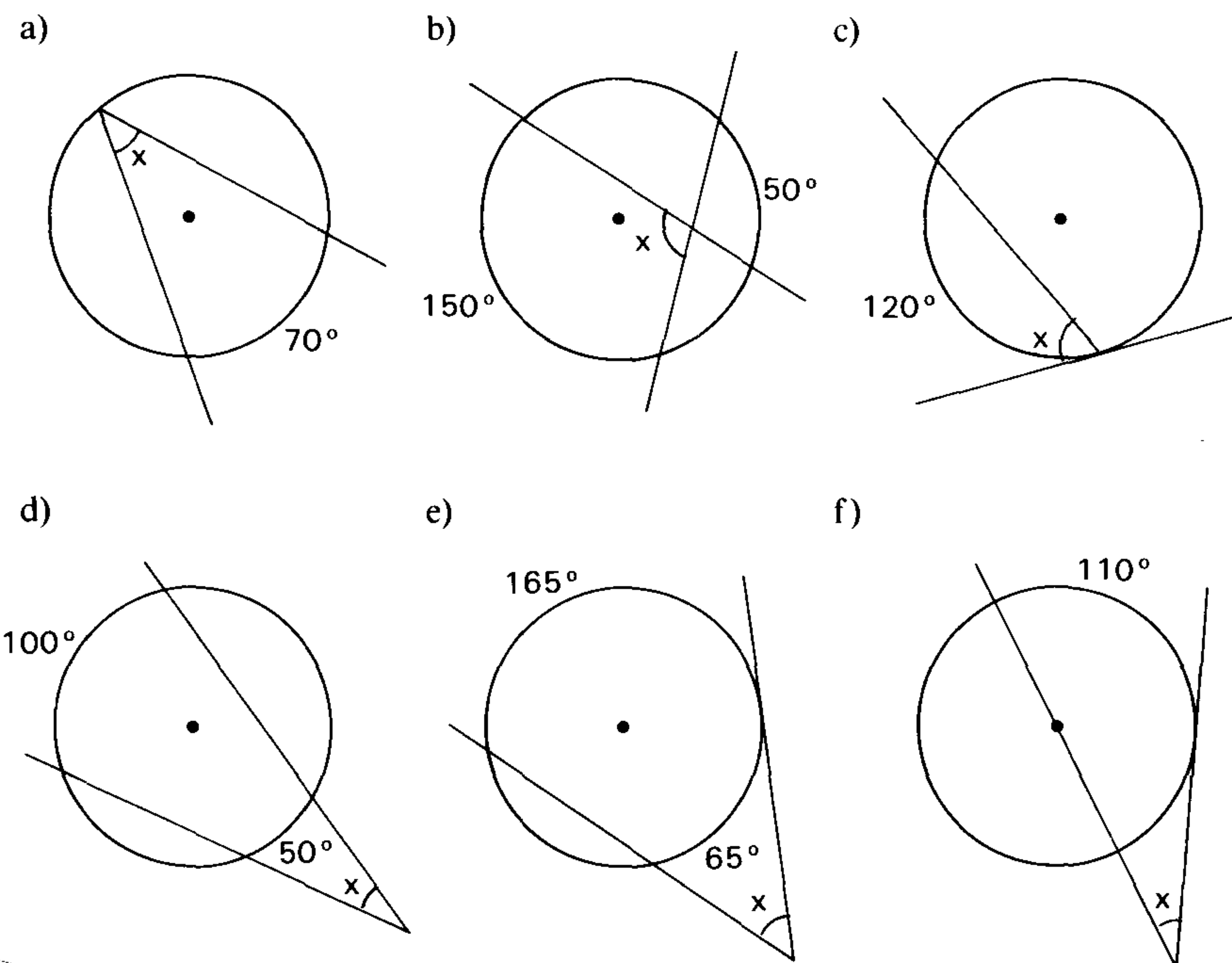
em que a e b são as medidas dos arcos.

De fato: como α e β são ângulos inscritos ou ângulos de segmentos e α é ângulo externo do triângulo, obtemos:

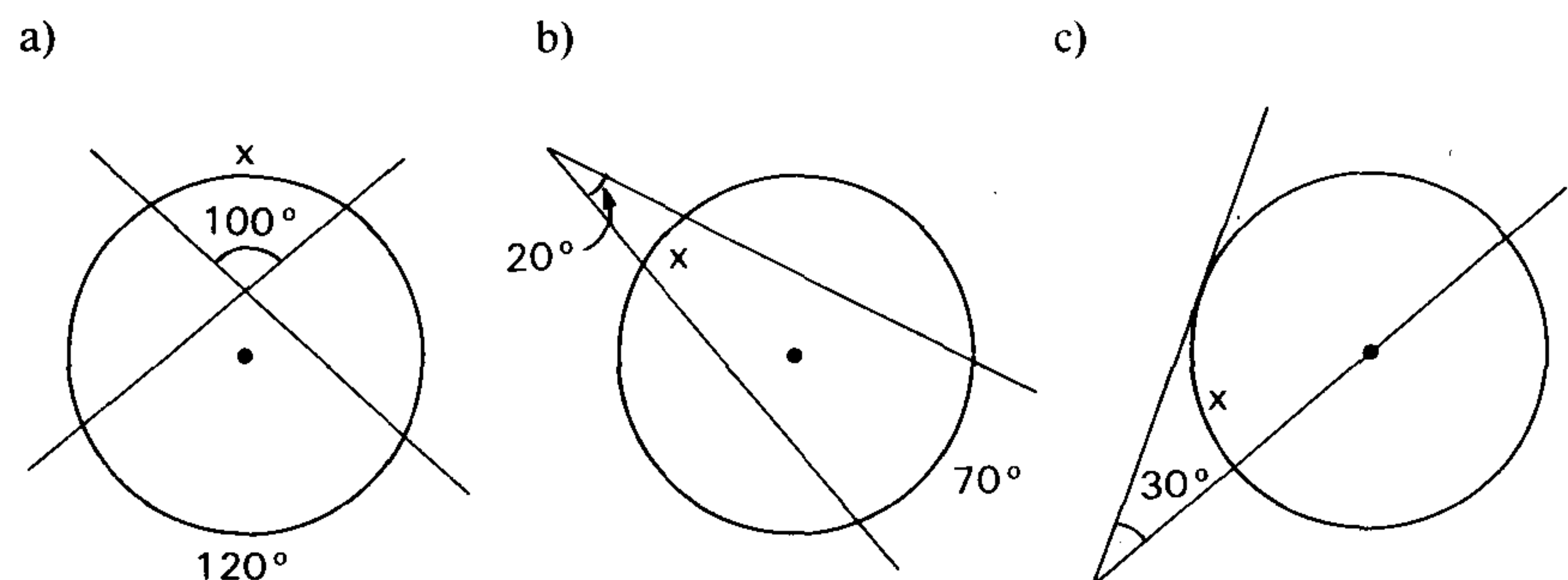
$$\left(\alpha = x + \beta,\ \alpha = \frac{a}{2},\ \beta = \frac{b}{2}\right) \implies \frac{a}{2} = x + \frac{b}{2} \implies x = \frac{a - b}{2}$$

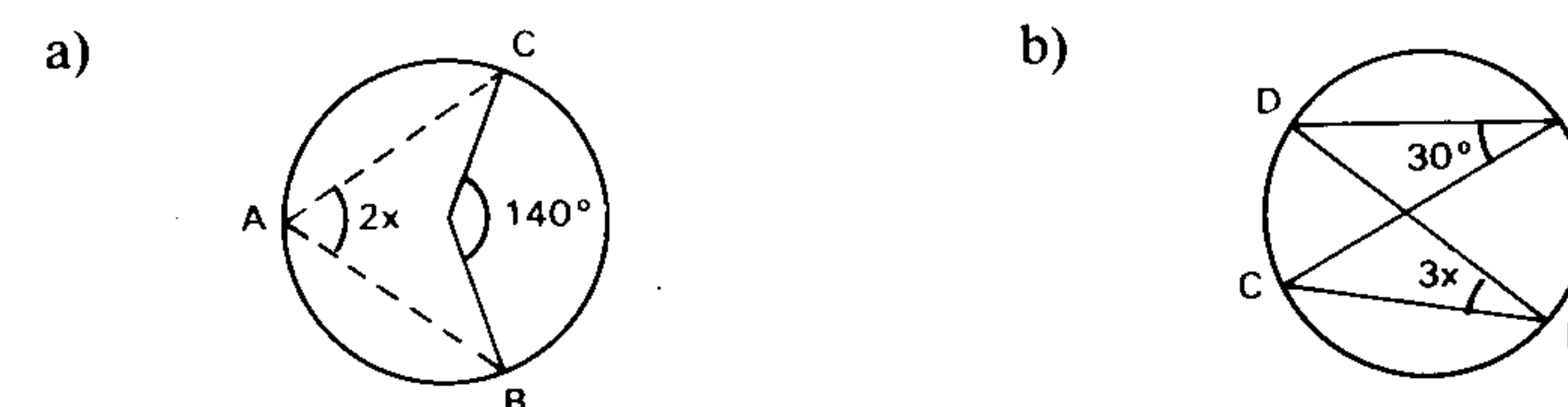
EXERCÍCIOS

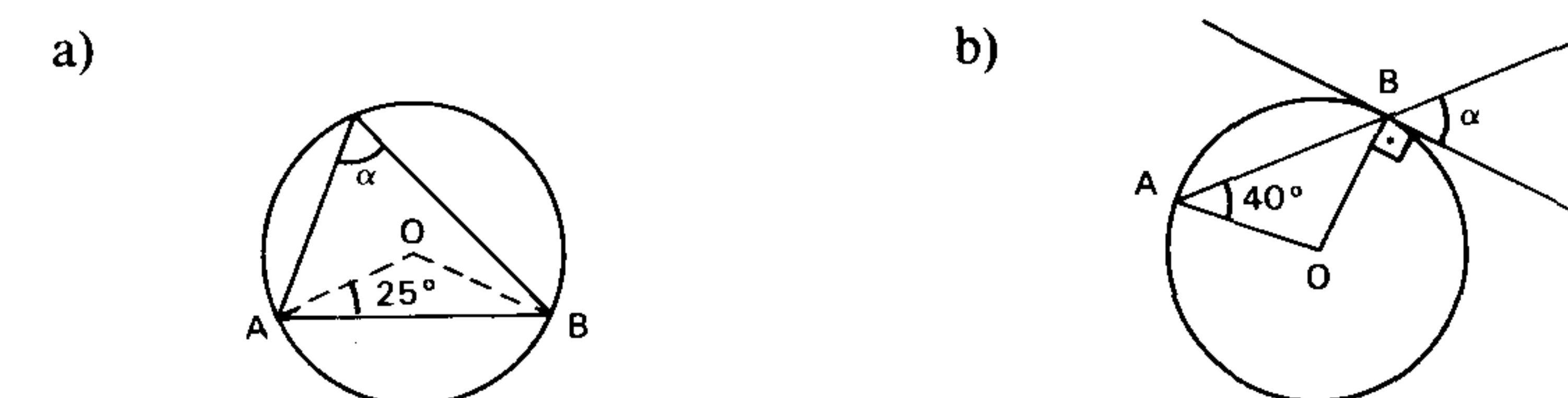
377. Determine o valor do ângulo x nos casos:

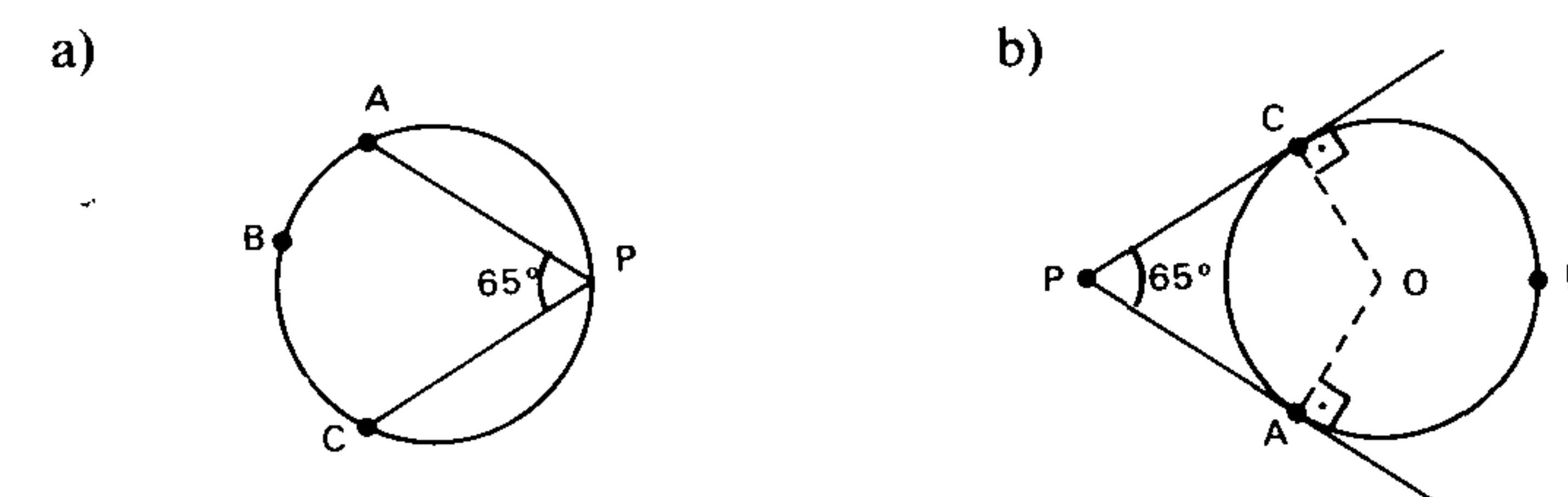
a) b) c)

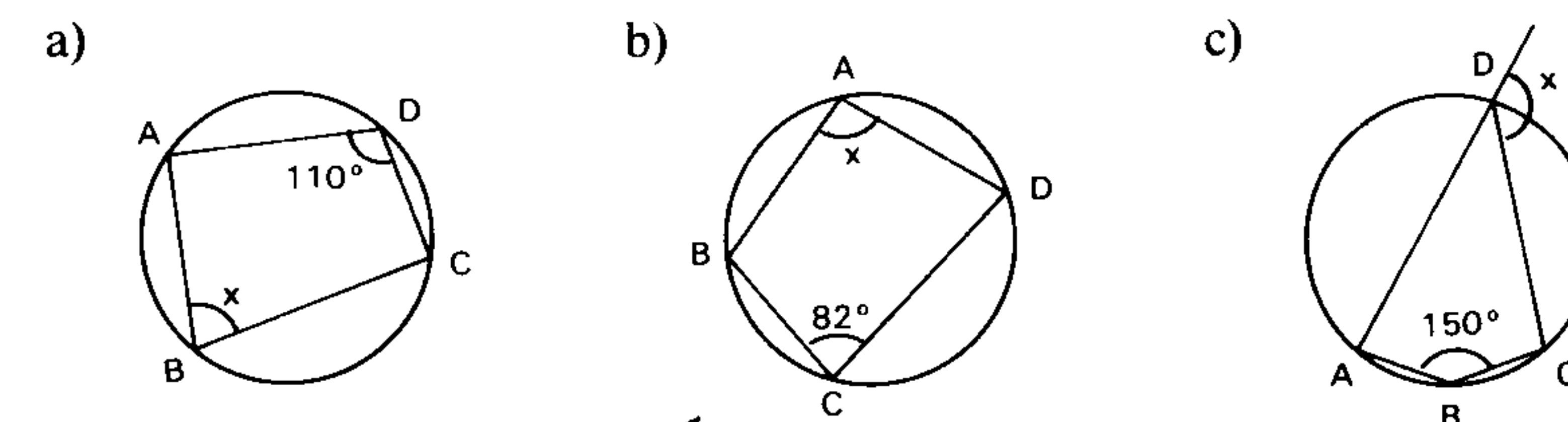
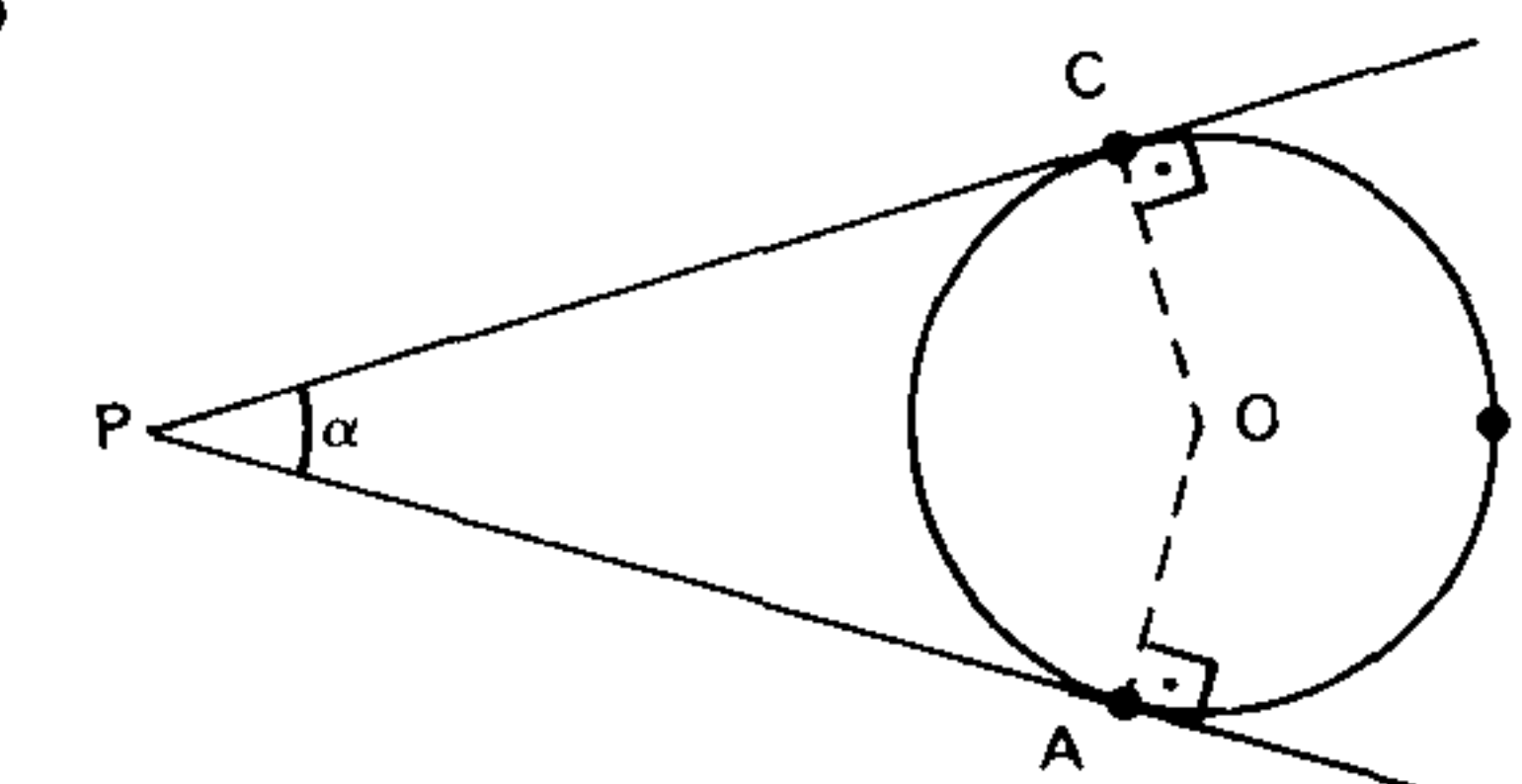
d) e) f)

378. Determine o valor do arco x nos casos:

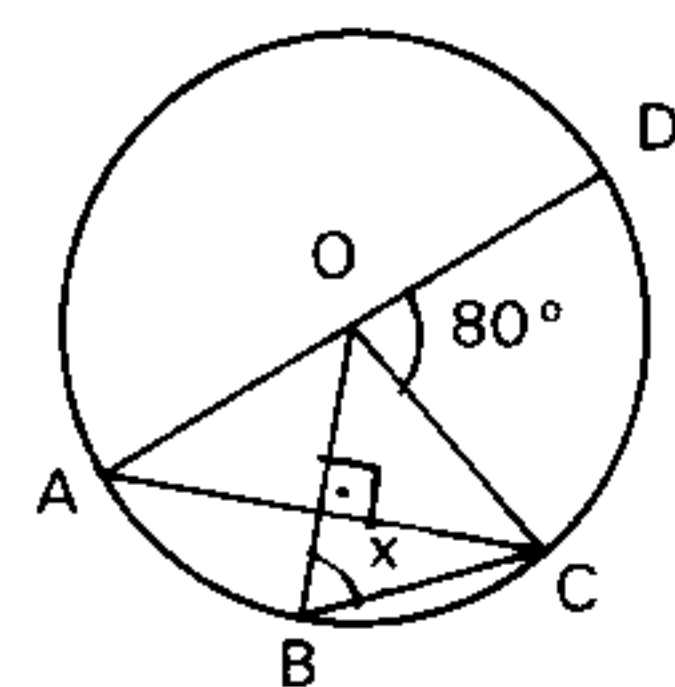
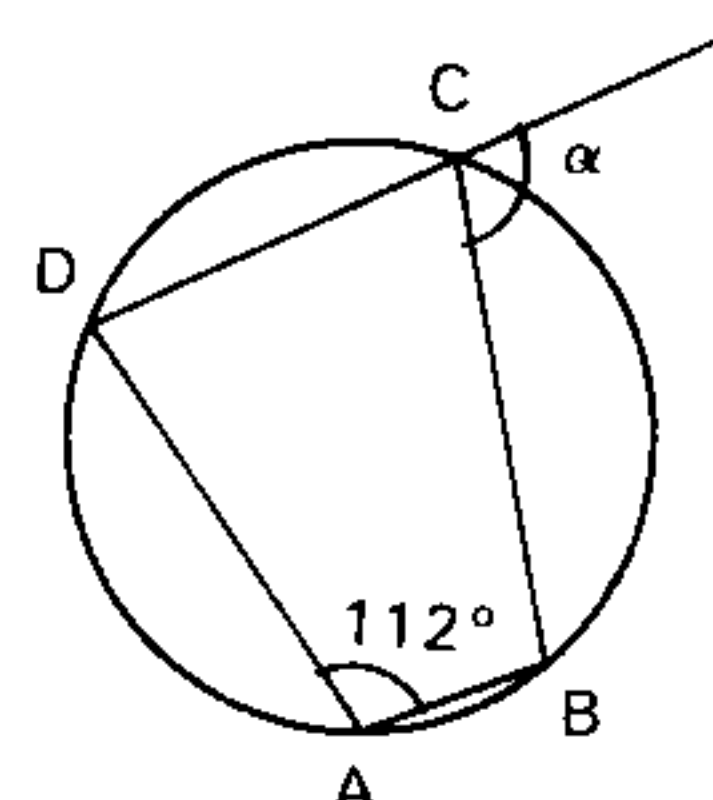
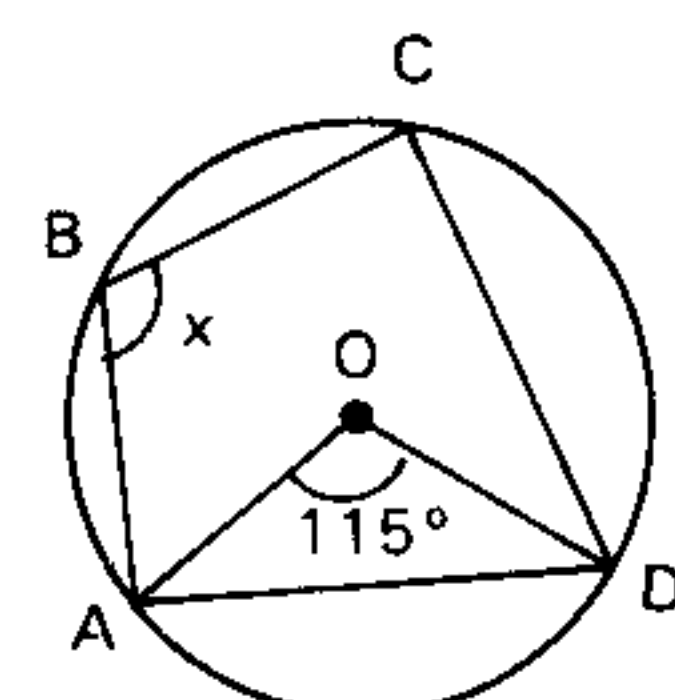
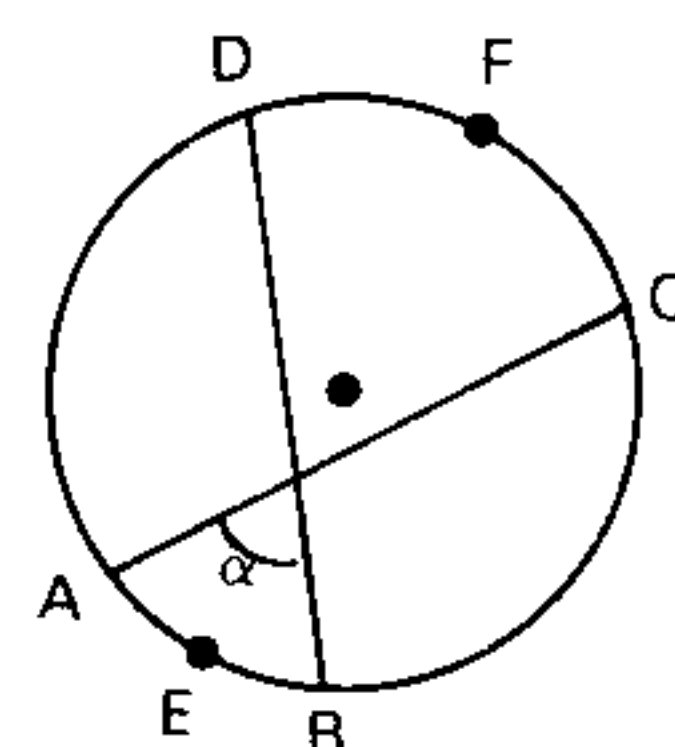
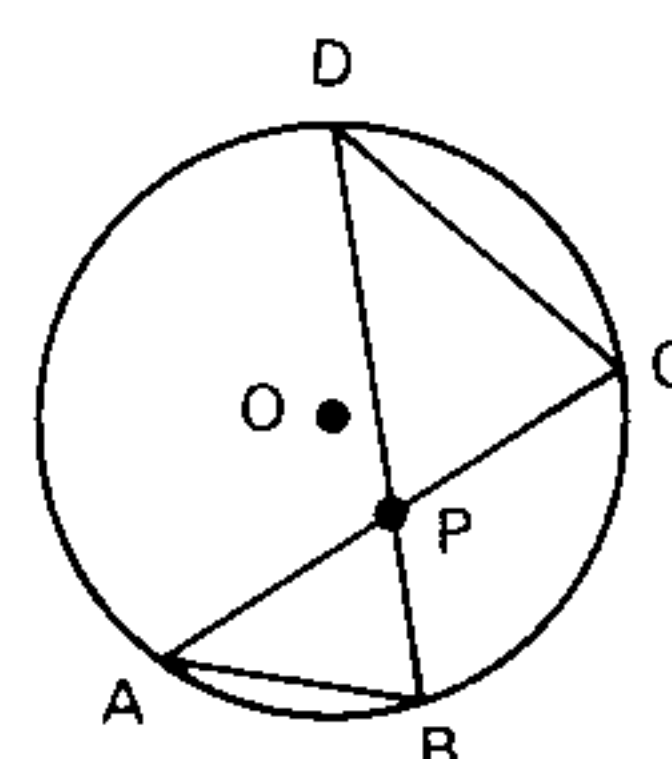
a) b) c)

379. Nas figuras, calcule o valor de x.

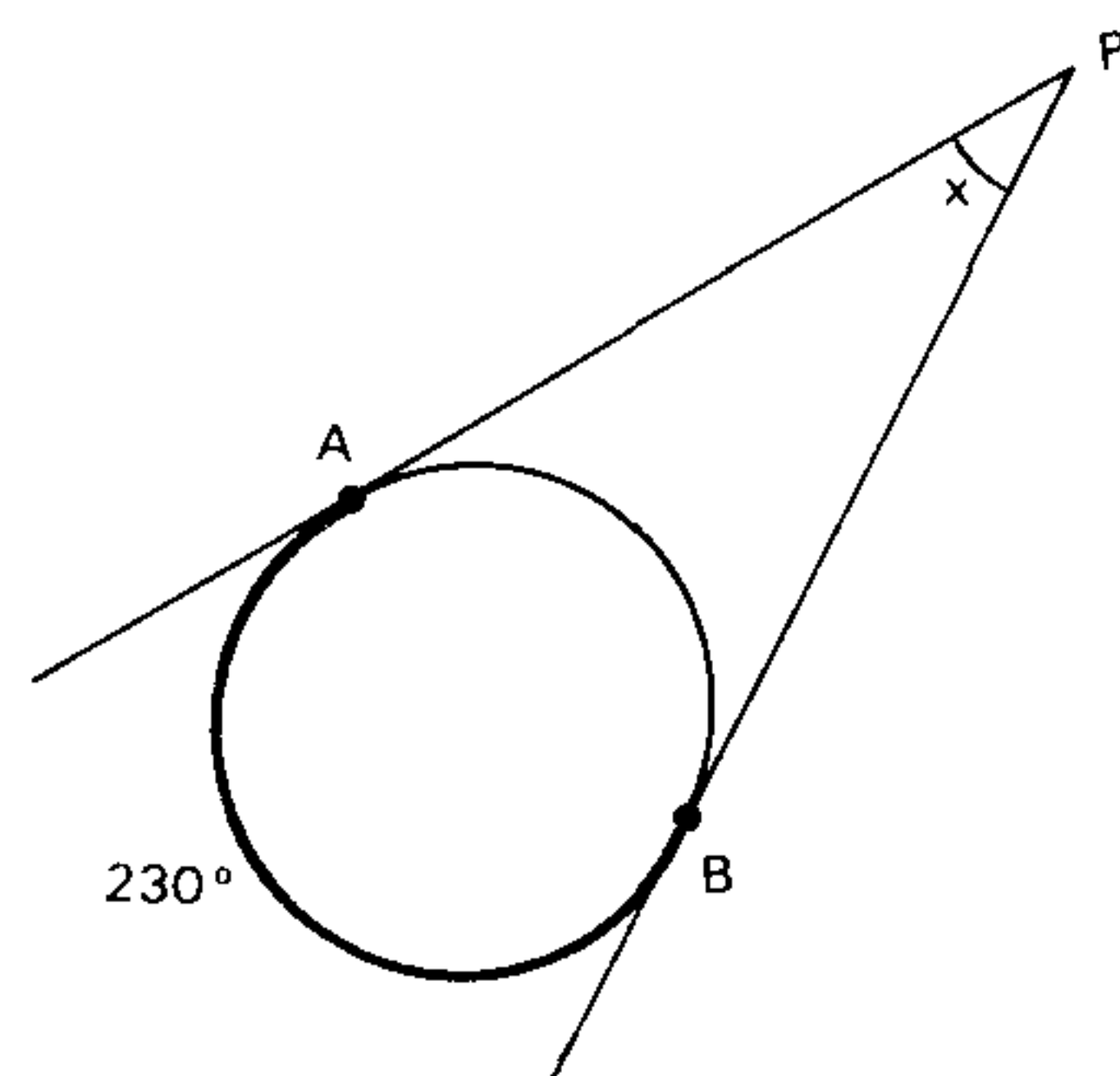
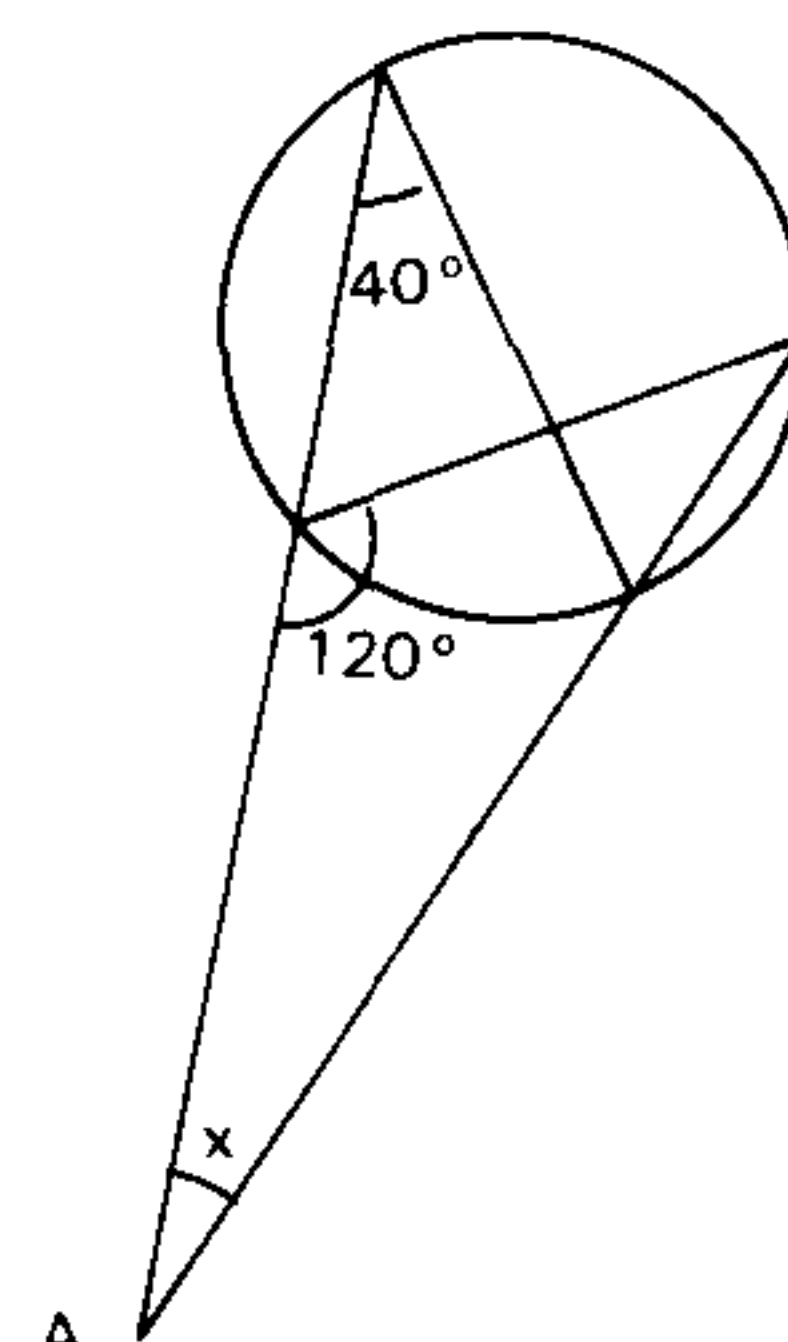
a) b)

380. Nas figuras, calcule o valor de α.

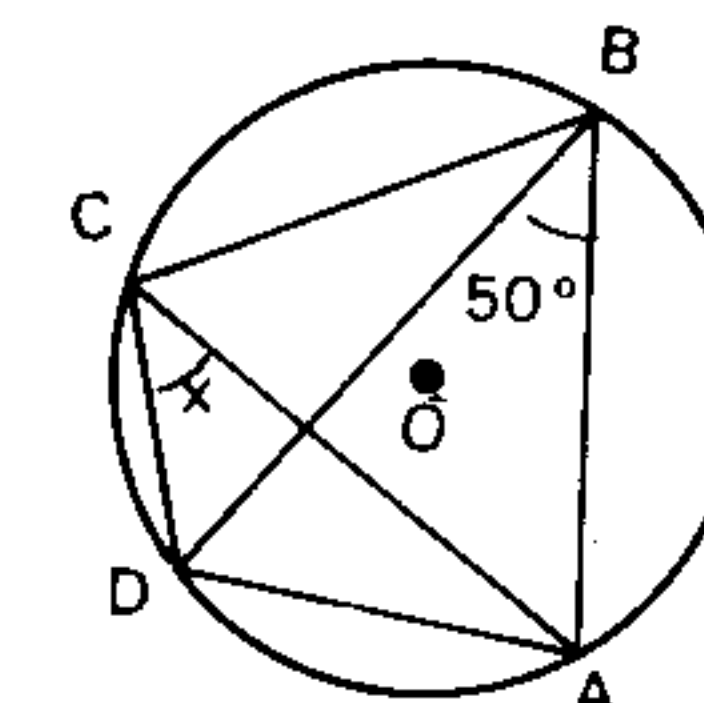
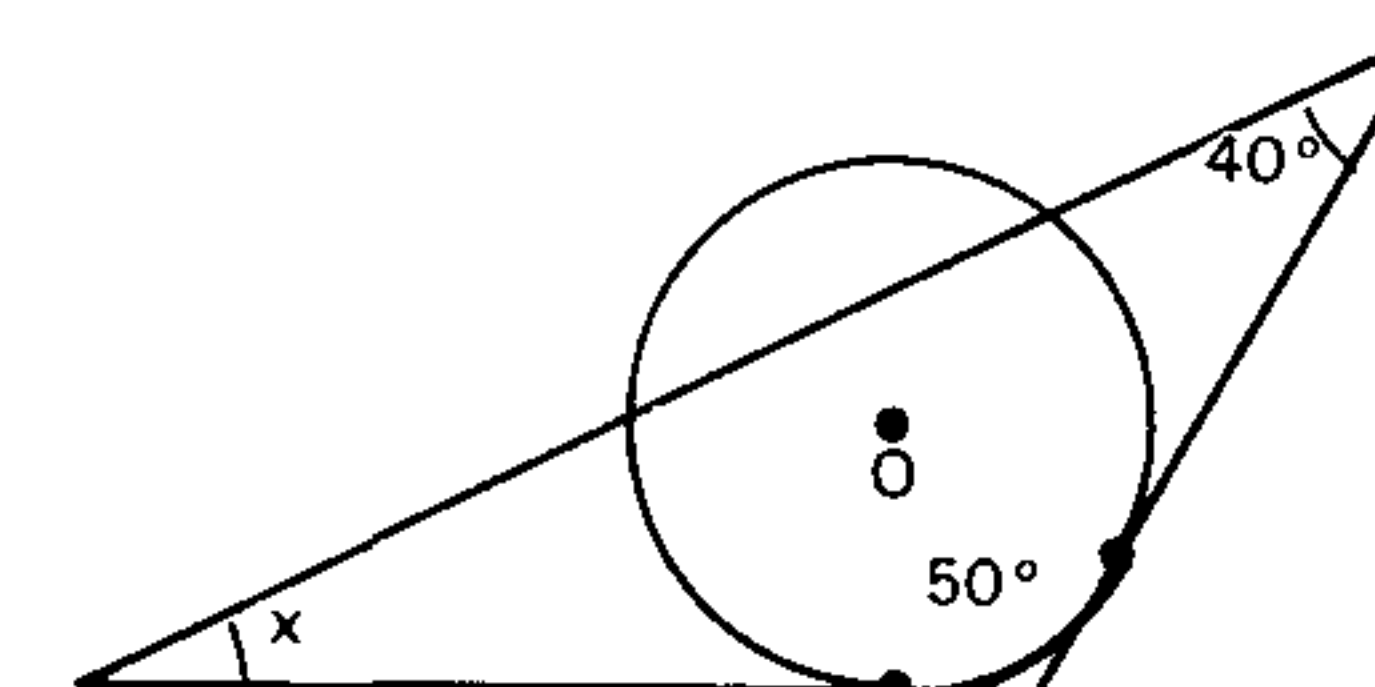
a) b)

381. Nas figuras, calcule o valor do arco $\widehat{ABC}$.

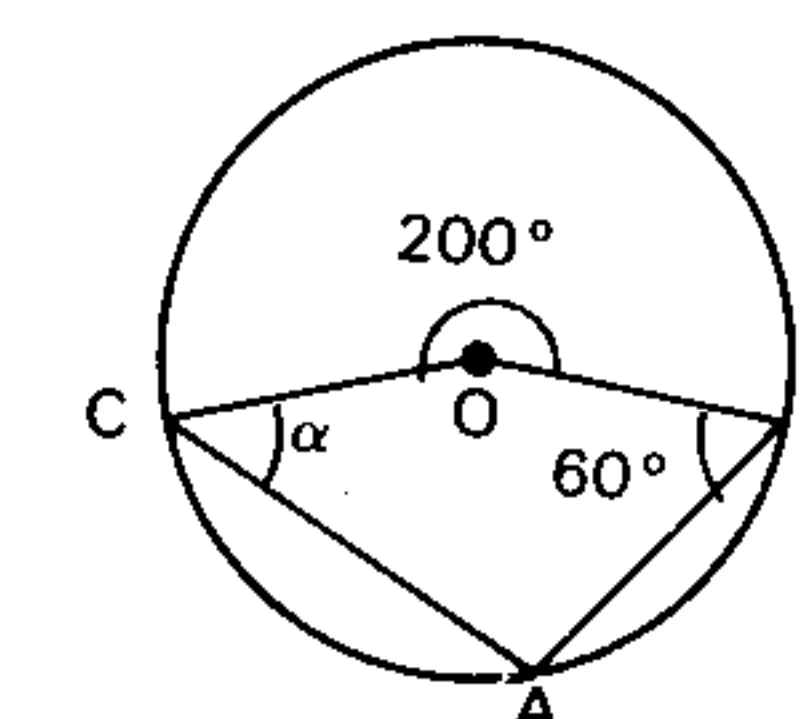
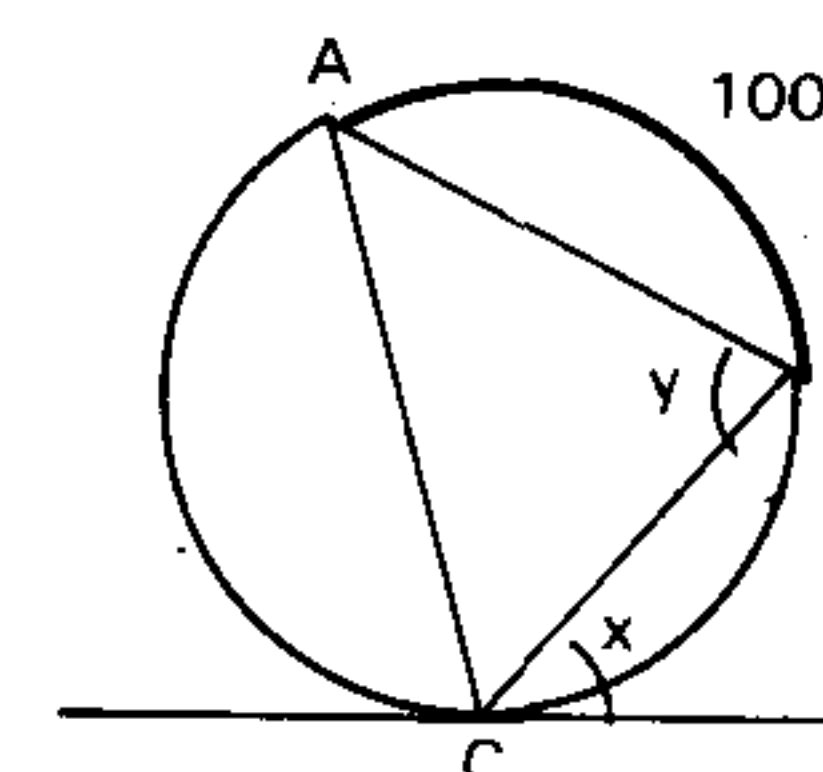
a) b)

382. Nas figuras, calcule x.

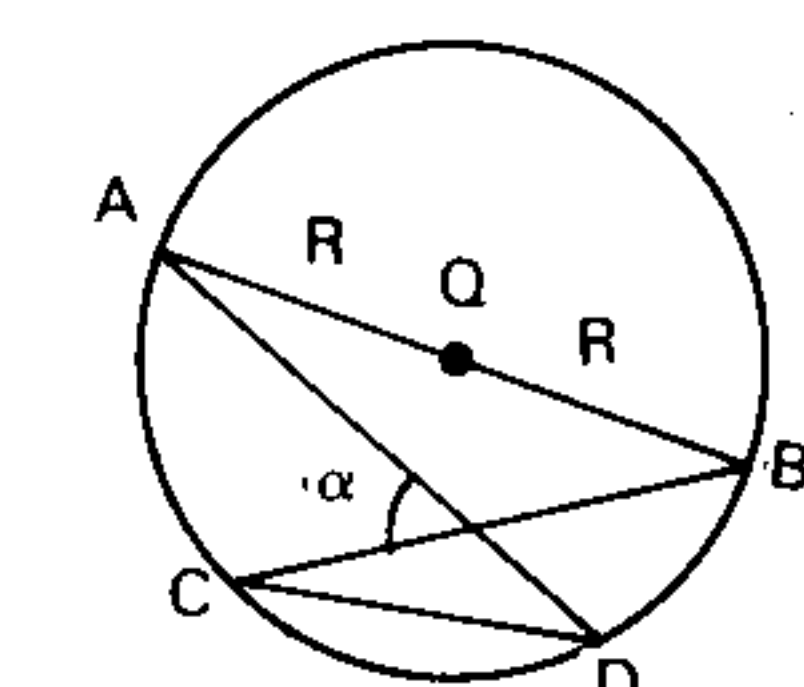
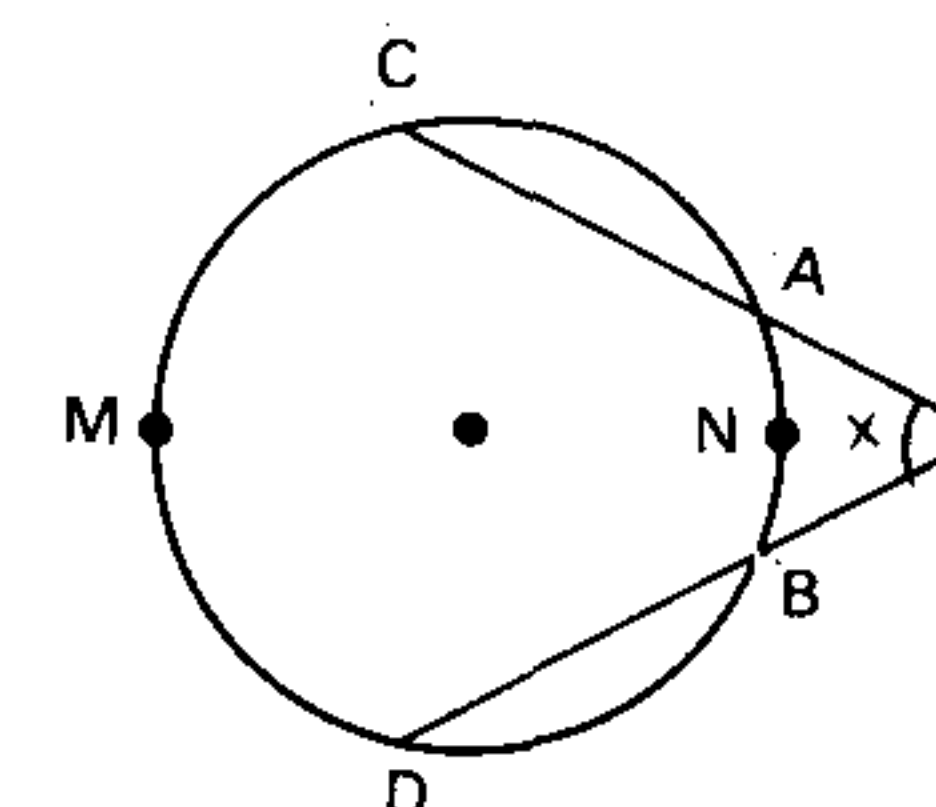
a) b) c)

383. Na figura, sendo $\widehat{ABC} = 260°$, calcule o valor de α.

384 Calcule o valor de x.

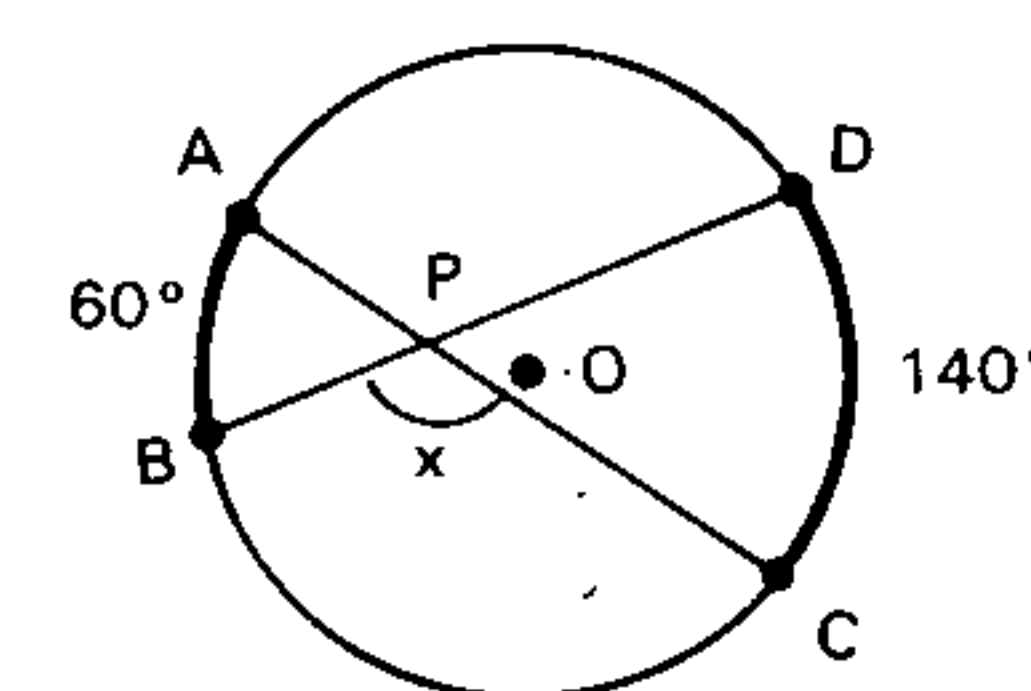
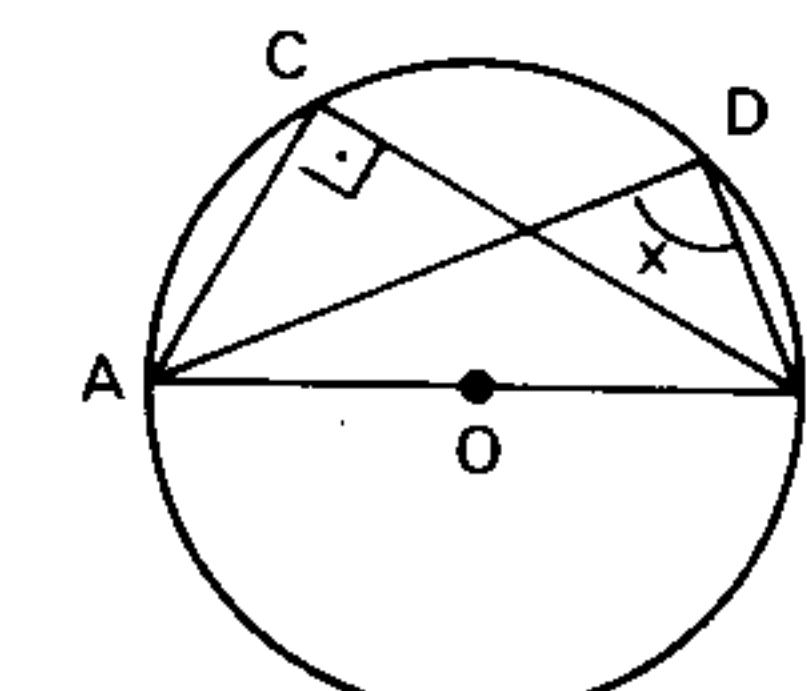
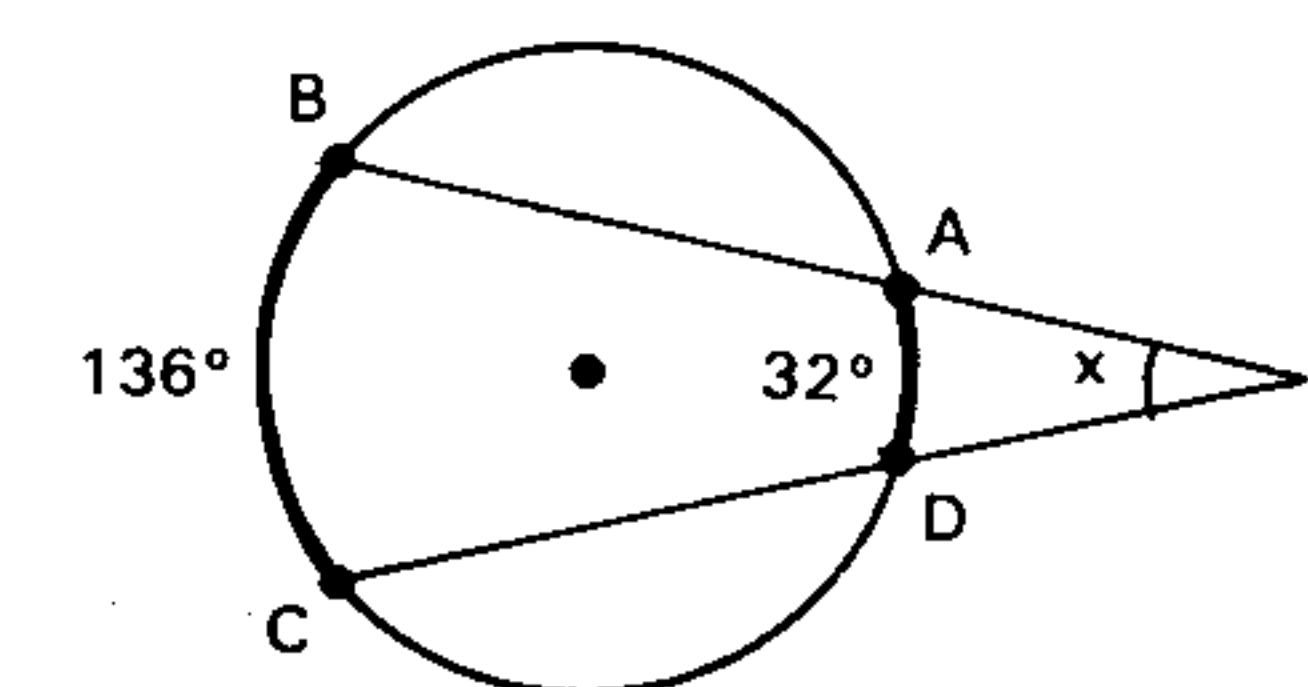
a)

b)

385. O arco $\overset{\frown}{CD}$ da figura mede $105°$. Calcule o valor de x.

386. Na circunferência, o arco $\overset{\frown}{CFD}$ excede o arco $\overset{\frown}{AEB}$ em $50°$. Determine suas medidas, sabendo que o ângulo α mede $70°$.

387. Na figura, o ângulo $A\hat{C}D$ é igual a $70°$ e o ângulo $A\hat{P}D$ é igual a $110°$. Determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

388. Calcule x nas figuras:

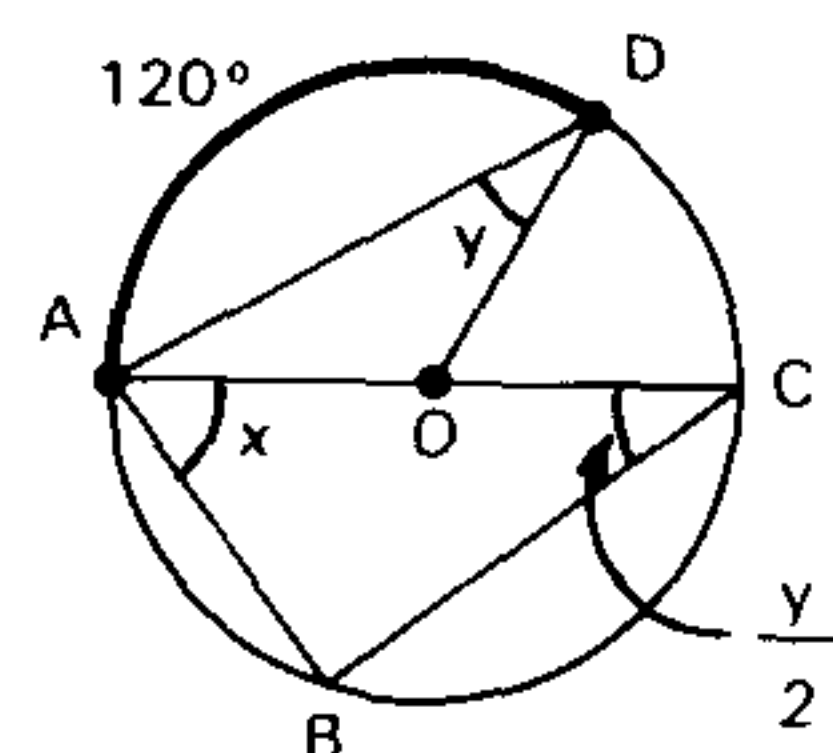
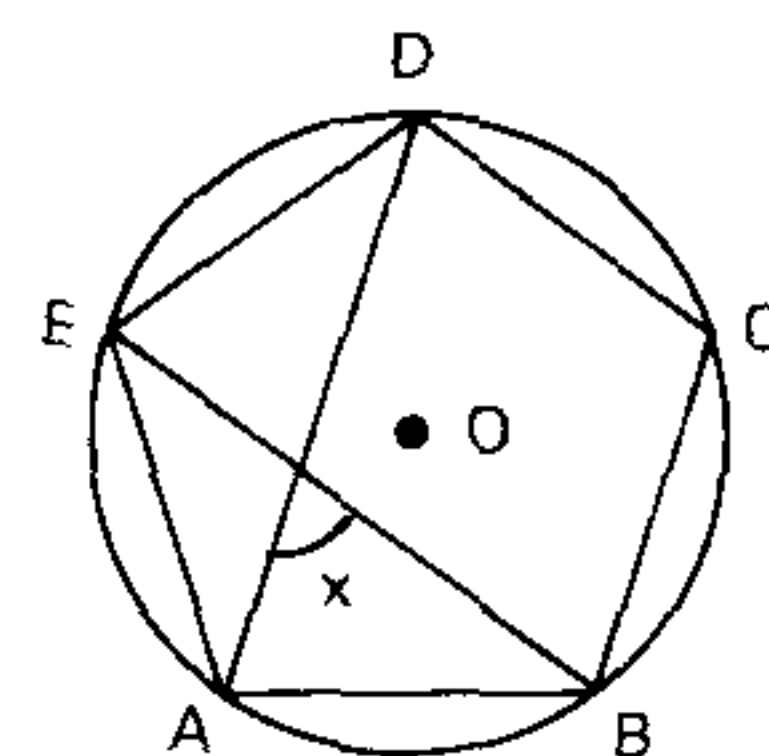
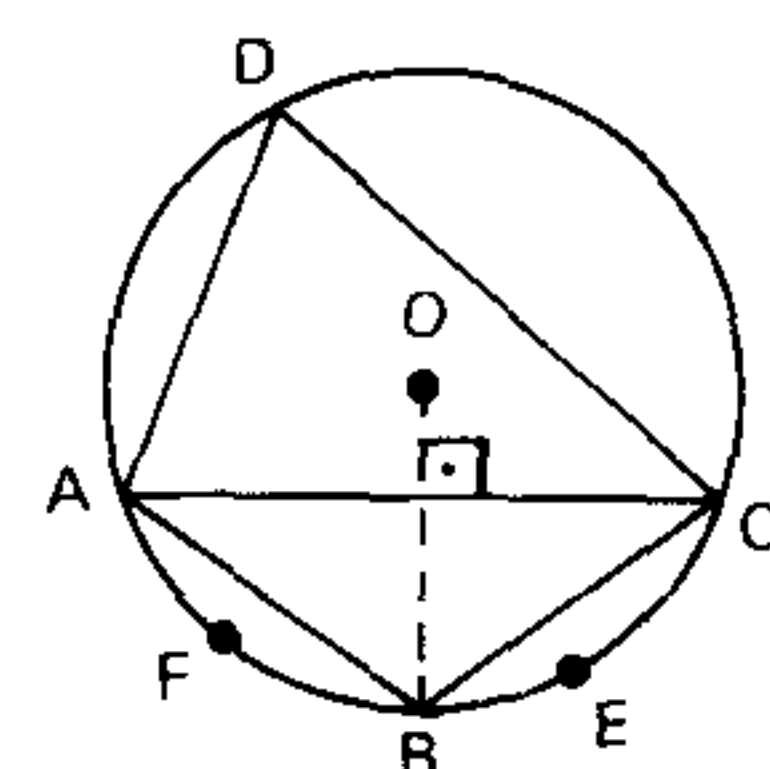
a)

b)

389. Calcule x nas figuras:

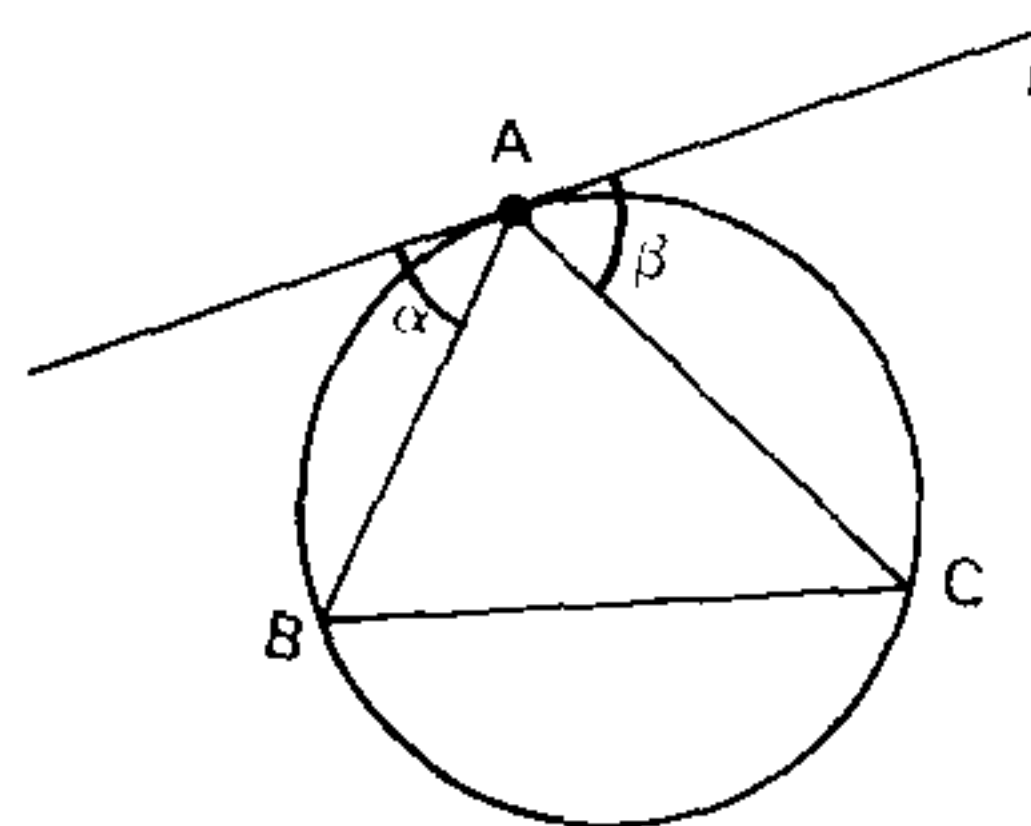
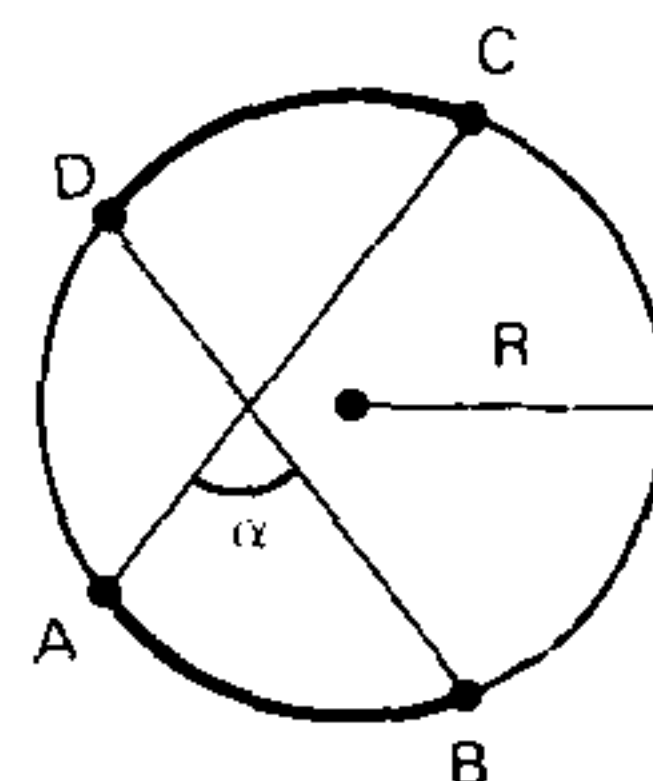
a)

b)

390. Se $y = 75°$ e $\overset{\frown}{AB} = 100°$, calcule x.

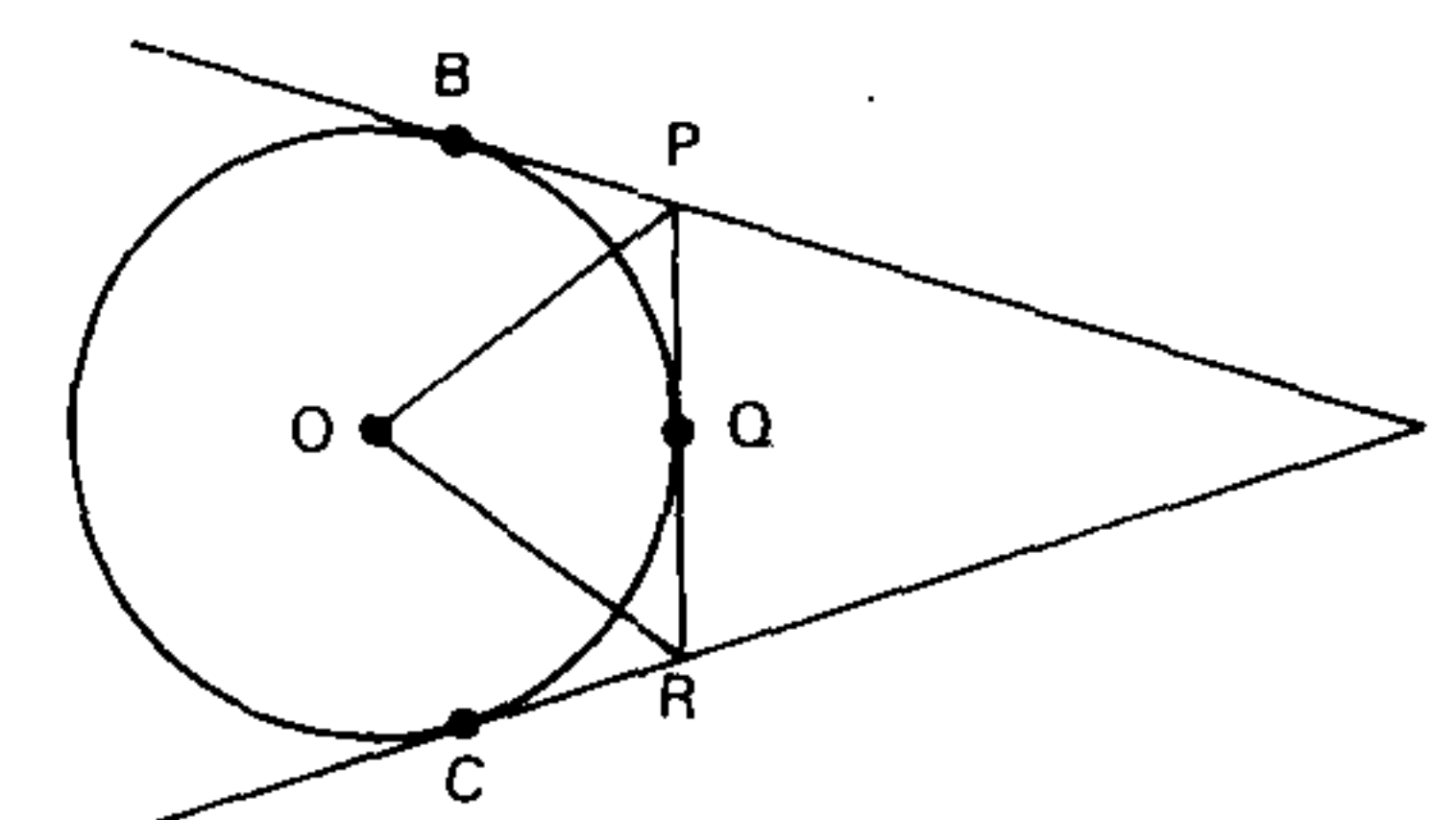
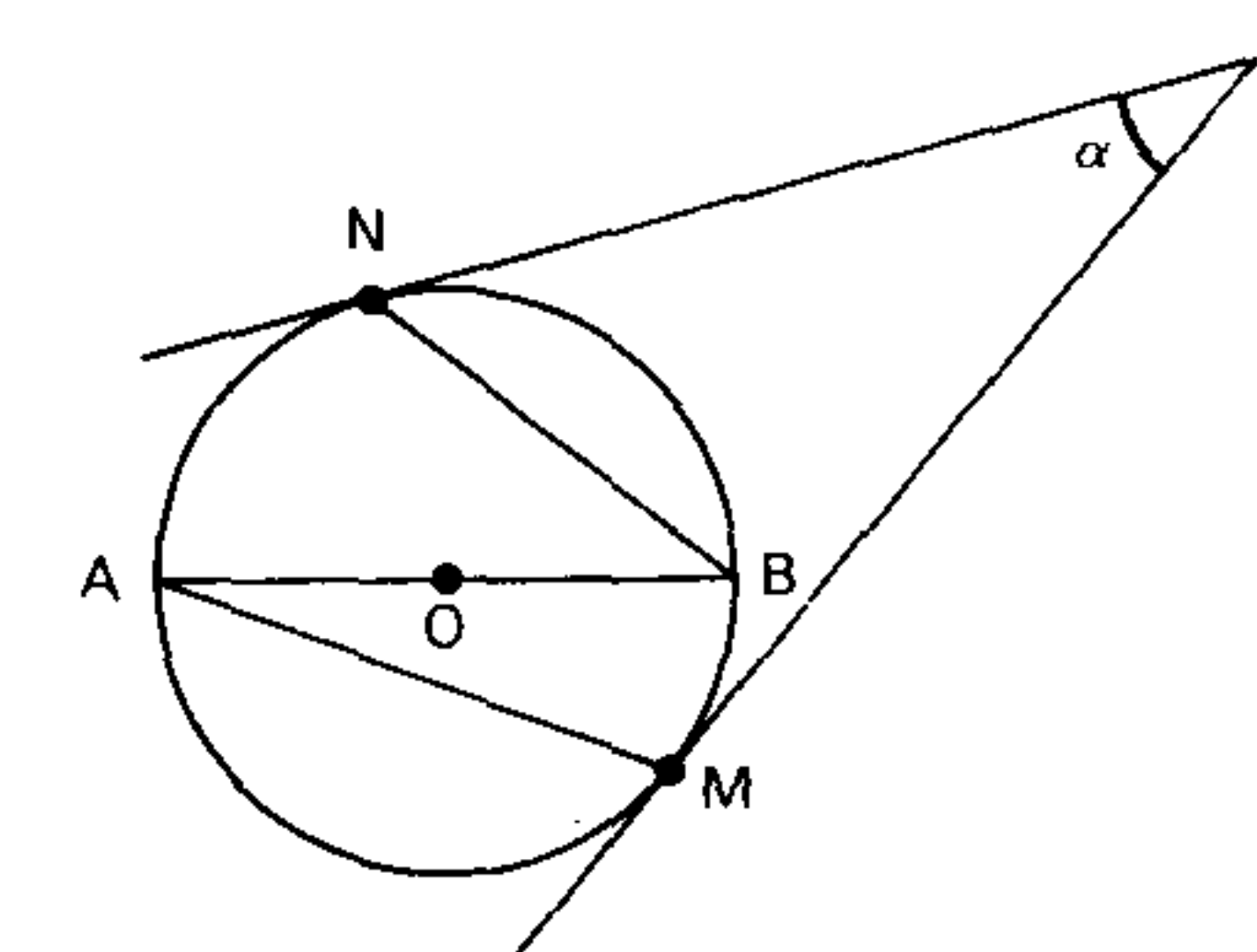
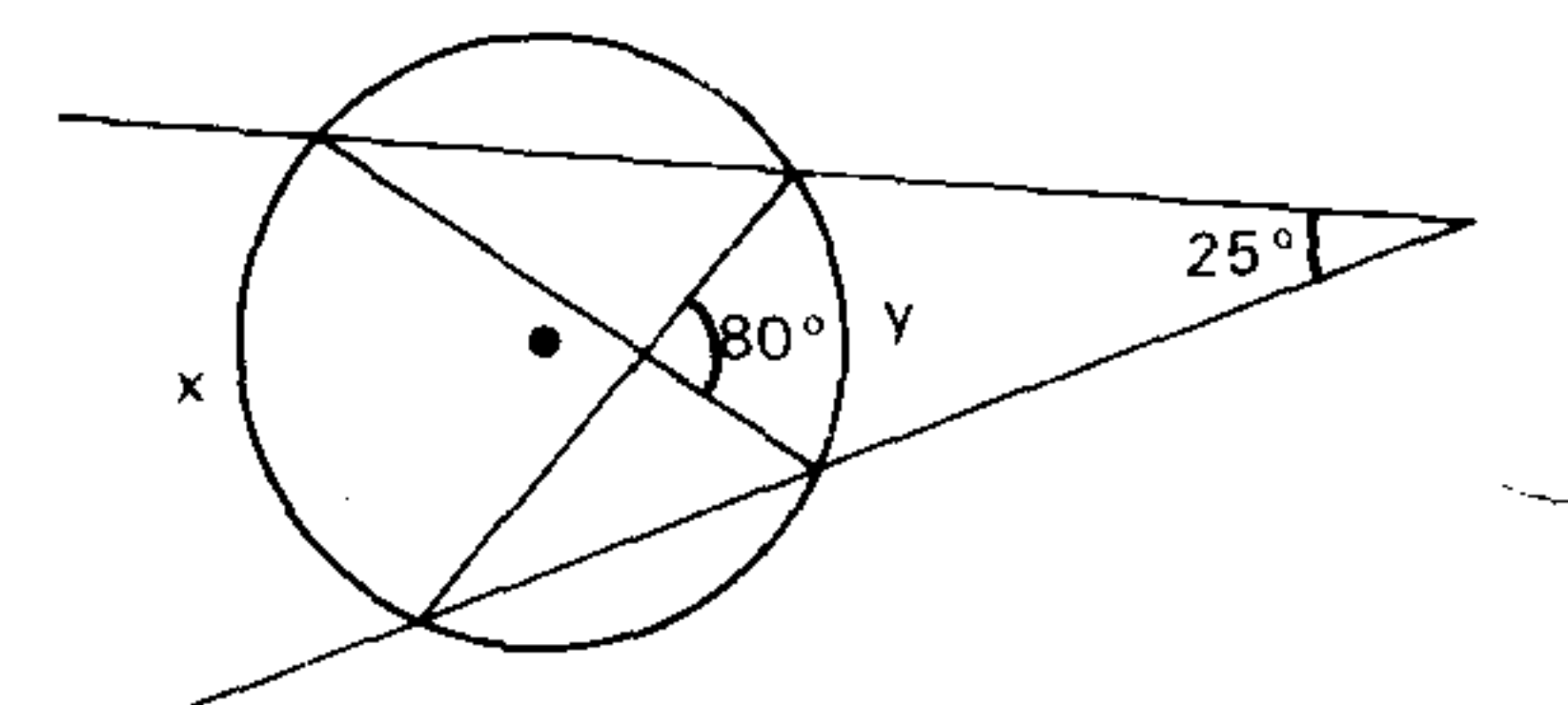
391. Na figura, qual é o valor de α?

392. Na figura, o arco $\overset{\frown}{CMD}$ é igual a $100°$ e o arco $\overset{\frown}{ANB}$ mede $30°$. Calcule o valor de x.

393. Determine a medida do ângulo α, sabendo que, na figura abaixo, $CD = R$.

394. Calcule x nas figuras:

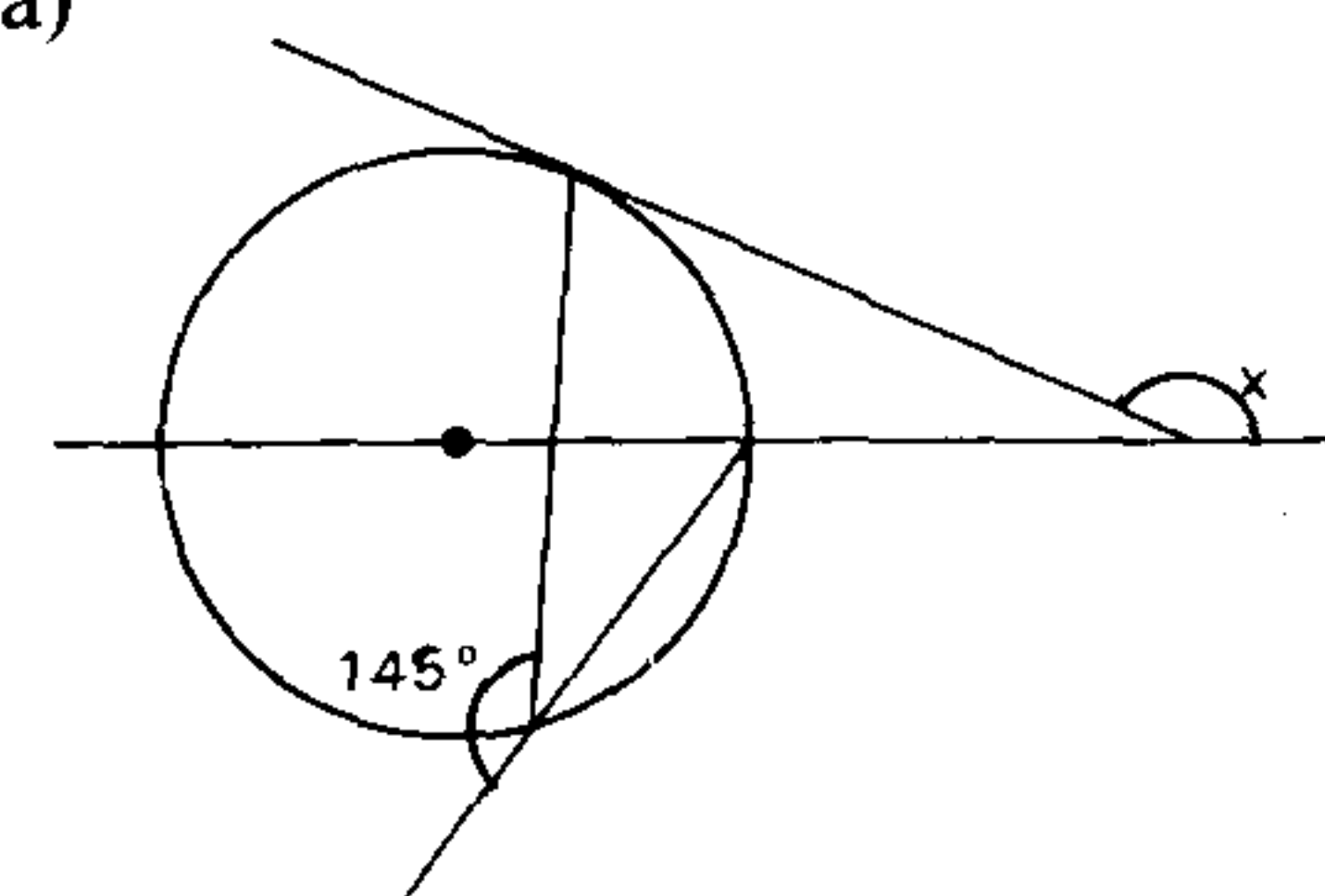
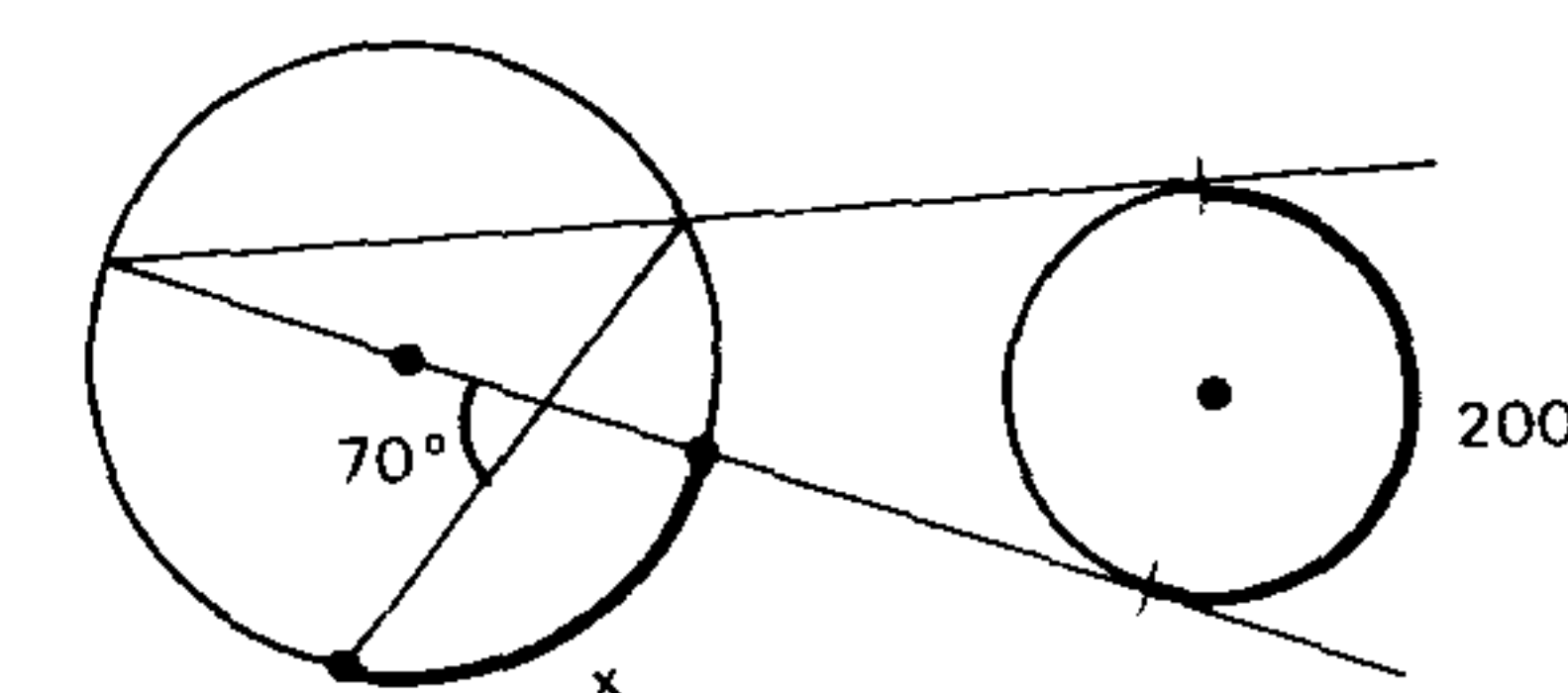
a)

b)

c)

395. Calcule x nas figuras:

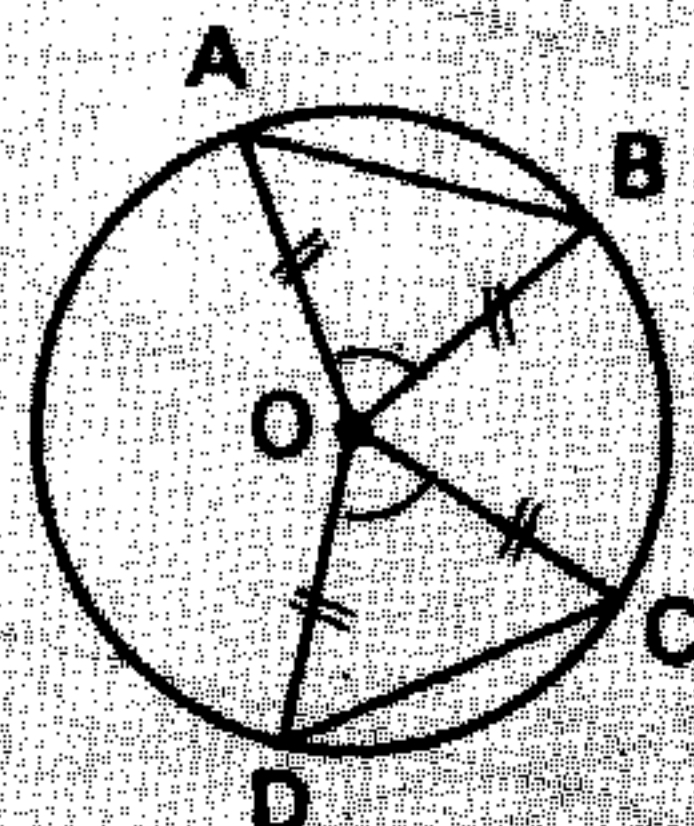
a)

b) ABCDE é um pentágono regular.

396. Na figura, o arco $\widehat{BEC}$ mede $60°$ e $\overline{OB}$ é perpendicular a $\overline{AC}$. Determine a medida do arco $\widehat{AFB}$ e a medida do ângulo $A\hat{D}C$.

397. Determine as medidas dos ângulos de um triângulo, obtido pelos pontos de tangência do círculo inscrito com os lados de um triângulo ABC, sendo $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 40°$ e $\hat{C} = 80°$.

398. Determine a razão entre os ângulos α e β da figura ao lado, sabendo que a reta r tangencia a circunferência no ponto A e que os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{AC}$ são proporcionais aos números 2, 9 e 7.

399. Na figura, determine a medida do ângulo α, sabendo que o arco $\widehat{AB}$ mede $100°$ e que a corda $\overline{CD}$ mede R, sendo R o raio do círculo.

400. Determine o menor ângulo formado por duas retas secantes a uma circunferência, conduzidas por um ponto P externo, sabendo que essas secantes determinam na circunferência dois arcos cujas medidas valem $30°$ e $90°$.

401. Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são tangentes ao círculo de centro O e Q é um ponto do arco menor $\widehat{BC}$. PQR é tangente ao círculo, $\hat{A} = 28°$. Ache $P\hat{O}R$.

402. Na figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro, a corda $\overline{AM}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito e $\overline{BN}$, o lado do quadrado inscrito. Calcule o ângulo α, formado pelas tangentes $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$.

403. Determine as medidas x e y.

404. Consideremos um triângulo equilátero ABC inscrito em um círculo. Determine o menor ângulo formado pelas retas tangentes a esse círculo nos pontos A e B.

405. Determine o valor de x nos casos:

a)

b)

406. Mostre que se $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ são arcos de medidas iguais, de uma circunferência, então as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes.

Solução

Hipótese — *Tese*

$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CD}$

Demonstração

Sendo O o centro do círculo, considere os triângulos AOB e COD em que $OA = OB = OC = OD =$ raio e $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$ (pois $\widehat{AB} = \widehat{CD}$).
Então, pelo caso LAL, os triângulos são congruentes.
Logo: $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Note que vale também a recíproca desta propriedade.

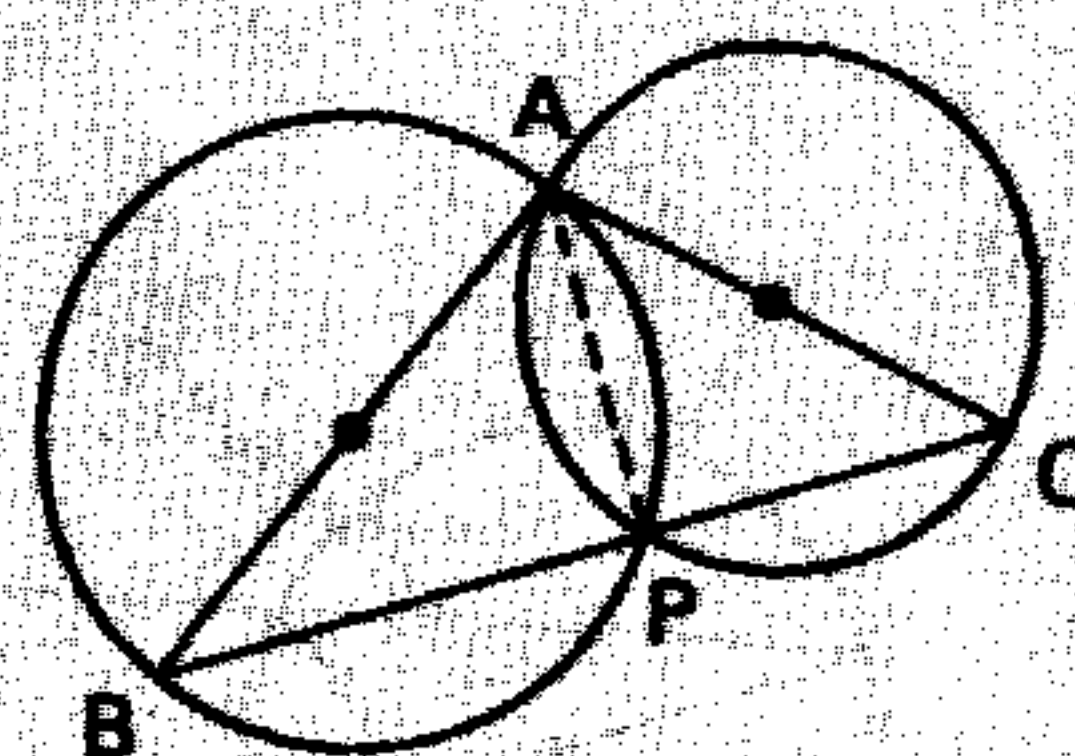
407. Prove que retas paralelas distintas, secantes com uma circunferência, determinam na circunferência, entre as paralelas, arcos de mesma medida.

408. Prove que um trapézio inscrito em um círculo é isósceles.

409. Sejam r e R os raios das circunferências inscrita e circunscrita em um triângulo retângulo de catetos a e b. Prove que $a + b = 2(R + r)$.

410. Prove que a soma dos diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito a um triângulo retângulo é igual à soma dos catetos desse triângulo.

411. Se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo são diâmetros de duas circunferências, prove que o outro ponto comum às circunferências está em $\overline{BC}$.

Solução

Seja P o outro ponto de interseção. Como os triângulos APB e APC estão inscritos em semicircunferências, eles são retângulos. Logo $A\hat{P}B$ e $A\hat{P}C$ são ângulos retos. Então $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ são semi-retas opostas, isto é, P está em $\overline{BC}$.

412. Seja ABC um triângulo acutângulo e H_1, H_2, H_3 os pés das alturas. Prove que o ortocentro H do triângulo ABC é o incentro do triângulo $H_1H_2H_3$.

CAPÍTULO XII

Teorema de Tales

I. Teorema de Tales

174. Definições

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.

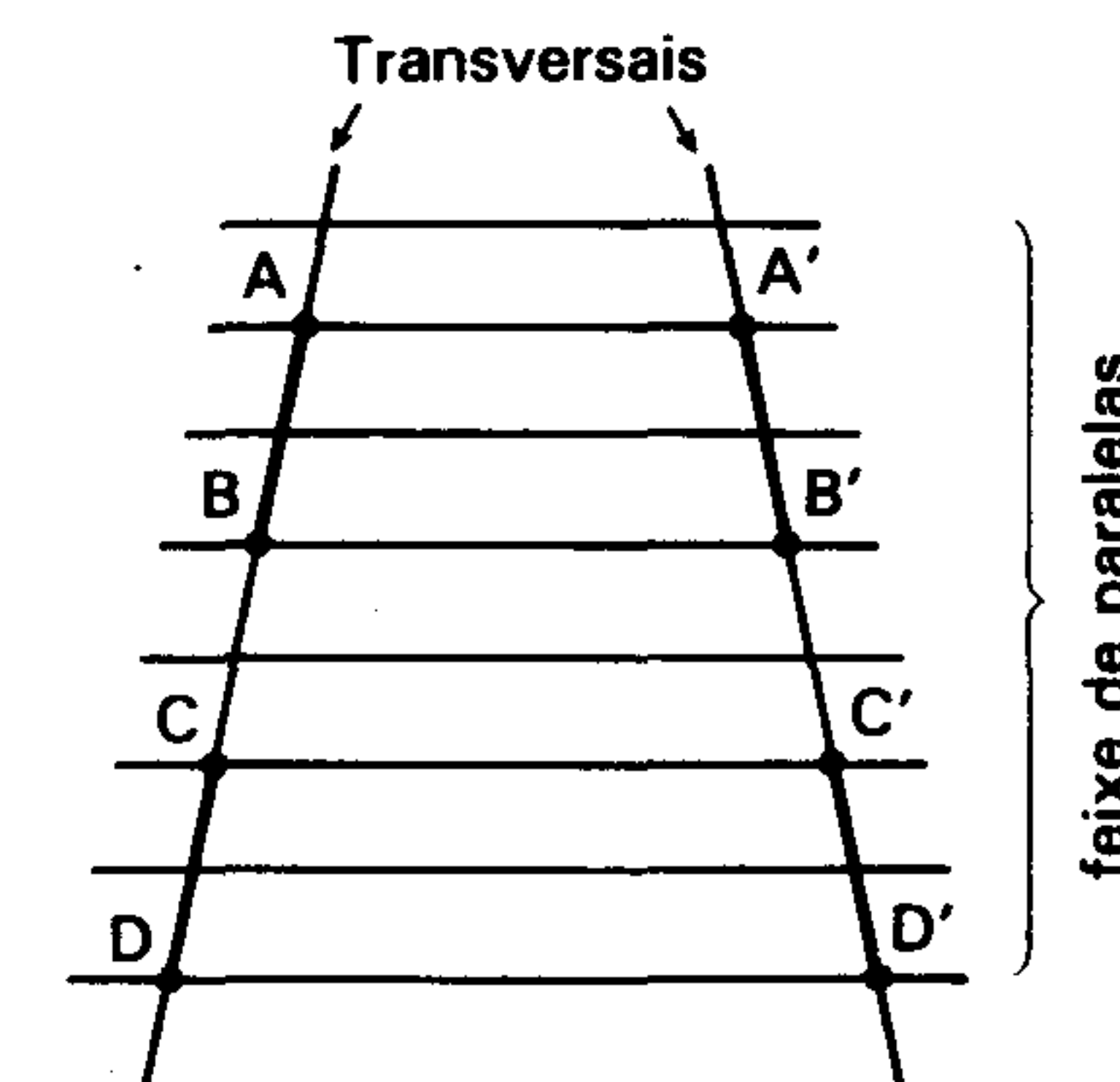
Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.

Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.

Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.

Transversais — feixe de paralelas

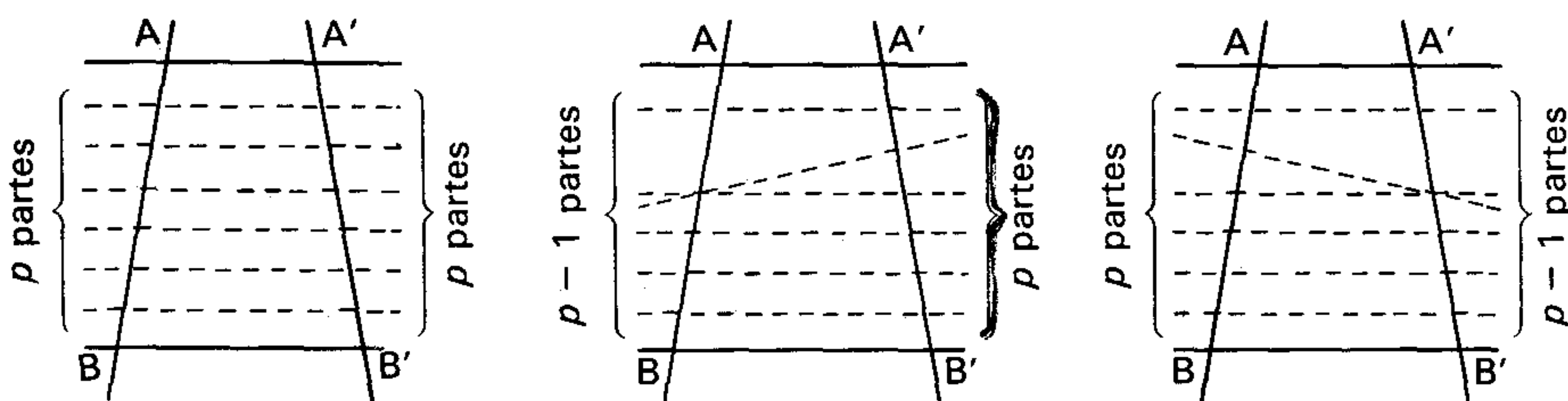
A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes.

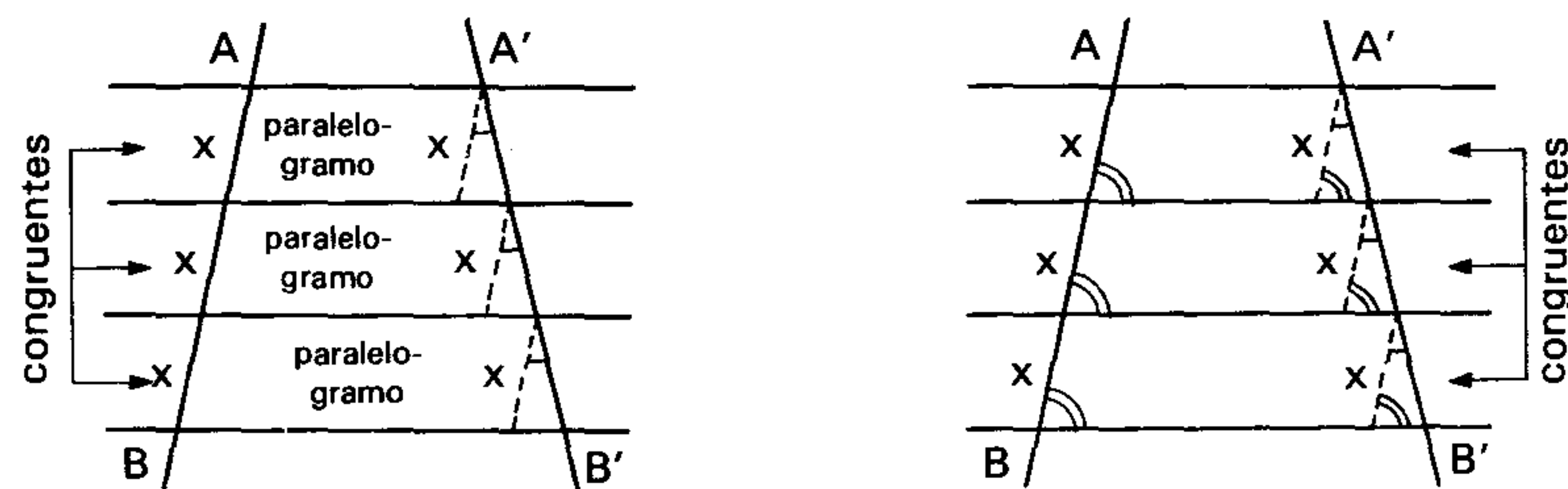
$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ são segmentos correspondentes.

175. *Propriedade*

> Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:
>
> 1º) também é dividido em p partes
>
> 2º) e essas partes também são congruentes entre si.

Demonstração

1ª parte: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são segmentos correspondentes e $\overline{AB}$ é dividido em p partes por retas do feixe.

Se $\overline{A'B'}$ ficasse dividido em menos partes (ou mais partes), pelo menos duas retas do feixe encontrar-se-iam em pontos de $\overline{AB}$ (ou de $\overline{A'B'}$), o que é absurdo pois as retas do feixe são paralelas.

2ª parte: $\overline{AB}$ é dividido em partes congruentes a x.

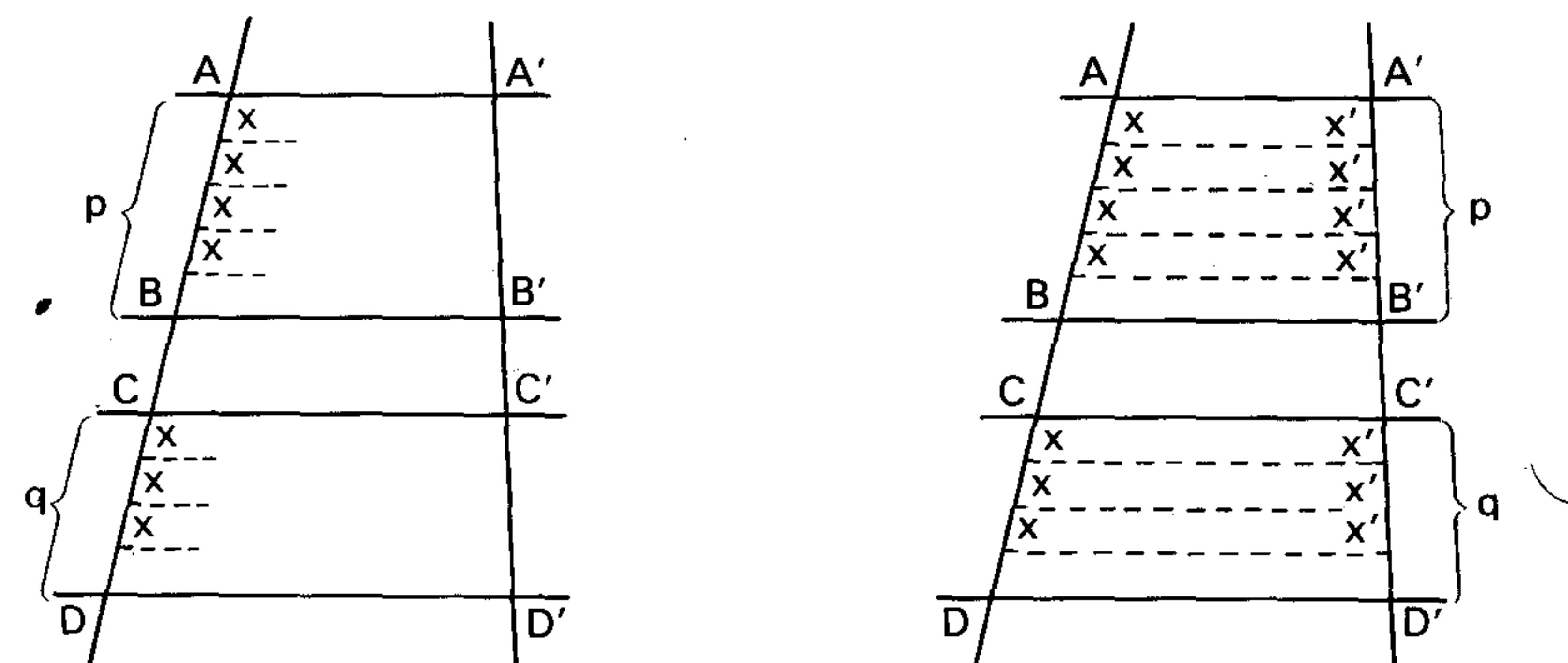
Pelos pontos de divisão de $\overline{A'B'}$, conduzindo paralelas a $\overline{AB}$, obtemos um triângulo para cada divisão. Todos os triângulos são congruentes pelo caso *ALA* (basta notar os paralelogramos e os ângulos de lados respectivamente paralelos que são obtidos).

Com isso, $\overline{A'B'}$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

176. *Teorema de Tales*

> Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos *quaisquer* de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Hipótese		*Tese*
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos correspondentes da outra.	$\Longrightarrow$	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$

Demonstração

1º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *comensuráveis*.

Existe um segmento x que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = px\\ \overline{CD} = qx\end{array}\right\} \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (vide figura) e aplicando a propriedade anterior, vem:

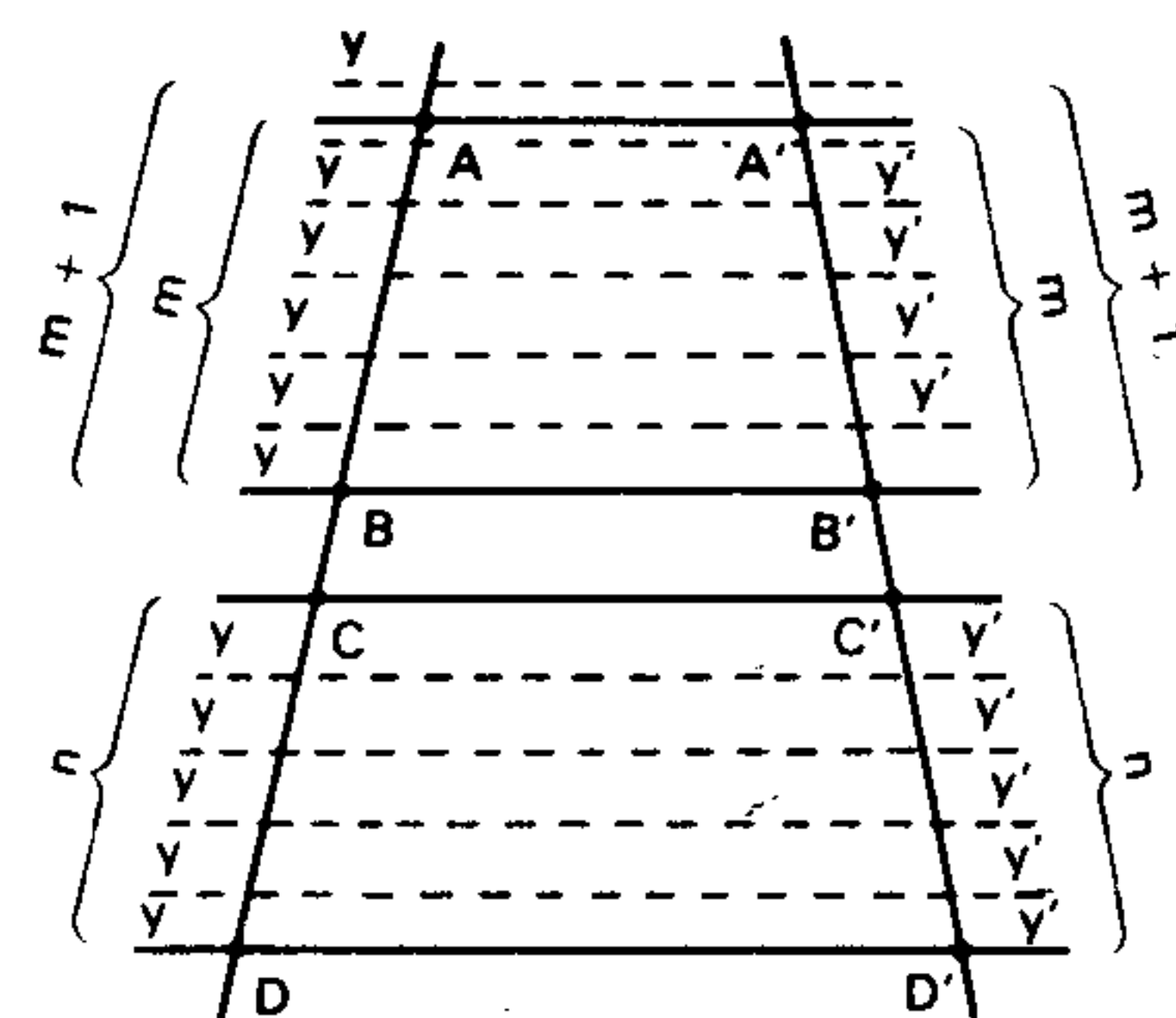
$$\left.\begin{array}{l}\overline{A'B'} = px'\\ \overline{C'D'} = qx'\end{array}\right\} \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.

2º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *incomensuráveis*.

Não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Tomamos um segmento y submúltiplo de $\overline{CD}$ (y cabe um certo número inteiro n de vezes em $\overline{CD}$), isto é:

$$\overline{CD} = n \cdot y$$

Por serem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ incomensuráveis, marcando sucessivamente y em $\overline{AB}$, para um certo número inteiro m de vezes acontece que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m + 1)y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left.\begin{array}{l} my < \overline{AB} < (m+1)y \\ ny = \overline{CD} = ny \end{array}\right\} \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \qquad (3)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\overline{C'D'} = ny'$$
$$my' < \overline{A'B'} < (m + 1)y'$$

Operando com as relações acima, temos:

$$\left.\begin{array}{l} my' < \overline{A'B'} < (m+1)y' \\ ny' = \overline{C'D'} = ny' \end{array}\right\} \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \qquad (4)$$

Ora, y é um submúltiplo de $\overline{CD}$ que se pode variar; dividindo y, aumentamos n e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ pela expressão (3), e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela expressão (4). Como esse número é único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Nota

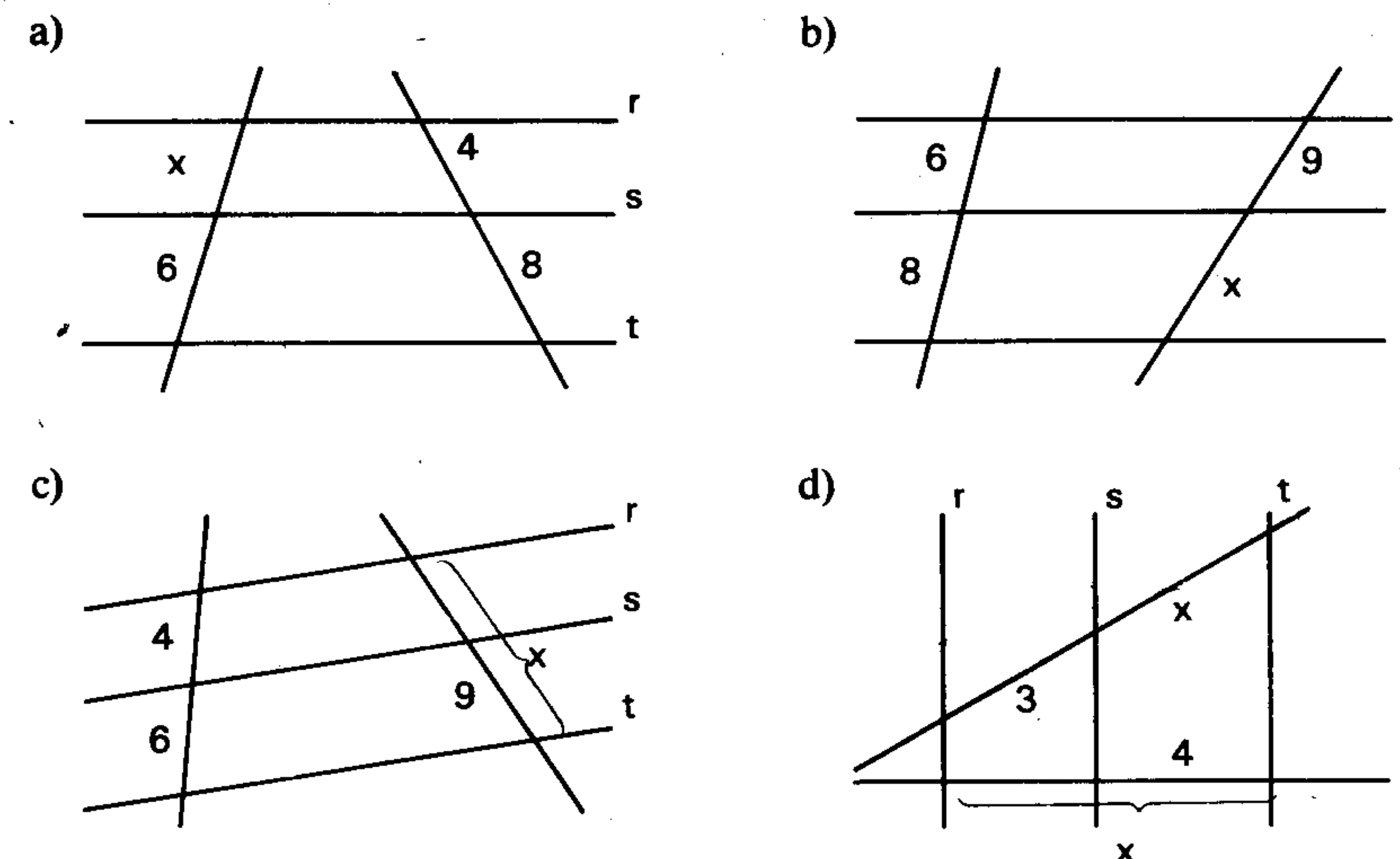
Vale também a igualdade:

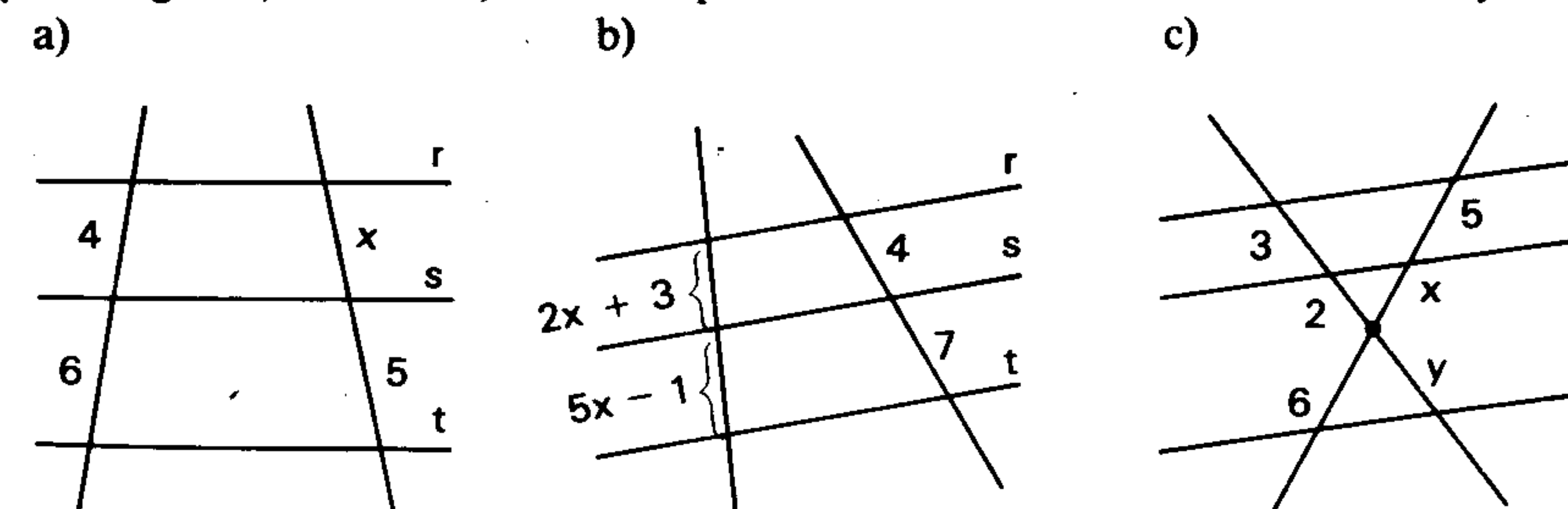
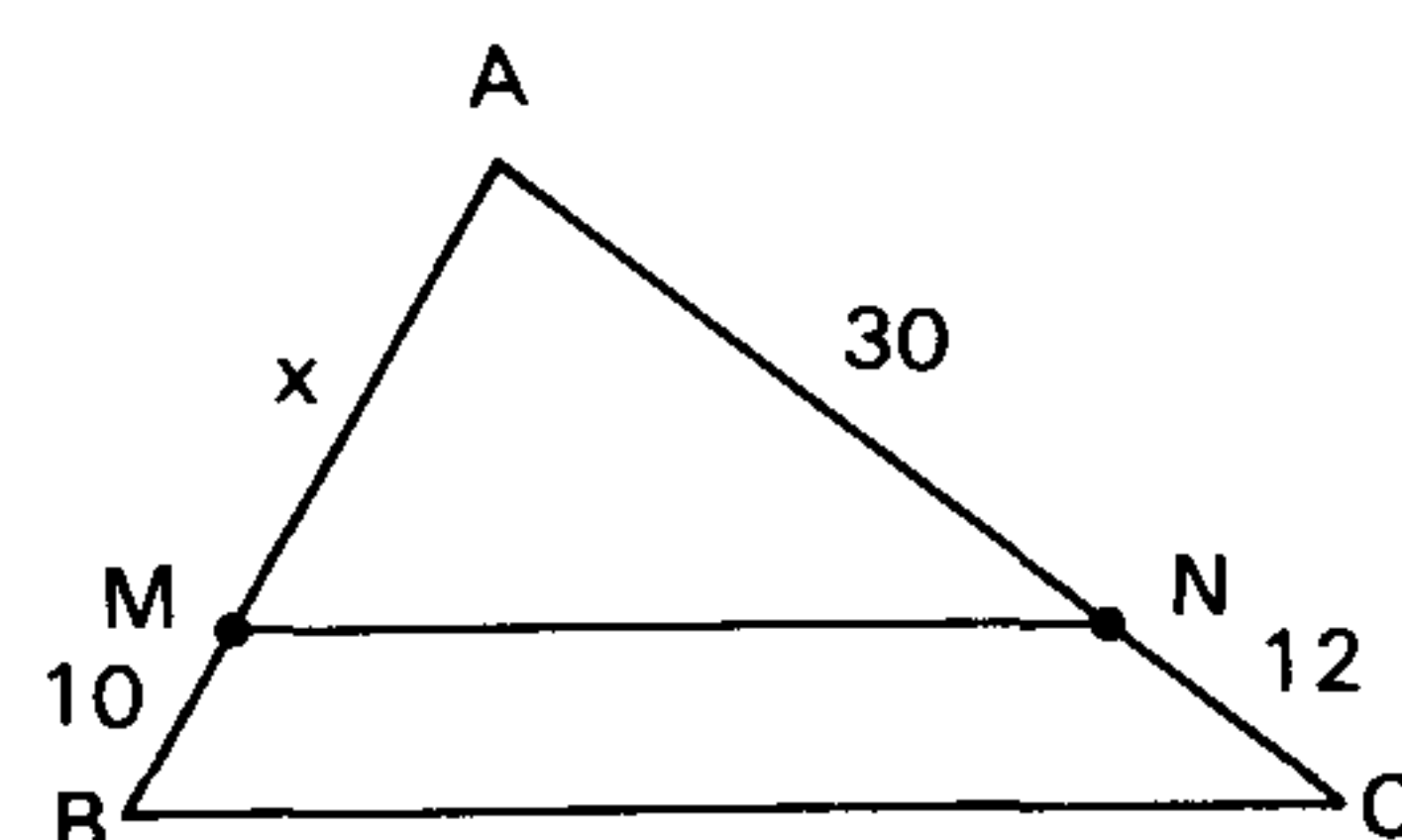
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}, \text{ que permite concluir:}$$

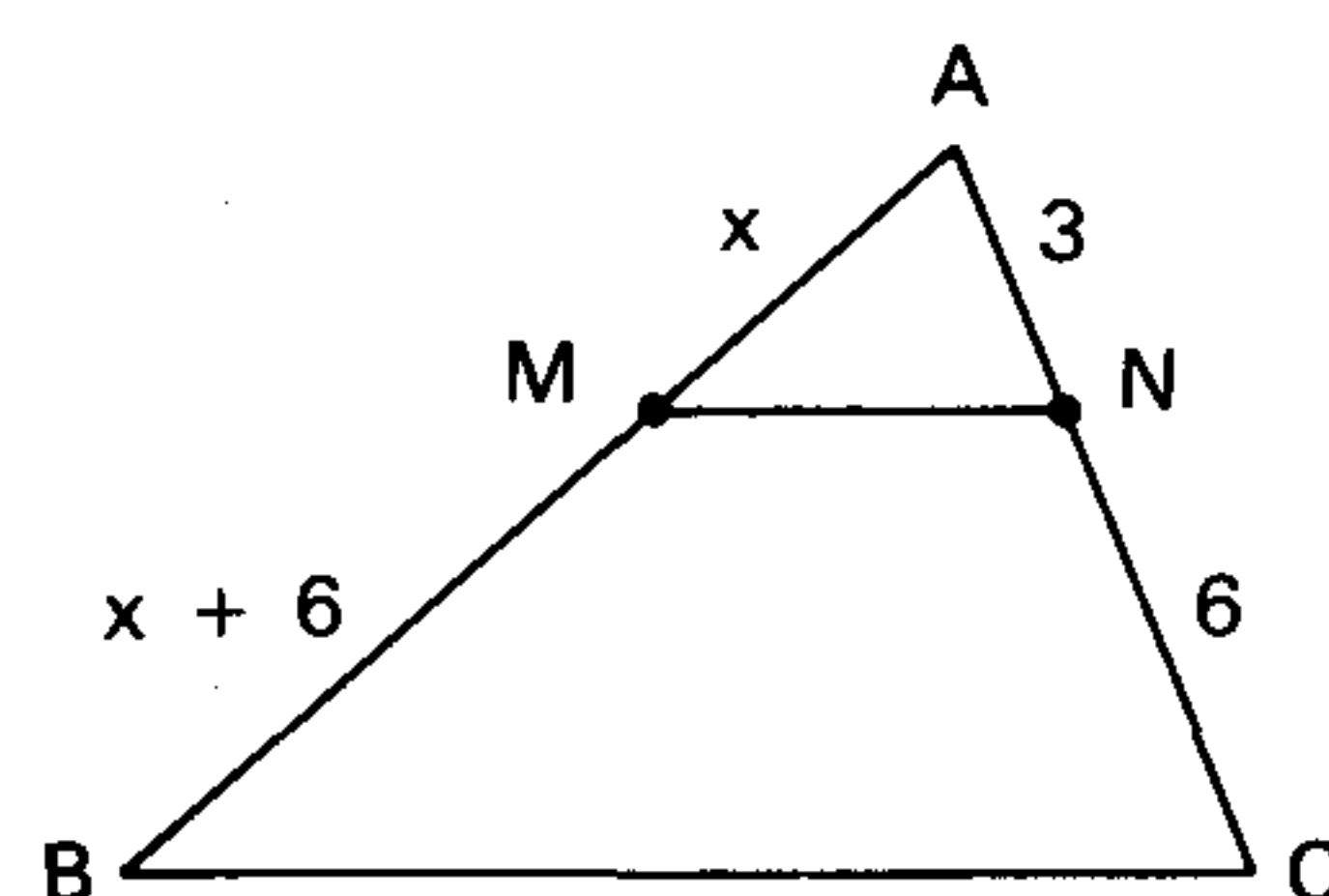
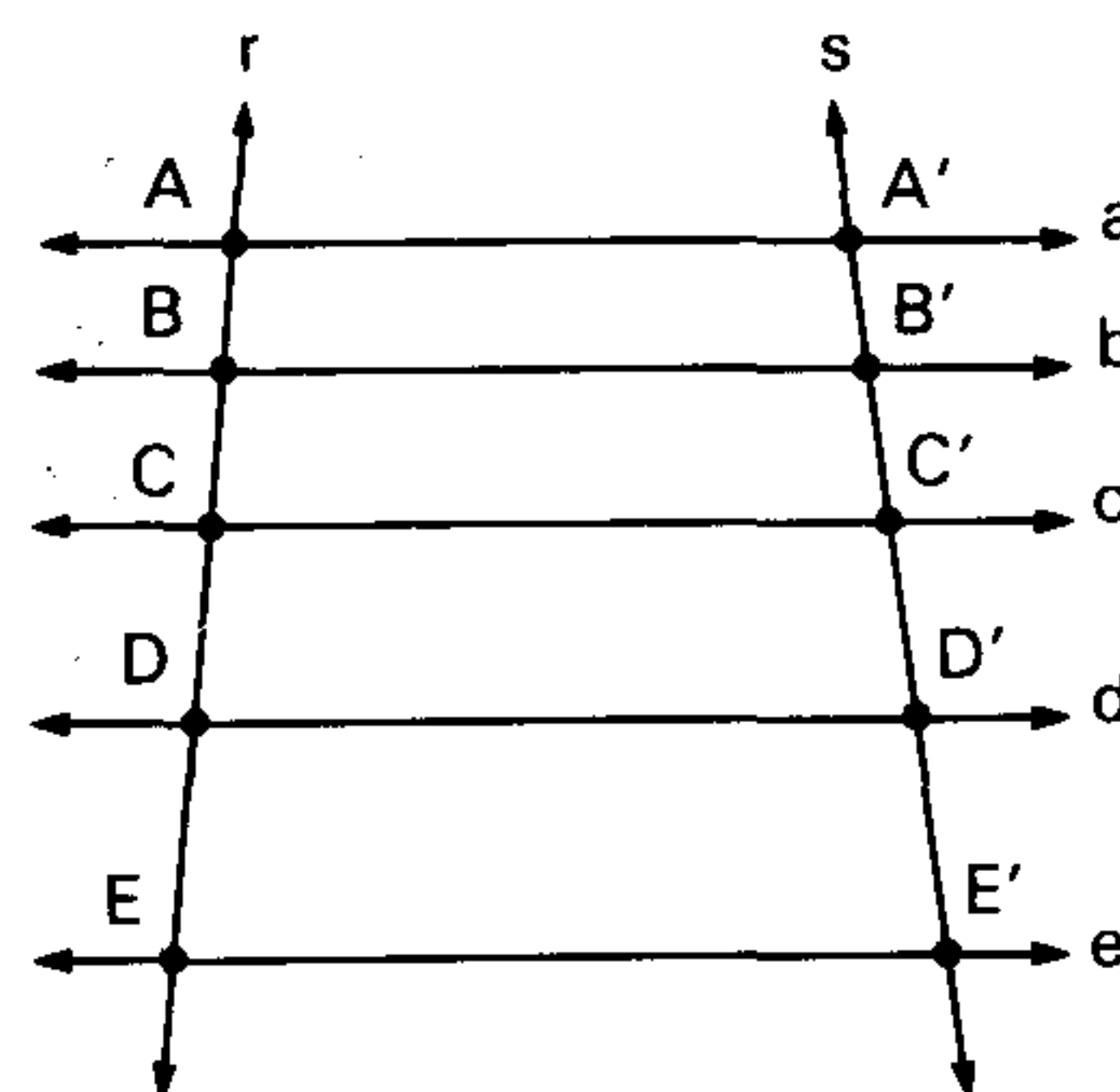
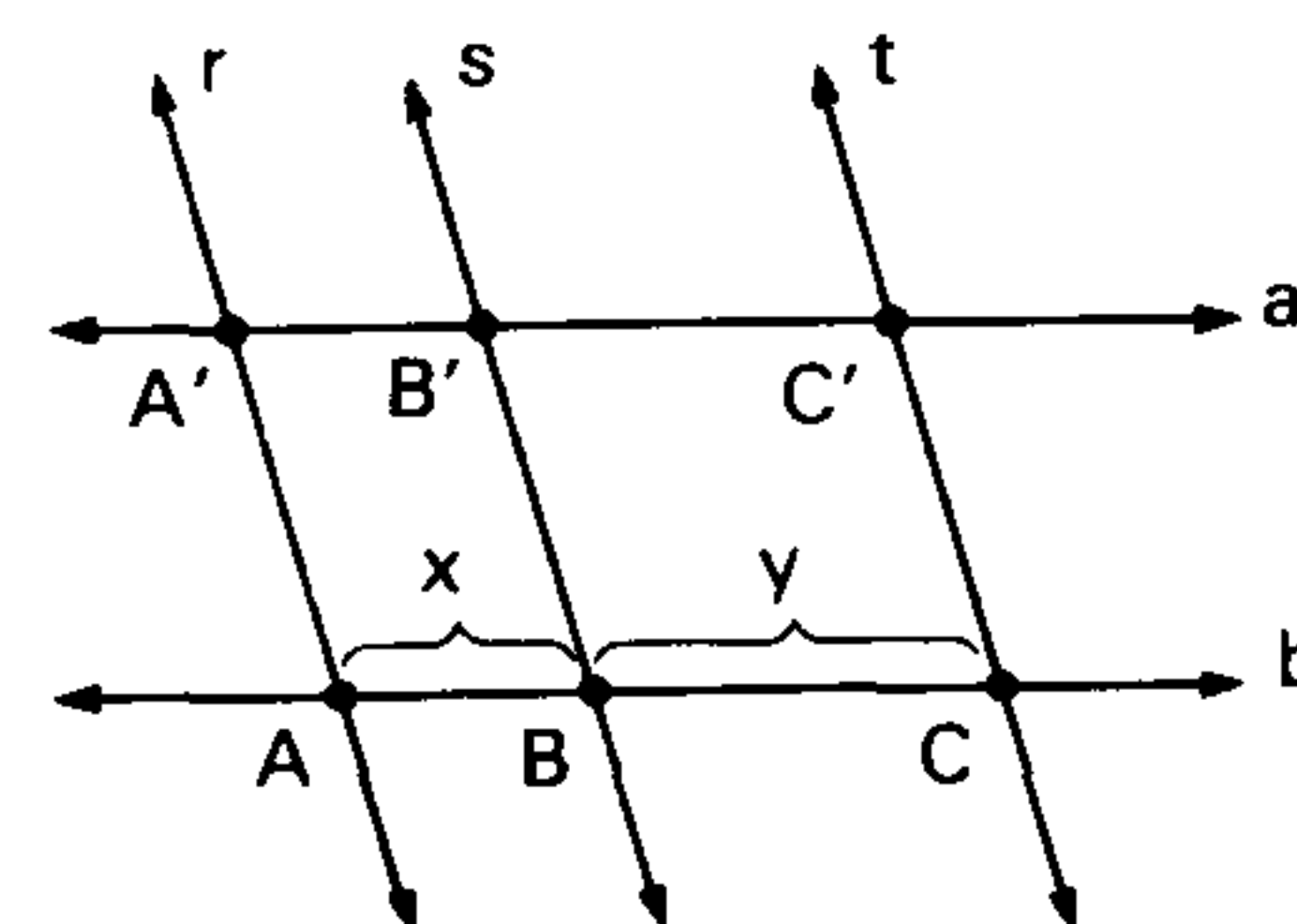
A razão entre segmentos correspondentes é constante.

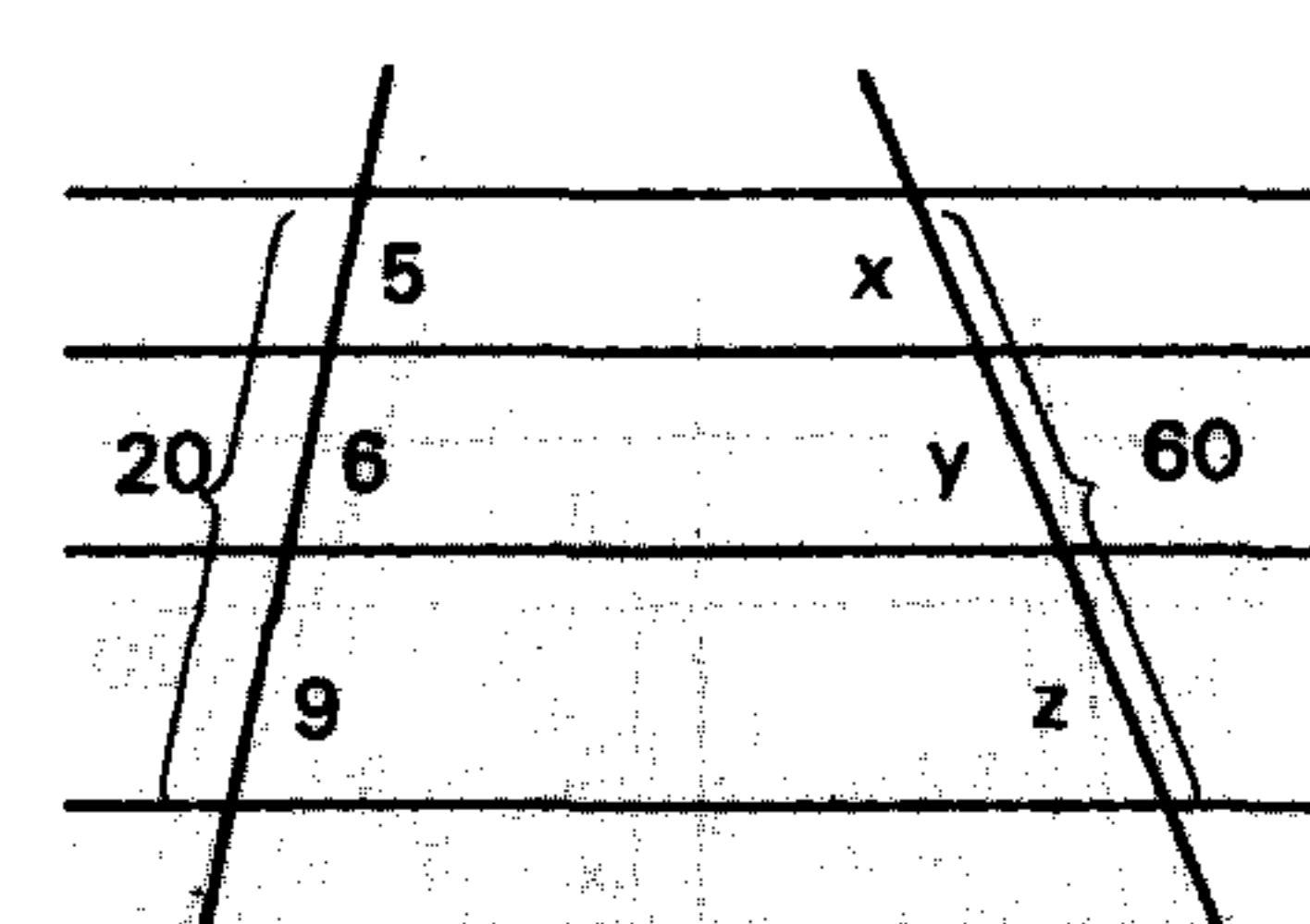
EXERCÍCIOS

413. Determine o valor de x em cada caso abaixo, sendo r, s e t retas paralelas.

a) b) c) d)

414. Nas figuras, as retas r, s e t são paralelas. Determine os valores de x e y.

a) b) c)

415. Na figura, $\overline{MN}$ é paralela à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC. Calcule o valor de x.

416. Na figura, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Calcule o valor de AB.

417. Na figura, calcule o valor de x.

418. Na figura ao lado, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ medem respectivamente *8 cm, 10 cm, 12 cm* e *15 cm*. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{D'E'}$, sabendo que $\overline{A'E'}$ mede *54 cm*, e que as retas a, b, c, d, e são paralelas.

419. Na figura ao lado, $r \parallel s \parallel t$. Determine as medidas x e y, sabendo que são proporcionais a *2* e a *3*, que o segmento $\overline{A'C'}$ mede *30 cm* e que as retas a e b são paralelas.

420. Um feixe de *4* paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem *5 cm, 6 cm* e *9 cm*, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos que esse mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e a quarta paralela mede *60 cm*.

Solução

$$\frac{x}{5} = \frac{60}{20} \implies x = 15\,\text{cm}$$

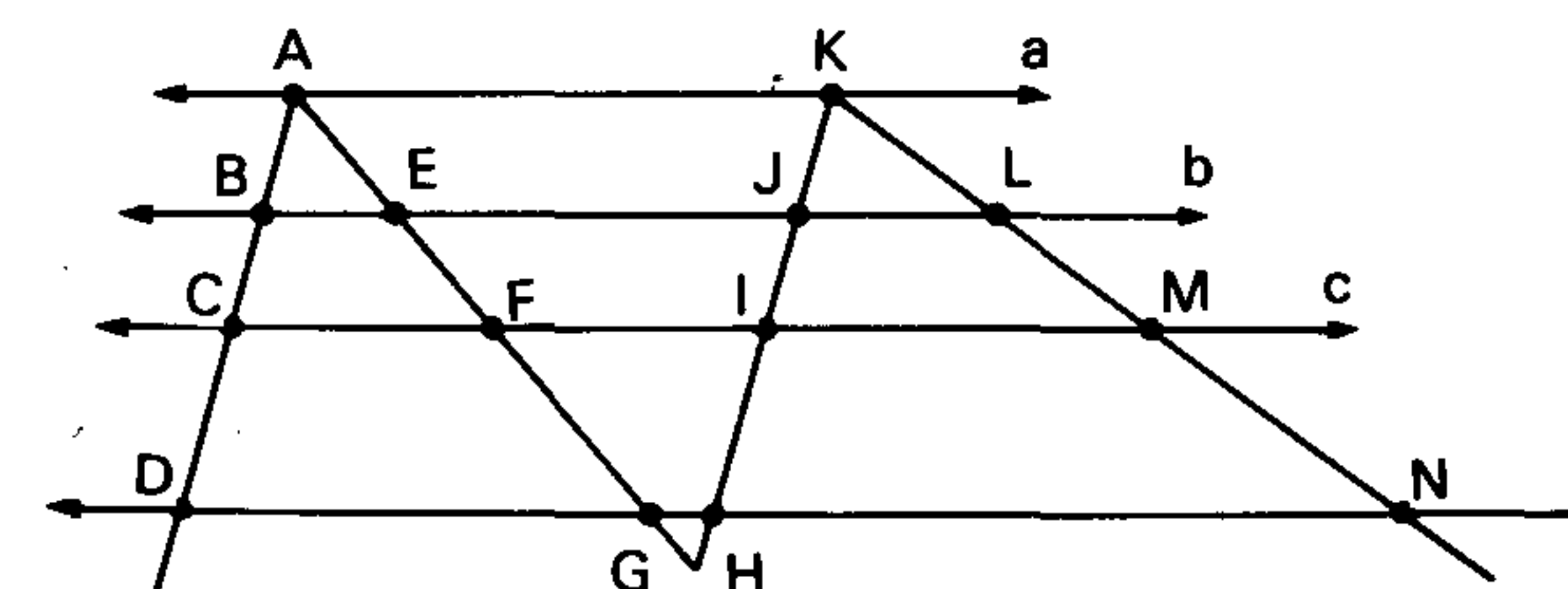
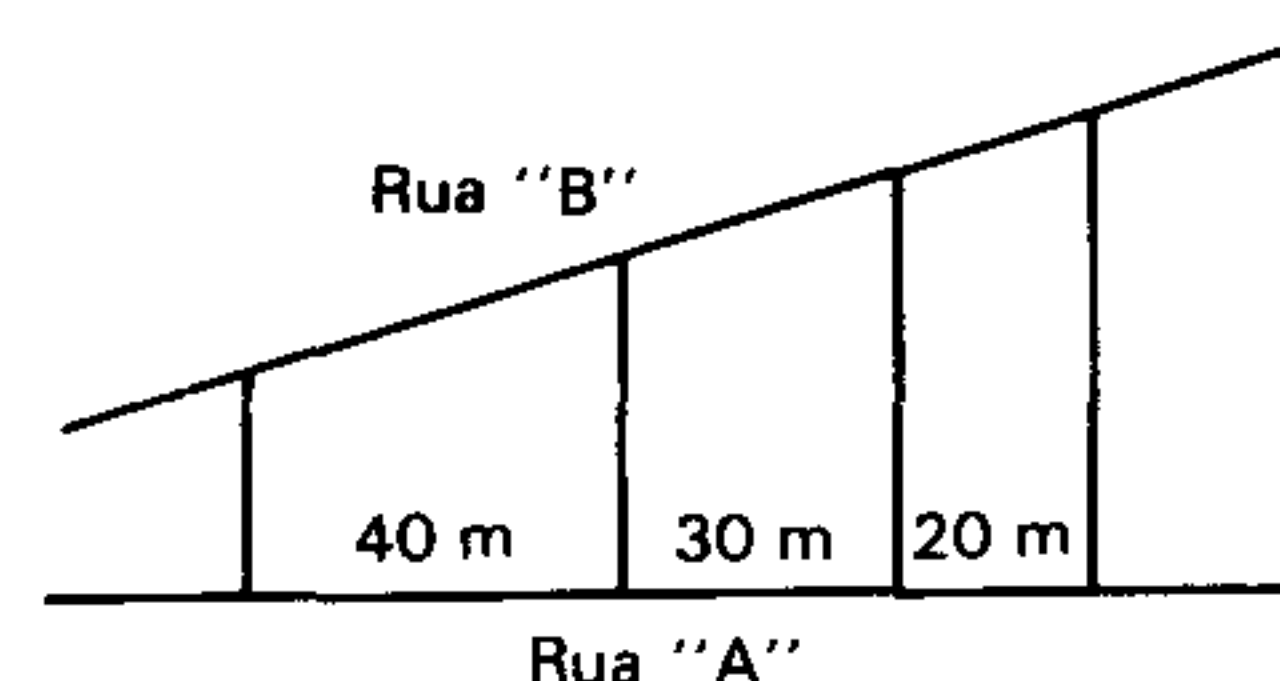
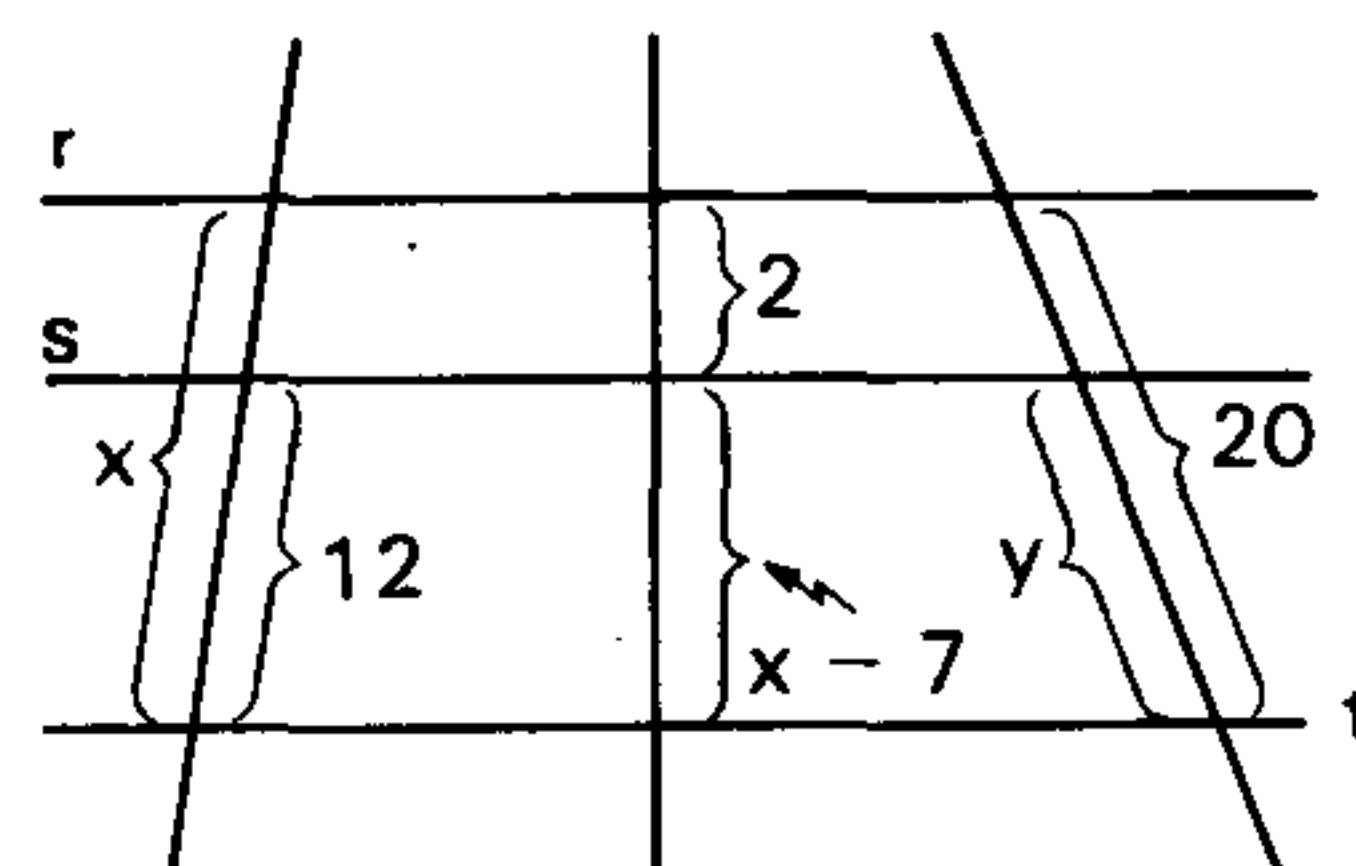
$$\frac{y}{6} = \frac{60}{20} \implies y = 18\,\text{cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{z}{9} = \dfrac{60}{20} \\ \text{ou } z = 60 - 15 - 18 \end{array}\right\} \implies z = 27\,\text{cm}$$

421. Um feixe de cinco paralelas determina sobre uma transversal quatro segmentos que medem, respectivamente, *5 cm, 8 cm, 11 cm* e *16 cm*. Calcule o comprimento dos segmentos que esse mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre as paralelas extremas mede *60 cm*.

422. Um triângulo ABC tem os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medindo *24 cm* e *20 cm*, respectivamente. Sobre o lado $\overline{AC}$, a *6 cm* do vértice C, tomamos um ponto M. Determine a distância de um ponto N situado sobre o lado $\overline{BC}$, até o vértice C, de maneira que $\overline{MN}$ seja paralelo a $\overline{AB}$.

423. No triângulo ABC, o lado $\overline{AC}$ mede *32 cm* e o lado $\overline{BC}$, *36 cm*. Por um ponto M situado sobre $\overline{AC}$, a *10 cm* do vértice C, traçamos a paralela ao lado $\overline{AB}$, a qual divide $\overline{BC}$ em dois segmentos $\overline{BN}$ e $\overline{CN}$. Determine a medida de $\overline{CN}$.

424. Na figura abaixo, onde $a \parallel b \parallel c \parallel d$, temos que: $AD + AG + HK + KN = 180\ cm$; $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{JK}{AB} = \dfrac{9}{5}$, $\dfrac{KL}{AB} = \dfrac{27}{10}$; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais a *2, 3* e *4*, respectivamente. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{LM}$ e $\overline{CD}$.

425. Três terrenos têm frente para a rua "A" e para a rua "B", como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua "A". Qual a medida de frente para a rua "B" de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é *180 m*?

426. Determine x e y, sendo r, s e t retas paralelas.

427. Dados um triângulo ABC e um segmento $\overline{DE}$ com D em $\overline{AB}$ e E em $\overline{AC}$, prove que, se $AD : DB = AE : EC$, então $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

II. Teoremas das bissetrizes

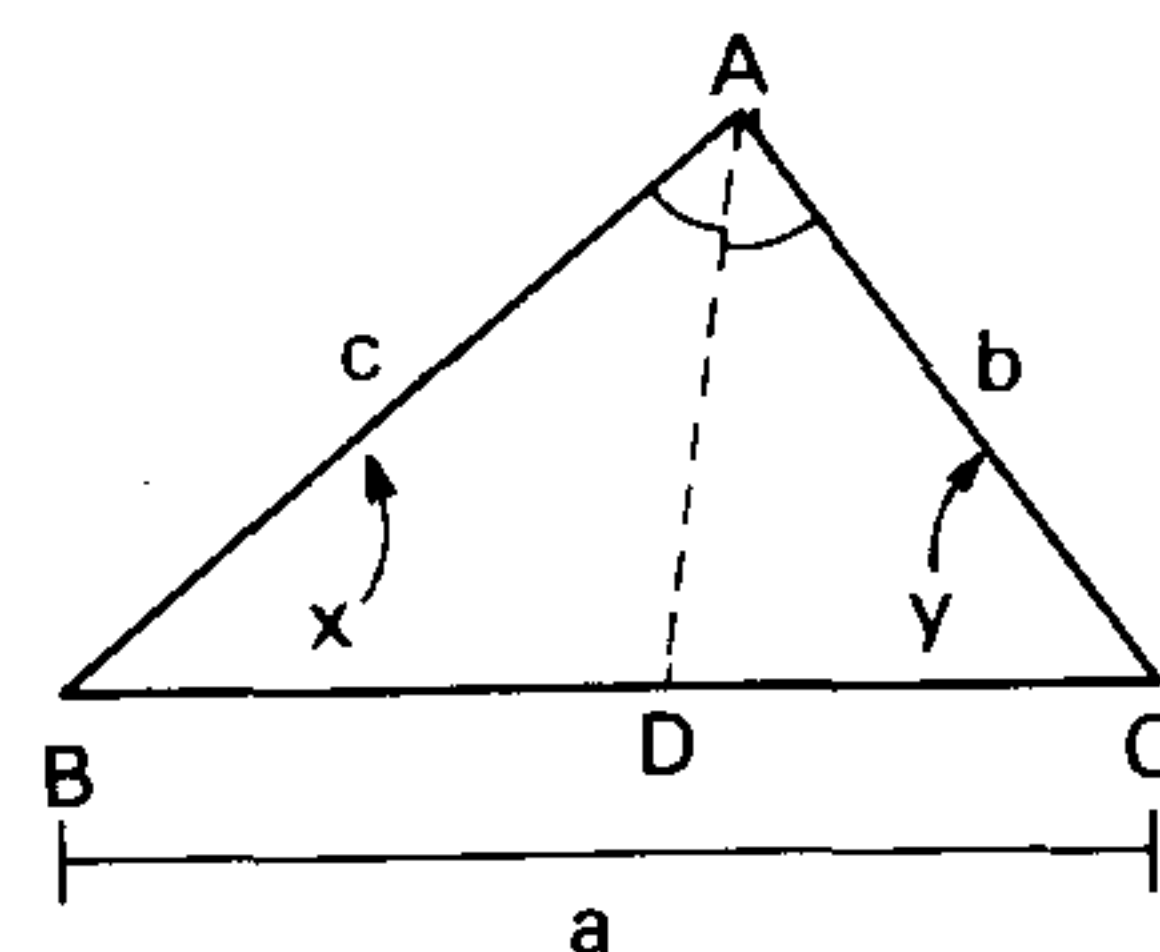
177. *Teorema da bissetriz interna*

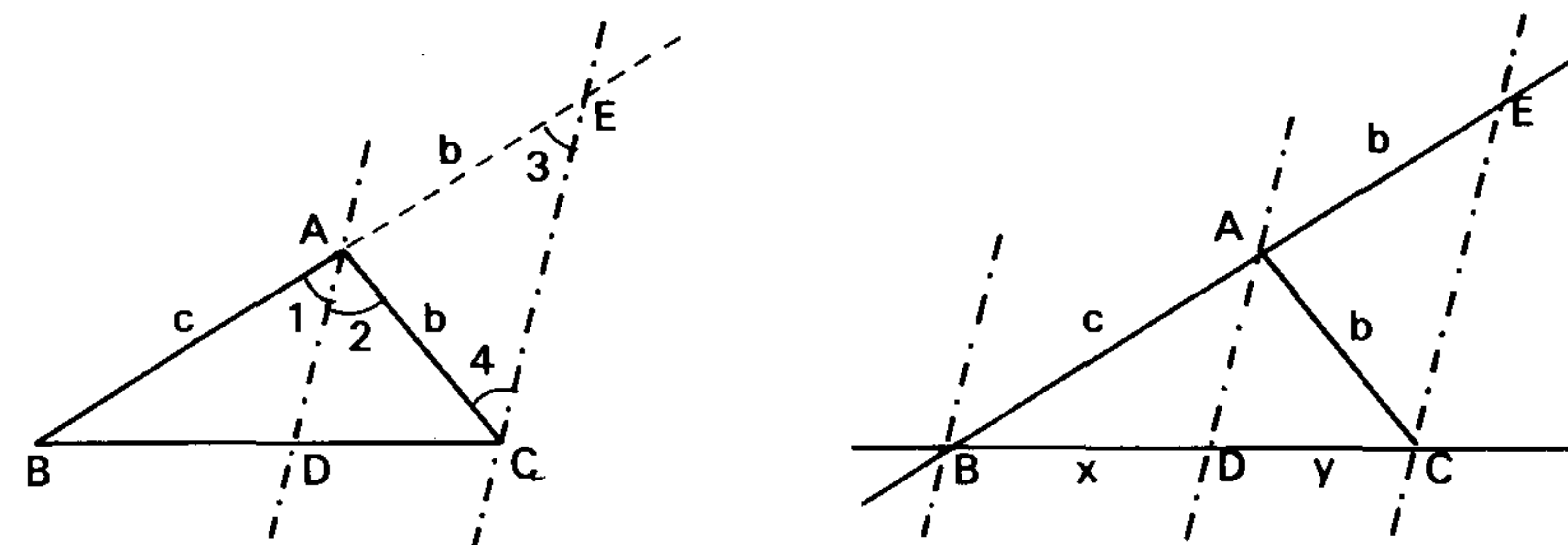
Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.

O enunciado acima deve ser entendido como segue.

Sendo ABC o triângulo de lados a, b e c, $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (conforme a figura), $DB = x$ e $DC = y$, teremos:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

O lado $BC = a$ é dividido em dois segmentos aditivos, pois $\overline{DB} + \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, $x + y = a$.

E com esta nomenclatura temos, então:

Hipótese		*Tese*
$\overline{AD}$ bissetriz interna do ΔABC	$\Longrightarrow$	$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$

Demonstração

Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $B\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}C = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$, e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{1} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)
$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{2} \equiv \hat{4}$ (alternos internos)

Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \Longrightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Longrightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Longrightarrow AE = b$.

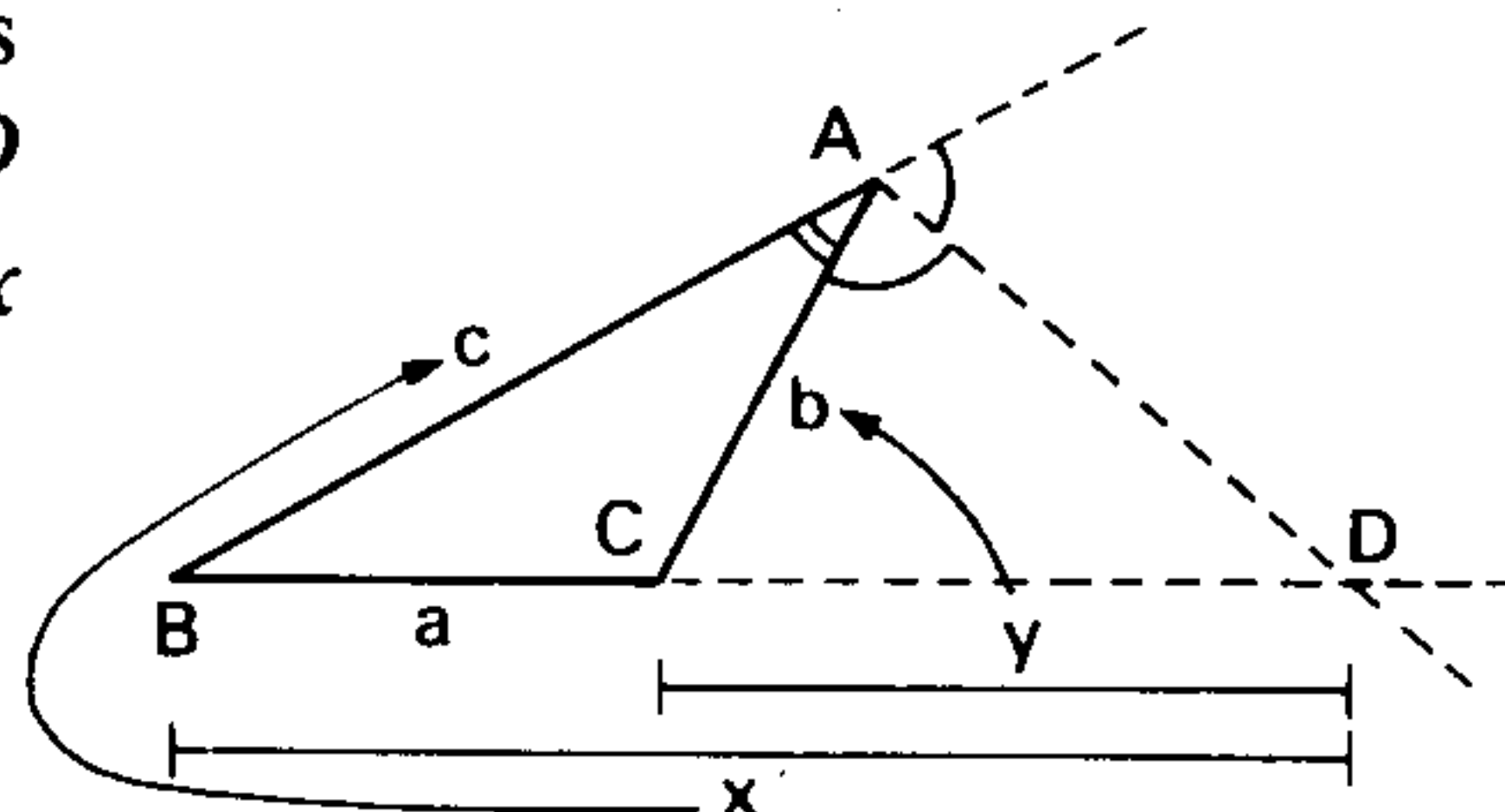
Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, vem:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}, \text{ ou seja, } \frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

178. *Teorema da bissetriz externa*

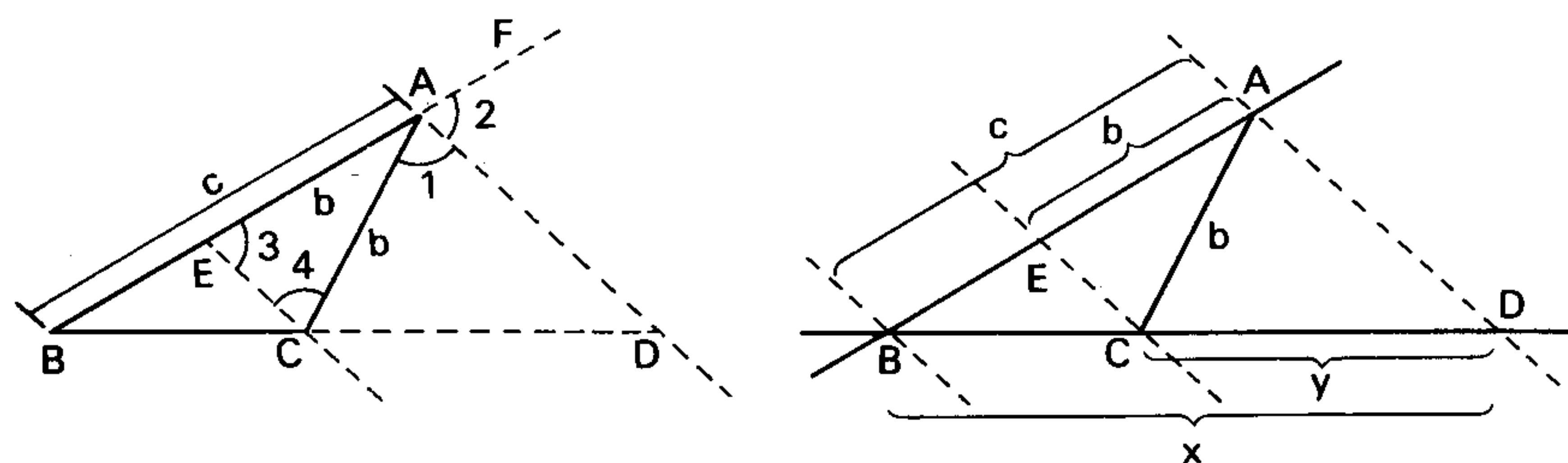
Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes.

O enunciado anterior deve ser entendido como segue:

Sendo ABC o triângulo de lados a, b, c, $\overline{AD}$ a bissetriz externa com D na reta $\overleftrightarrow{BC}$ (conforme figura), $DB = x$ e $\overline{DC} = y$, teremos:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

O lado $BC = a$ é dividido externamente em segmentos subtrativos, pois $\overline{DB} - \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, $x - y = a$.

Com esta nomenclatura, temos:

Hipótese		*Tese*
$\overline{AD}$ bissetriz externa do ΔABC	$\Longrightarrow$	$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$

Demonstração

Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $C\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}F = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$ e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{2} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{1} \equiv \hat{4}$ (alternos internos).

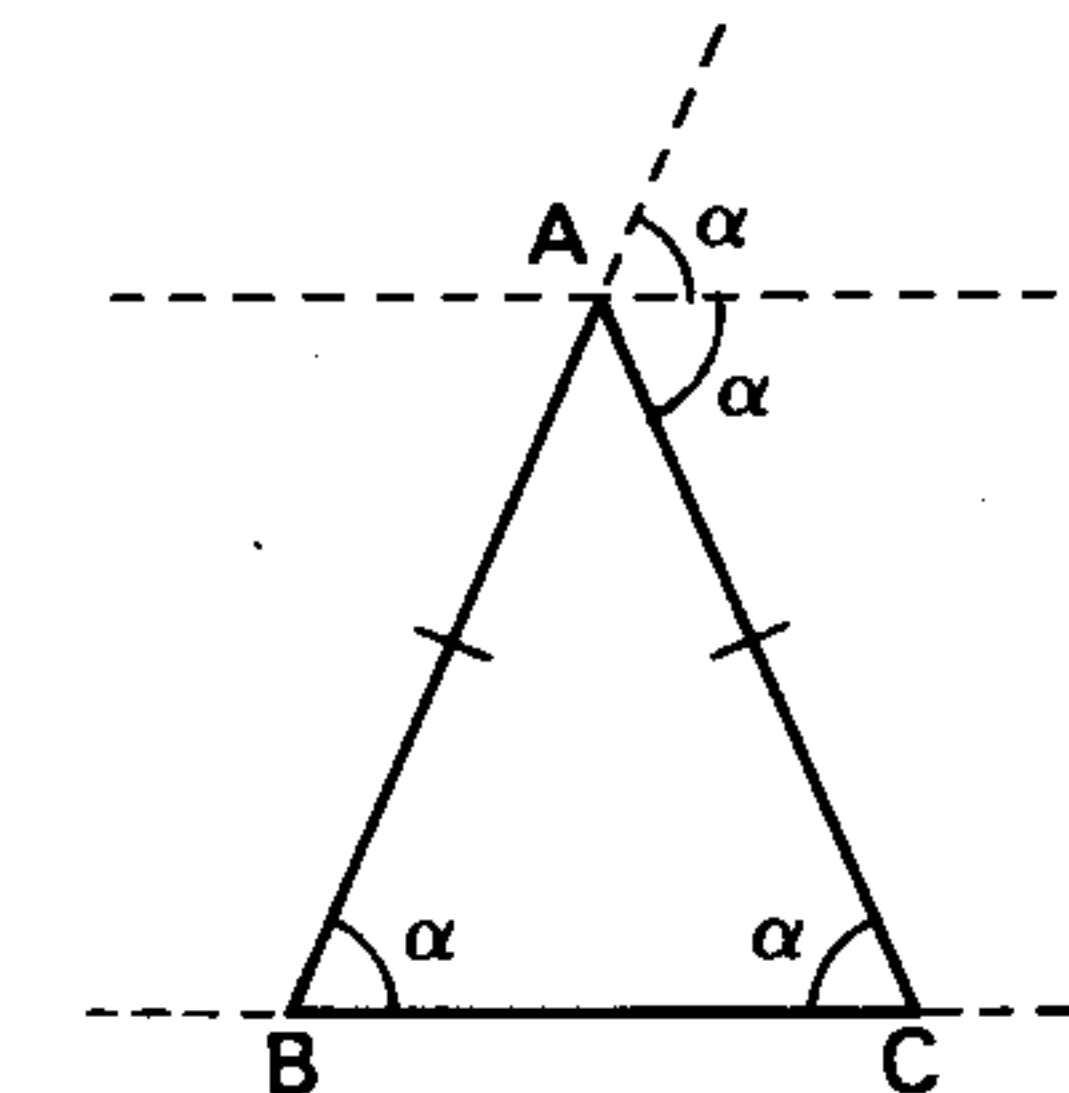
Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \Longrightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Longrightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Longrightarrow AE = b$.

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, vem:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}, \text{ ou seja, } \frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

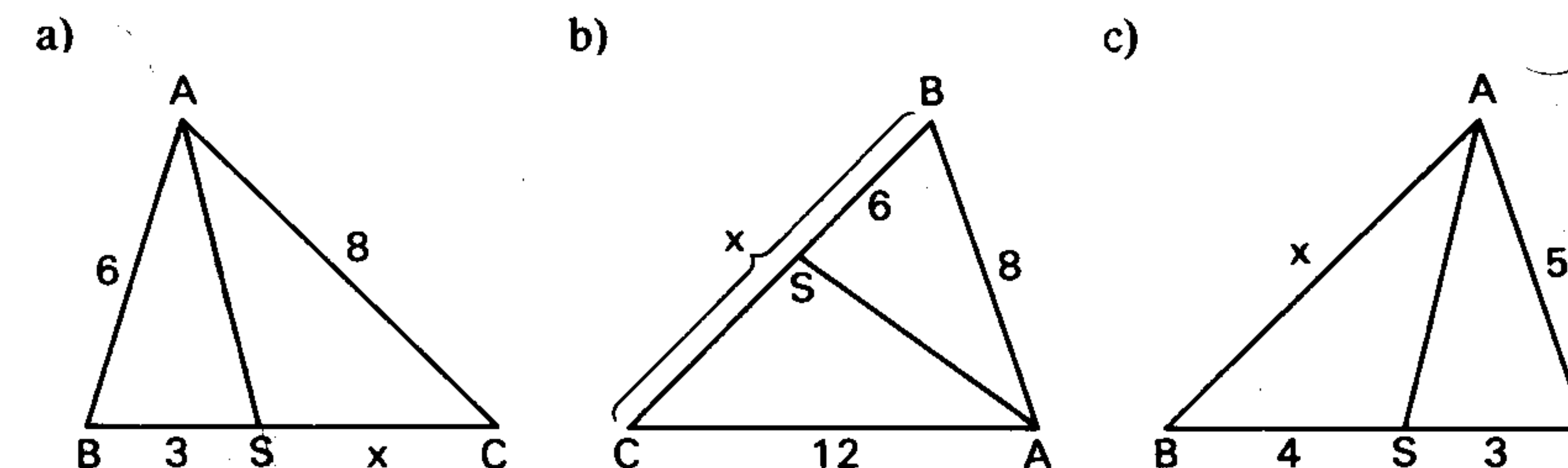
Nota

Se o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, então a bissetriz do ângulo externo em A é paralela à base $\overline{BC}$ e reciprocamente.

EXERCÍCIOS

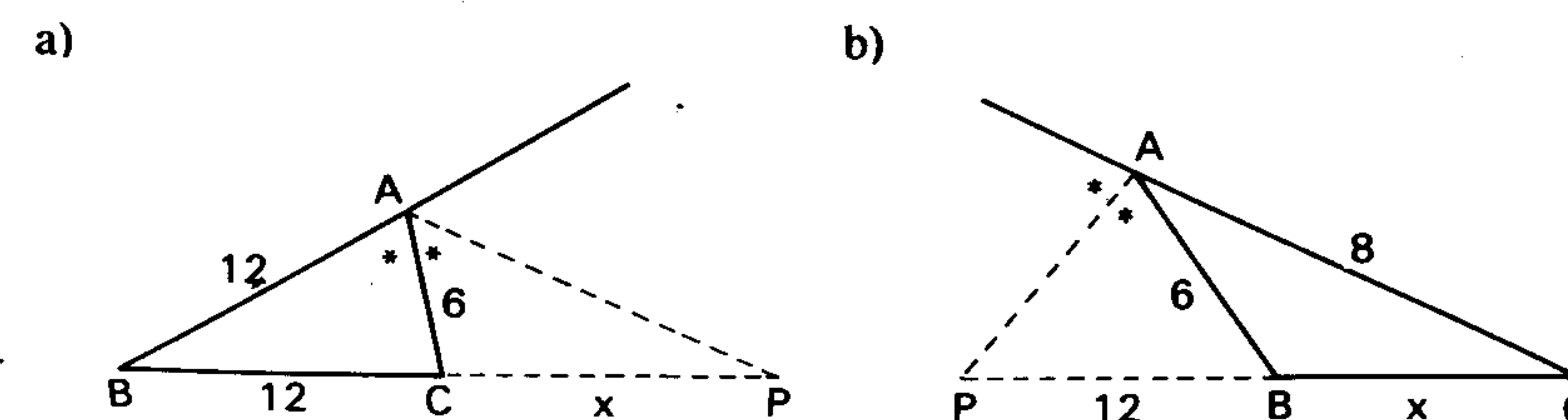
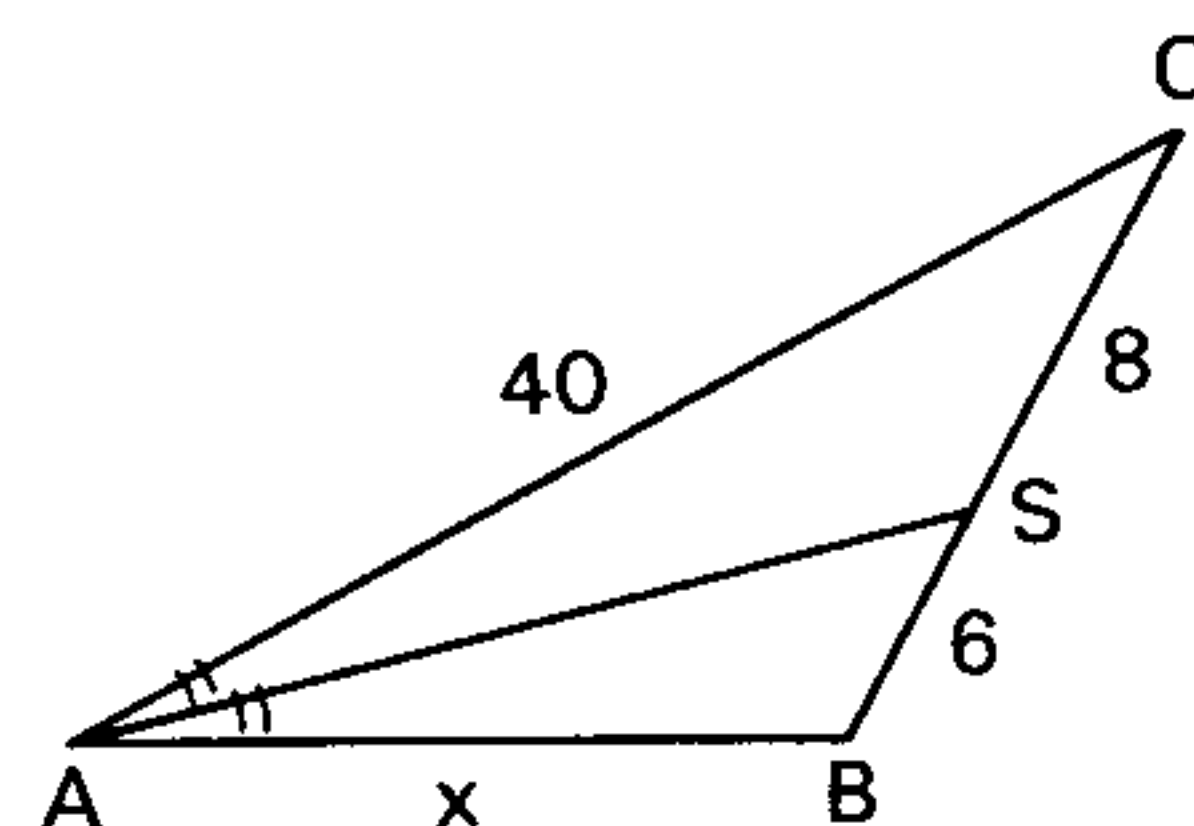
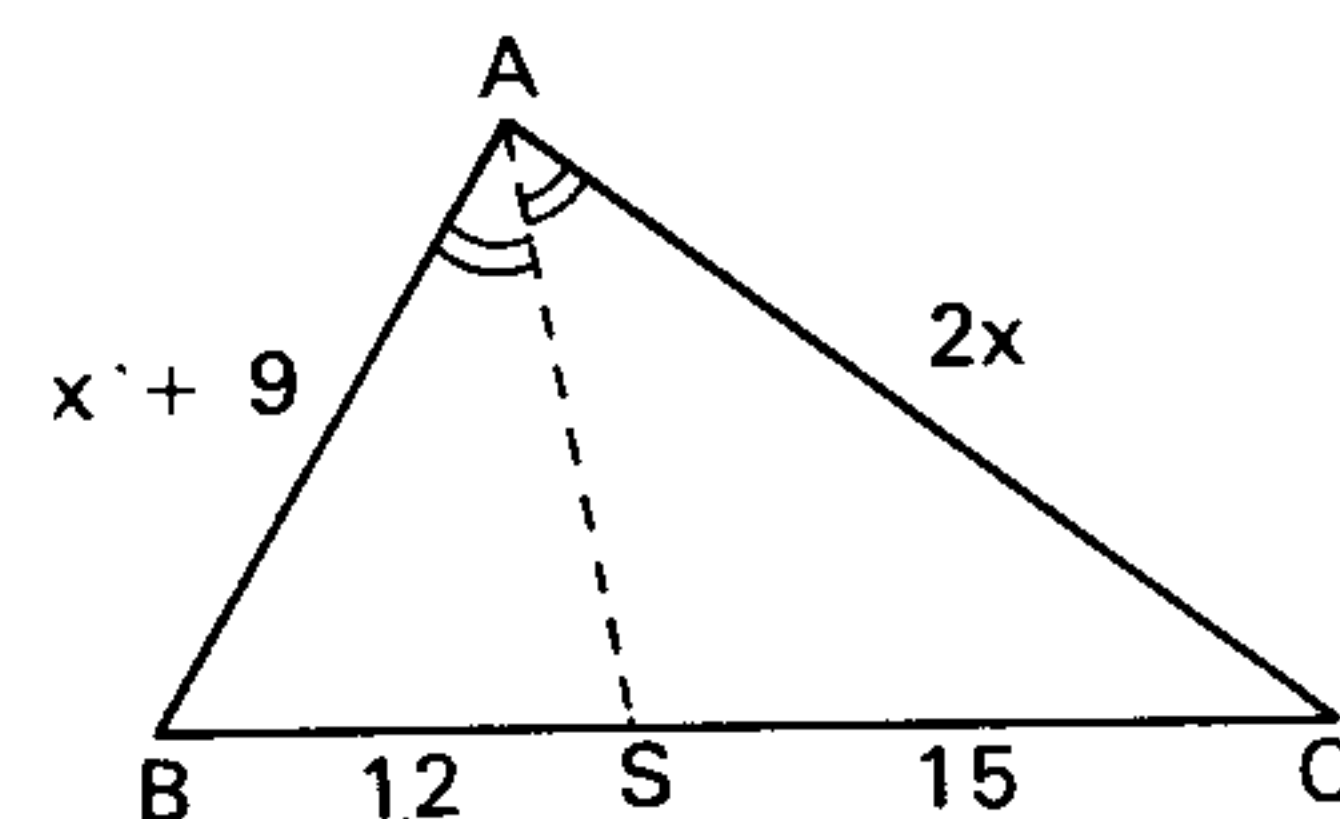
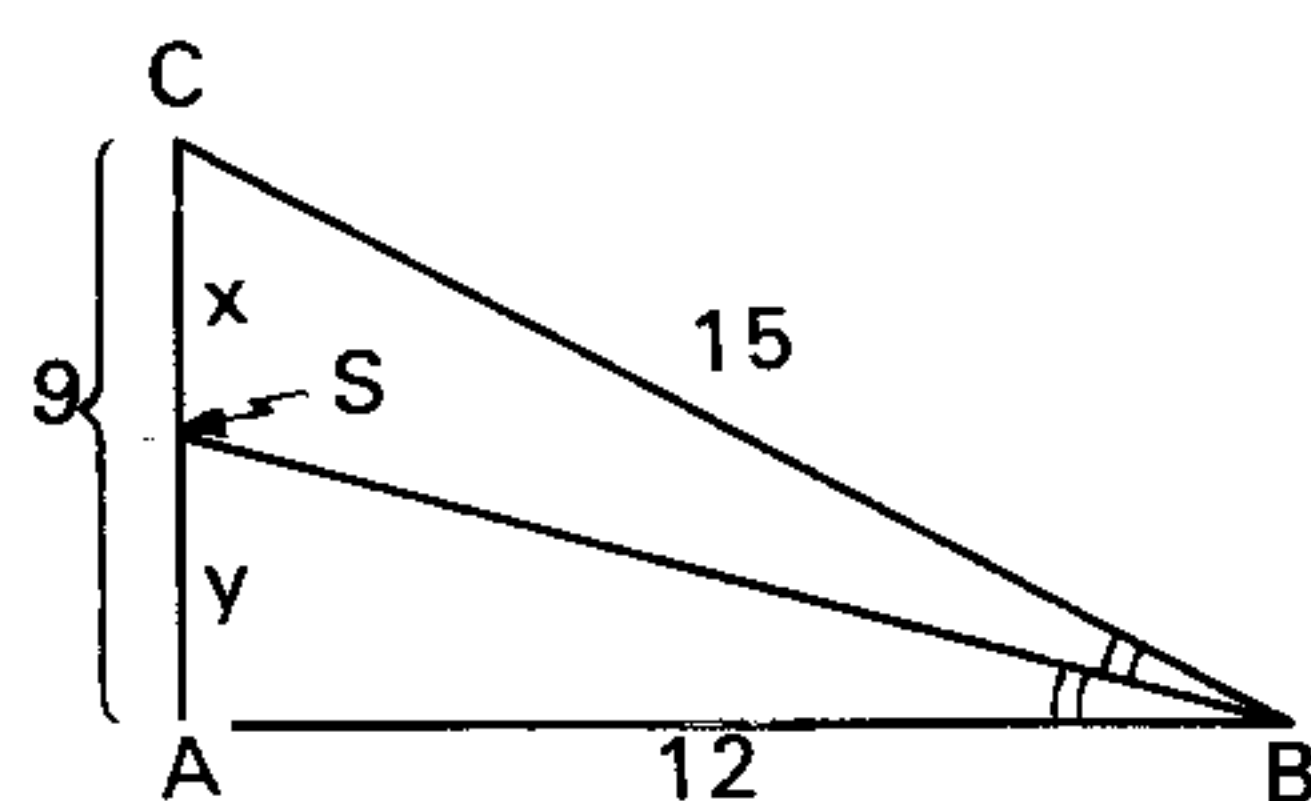
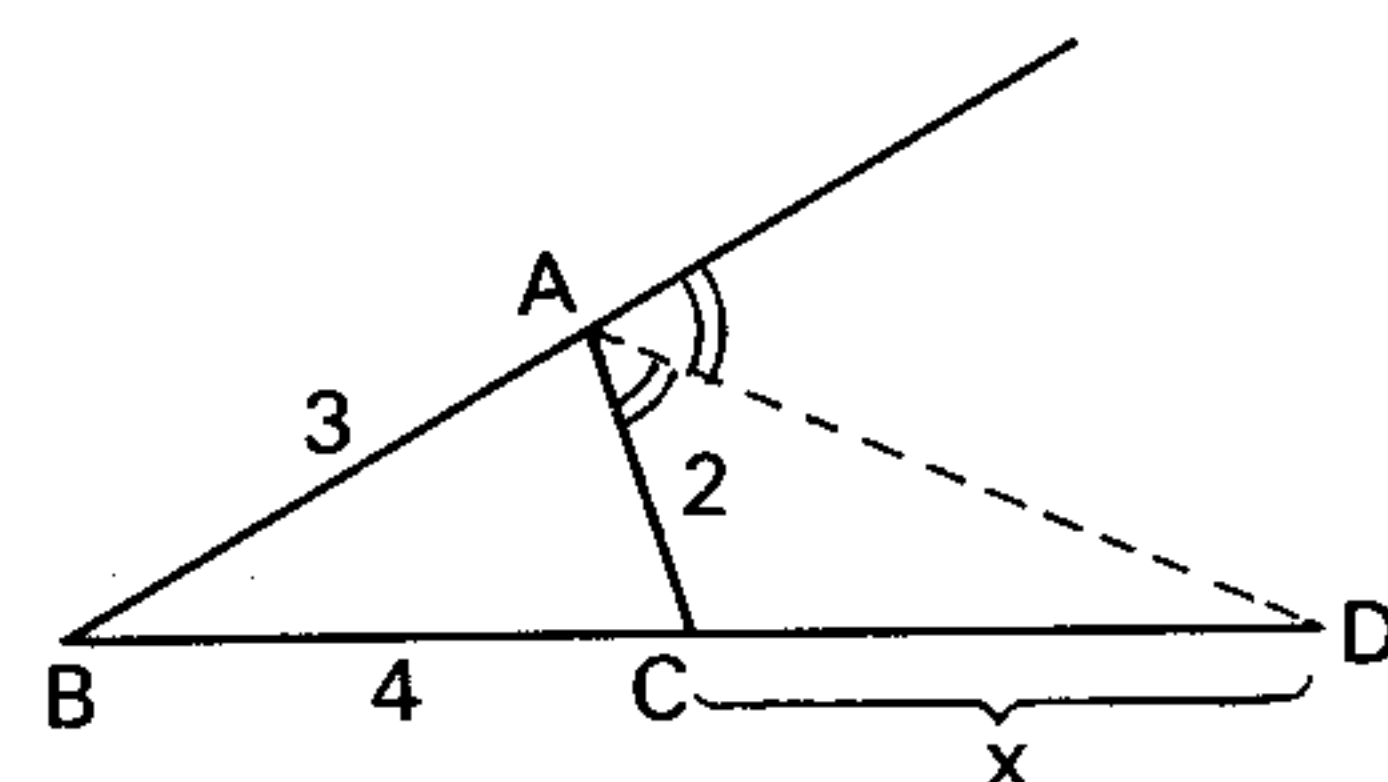
428. Se $\overline{AS}$ é bissetriz de $\hat{A}$, calcule x nos casos:

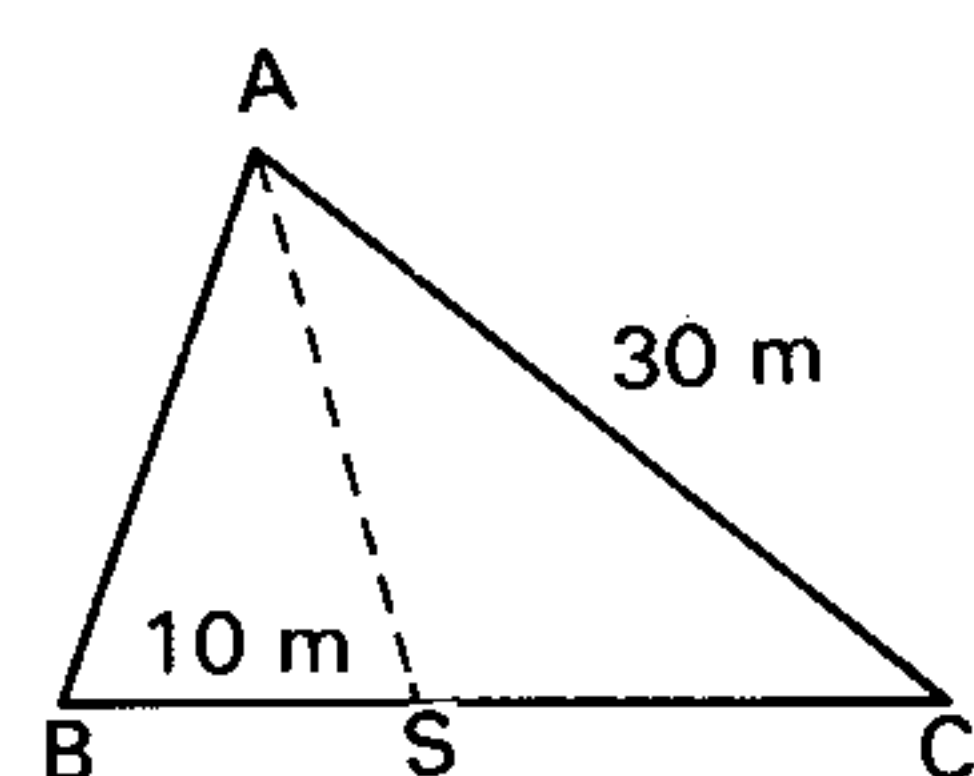
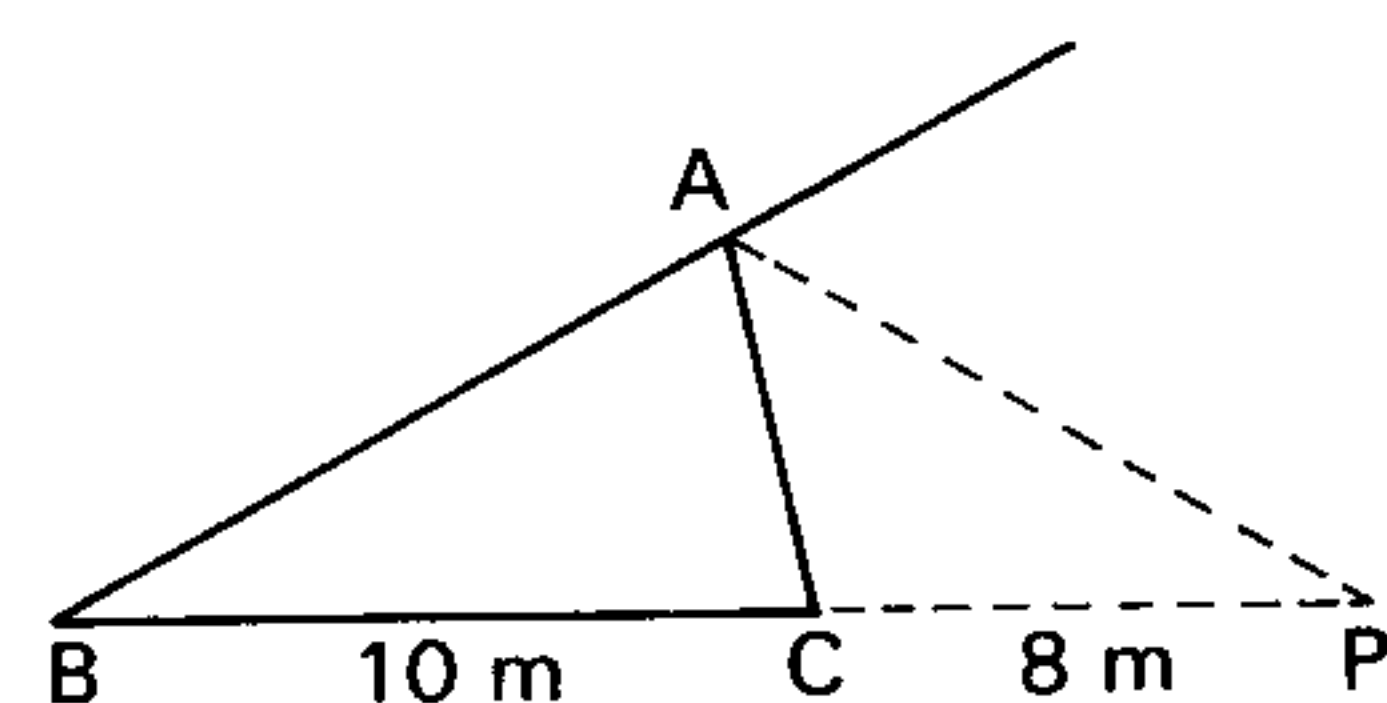
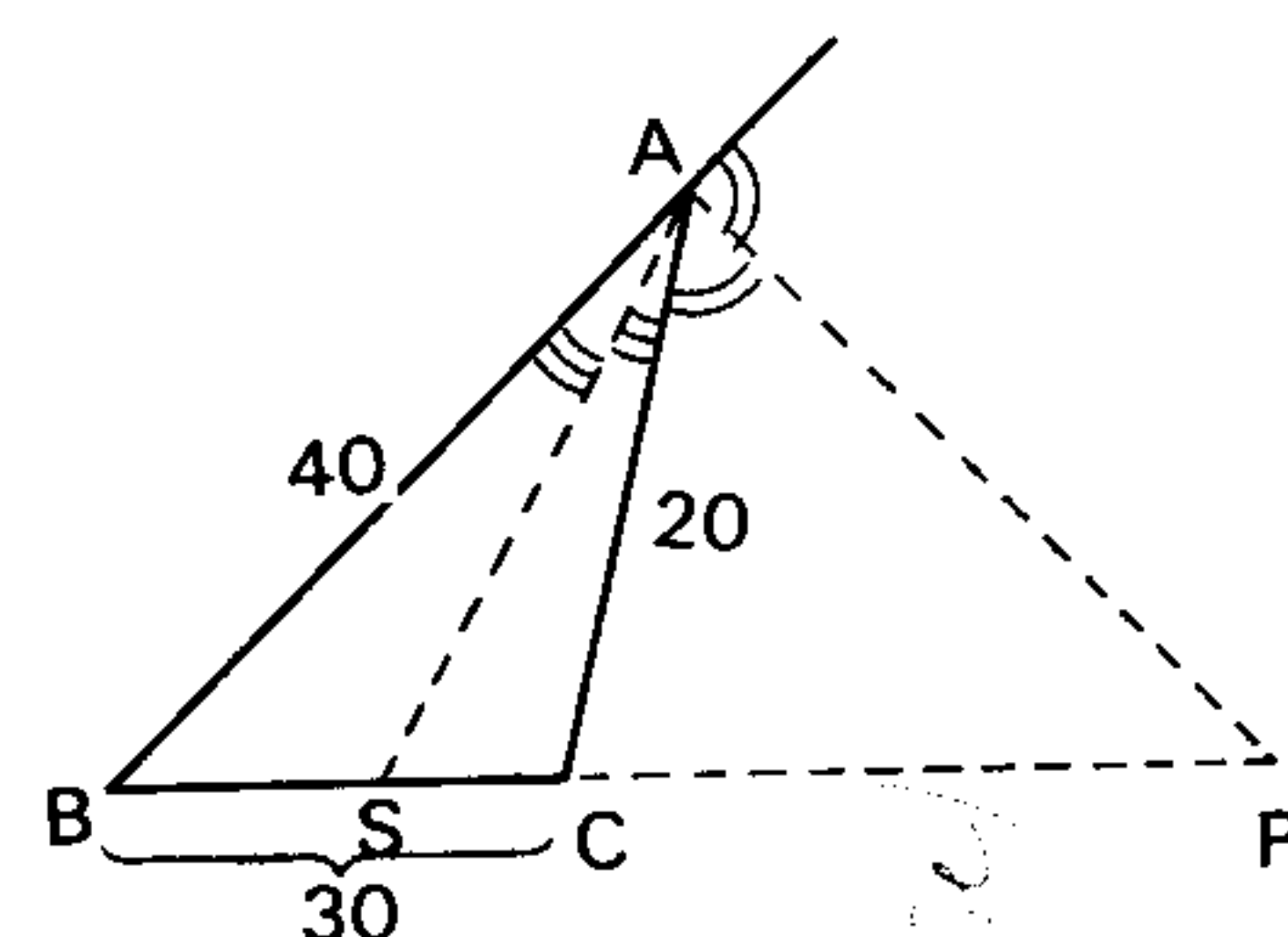
a)

b)

c)

429. Se $\overline{AP}$ é bissetriz do ângulo externo em A, determine x.

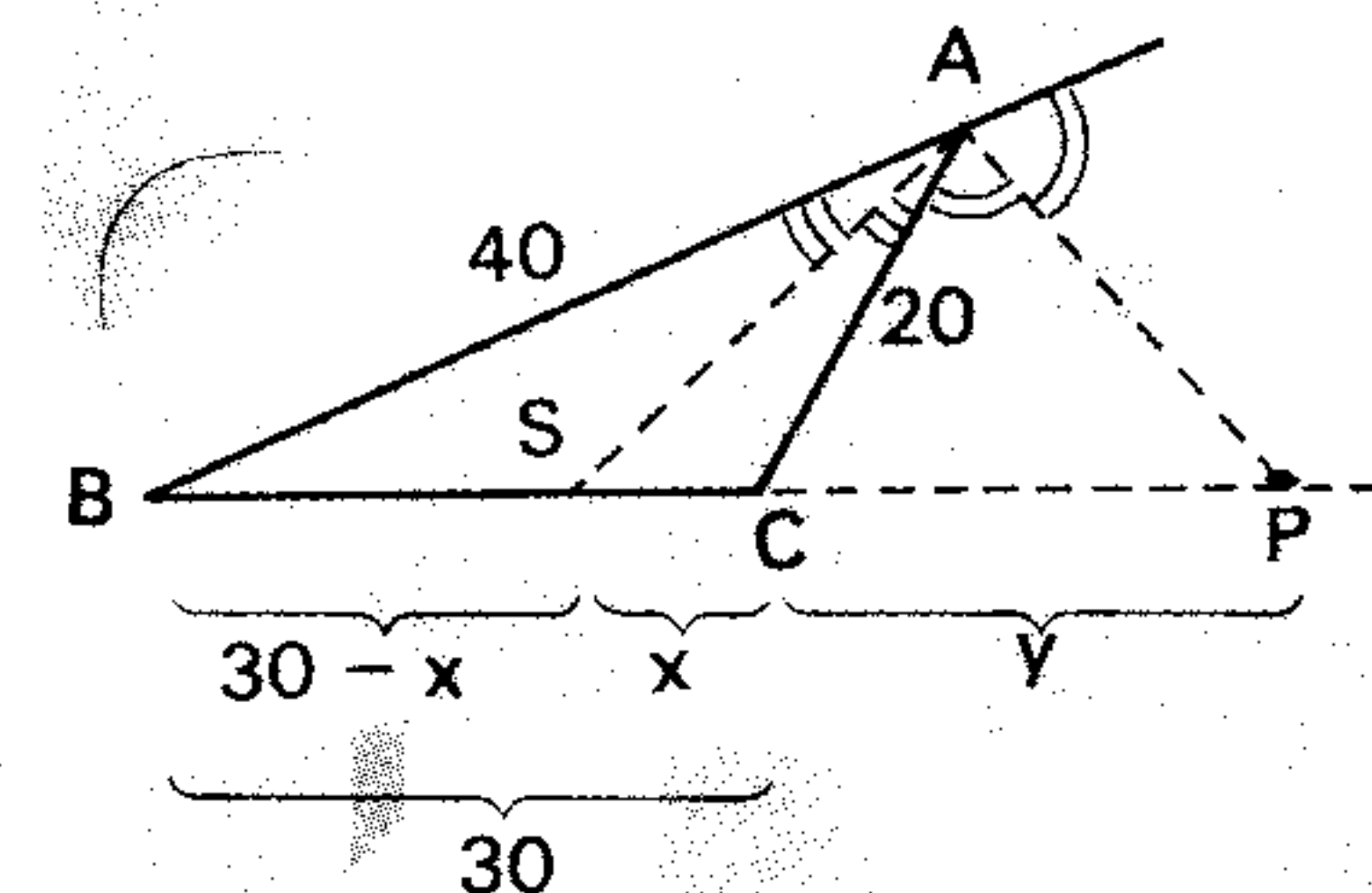
a)

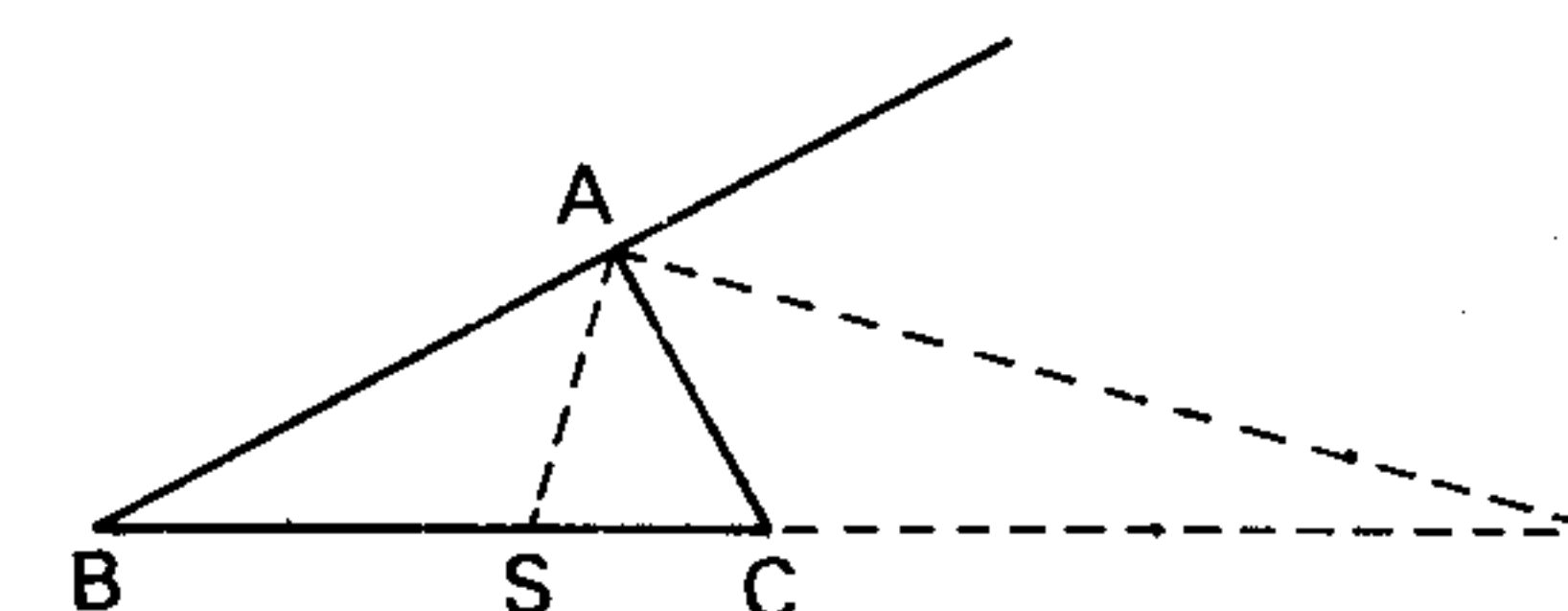
b)

430. Na figura, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$. Calcule o valor de x.

431. Na figura, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$. Calcule x.

432. Na figura, calcule os valores de x e y, respectivamente, sendo $\overline{BS}$ a bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$.

433. Na figura, $\overline{AD}$ é bissetriz externa do ângulo $\hat{A}$. Calcule x.

434. Determine a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC:

a) $\overline{AS}$ é bissetriz e o perímetro do ΔABC é *75 cm*

b) $\overline{AP}$ é bissetriz do ângulo externo em A e o perímetro do ΔABC é *23 m*

435. No triângulo ABC da figura ao lado, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ e $\overline{AP}$ é bissetriz externa. Calcule a medida do segmento $\overline{SP}$.

Solução

T. biss. int. $\Rightarrow \dfrac{x}{20} = \dfrac{30 - x}{40} \Rightarrow x = 10$

T. biss. ext. $\Rightarrow \dfrac{y}{20} = \dfrac{30 + y}{40} \Rightarrow y = 30$

$\Rightarrow SP = x + y \Rightarrow SP = 10 + 30 \Rightarrow SP = 40$

436. Os lados de um triângulo medem *5 cm, 6 cm* e *7 cm*. Em quanto é preciso prolongar o lado menor para que ele encontre a bissetriz do ângulo externo oposto?

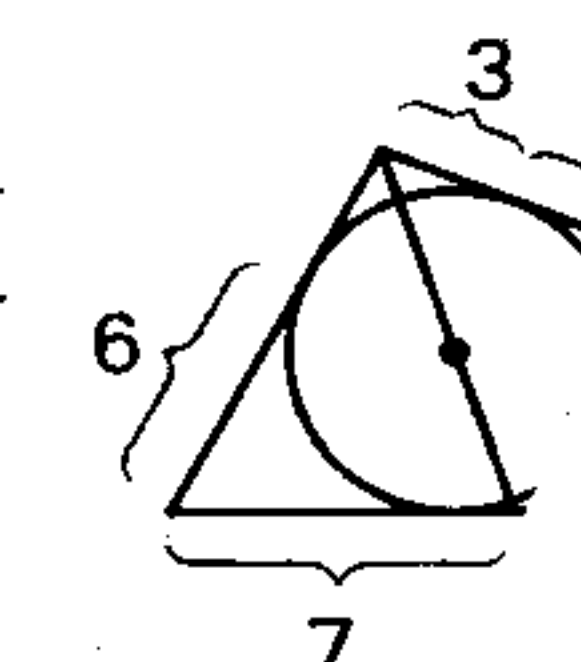
437. Sendo $\overline{AS}$ e $\overline{AP}$ bissetrizes dos ângulos interno e externo em A, determine o valor de $\overline{CP}$, dados $BS = 8\ m$ e $SC = 6\ m$.

438. A bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC divide o lado oposto em dois segmentos que medem *9 cm* e *16 cm*. Sabendo que $\overline{AB}$ mede *18 cm*, determine a medida de $\overline{AC}$.

439. O perímetro de um triângulo ABC é *100 m*. A bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ divide o lado oposto $\overline{BC}$ em dois segmentos de *16 m* e *24 m*. Determine os lados desse triângulo.

440. A bissetriz interna $\overline{AD}$ de um triângulo ABC divide o lado oposto em dois segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ de medidas *24 cm* e *30 cm*, respectivamente. Sendo $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente iguais a $2x + 6$ e $3x$, determine o valor de x e as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

441. A bissetriz externa $\overline{AS}$ de um triângulo ABC determina sobre o prolongamento do lado $\overline{BC}$ um segmento $\overline{CS}$ de medida y. Sendo os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, o triplo e o dobro do menor segmento determinado pela b[illegible]triz interna $\overline{AP}$ sobre o lado $\overline{BC}$ que mede *20 cm*, determine o valor de y.

442. Os lados de um triângulo medem *8 cm, 10 cm* e *12 cm*. Er[illegible] prolongar o menor lado para que ele encontre a bissetriz d[illegible] to a esse lado?

443. Considerando as medidas indicadas na figura e sabendo que o círculo está inscrito no triângulo, determine x.

444. Consideremos um triângulo ABC de *15 cm* de perímetro. A bissetriz externa do ângulo $\hat{A}$ desse triângulo encontra o prolongamento do lado $\overline{BC}$ em um ponto S. Sabendo que a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ determina sobre $\overline{BC}$ dois segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{PC}$ de medidas *3 cm* e *2 cm*, respectivamente, determine as medidas dos lados do triângulo e a medida do segmento $\overline{CS}$.

LEITURA

Legendre: por uma Geometria Rigorosa e Didática

Hygino H. Domingues

Na Grécia antiga *axioma* significava, ao que tudo indica, uma verdade geral comum a todos os campos de estudo; e *postulado*, uma verdade específica de um dado campo. (Modernamente, em Matemática, não se costuma fazer distinção entre esses conceitos.) Euclides, ao escrever seus *Elementos*, assumiu cinco postulados e cinco axiomas.

Postulados: (I) De qualquer ponto pode-se conduzir uma reta a qualquer ponto dado; (II) Toda reta limitada pode ser prolongada indefinidamente em linha reta; (III) Com qualquer centro e qualquer raio pode-se descrever um círculo; (IV) Todos os ângulos retos são iguais; (V) Se uma reta, cortando duas outras, forma ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois retos, então as duas retas, se prolongadas ao infinito, encontrar-se-ão na parte em que os ângulos são menores que dois retos.

Entre os *axiomas* figuram, por exemplo: "Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si" e "O todo é maior que a parte".

A partir dessa base lógica, mais algumas definições, os *Elementos* desfiam seus teoremas sem intercalar nenhum exercício ou aplicação prática, formando um texto que, pelos padrões modernos, dificilmente poderia ser classificado de didático. É bem provável que este aspecto não contasse ao tempo de Euclides. Mas, à medida que a geometria ganhasse espaço como valor cultural universal, obviamente esse quadro teria que mudar. E na França do século XVIII, no centro da efervescência intelectual que animava a Europa, vários textos foram publicados visando tornar mais palatável aos iniciantes a geometria de Euclides. Freqüentemente, porém, esses trabalhos sacrificavam as demonstrações, o rigor, numa banalização pouco construtiva. Uma notável exceção foi o *Elementos de Geometria* de Adrien Marie Legendre (1752-1833).

Legendre nasceu de uma família abastada de Toulouse, sul da França. Iniciou-se na matemática no Colégio Mazarin de Paris, onde estudou, sob a orientação do abade Joseph François Marie (1738-1801). E revelou tanto talento que já em 1775 era indicado para ocupar a cadeira de Matemática da Escola Militar de Paris. Mas em 1780 renunciou a essa cátedra para poder dedicar mais tempo à pesquisa. E dois anos depois ganhava um prêmio oferecido pela Academia de Berlim com trabalho sobre a trajetória de um projétil num meio resistente. Isso obviamente chamou a atenção da comunidade matemática francesa para seu nome, o que lhe abriu as portas da Academia de Ciências, em 1783. Em termos de pesquisa, Legendre deixou significativas contribuições em vários campos da matemática, com ênfase maior talvez no das funções elípticas e no da teoria dos números. Neste último deve-se a ele o primeiro enunciado completo e uma demonstração parcial da notável *lei da reciprocidade quadrática*. Aliás, seu livro *Ensaio sobre a teoria dos números* (uma edição em 1798 e outra em 1808) foi o primeiro tratado moderno a ser publicado sobre o assunto.

Adrien Marie Legendre (1752-1833).

A geometria certamente não estava entre as prioridades de Legendre. No entanto, seu *Elementos de Geometria*, um texto que concilia rigor e preocupação didática, numa reorganização bastante clara e agradável dos *Elementos* de Euclides, com muitas demonstrações novas, mais simples, foi um grande êxito editorial. Só na França, antes da morte do autor, saíram vinte edições, compreendendo cerca de 100 mil exemplares. Em 1809 foi feita no Rio de Janeiro uma tradução para o português: a obra de Legendre seria um dos livros adotados no "Curso Mathemático", da Academia Real Militar, criada no ano seguinte naquela cidade.

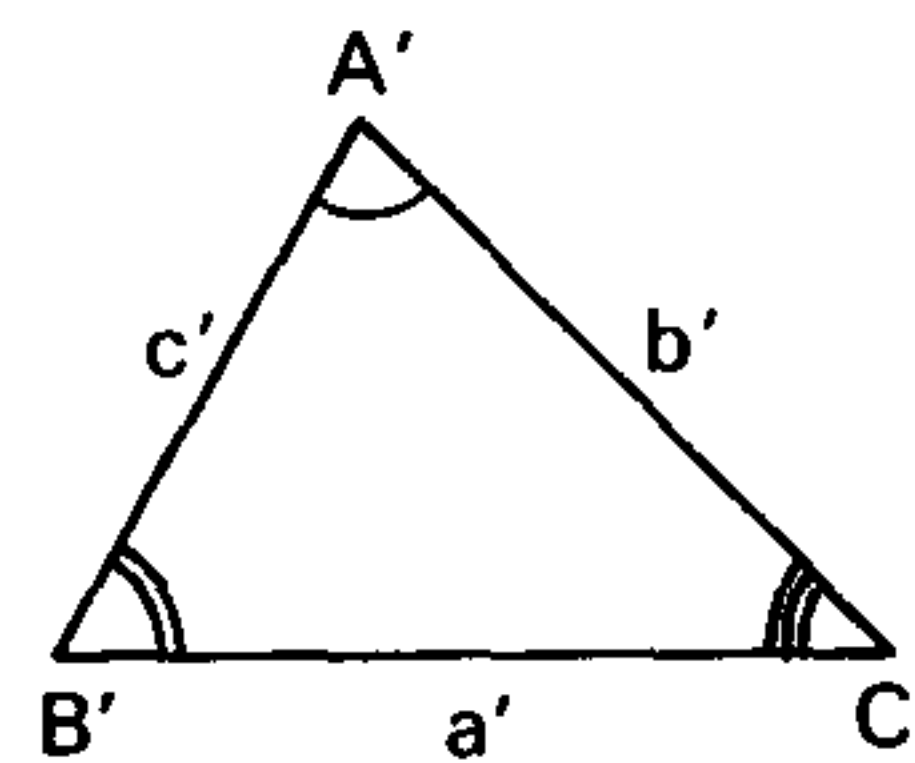
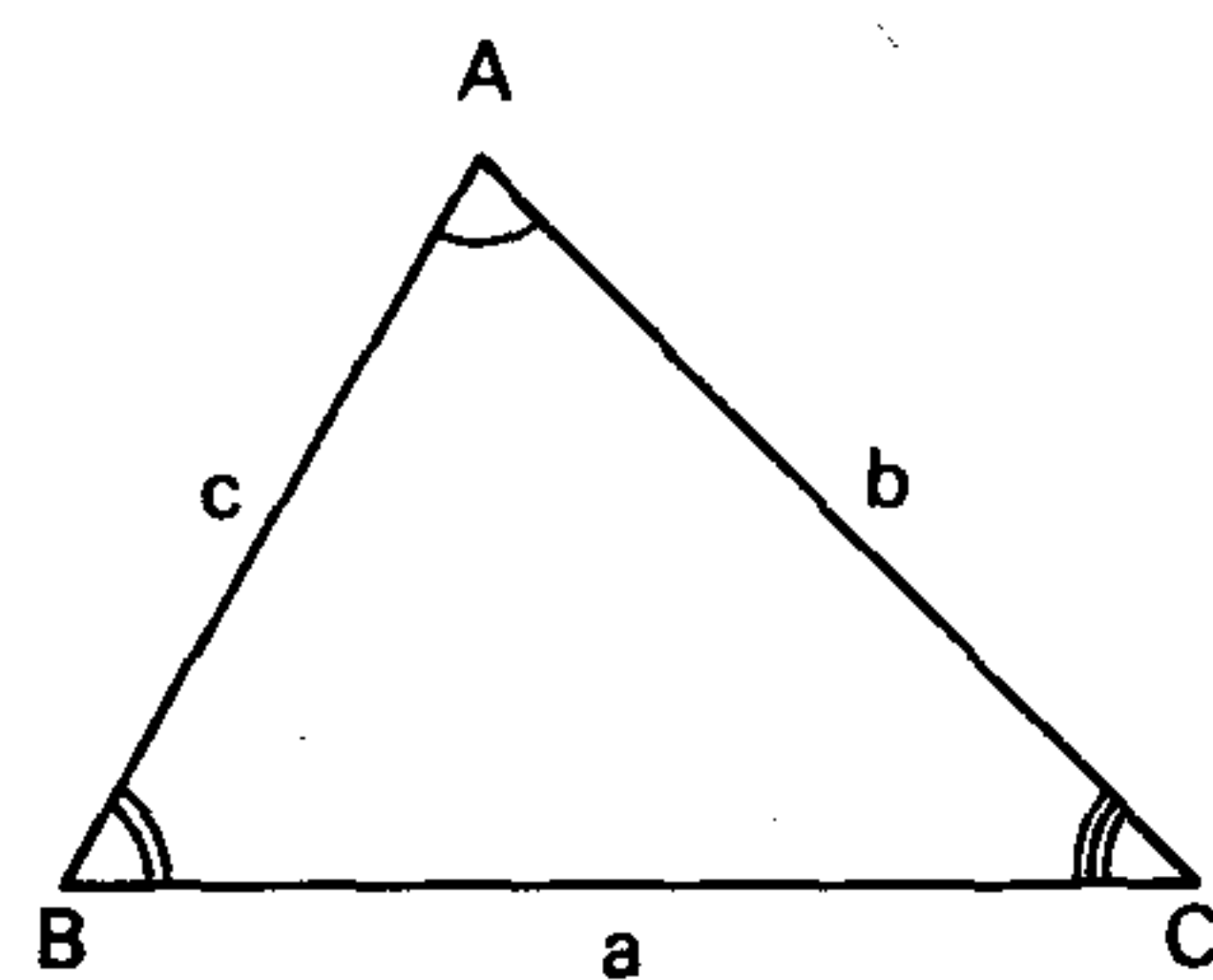
Durante cerca de quarenta anos Legendre lutou para provar o postulado V de Euclides a partir dos outros, uma tarefa impossível, como se sabe hoje. Falhou sempre ao admitir, inadvertidamente, hipóteses equivalentes ao próprio postulado. Mas mesmo nessa empreitada inglória não faltou competência e engenhosidade ao seu trabalho.

CAPÍTULO XIII

Semelhança de Triângulos e Potência de Ponto

I. Semelhança de triângulos

179. Definição

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos *ordenadamente congruentes* e os lados *homólogos* proporcionais.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \iff \left(\begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{matrix} \quad \text{e} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \right)$$

$\sim$: semelhante

Dois lados homólogos (*homo* = mesmo, *logos* = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

180. Razão de semelhança

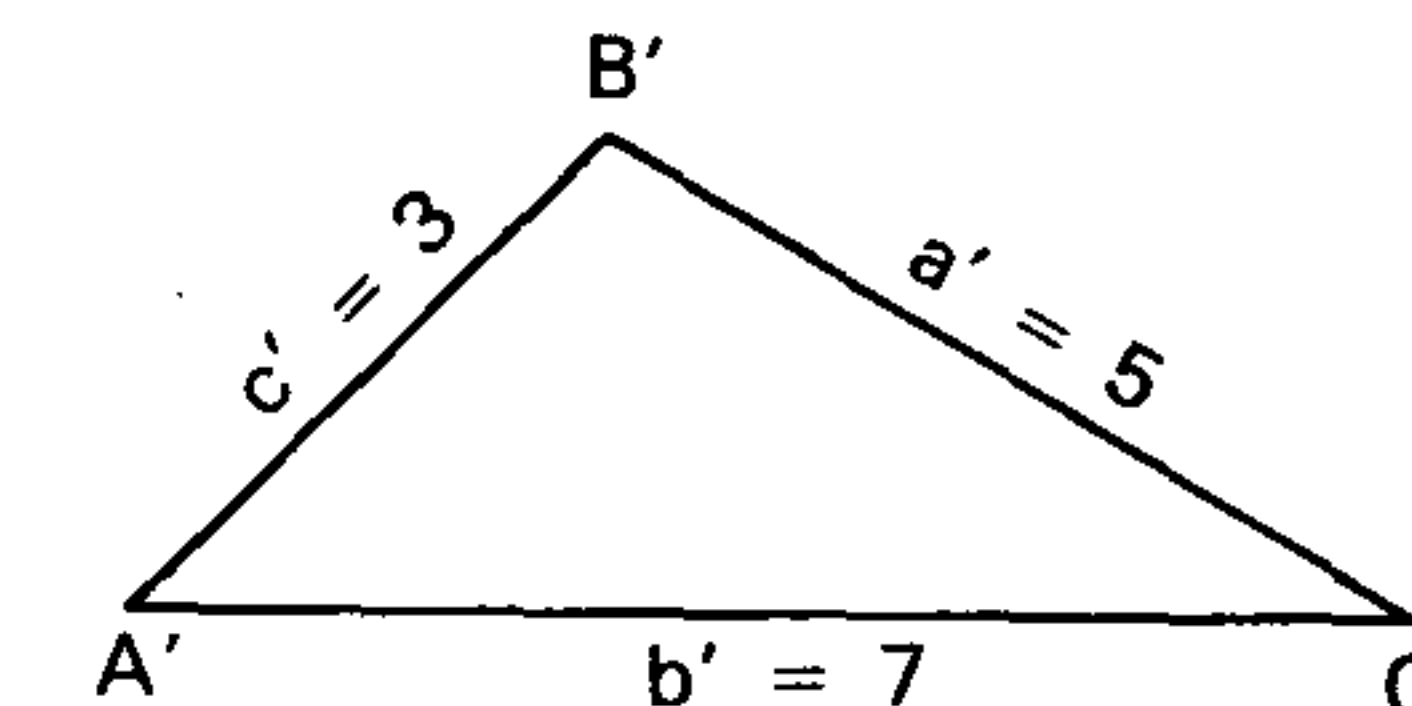
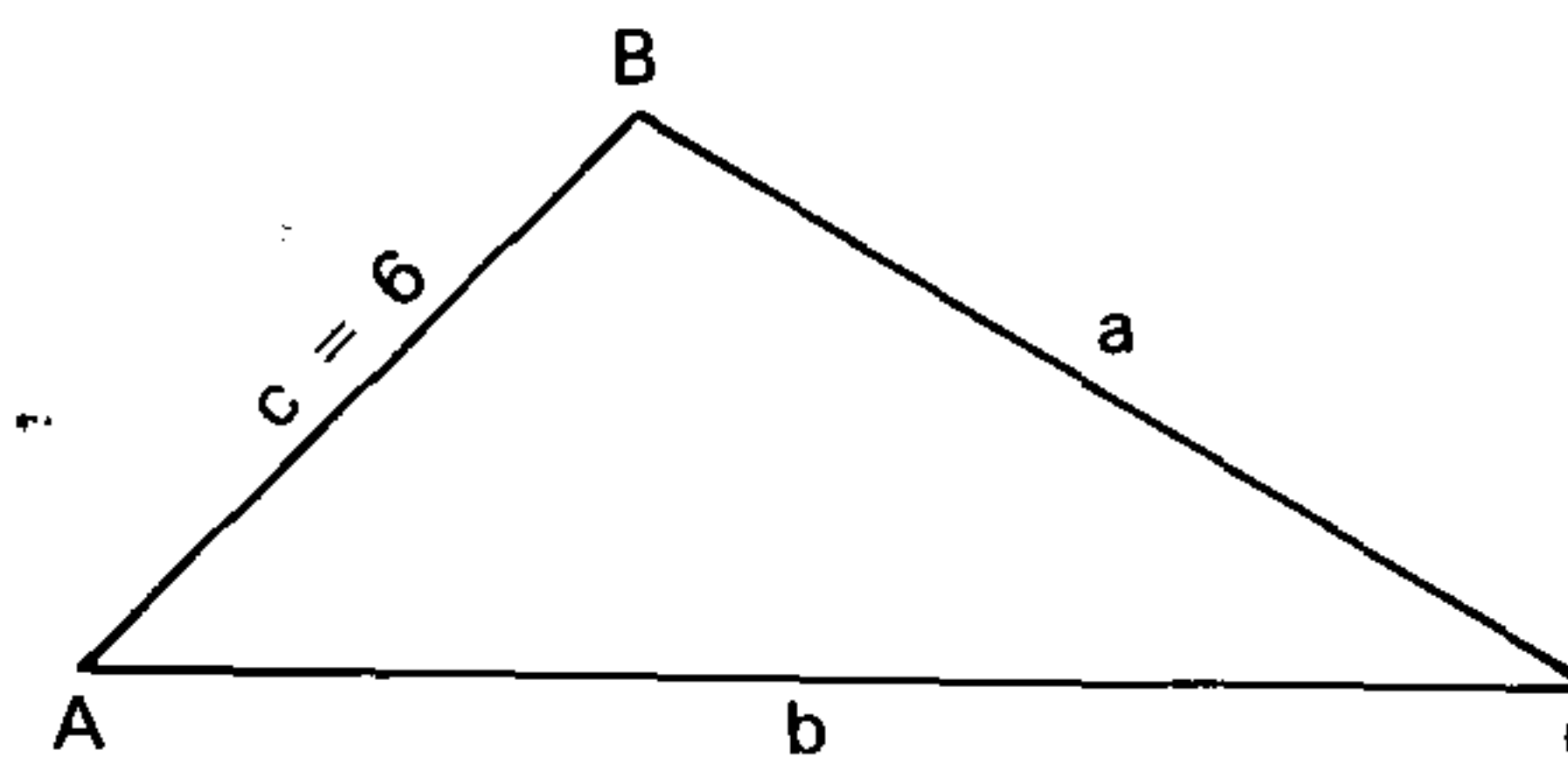
Sendo k a razão entre os lados homólogos,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

k é chamado razão de semelhança dos triângulos.

Se $k = 1$, os triângulos são congruentes.

181. Exemplo

Sendo dado que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, que os lados do segundo têm medidas $A'B' = 3\ cm$, $A'C' = 7\ cm$ e $B'C' = 5\ cm$ e que a medida do lado $\overline{AB}$ do primeiro é $6\ cm$, vamos obter a razão de semelhança dos triângulos e os outros dois lados do primeiro triângulo.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \implies \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \implies \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{6}{3} = 2$$

A razão de semelhança é 2.

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = 2 \implies \begin{cases} \frac{a}{5} = 2 \implies a = 10 \\ \frac{b}{7} = 2 \implies b = 14 \end{cases}$$

Os outros dois lados do primeiro triângulo medem $BC = 10\ cm$ e $AC = 14\ cm$.

182. *Propriedades*

Da definição de triângulos semelhantes decorrem as propriedades:

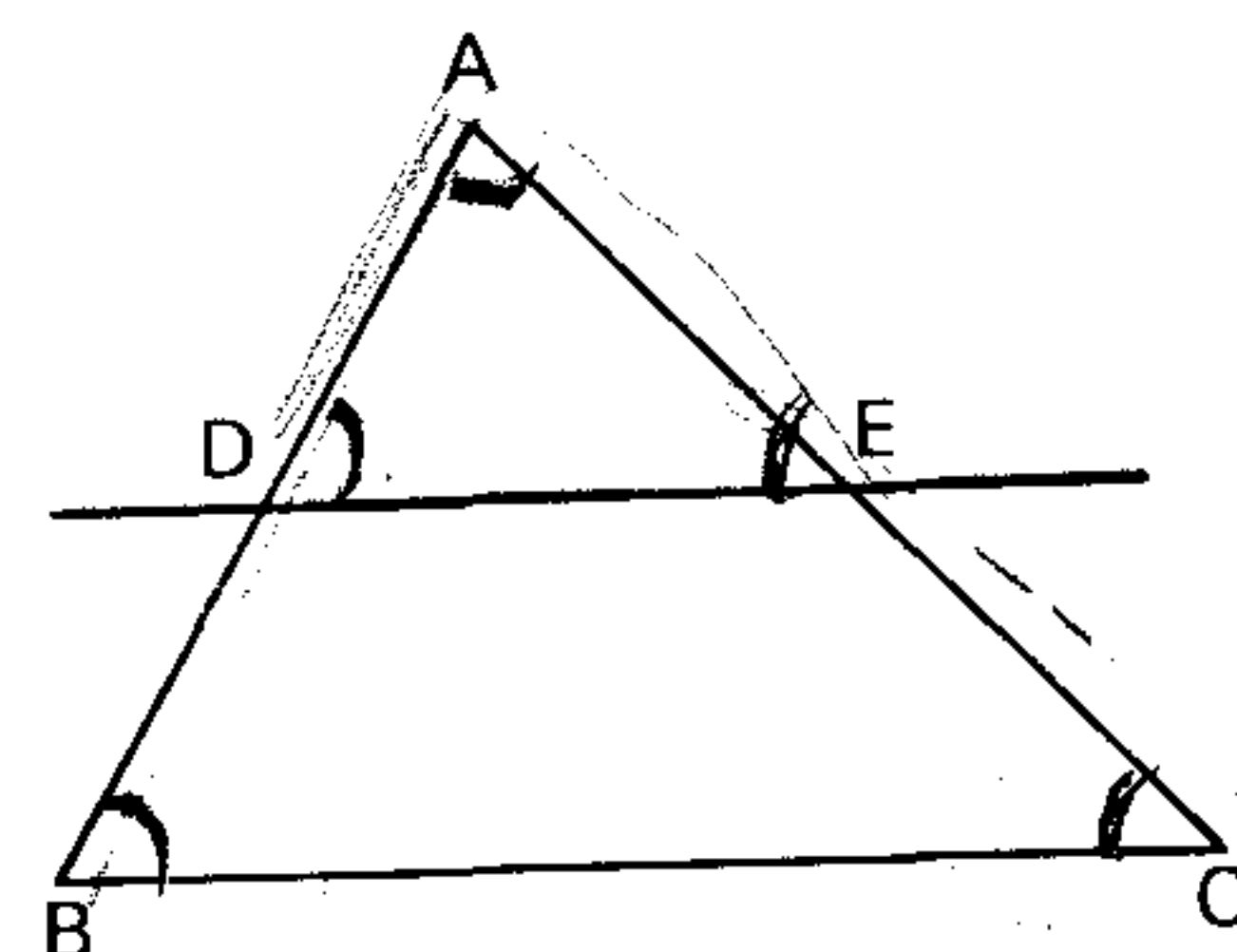
a) Reflexiva: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$
b) Simétrica: $\Delta ABC \sim \Delta RST \iff \Delta RST \sim \Delta ABC$
c) Transitiva: $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \sim \Delta RST \\ \Delta RST \sim \Delta XYZ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ$

183. *Teorema fundamental*

> Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Hipótese	*Tese*
$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ $\Rightarrow$	$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

Demonstração

Para provarmos a semelhança entre ΔADE e ΔABC, precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais:

1º) Ângulos congruentes

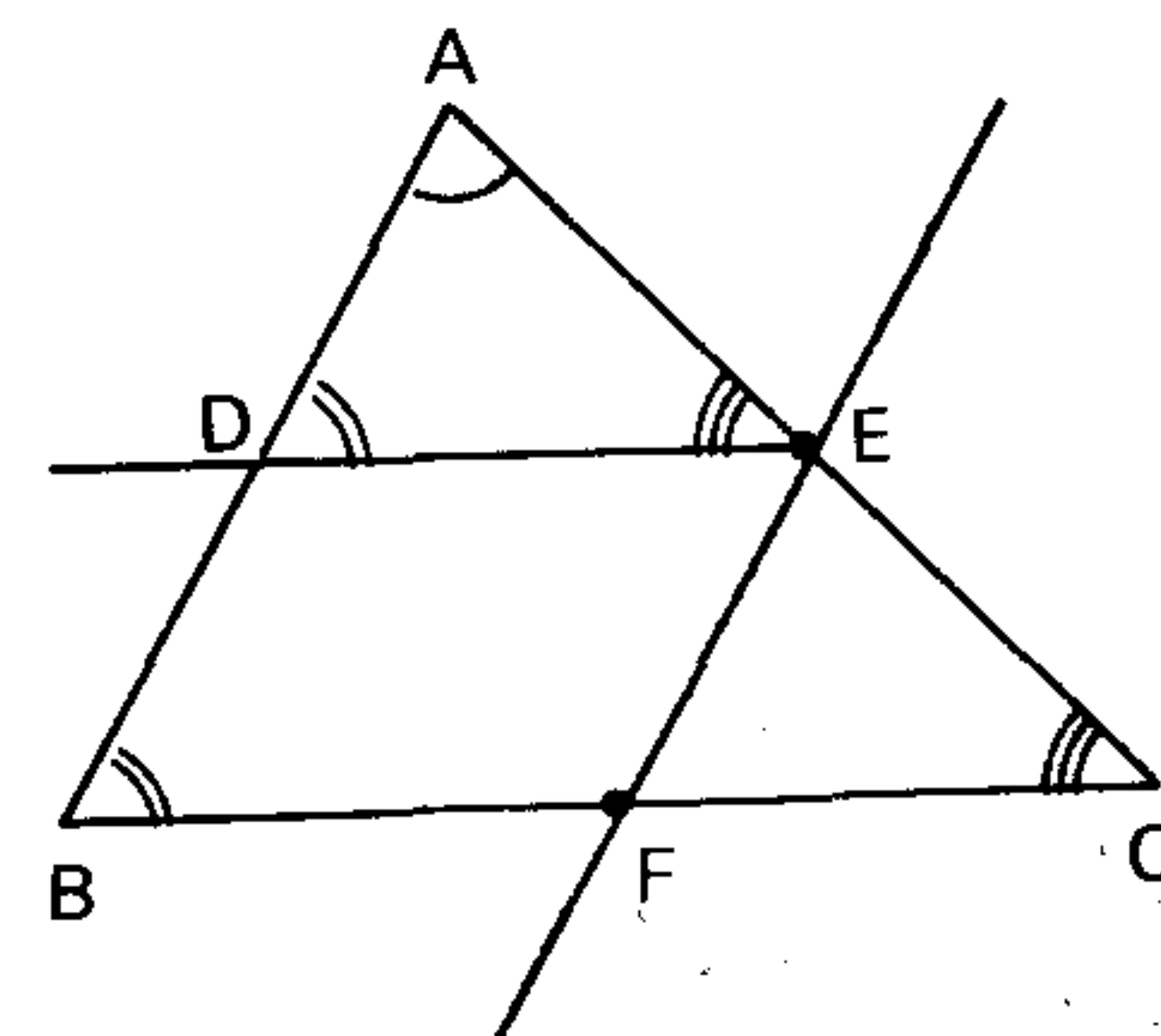
$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow (\hat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C})$ (ângulos correspondentes)

então, temos: $\hat{D} \equiv \hat{B}$, $\hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ comum (1)

2º) Lados proporcionais

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

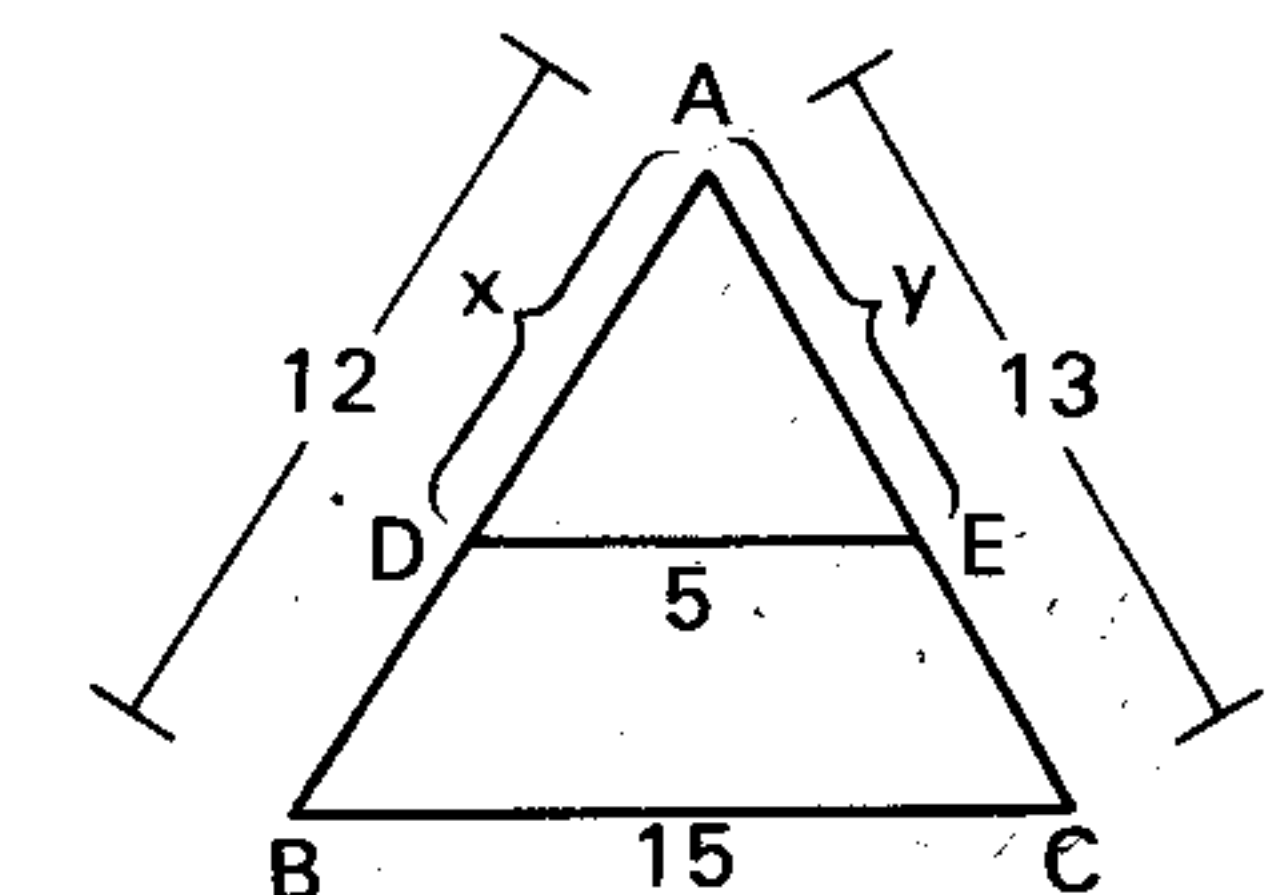
Por E construímos $\overleftrightarrow{EF}$ paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, com F em $\overline{BC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Paralelogramo } BDEF \Rightarrow \overline{DE} \equiv \overline{BF} \\ \text{Teorema de Tales} \Rightarrow \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

Logo, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ (2)

3º) Conclusão

(1) e (2) $\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$.

184. *Exemplo*

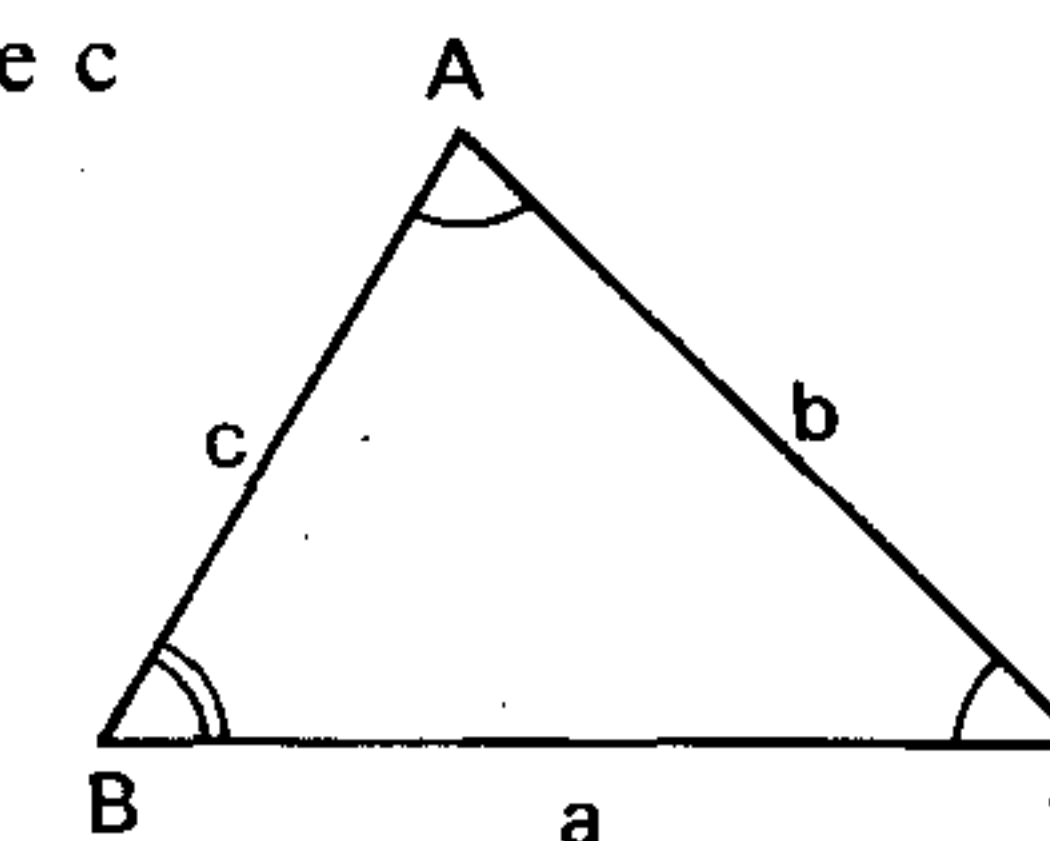
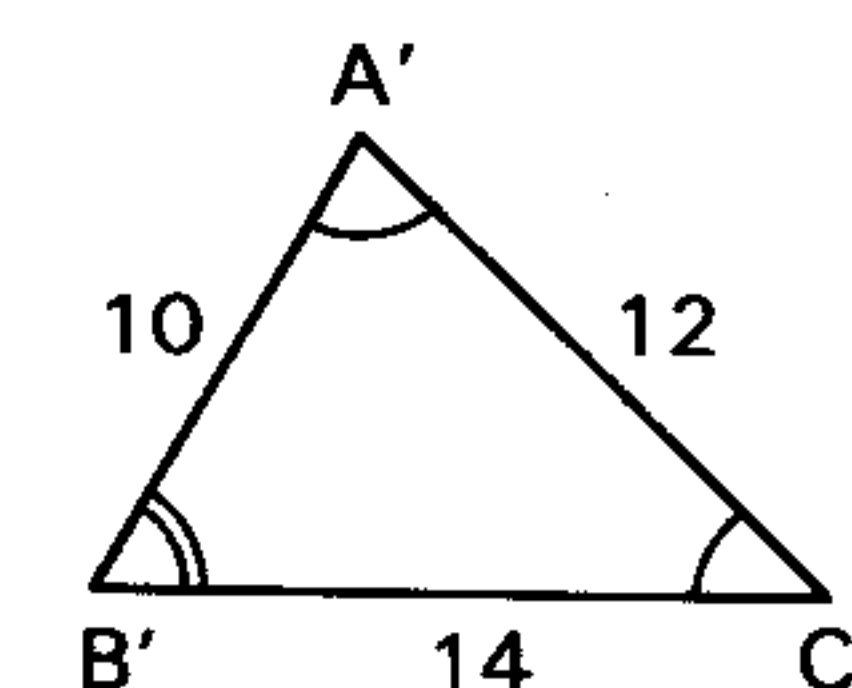
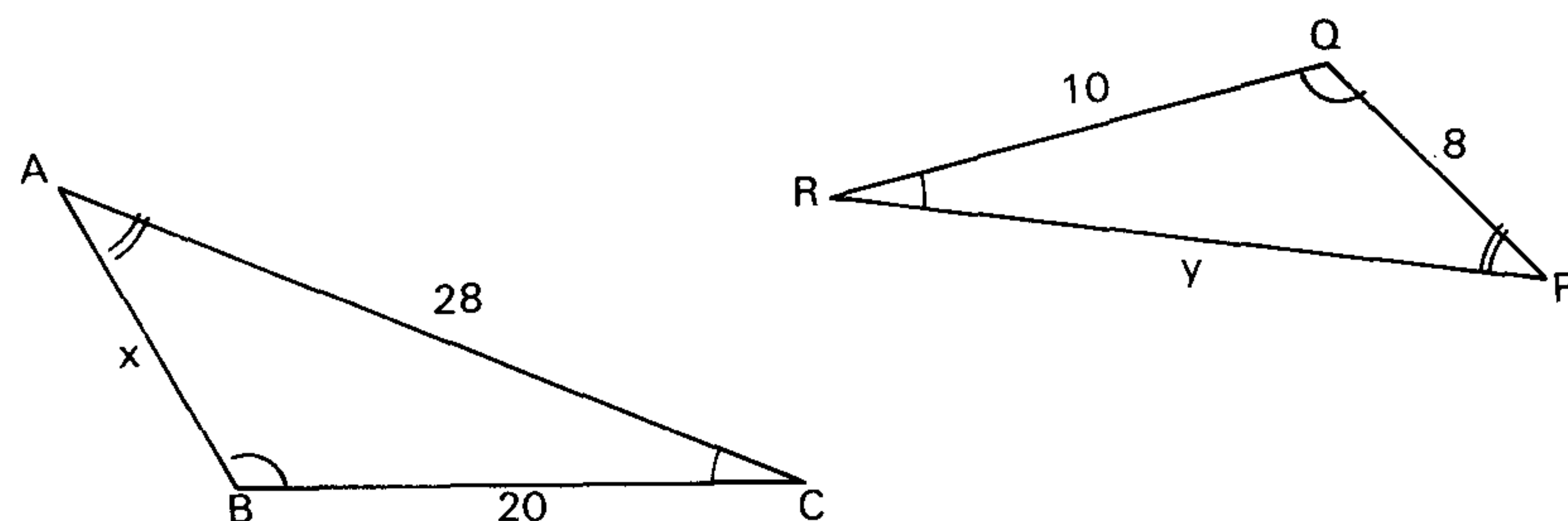
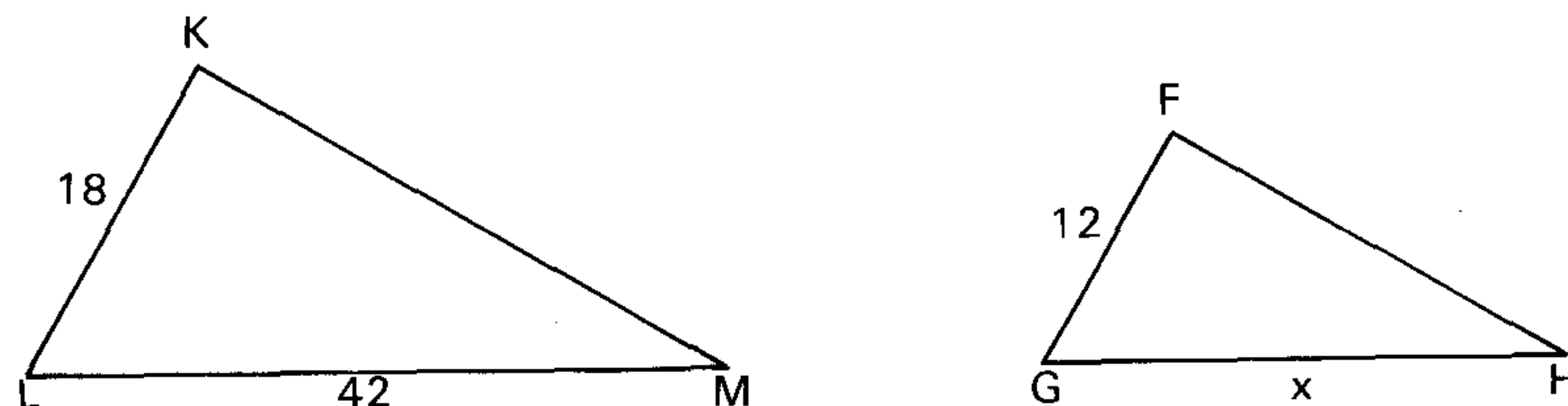
Um triângulo ABC tem os lados $AB = 12cm$, $AC = 13cm$ e $BC = 15cm$. A reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo determina um triângulo ADE, em que $DE = 5$ *cm*. Vamos calcular $AD = x$ e $AE = y$.

Basta aplicar o teorema fundamental:

$$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{13} = \frac{5}{15} \Rightarrow \left(x = 4 \text{ e } y = \frac{13}{3}\right)$$

Logo, $AD = 4$ *cm* e $AE = \dfrac{13}{3}$ *cm*.

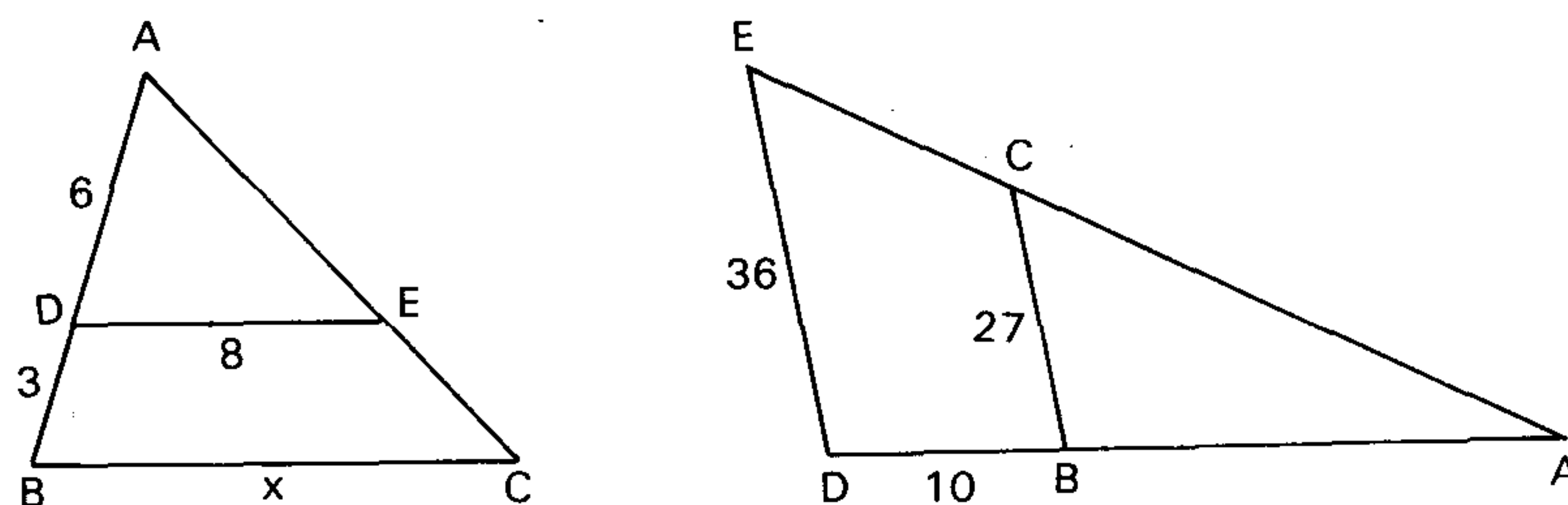
EXERCÍCIOS

445. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são semelhantes ($\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$). Se a razão de semelhança do 1º para o 2º é $\frac{3}{2}$, determine:

a) a, b e c

b) a razão entre os seus perímetros

446. Os triângulos ABC e PQR são semelhantes. Determine x e y.

447. Se o ΔKLM é semelhante ao ΔFGH, determine x.

448. Os três lados de um triângulo ABC medem *8 cm*, *18 cm* e *16 cm*. Determine os lados de um triângulo $A'B'C'$ semelhante a ABC, sabendo que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é igual a *3*.

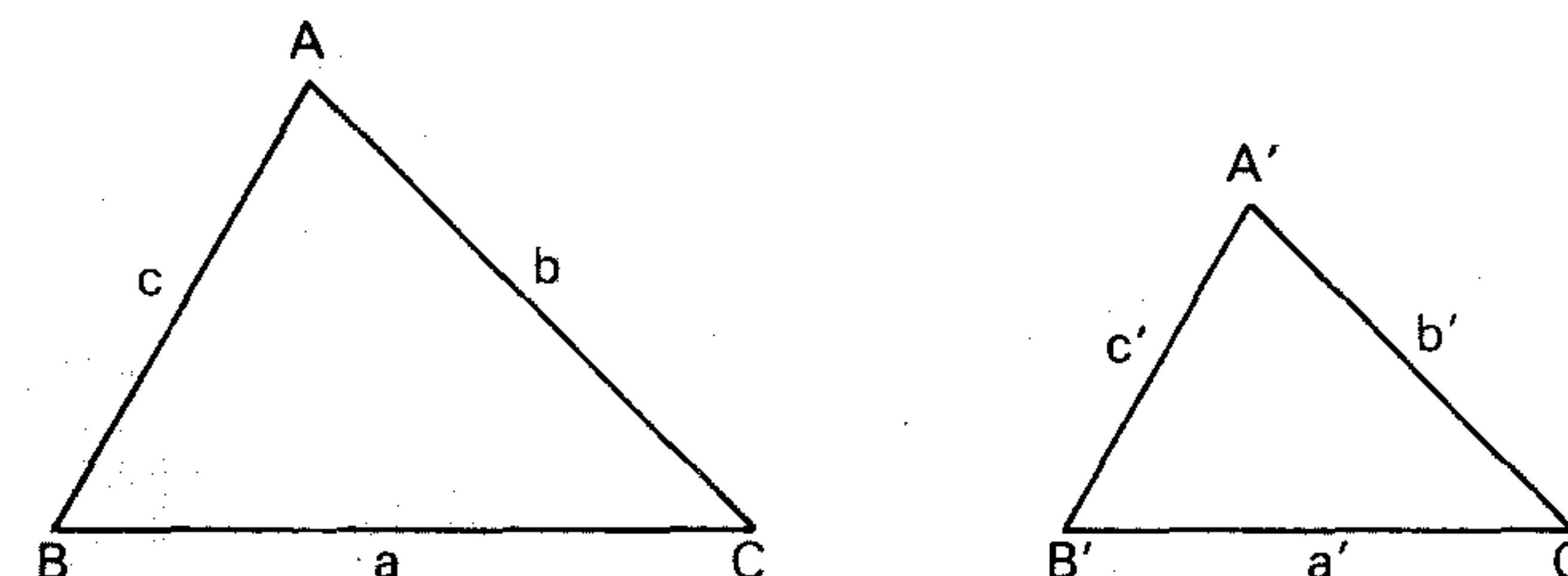
449. Se $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, determine x nos casos:

a)

b) $x = AD$

450. De um ΔABC sabemos que $AB = 20\ m$, $BC = 30\ m$ e $AC = 25\ m$. Se D está em $\overline{AB}$, E em $\overline{AC}$, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e $DE = 18\ m$, determine $x = DB$ e $y = EC$.

451. Mostre que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é k, então a razão entre seus perímetros é também k.

Solução

Dados os triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$ e sendo k a razão de semelhança, temos:

$2p = a + b + c$ $\qquad$ $2p' = a' + b' + c'$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \Longrightarrow \begin{cases} a = ka' \\ b = kb' \\ c = kc' \end{cases}$$

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = \frac{ka' + kb' + kc'}{a' + b' + c'} = \frac{k(a' + b' + c')}{a' + b' + c'} = k$$

452. Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Sabendo que o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC mede *20 cm* e que o seu homólogo $\overline{A'B'}$ do triângulo $A'B'C'$ mede *40 cm*, determine o perímetro do triângulo ABC, sabendo que o perímetro do triângulo $A'B'C'$ é *200 cm*.

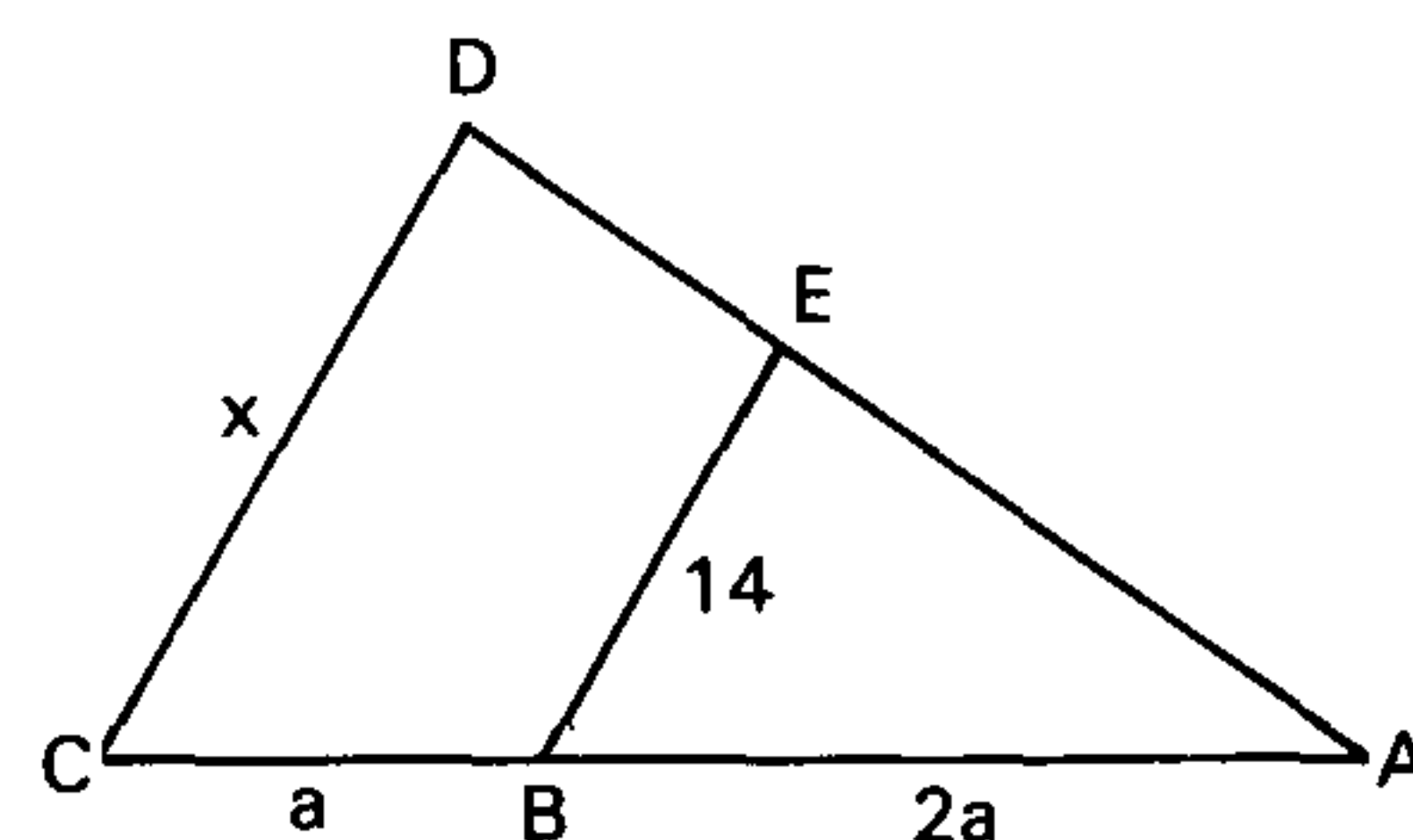
453. O perímetro de um triângulo é *60 m* e um dos lados tem *25 m*. Qual o perímetro do triângulo semelhante cujo lado homólogo ao lado dado mede *15 m*?

454. Os lados de um triângulo medem *8,4 cm*, *15,6 cm* e *18 cm*. Esse triângulo é semelhante a um triângulo cujo perímetro mede *35 cm*. Calcule o maior lado do segundo triângulo.

455. Num triângulo ABC os lados medem $AB = 4\ cm$, $BC = 5\ cm$ e $AC = 6\ cm$. Calcule os lados de um triângulo semelhante a ABC, cujo perímetro mede *20 cm*.

456. Um triângulo cujos lados medem *12 m*, *18 m* e *20 m* é semelhante a outro cujo perímetro mede *30 m*. Calcule a medida do menor dos lados do triângulo menor.

457. Na figura, $AB = 2(BC)$, e $BE = 14$. Calcule CD, sabendo que $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

AB = 2a, BC = a
BE = 14 e CD = x

458. As bases de um trapézio medem *12 m* e *18 m* e os lados oblíquos às bases medem *5 m* e *7 m*. Determine os lados do menor triângulo que obtemos ao prolongar os lados oblíquos às bases.

II. Casos ou critérios de semelhança

185. 1º caso

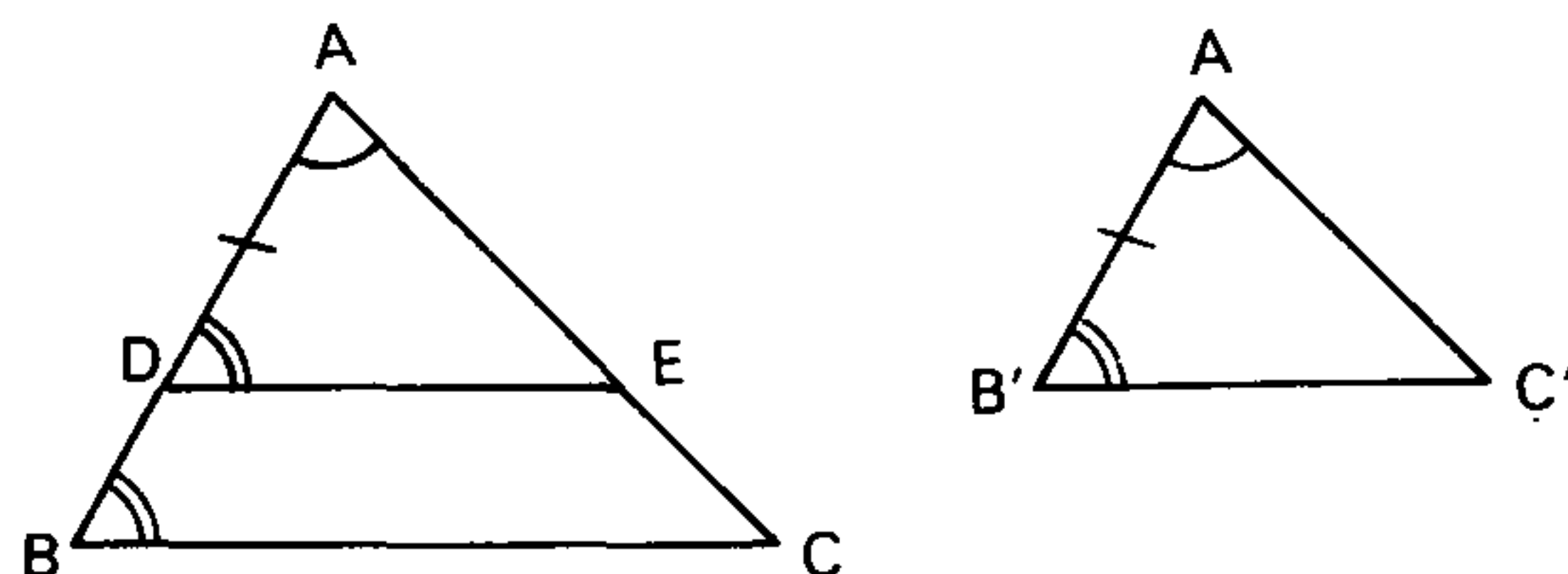
"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

Hipótese — *Tese*

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC,\ \Delta A'B'C' \\ \hat{A} \equiv \hat{A},\ \hat{B} \equiv \hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração

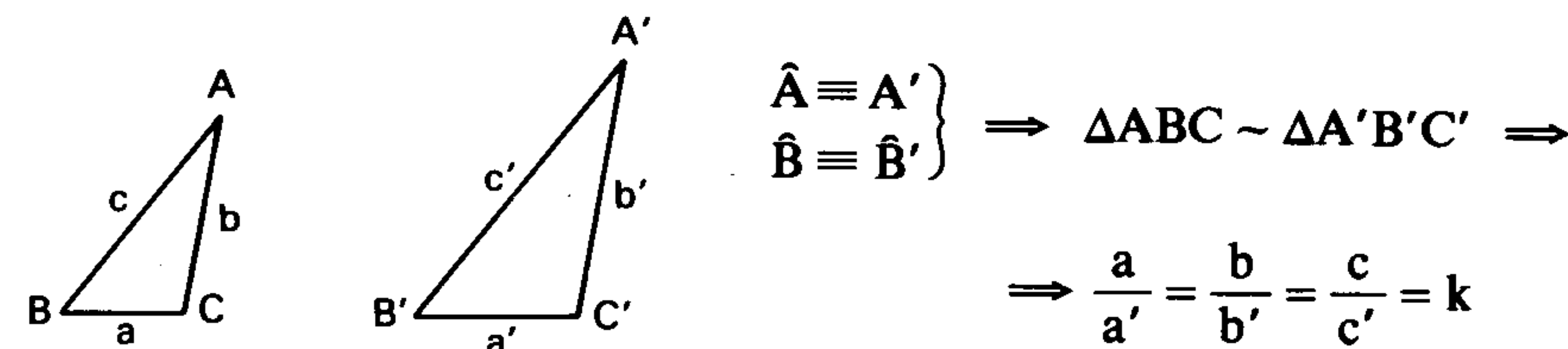
Vamos supor que os triângulos não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e o triângulo ADE com $\hat{D} \equiv \hat{B}'$ e E no lado $\overline{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}(\hat{A}\equiv\hat{A}',\ \overline{AD}\equiv\overline{A'B'},\ \hat{D}\equiv\hat{B}') \overset{ALA}{\Longrightarrow} \Delta ADE \equiv \Delta A'B'C' \\ \left.\begin{array}{l}\hat{B}\equiv\hat{B}' \\ \hat{B}'\equiv\hat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}\equiv\hat{D} \Rightarrow \overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

186. Esquema e exemplo de aplicação do 1º caso

Esquema

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow$$

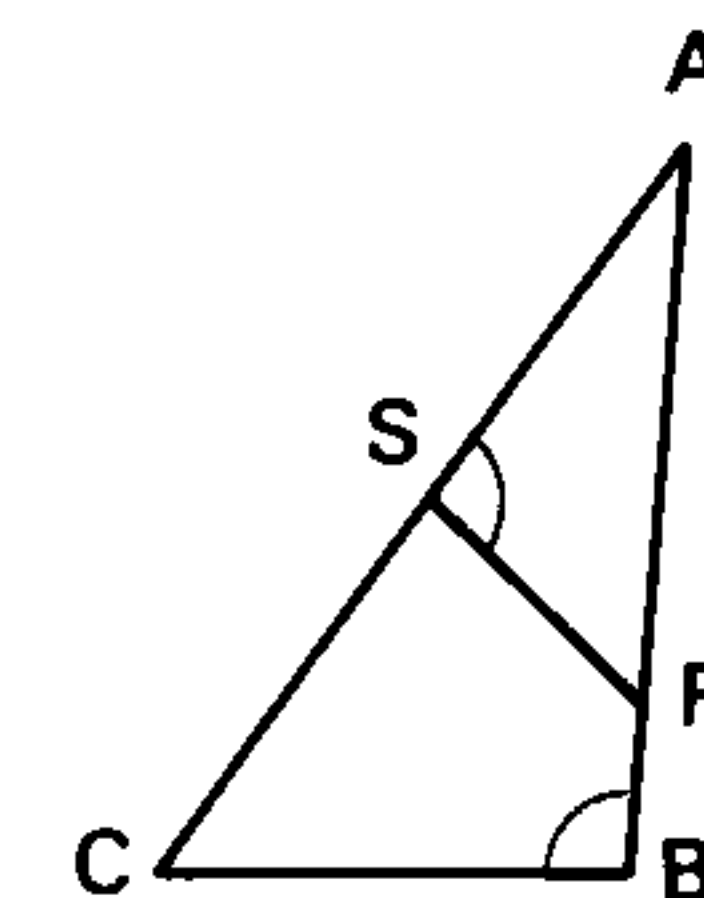
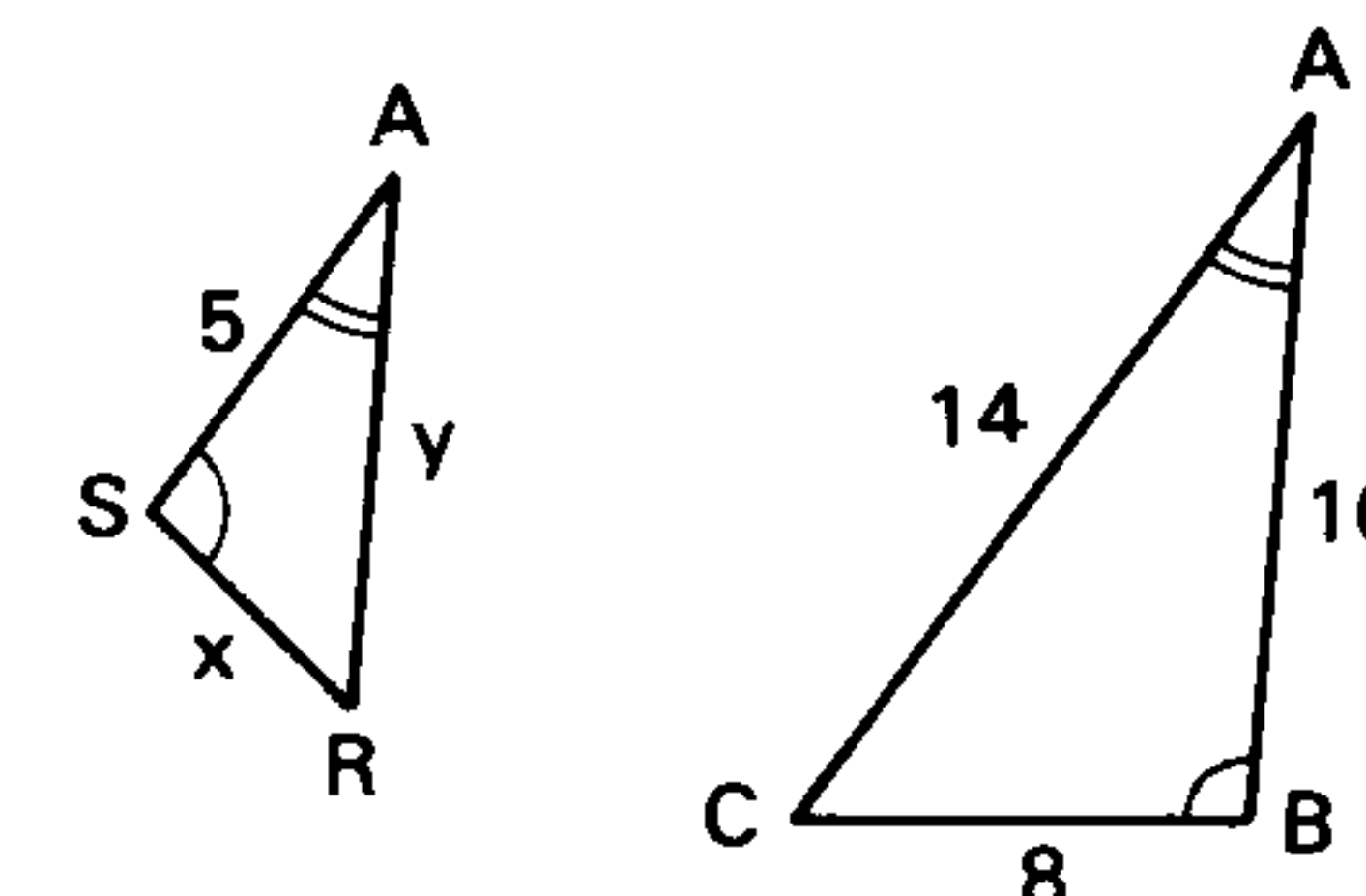
$$\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Isto é:

Se dois triângulos têm dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes e daí decorre que têm lados homólogos proporcionais.

("2 ângulos congruentes $\Rightarrow$ triângulos semelhantes $\Rightarrow$ lados proporcionais")

Exemplo

Na figura ao lado, dado que $\hat{S} \equiv \hat{B}$, $AB = 10\ cm$, $BC = 8\ cm$, $AC = 14\ cm$ e $AS = 5\ cm$, vamos calcular $RS = x$ e $AR = y$.

(Note que $\overleftrightarrow{RS}$ não é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.)

Iniciamos por notar que o ângulo $\hat{A}$ é comum a dois triângulos. A seguir separamos estes triângulos colocando nas figuras os "dados" e os "pedidos".

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \text{ é comum} \\ \hat{S} \equiv \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ARS \sim \Delta ACB \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{x}{8} = \frac{y}{14} = \frac{5}{10} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 4 \\[2mm] \dfrac{y}{14} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 7\end{cases}$$

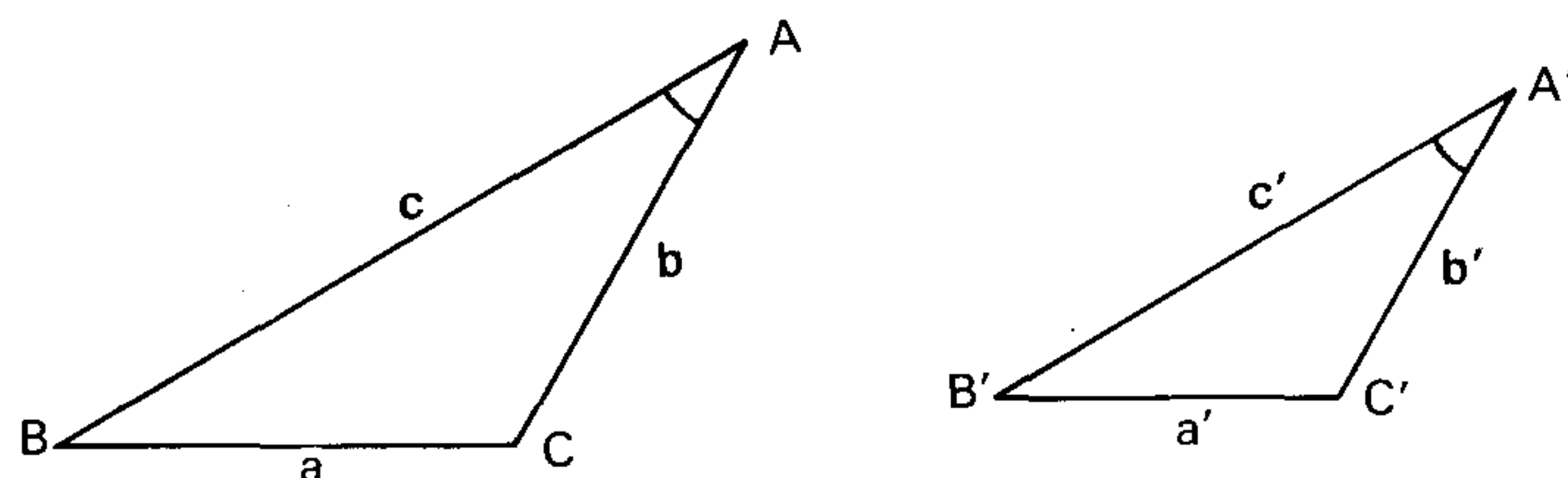
Logo, $RS = 4\ cm$ e $AR = 7\ cm$.

(*) Nos numeradores colocamos os lados de um dos triângulos e nos denominadores os homólogos do outro.

187. 2° caso

> "Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

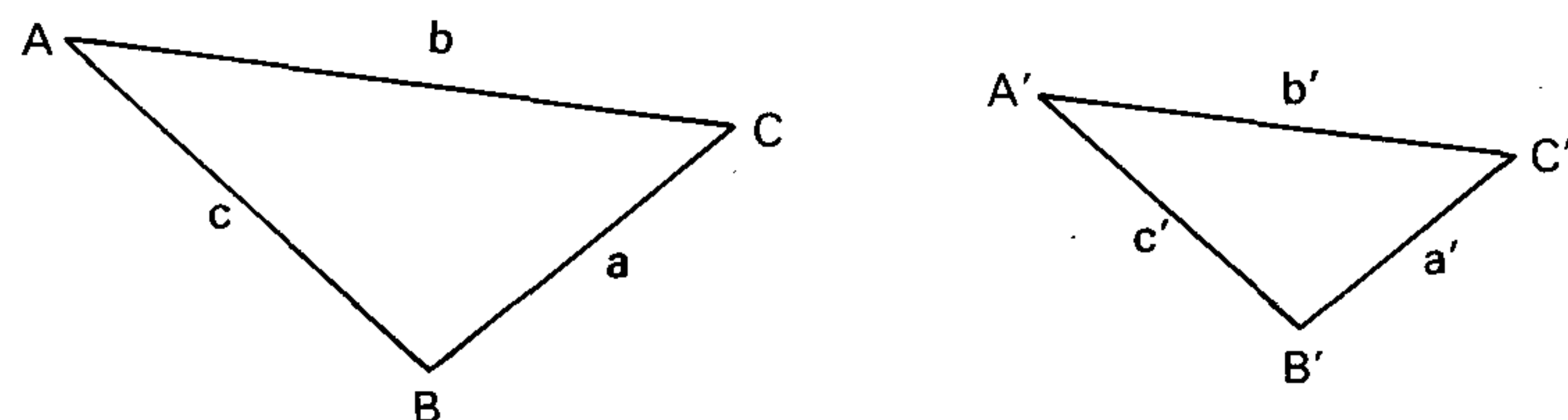
A demonstração é análoga à do 1º caso, usando o caso de congruência *LAL* (em lugar de *ALA*) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = k \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \left(\frac{a}{a'} = k,\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}'\right)$$

188. 3° caso

> "Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."

A demonstração deste caso é análoga à do 1º caso, usando o caso de congruência *LLL* (em lugar do *ALA*) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow (\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}')$$

189. *Observações*

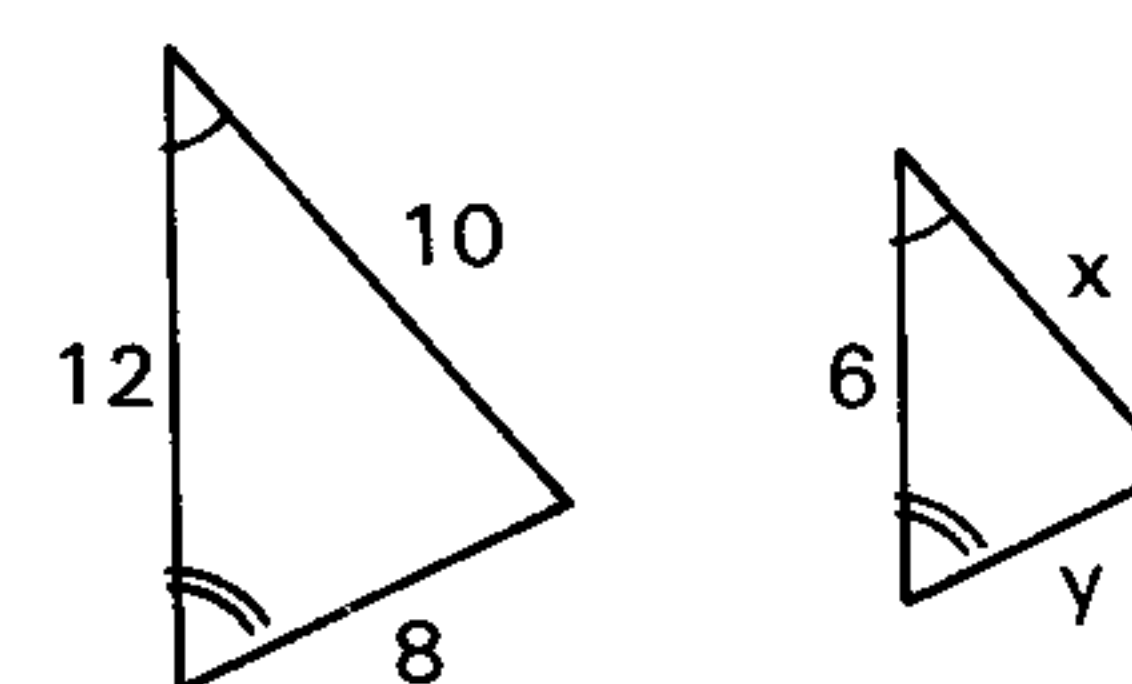
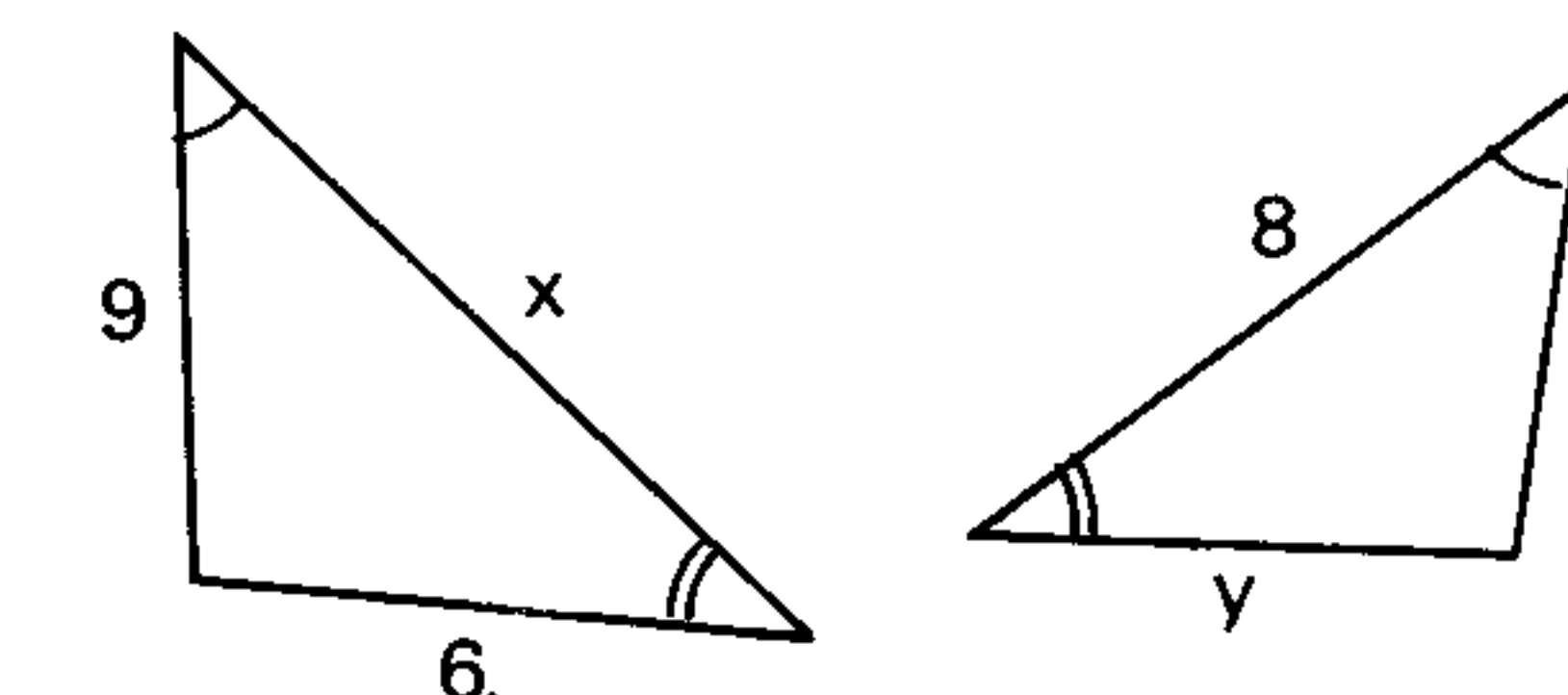
Com base nos casos de semelhança, podemos ter os resultados seguintes.

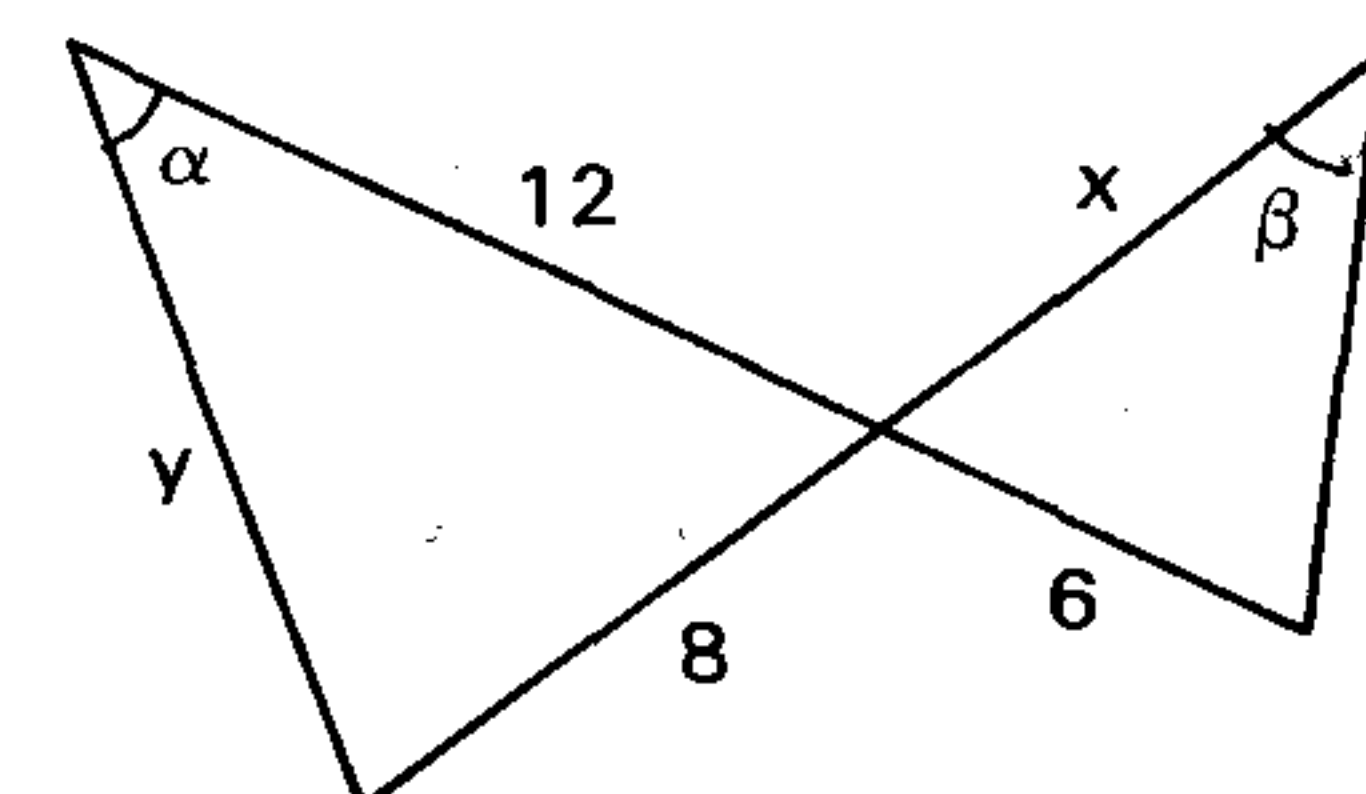
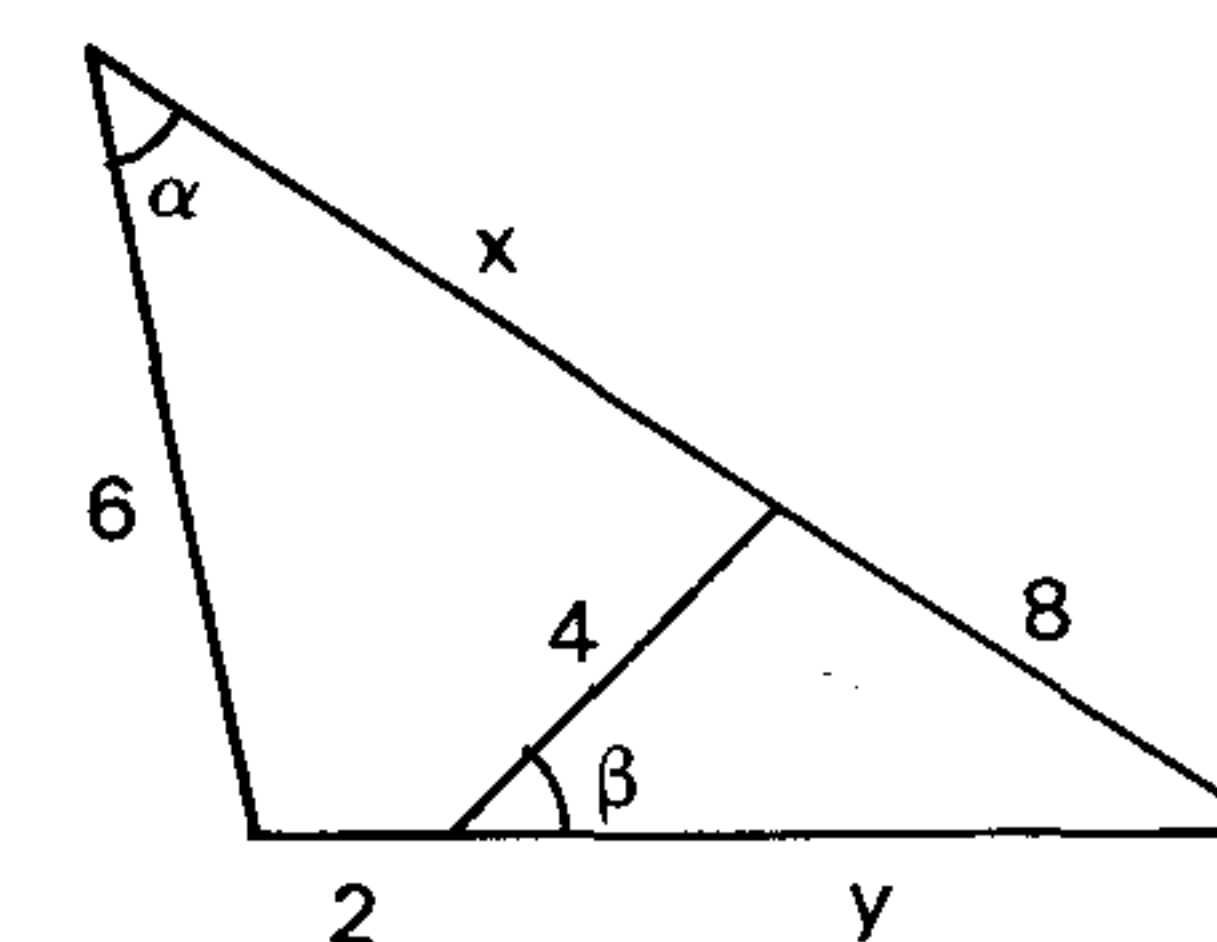
> Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então:
> a razão entre lados homólogos é k;
> a razão entre os perímetros é k;
> a razão entre as alturas homólogas é k;
> a razão entre as medianas homólogas é k;
> a razão entre as bissetrizes internas homólogas é k;
> a razão entre os raios dos círculos inscritos é k;
> a razão entre os raios dos círculos circunscritos é k;
> ⋮
> *a razão entre dois elementos lineares homólogos é* k;
> e os ângulos homólogos são congruentes.

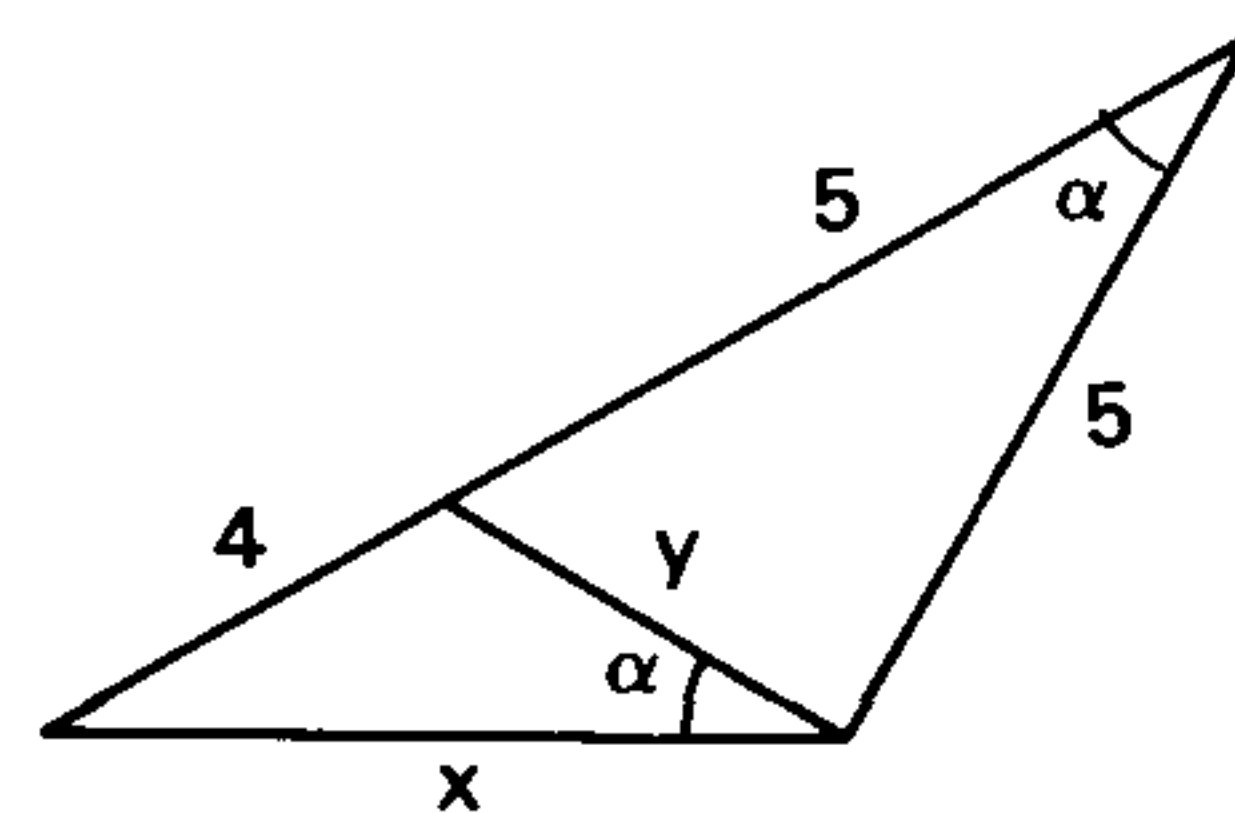
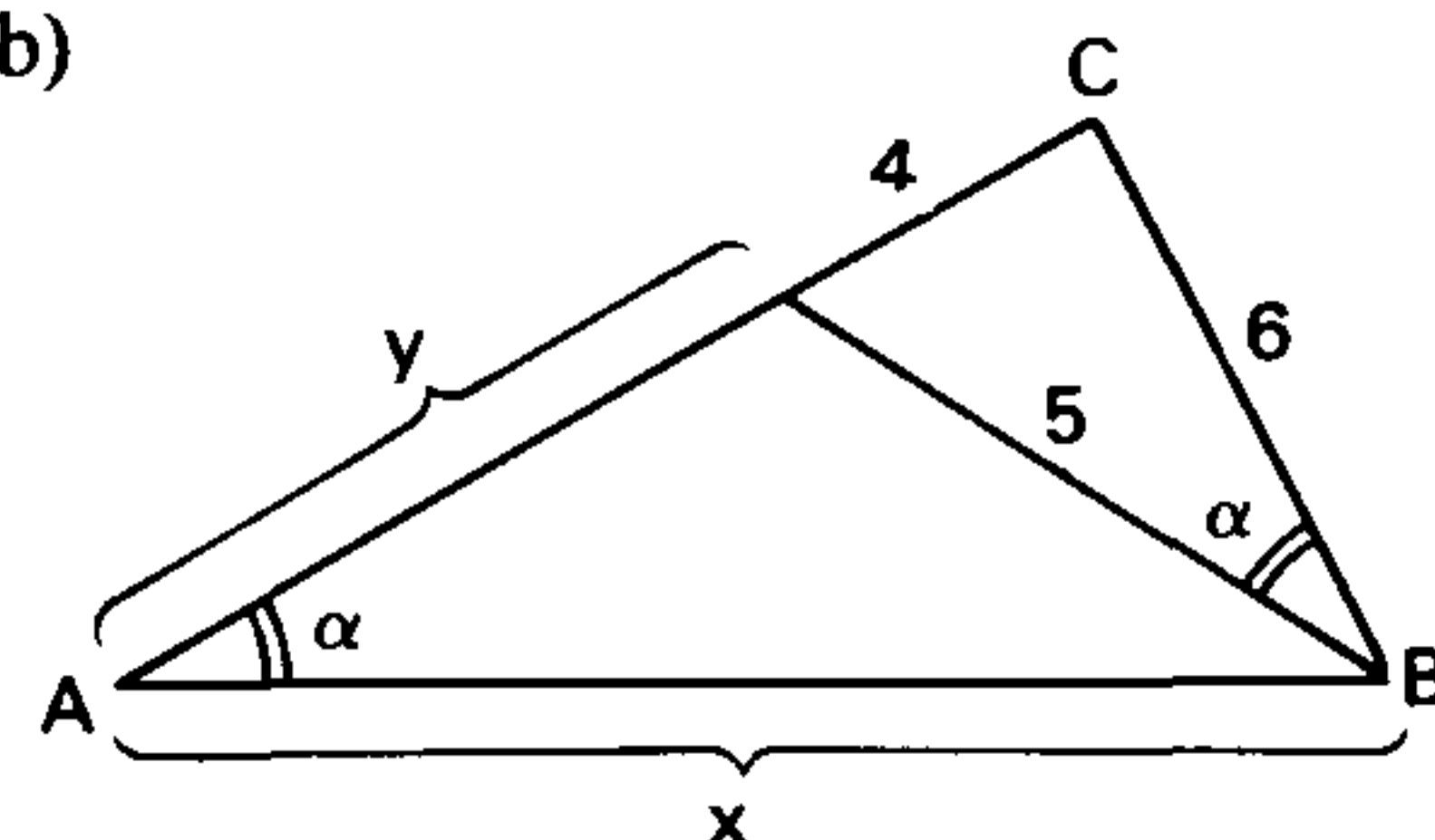
EXERCÍCIOS

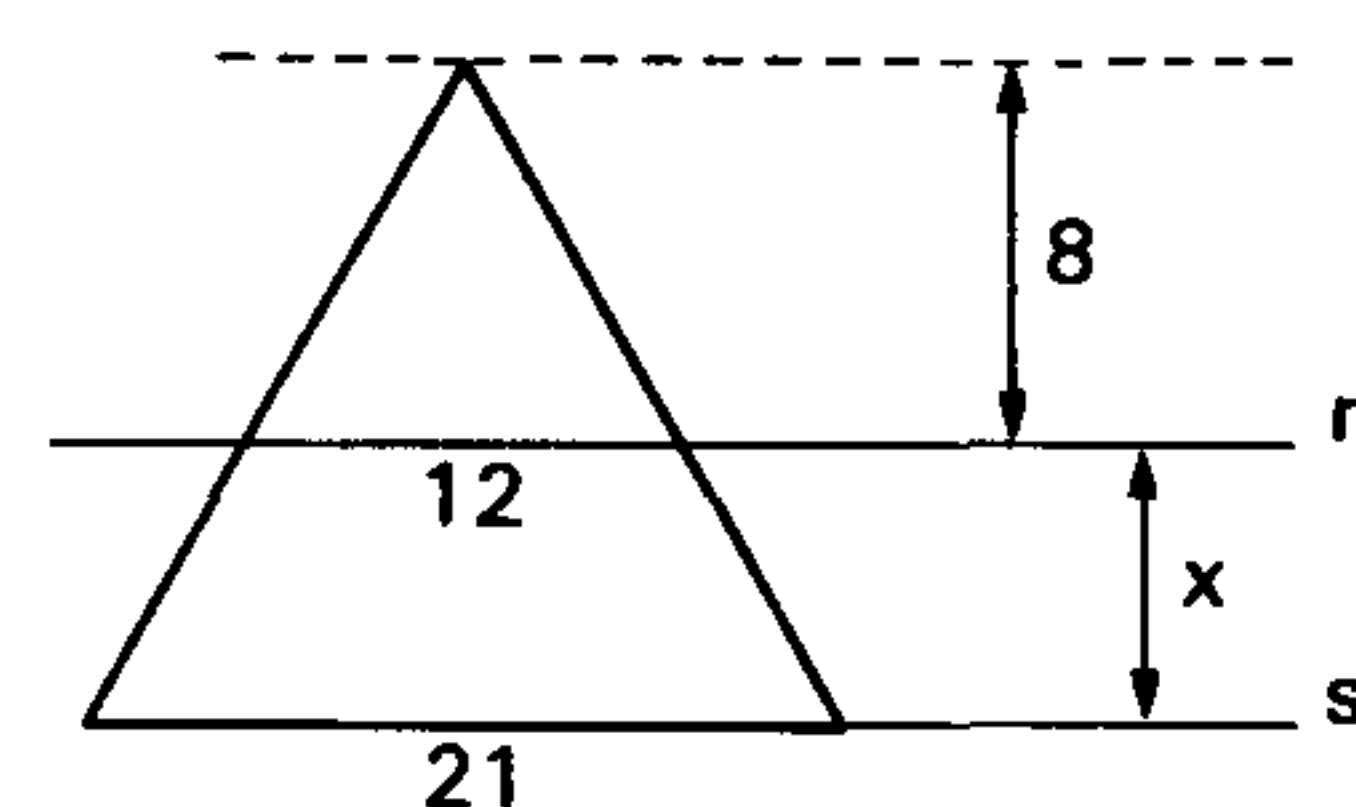
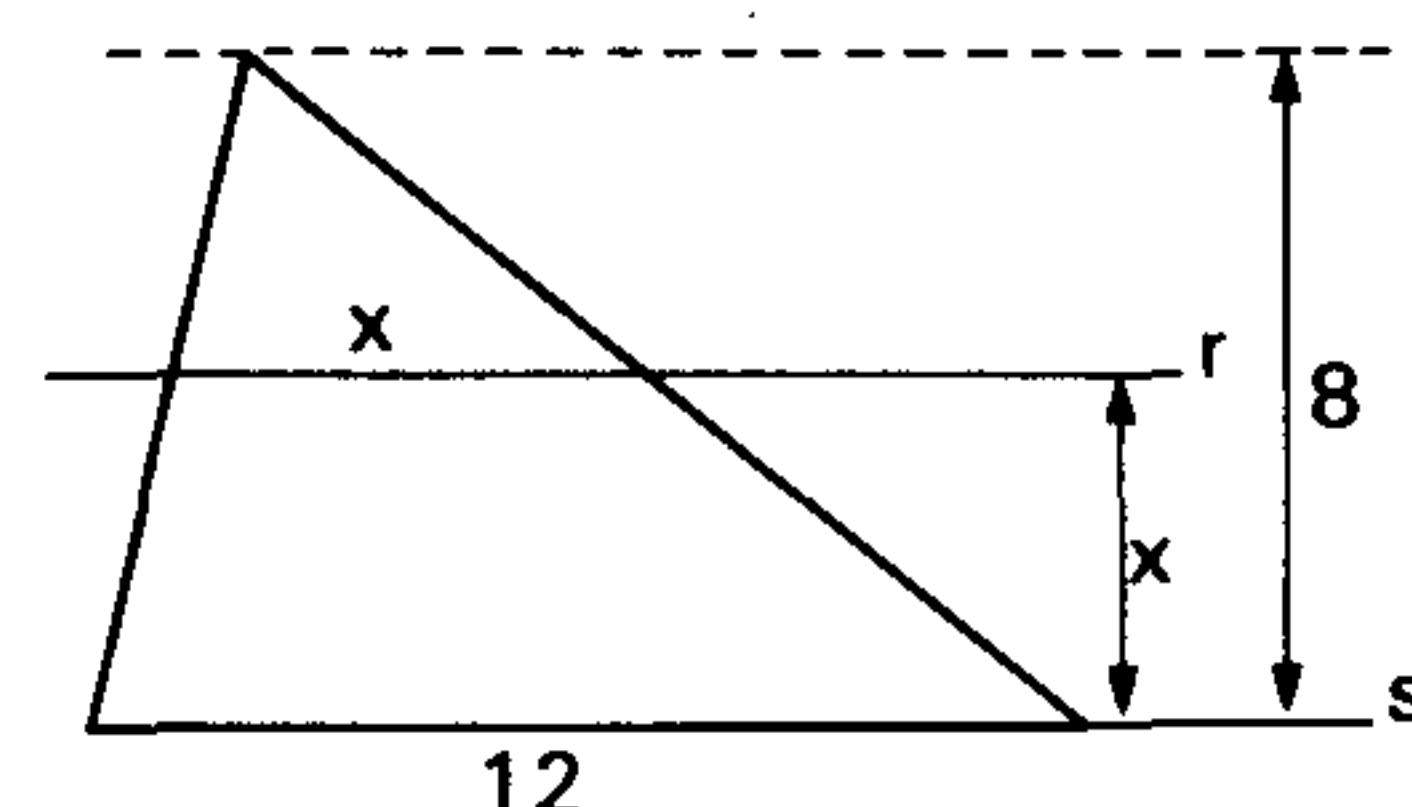
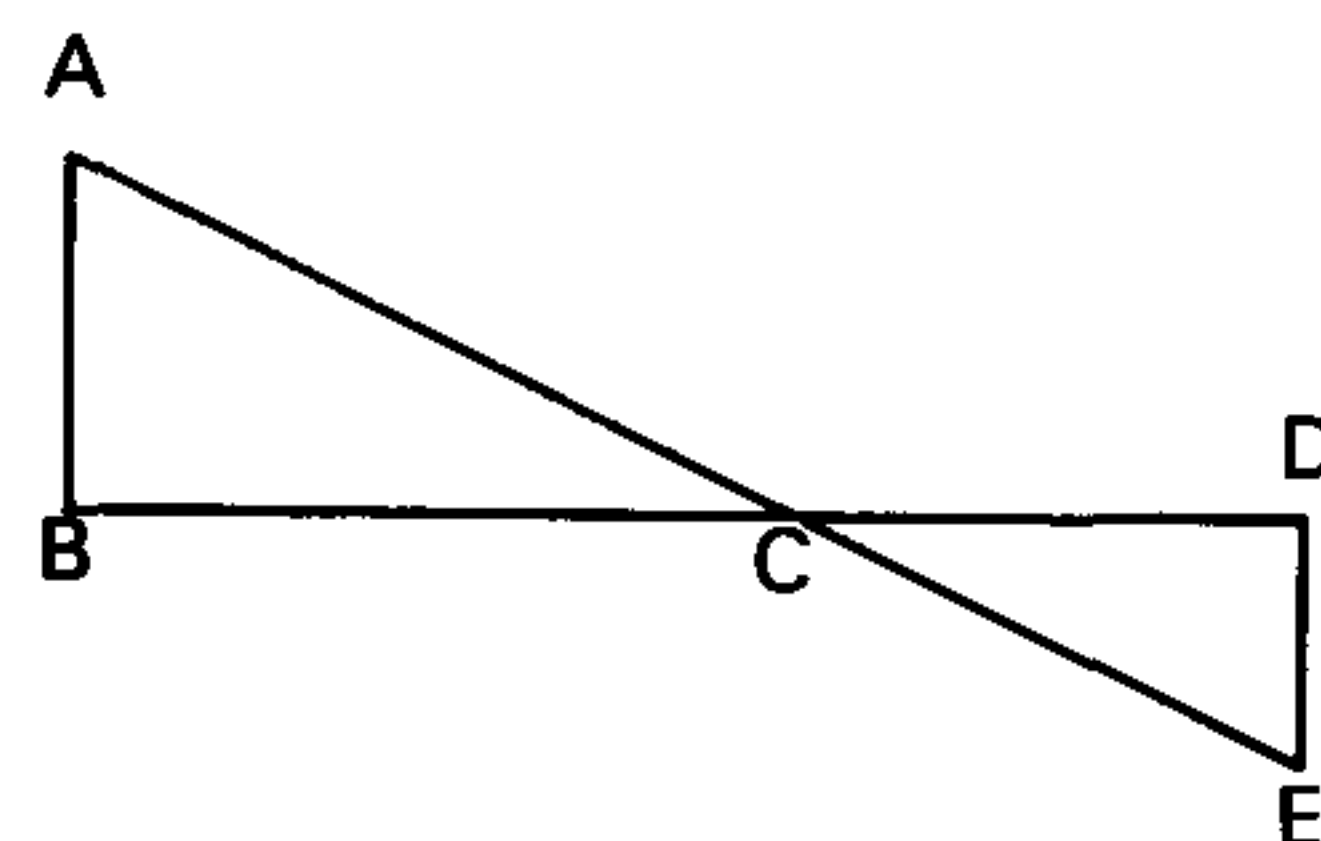
459. Se ângulos com "marcas iguais" são congruentes, determine as incógnitas nos casos:

a)

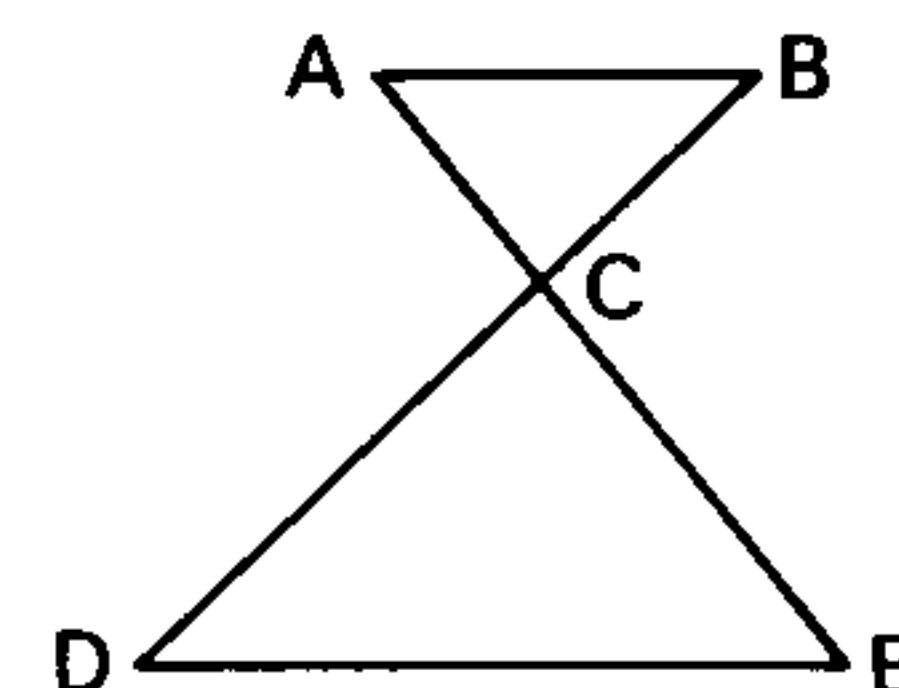
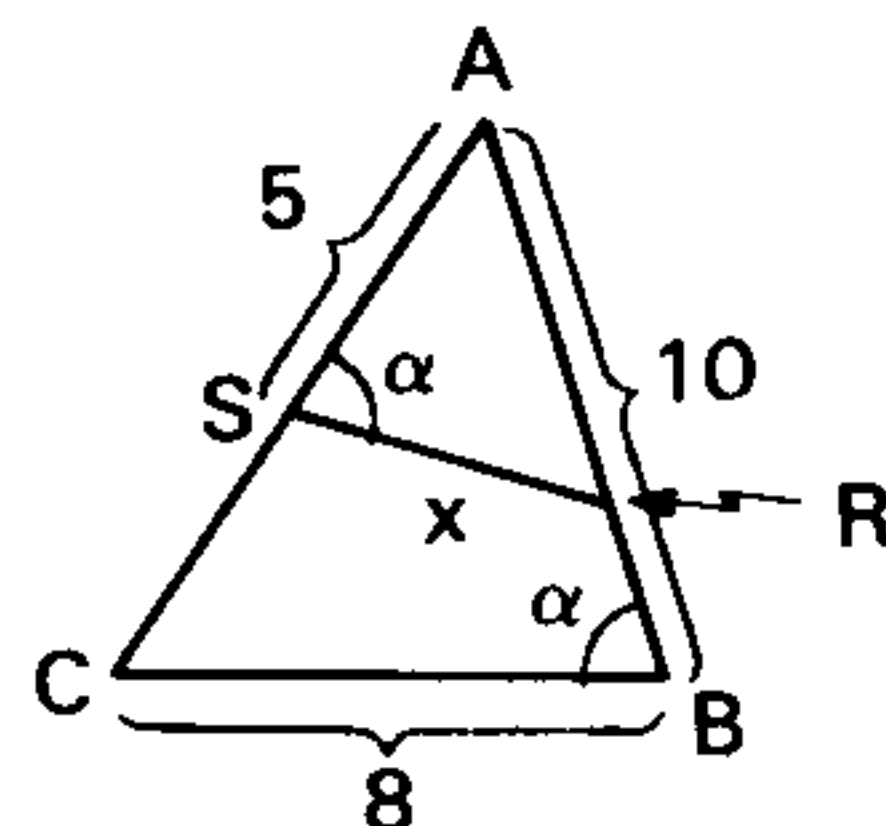
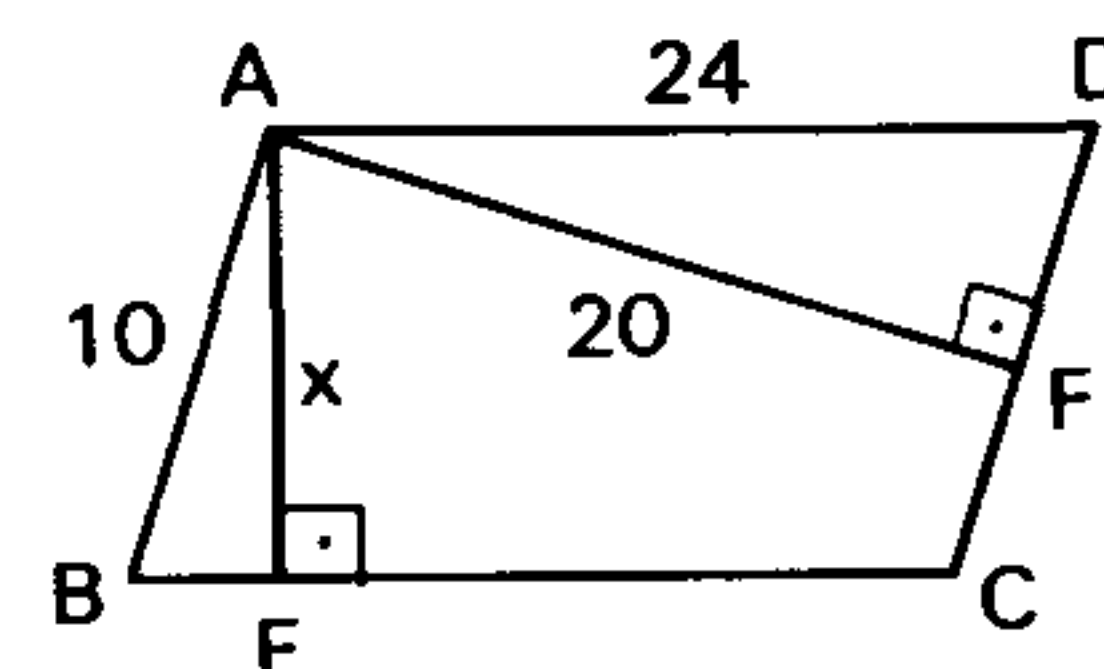
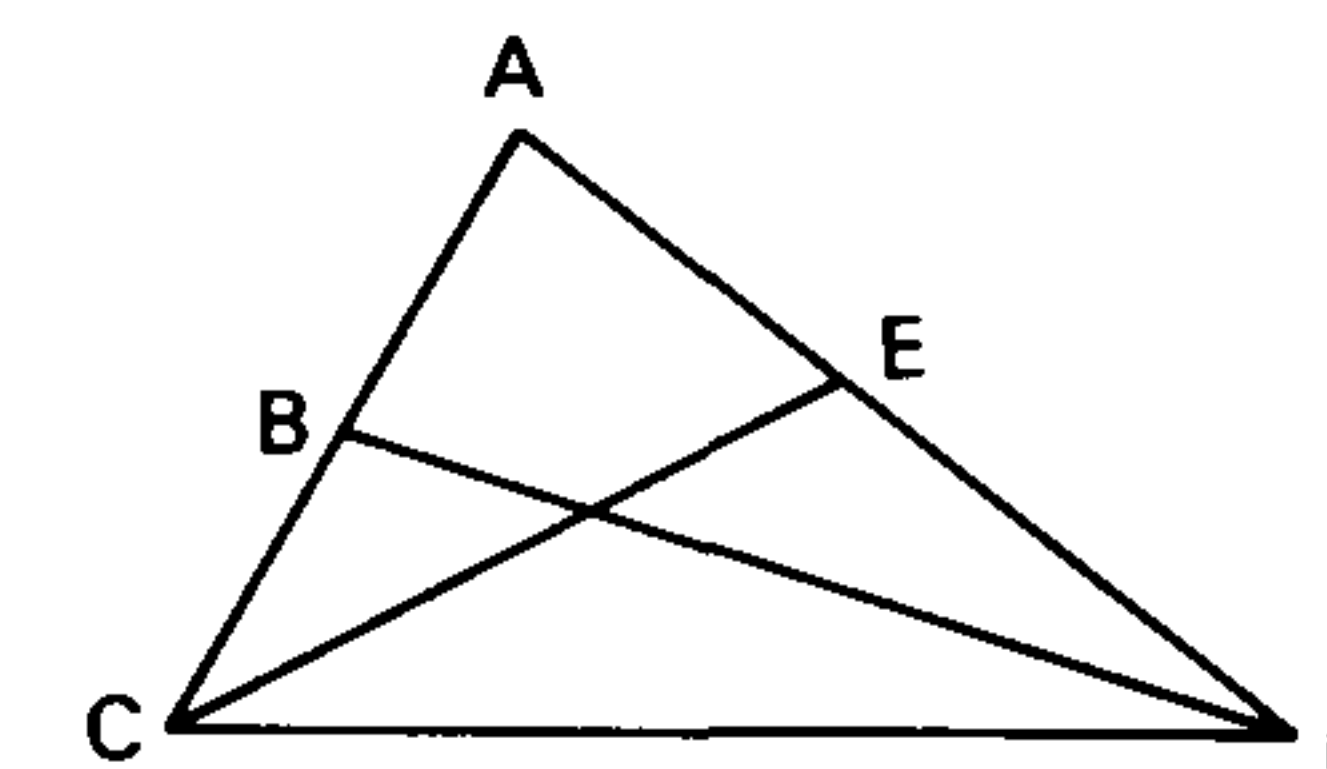
b)

460. Se $\alpha = \beta$, determine x e y nos casos:

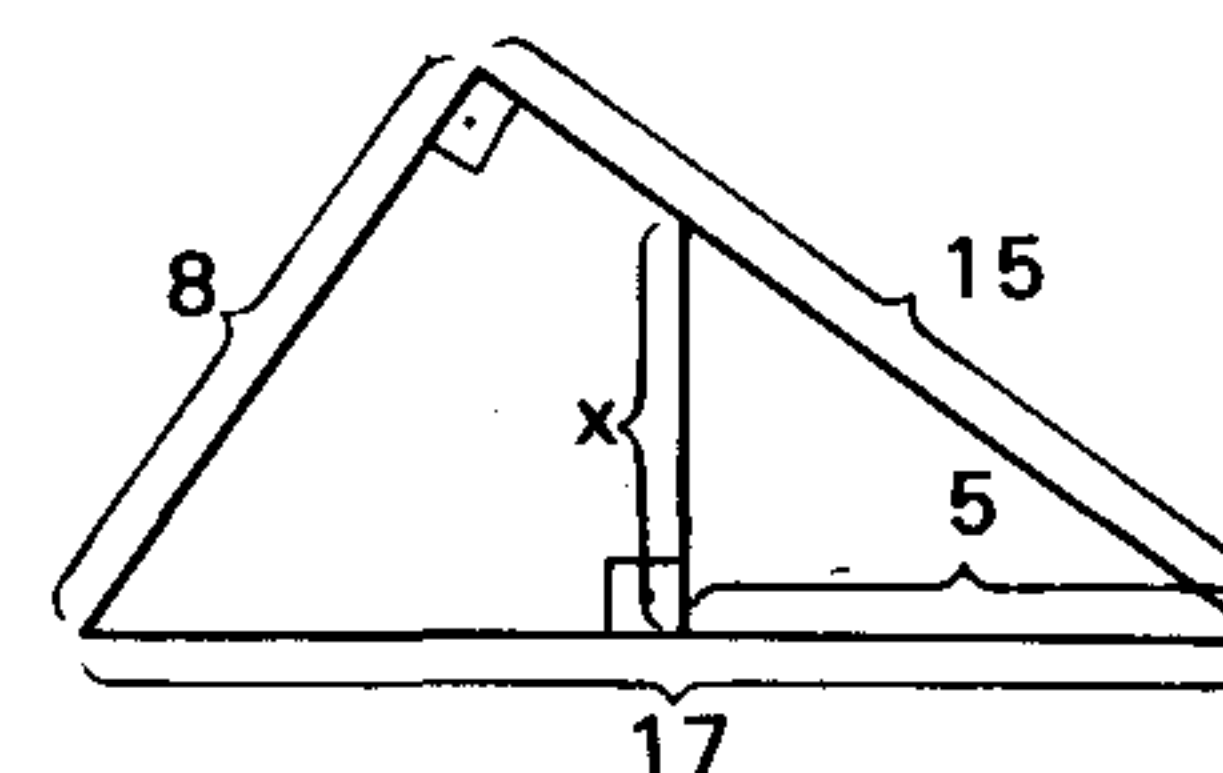
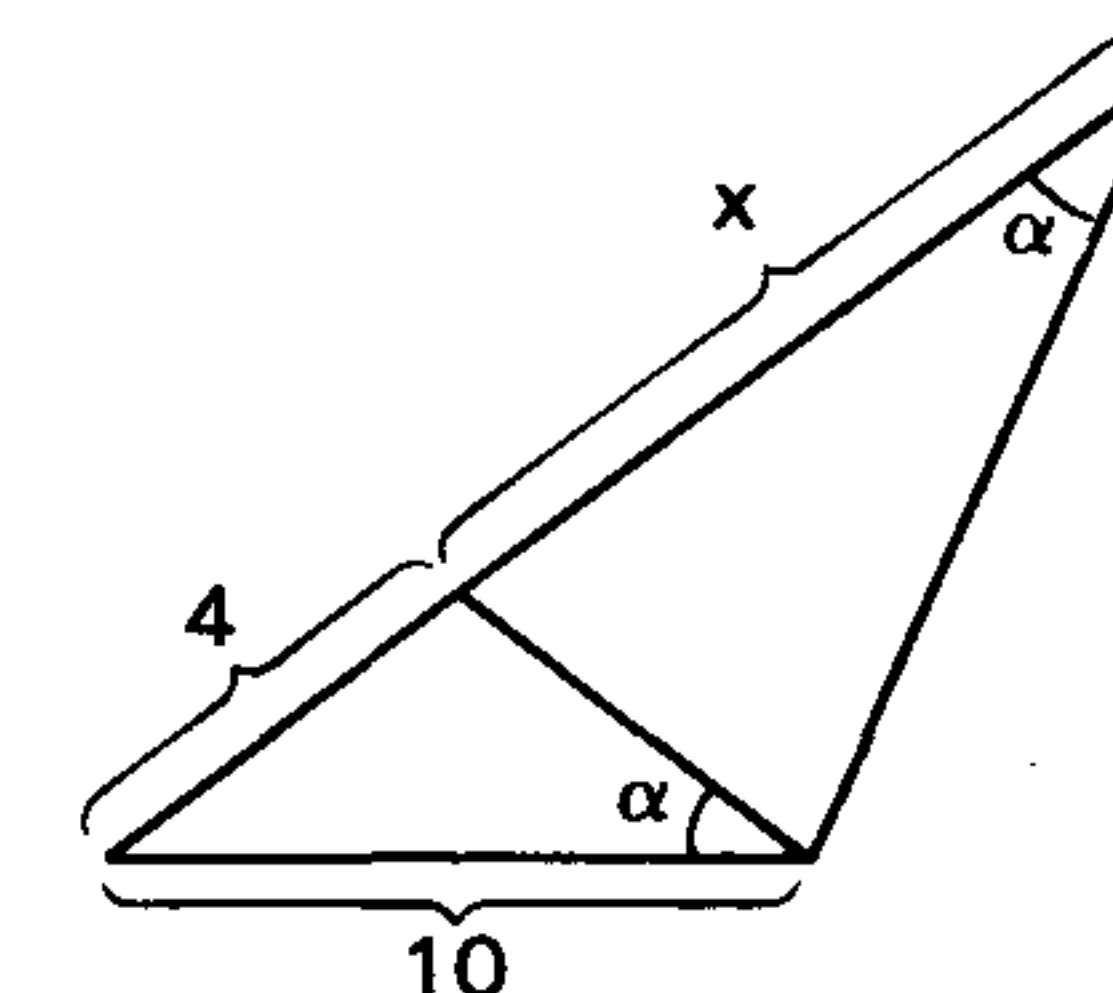
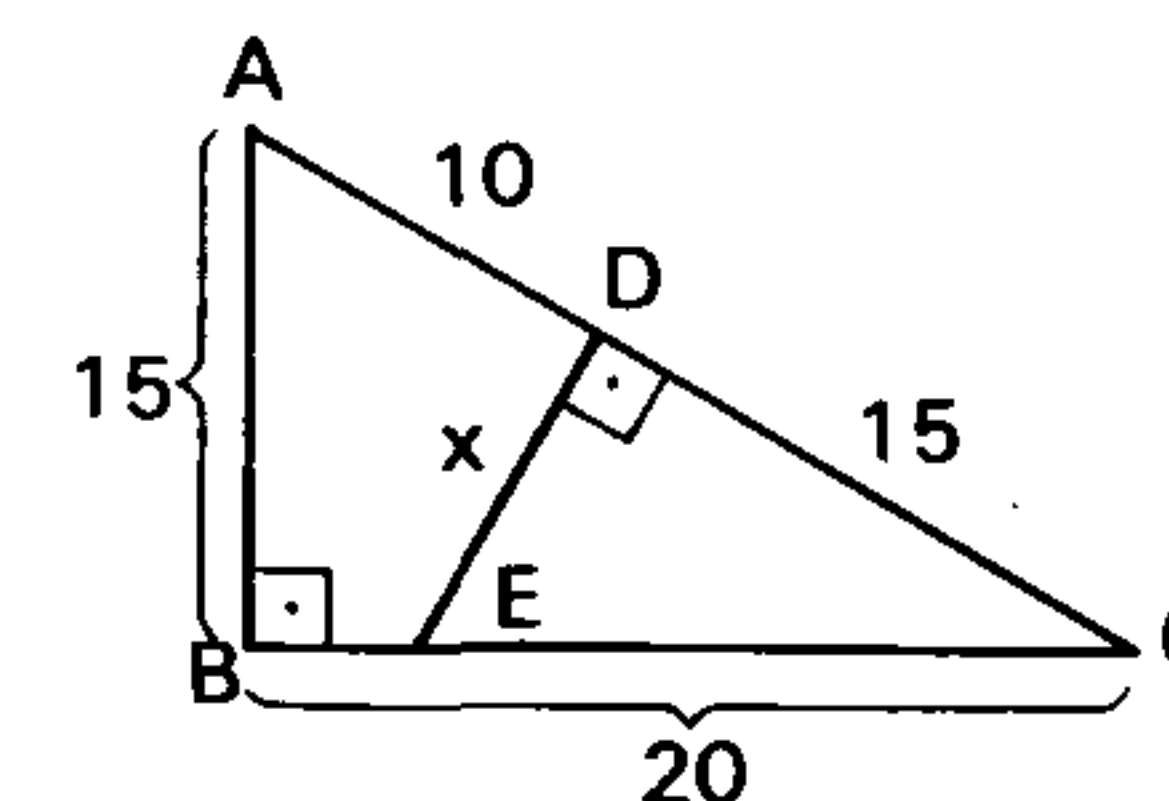
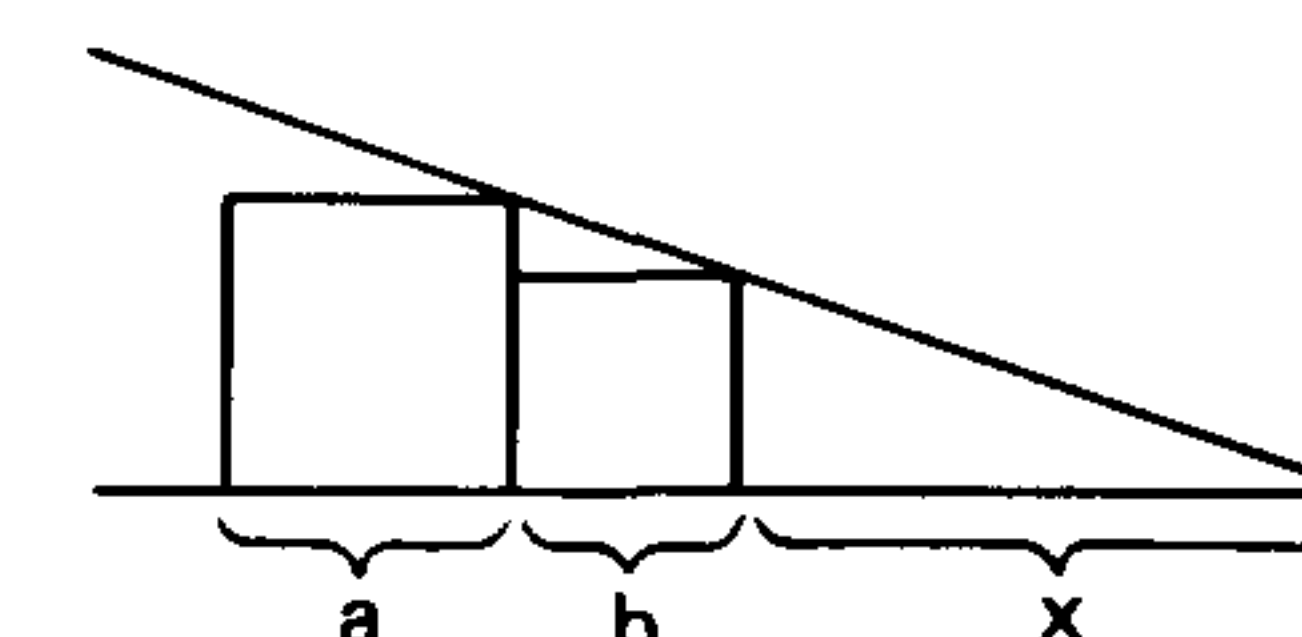
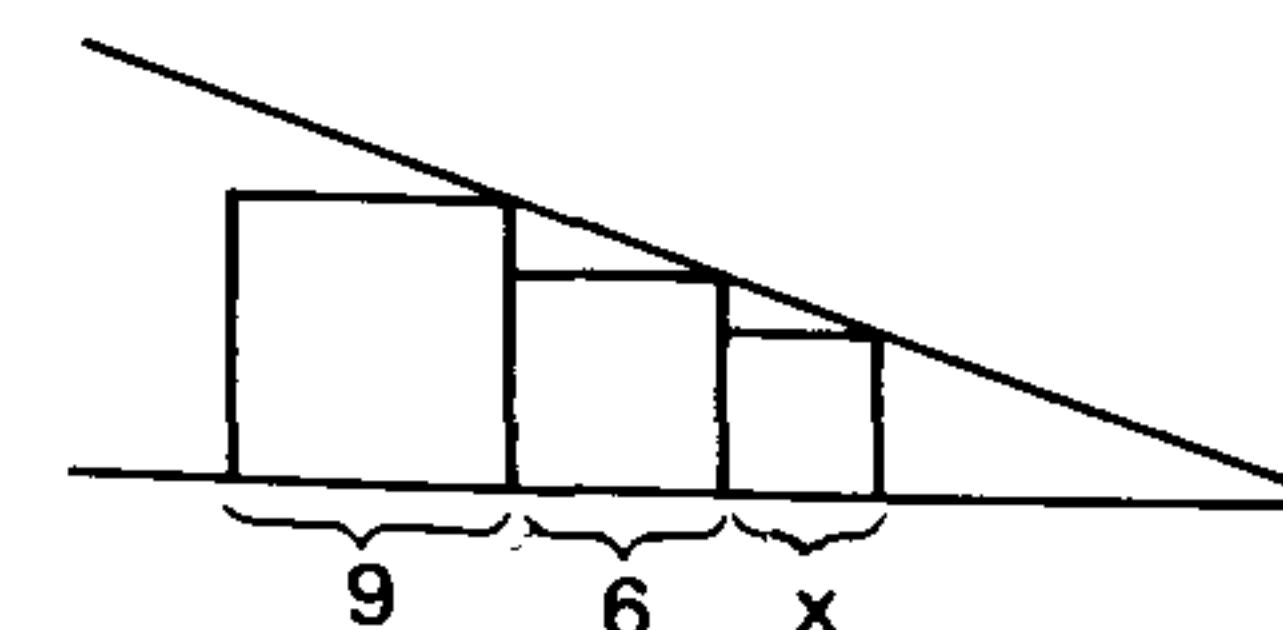
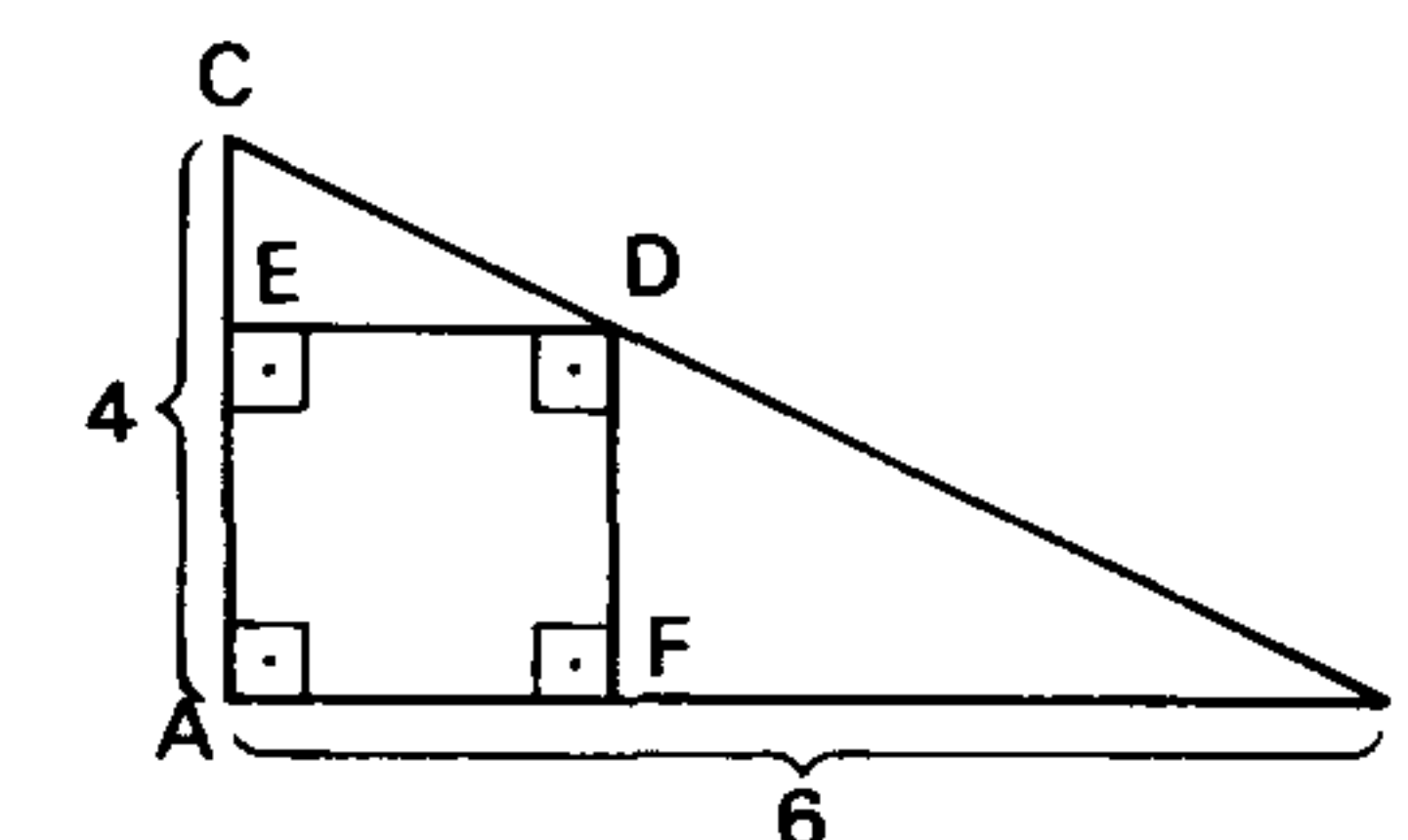
a)

b)

461. Determine x e y nos casos:

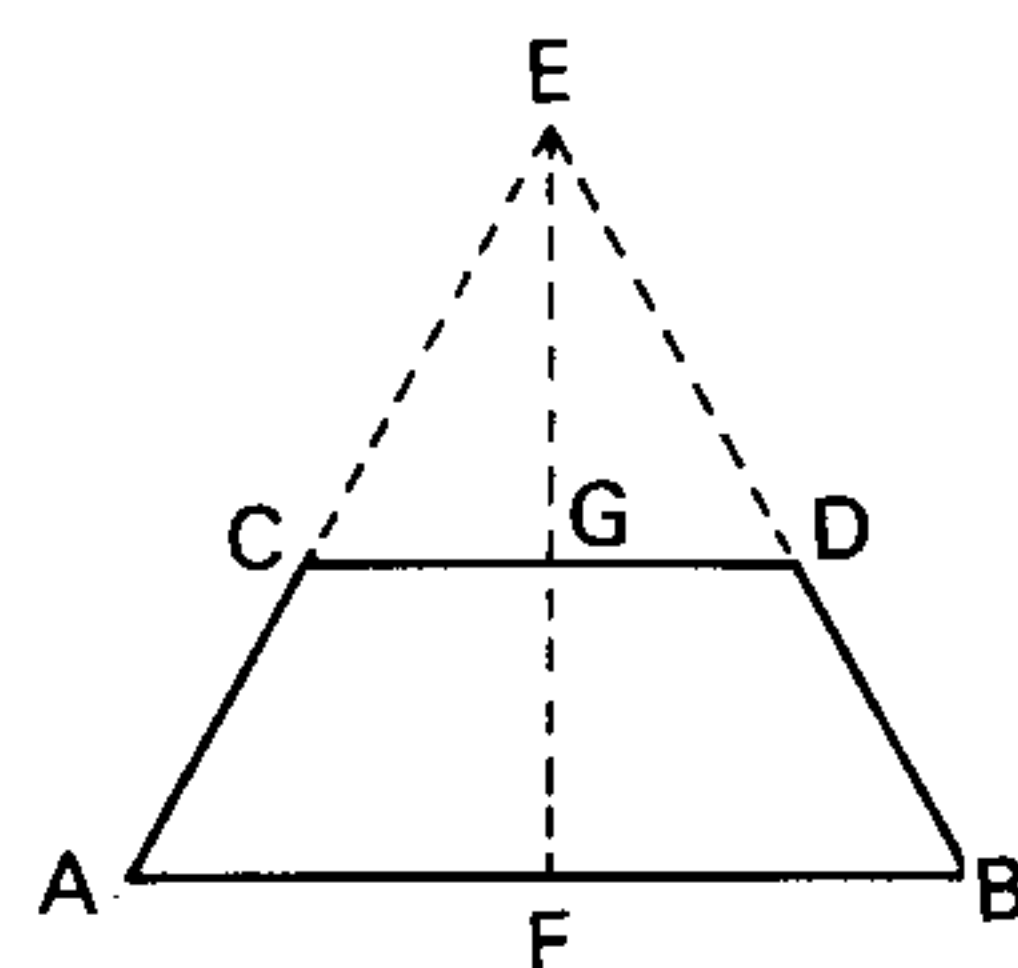
a)

b)

462. Sendo r e s retas paralelas, determine x nos casos:

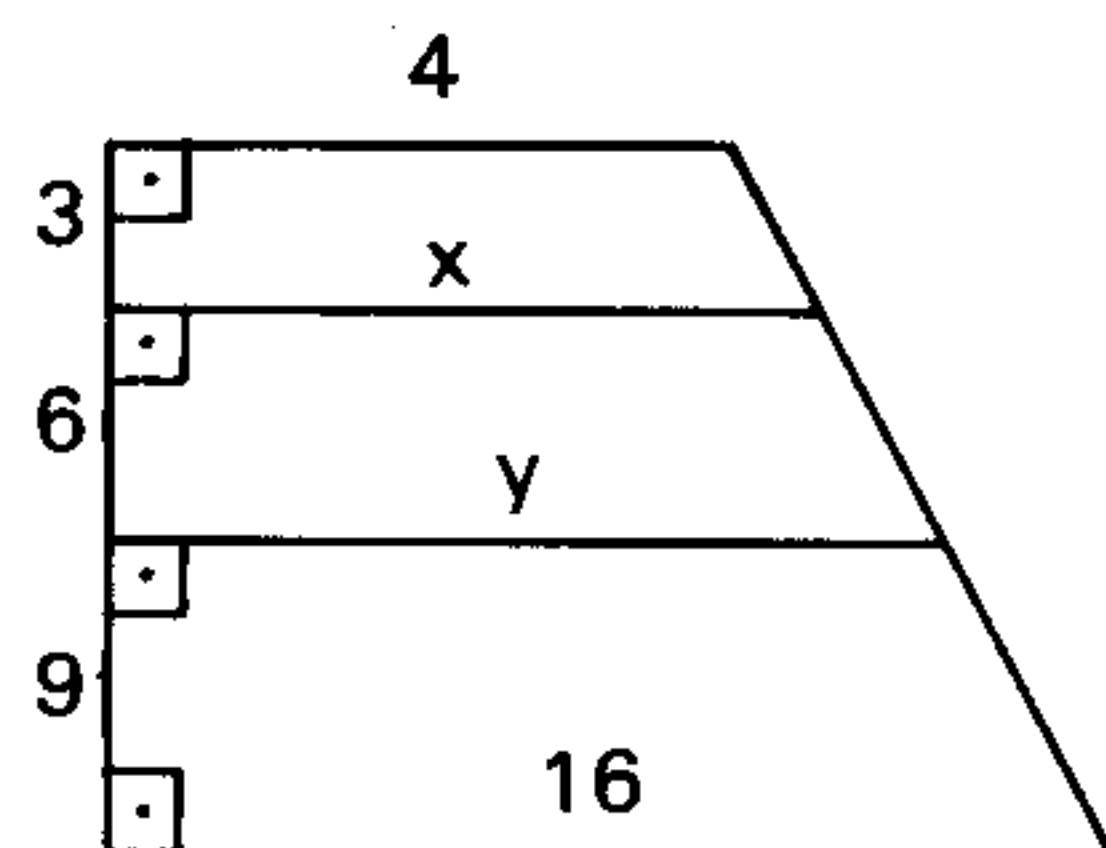
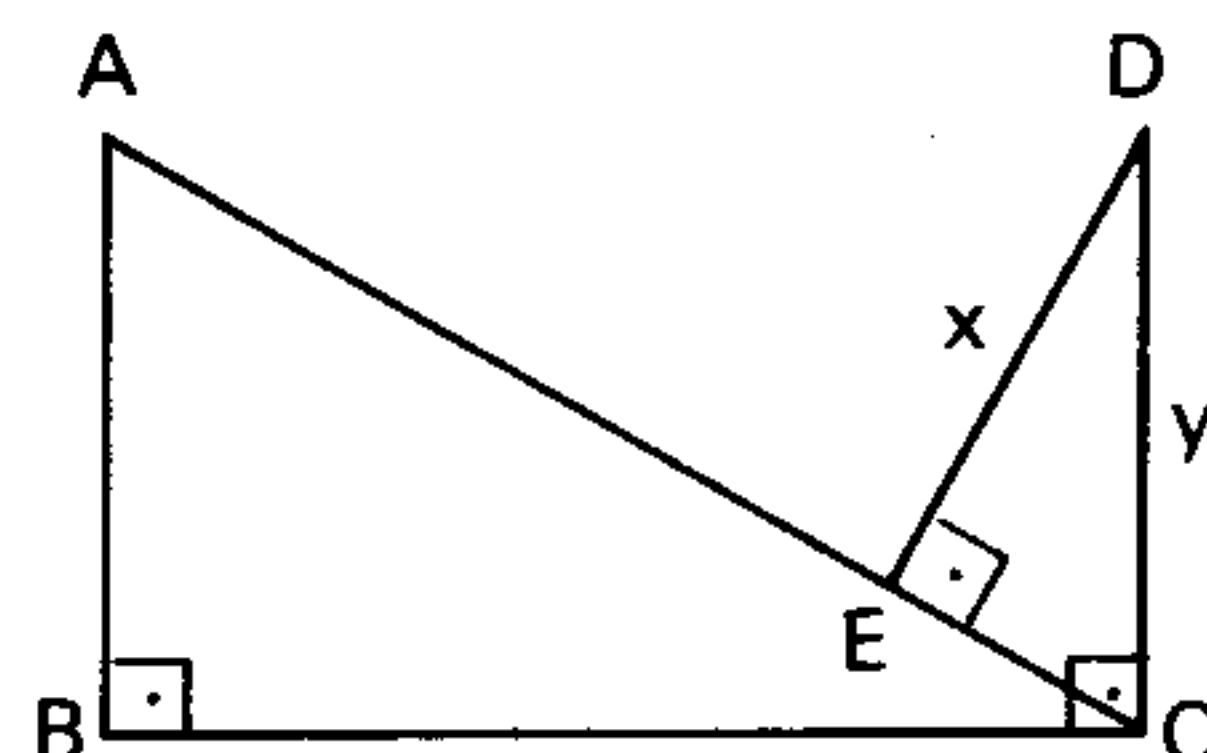
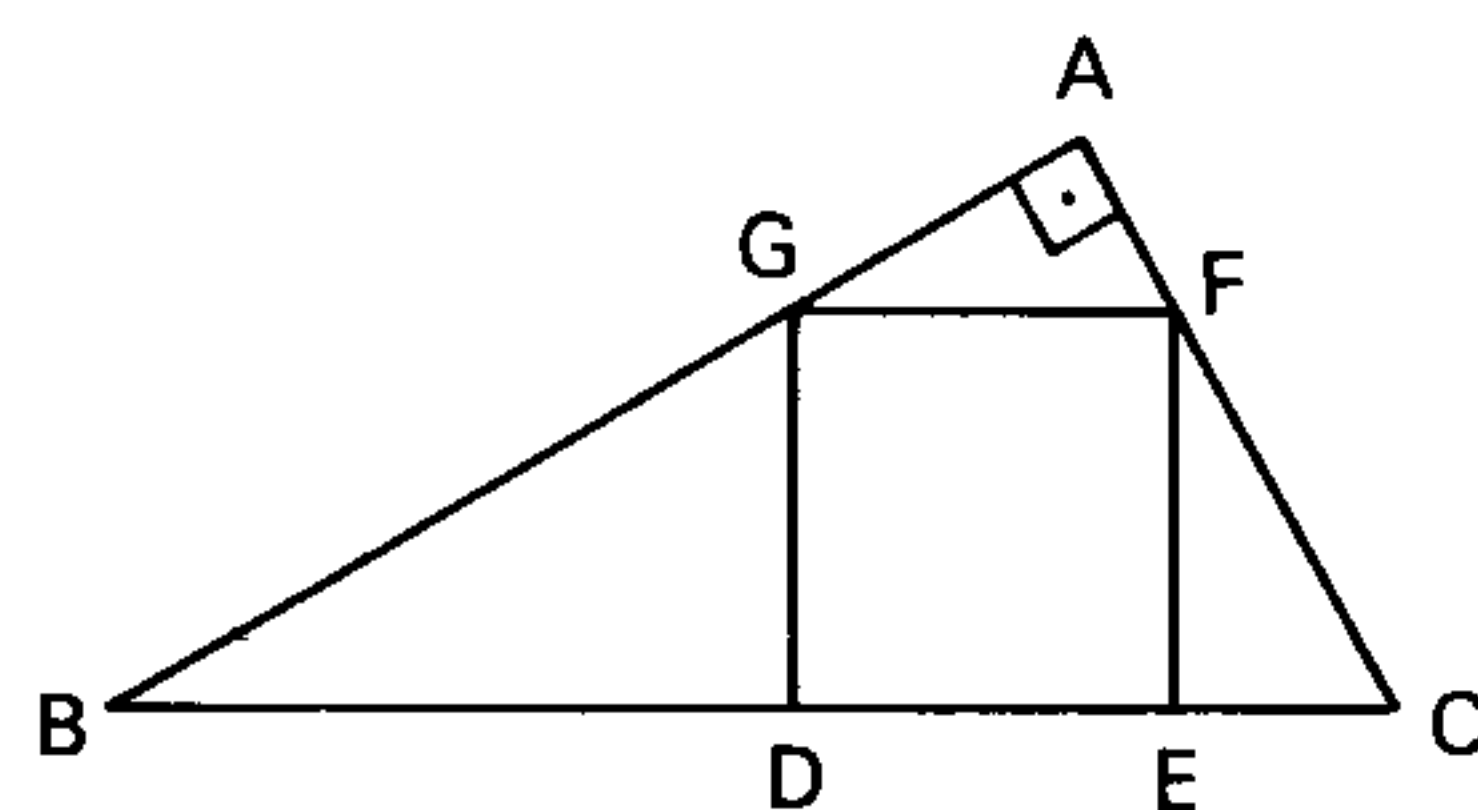
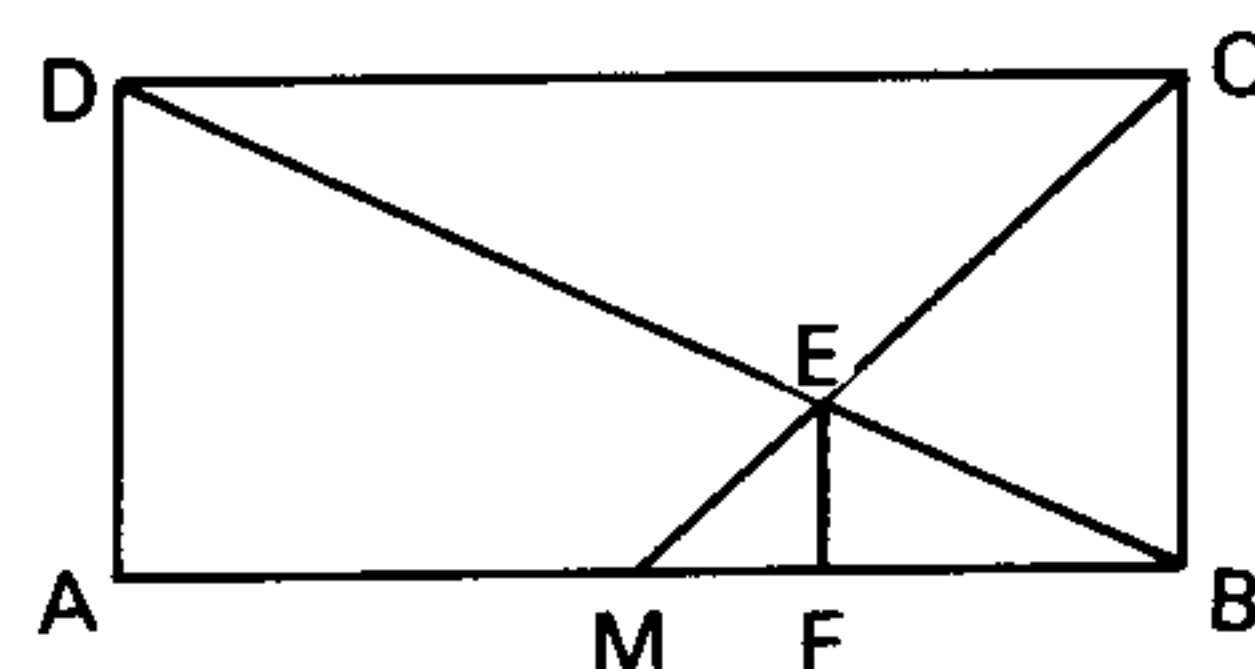
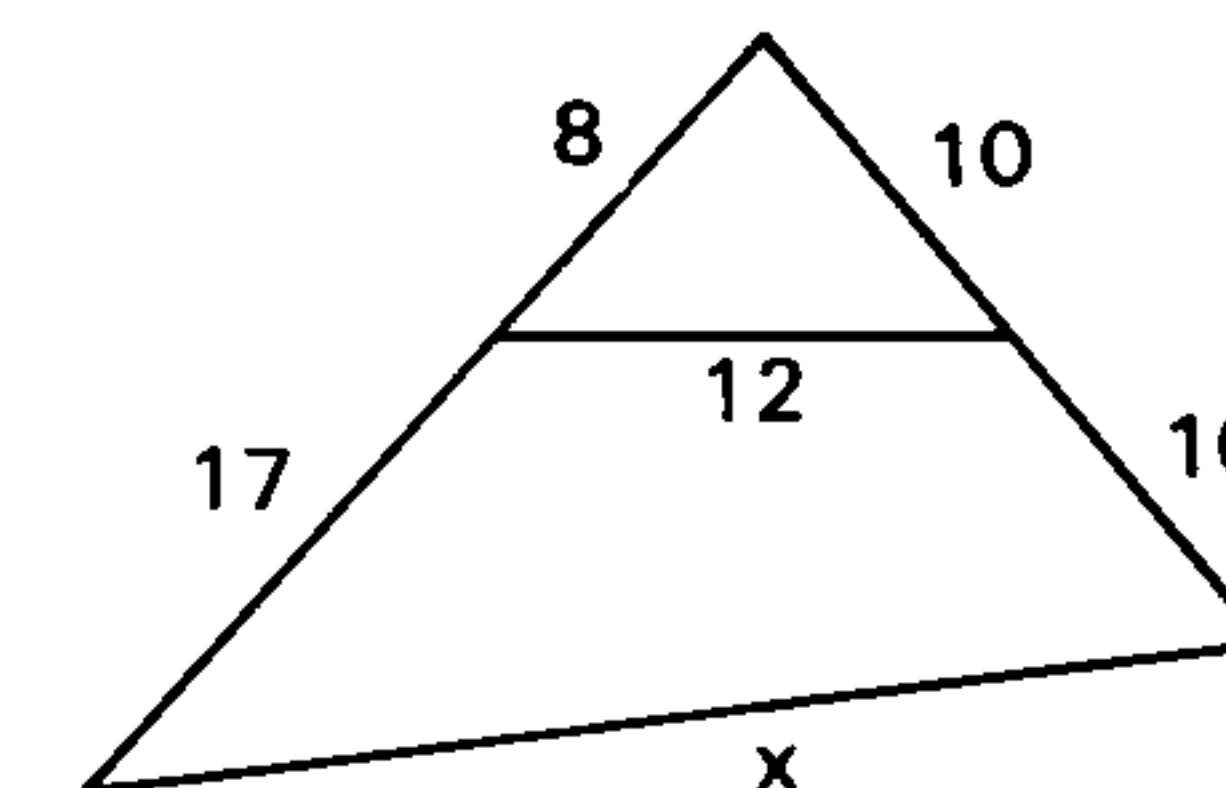
a)

b)

463. Se $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$, $DE = 4\ cm$, $CD = 2\ cm$ $BC = 6\ cm$, calcule a medida de $\overline{AB}$.

464. Na figura abaixo, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$.

a) Prove que os triângulos ABC e EDC são semelhantes.

b) Sendo $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$ e $DE = 10$, calcule CD.

465. Na figura abaixo, determine o valor de x.

466. Calcule o valor de x, sabendo que a figura abaixo é um paralelogramo.

467. Na figura, as medidas são $AB = 8\ cm$, $BC = 3\ cm$, $AE = 5\ cm$. Calcule $x = DE$, sabendo que $A\hat{C}E \equiv A\hat{D}B$.

468. Nas figuras, determine x.

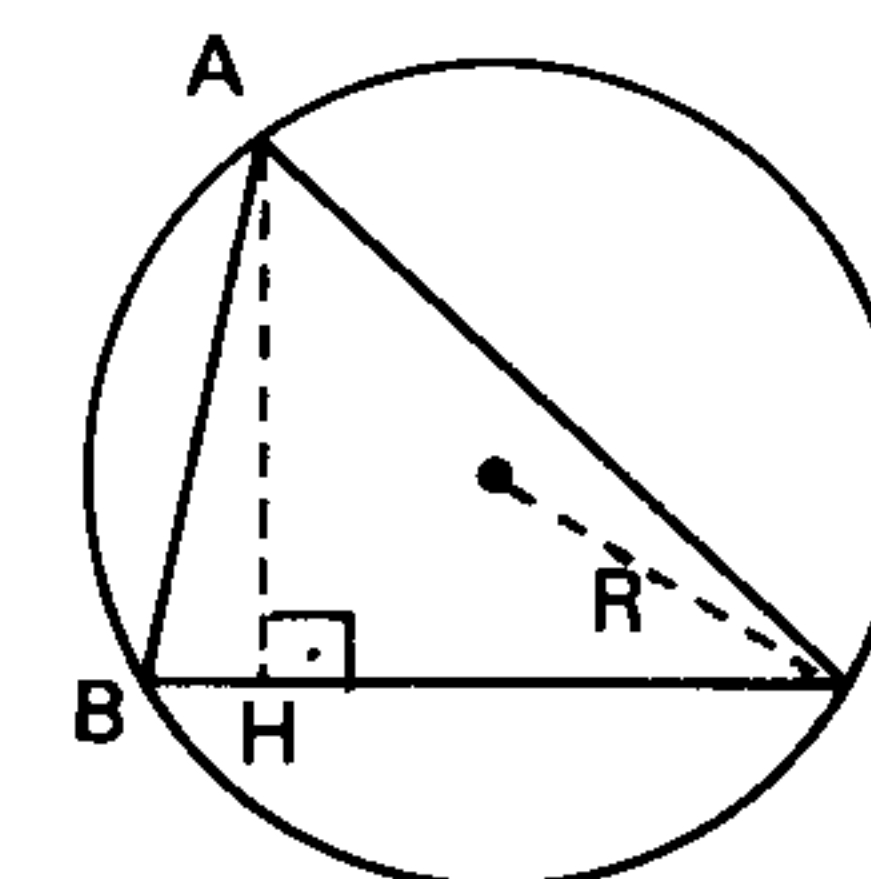
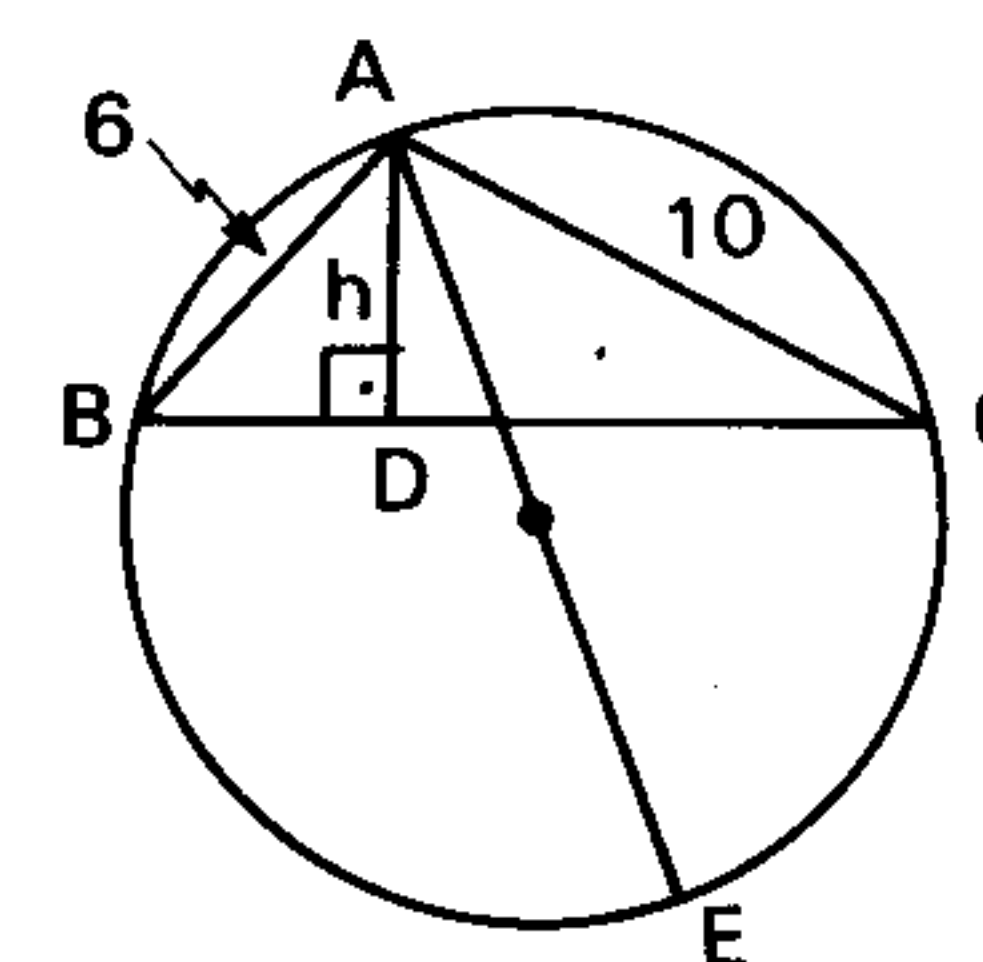
a)

b)

469. Dada a figura, determine o valor de x.

470. Na figura abaixo, consideremos os quadrados de lados a e b ($a > b$). Calcule o valor de x.

471. Na figura abaixo, consideremos os quadrados de lados x, 6 e 9. Determine o perímetro do quadrado de lado x.

472. Determine a medida do lado do quadrado da figura abaixo.

473. Prolongando-se os lados oblíquos às bases de um trapézio, obtemos um ponto E e os triângulos ECD e EAB. Determine a relação entre as alturas dos dois triângulos, relativas aos lados que são bases do trapézio, sendo $12\ cm$ e $4\ cm$ as medidas das bases do trapézio.

474. As bases de um trapézio $ABCD$ medem $50\ cm$ e $30\ cm$ e a altura $10\ cm$. Prolongando-se os lados não paralelos, eles se interceptam num ponto E. Determine a altura $\overline{EF}$ do triângulo ABE e a altura $\overline{EG}$ do triângulo CDE (vide figura).

475. Num triângulo isósceles de $20\ cm$ de altura e $\frac{50}{3}\ cm$ de base está inscrito um retângulo de $8\ cm$ de altura com base na base do triângulo. Calcule a medida da base do retângulo.

476. Determine x e y.

477. Na figura, temos: $AB = 8$, $BC = 15$, $AC = 17$ e $EC = 4$. Determine $x = DE$ e $y = CD$.

478. Na figura abaixo, o quadrado $DEFG$ está inscrito no triângulo ABC. Sendo $BD = 8\ cm$ e $CE = 2\ cm$, calcule o perímetro do quadrado.

479. Num retângulo $ABCD$, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem $20\ cm$ e $12\ cm$, respectivamente. Sabendo que M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$, calcule $\overline{EF}$, distância do ponto E ao lado $\overline{AB}$, sendo E a interseção da diagonal $\overline{BD}$ com o segmento $\overline{CM}$.

480. Na figura, determine x.

481. Consideremos um triângulo ABC de lado $BC = 10\ cm$. Seja um segmento $\overline{CD}$ interno ao triângulo tal que D seja um ponto do lado $\overline{AB}$. Sabendo que $BD = 4\ cm$, e os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ são congruentes, determine a medida de $\overline{AD}$.

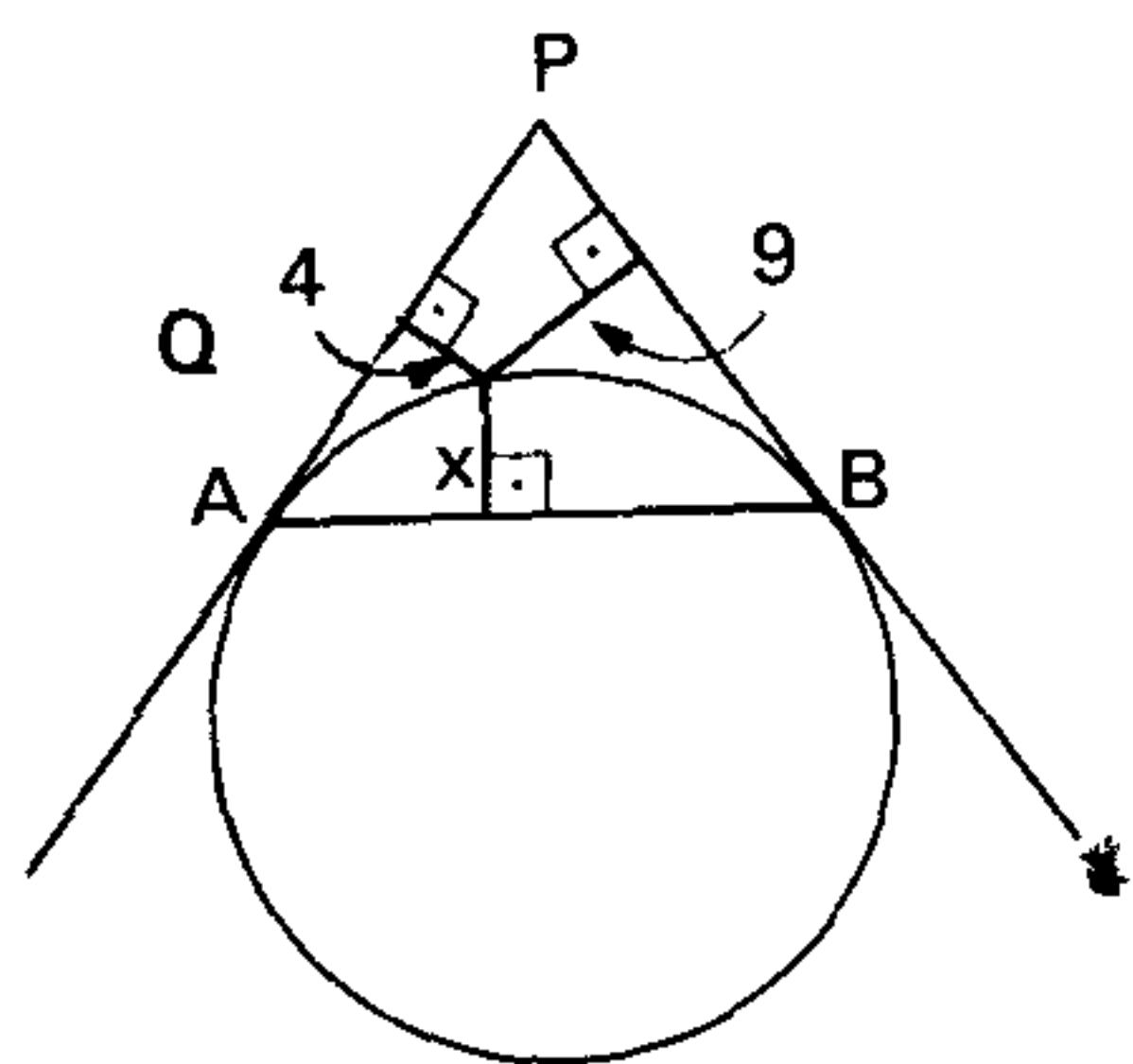
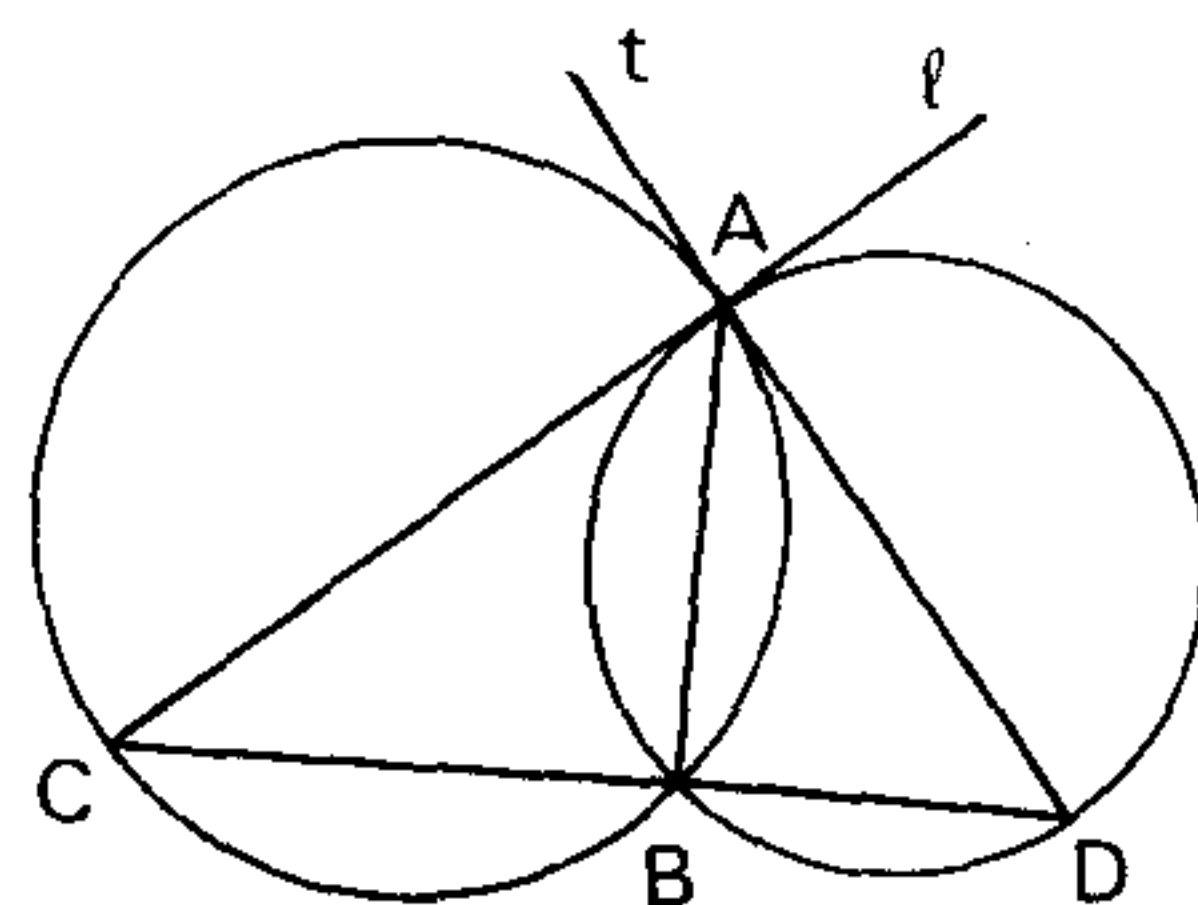
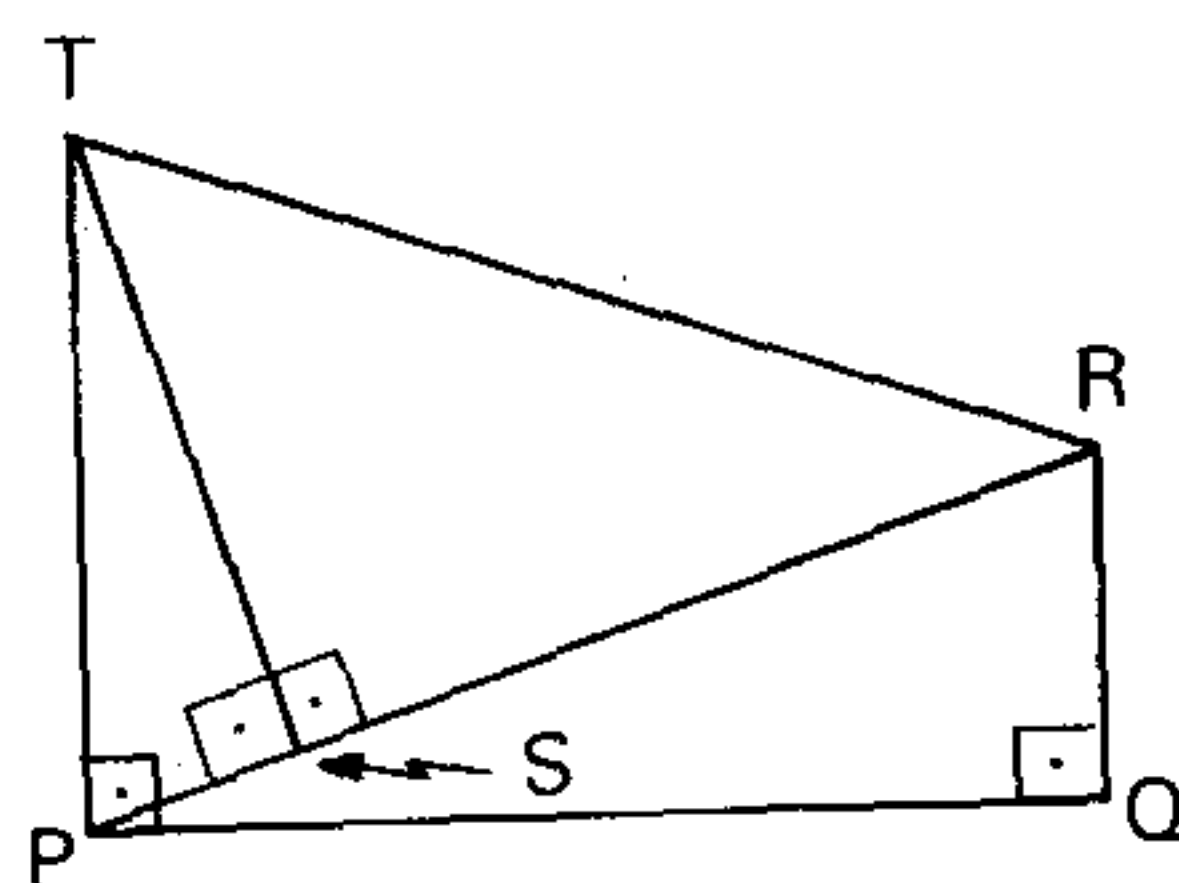
482. Pelos pontos A e B de uma reta traçam-se perpendiculares à reta. Sobre elas tomam-se os segmentos $AC = 13\ cm$ e $BD = 7\ cm$. No segmento $AB = 25\ cm$ toma-se um ponto P tal que os ângulos $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ sejam congruentes. Calcule a medida de $\overline{AP}$.

483. Considere a circunferência circunscrita a um triângulo ABC. Seja $\overline{AE}$ um diâmetro dessa circunferência e $\overline{AD}$ a altura do triângulo. Sendo AB $= 6\ cm$, $AC = 10\ cm$ e $AE = 30\ cm$, calcule a altura $\overline{AD}$.

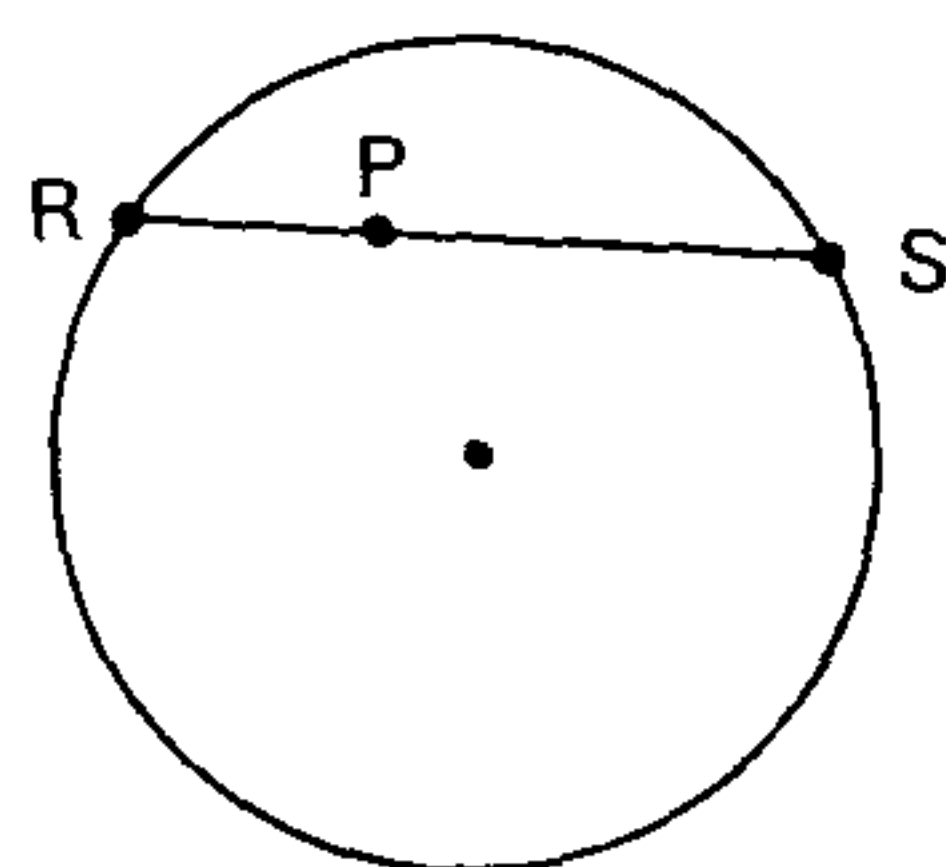
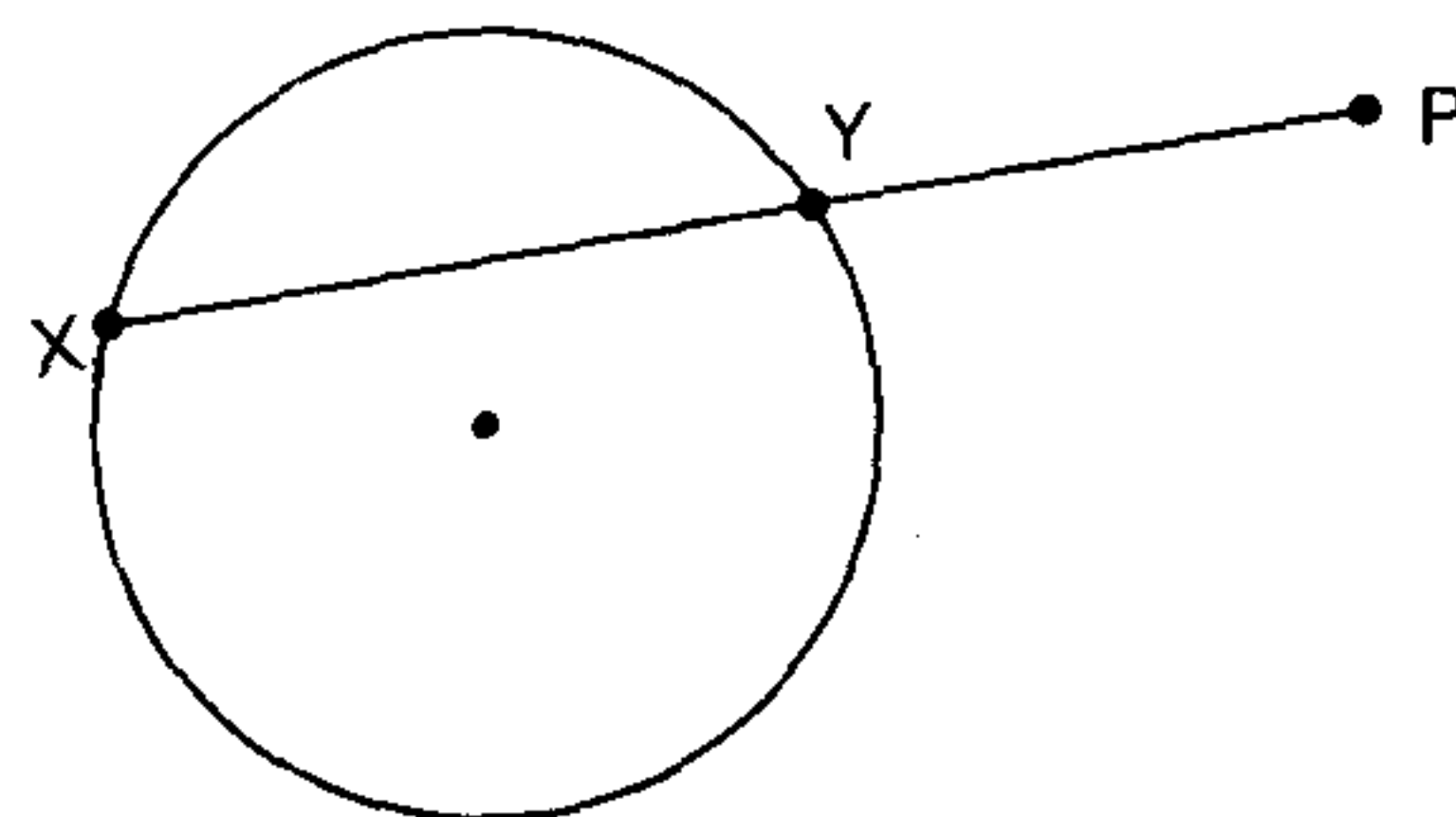
484. Calcule R, raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura, sendo: $AB = 4$, $AC = 6$, $AH = 3$.

485. Dois círculos de raios R e r são tangentes exteriormente no ponto A. Sendo C e D os pontos de tangência de uma reta t externa, com os dois círculos, determine a altura do triângulo ACD relativa ao lado $\overline{CD}$.

486. O ponto O é a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de um losango $ABCD$. Prolonga-se o lado $\overline{AD}$ até um ponto F de modo que $DF = 4\ m$. Se $\overline{OF}$ encontra $\overline{CD}$ em E e $ED = 2\ m$, determine o lado do losango.

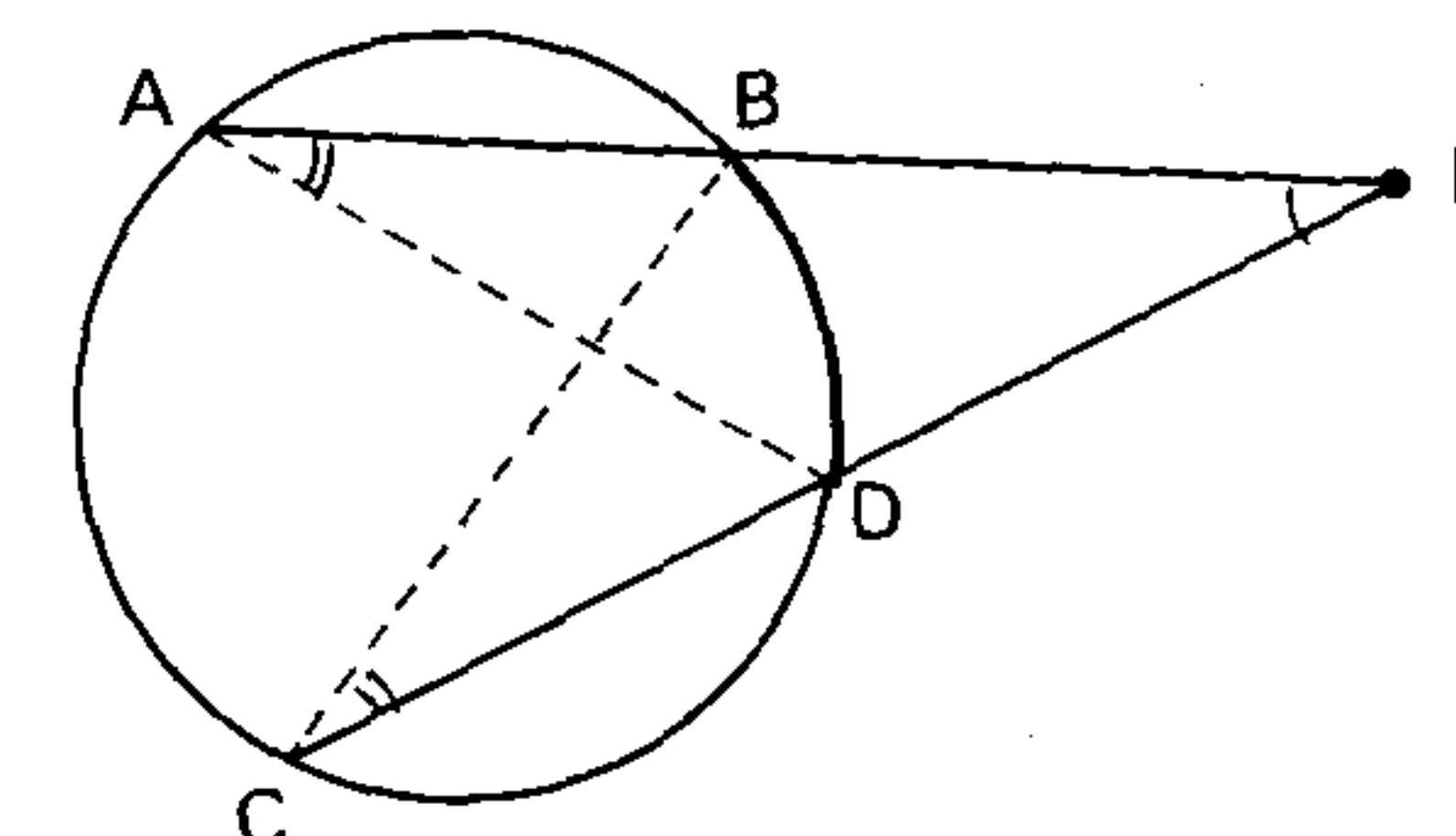
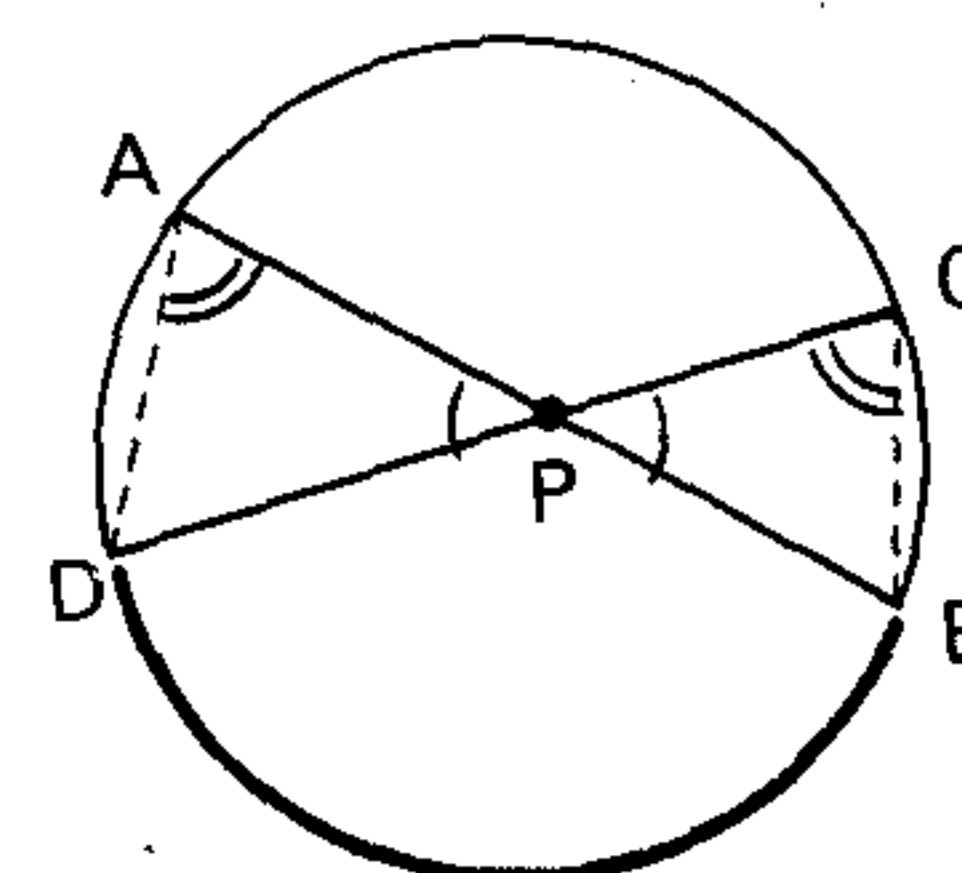
487. De um triângulo ABC sabemos que o ângulo $\hat{A}$ é o dobro do ângulo $\hat{C}$, $AB = 6\ m$ e que $AC = 10\ m$. Determine $\overline{BC}$

488. Na figura, as semi-retas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são tangentes à circunferência. Se as distâncias entre Q e as tangentes são 4 e 9, ache a distância entre Q e a corda $\overline{AB}$.

489. As retas t e ℓ são tangentes às circunferências em A. Determine AB em função de $a = BC$ e $b = BD$.

490. Na figura ao lado, $\overline{RQ}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$, $\overline{PQ}$ é perpendicular a $\overline{PT}$ e $\overline{TS}$ é perpendicular a $\overline{PR}$. Prove que:
$(TS) \cdot (RQ) = (PS) \cdot (PQ)$.

III. Potência de ponto

190. Vamos estudar a potência de um ponto P em relação a uma circunferência λ.

1º caso: P é interior a λ

2º caso: P é exterior a λ

Em casos como os das figuras acima dizemos que $\overline{RS}$ é uma corda e que $\overline{RP}$ e $\overline{PS}$ são suas partes; $\overline{PX}$ é um "segmento secante" e $\overline{PY}$ é sua parte exterior. Com isto, vamos a uma:

191. Dedução (para os dois casos)

Se por P passam duas retas concorrentes que interceptam a circunferência em A, B, C e D, respectivamente, temos:

Considerando os triângulos PAD e PCB:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P} \text{ comum (ou o.p.v.)} \\ \hat{A} = \hat{C} = \dfrac{\widehat{BD}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PAD \sim \Delta PCB \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD)$$

192. Enunciados

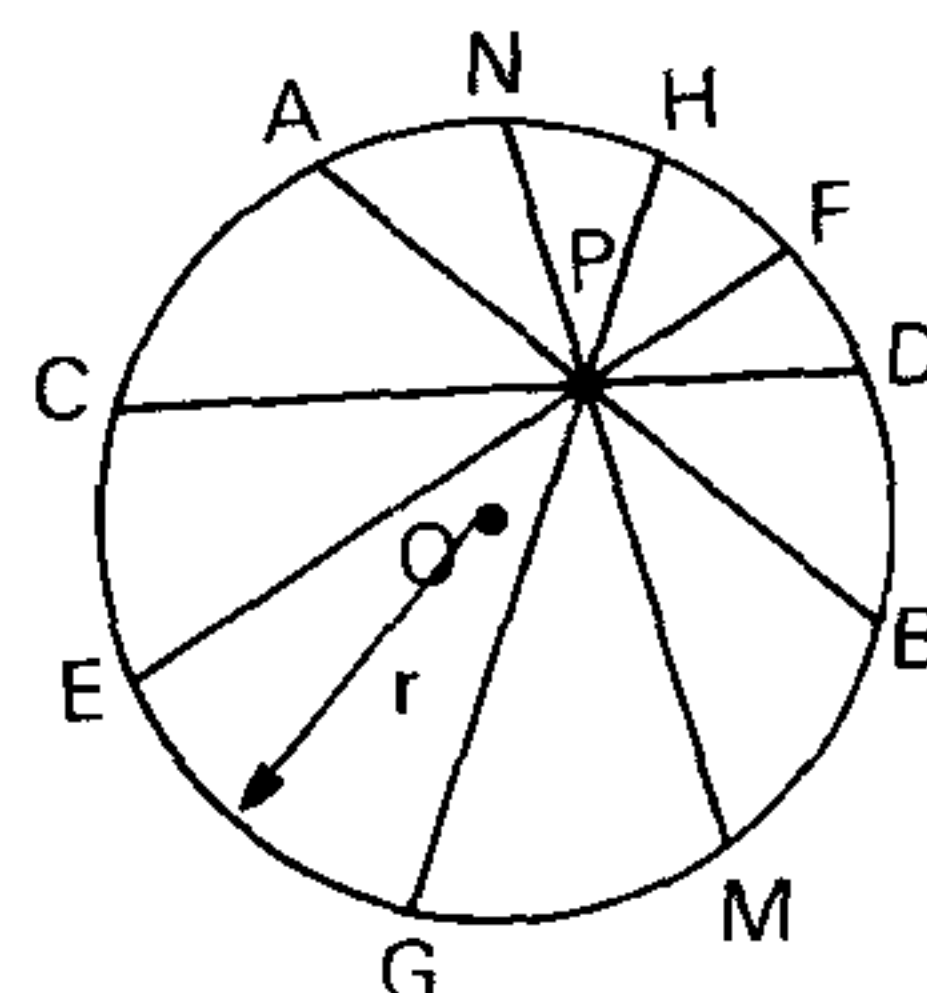
No 1º caso: "Se duas cordas de uma mesma circunferência se interceptam, então o produto das medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes da outra".

No 2º caso: "Se por um ponto (P) exterior a uma circunferência conduzimos dois "segmentos secantes" ($\overline{PA}$ e $\overline{PC}$), então o produto da medida do primeiro ($\overline{PA}$) pela de sua parte exterior ($\overline{PB}$) é igual ao produto da medida do segundo ($\overline{PC}$) pela de sua parte exterior ($\overline{PD}$)".

193. *Generalização do 1º caso*

Consideremos as cordas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, ..., $\overline{MN}$ que se interceptam em P.

Com o resultado anterior e tomando $\overline{AB}$ para comparação, temos:

$$(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD)$$
$$(PA) \times (PB) = (PE) \times (PF)$$
$$(PA) \times (PB) = (PG) \times (PH)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$(PA) \times (PB) = (PM) \times (PN)$$

Donde concluímos que, fixados o ponto P e a circunferência, $(PA) \times (PB)$ é constante, qualquer que seja a corda $\overline{AB}$ passando por P. Este produto $(PA) \times (PB)$ é chamado *potência do ponto P em relação à circunferência.*

Logo,

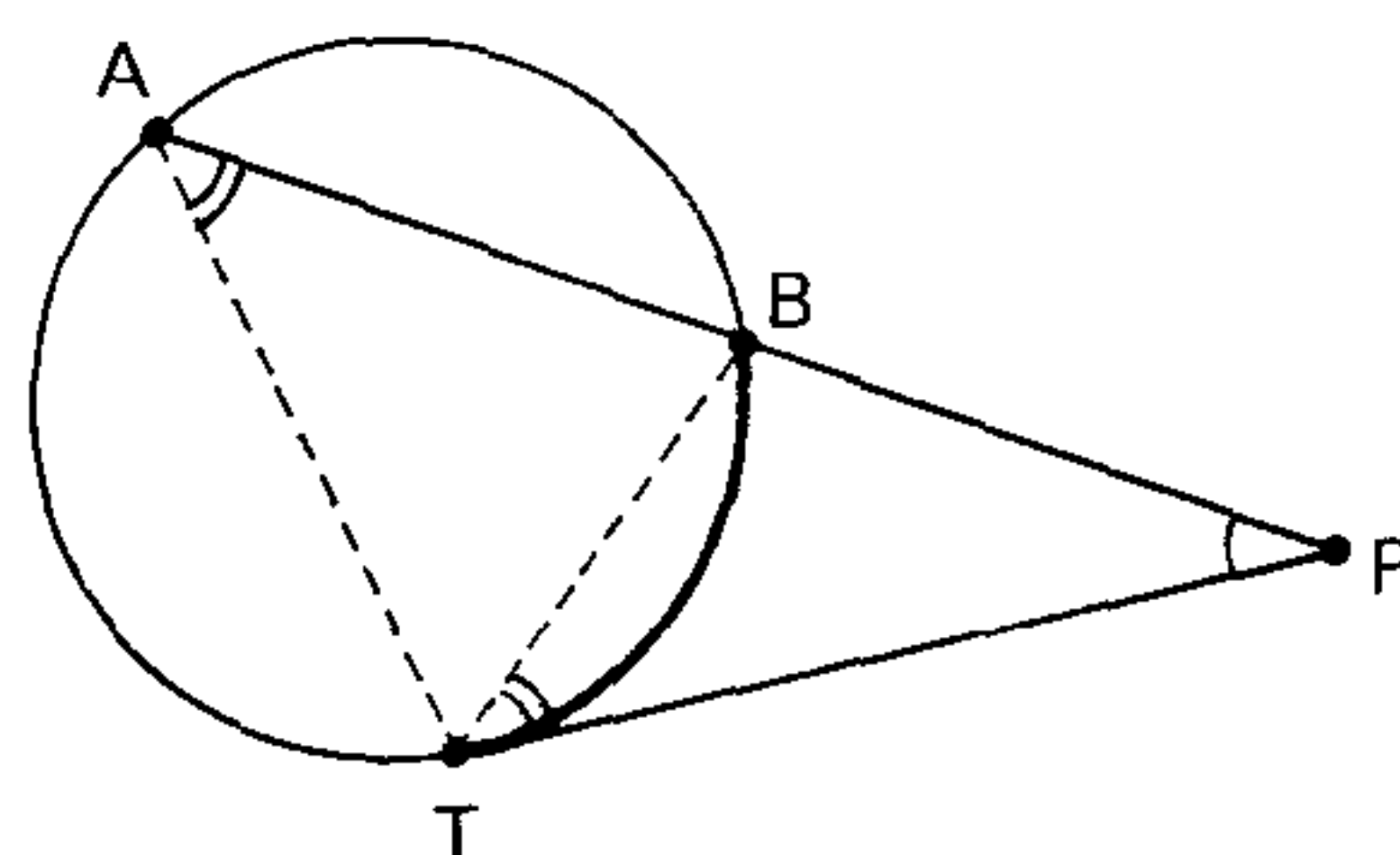
$$(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD) = (PE) \times (PF) = (PG) \times (PH) = \ldots$$
$$\ldots = (PM) \times (PN) = \text{Potência de P em relação à circunferência } \lambda(O, r).$$

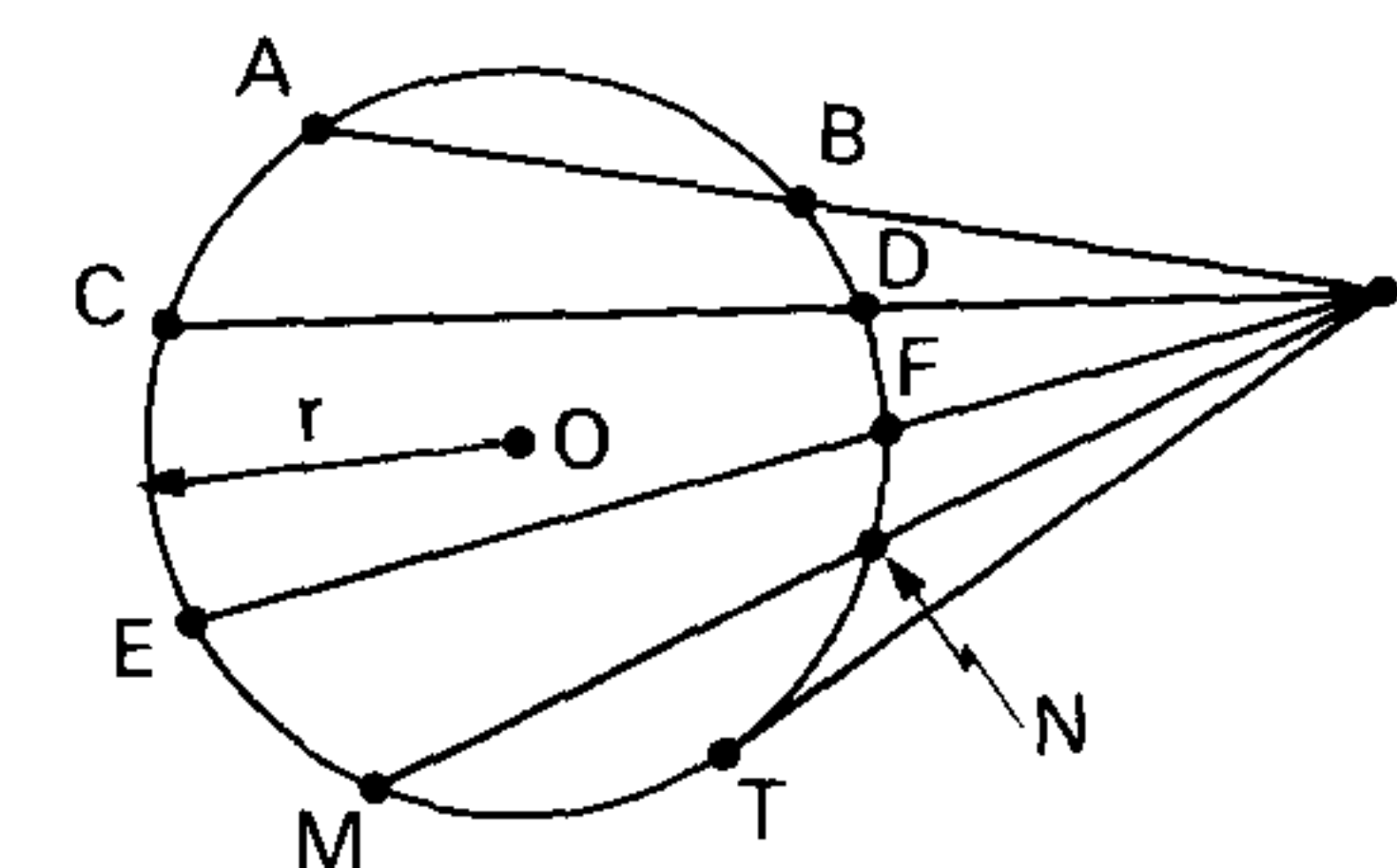
194. *Generalização do 2º caso*

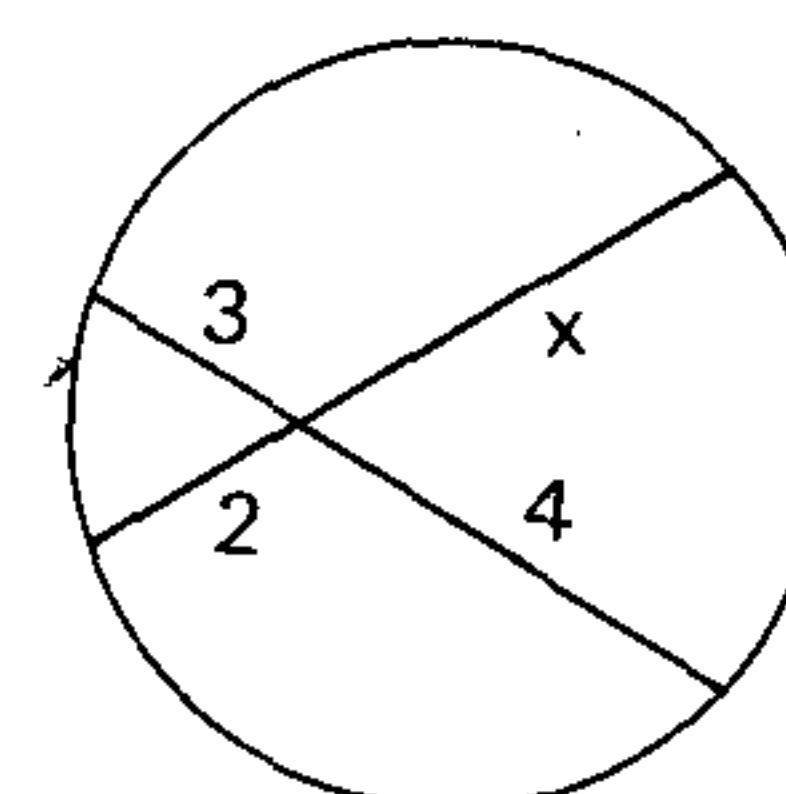
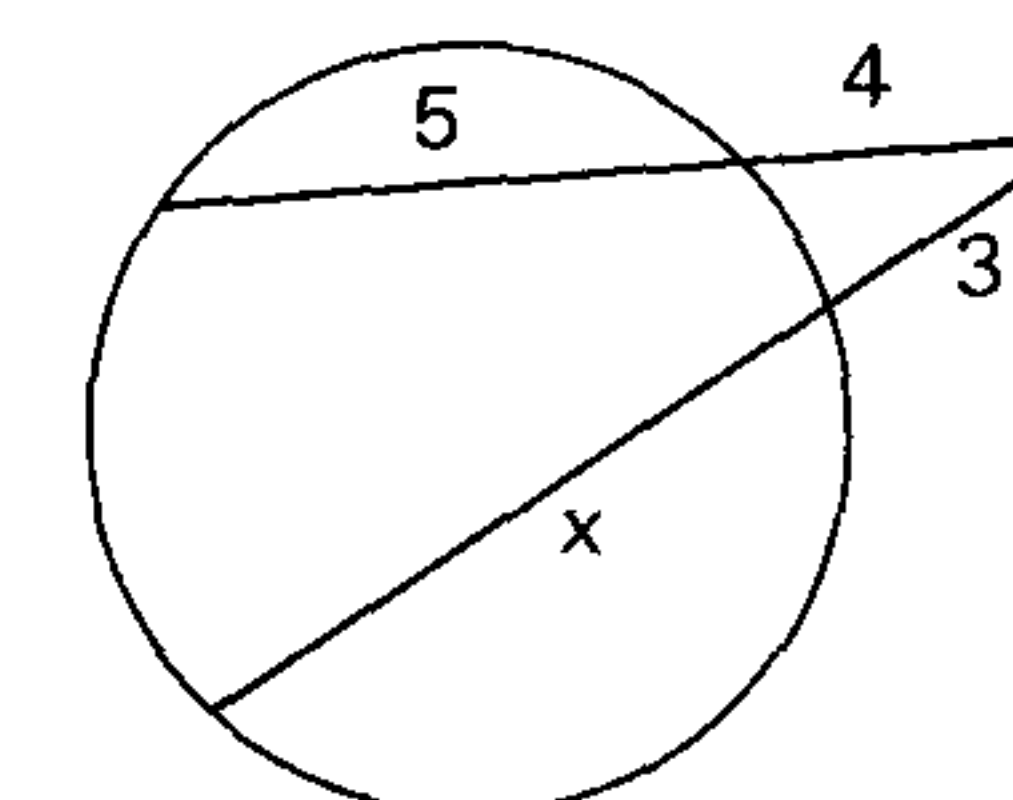
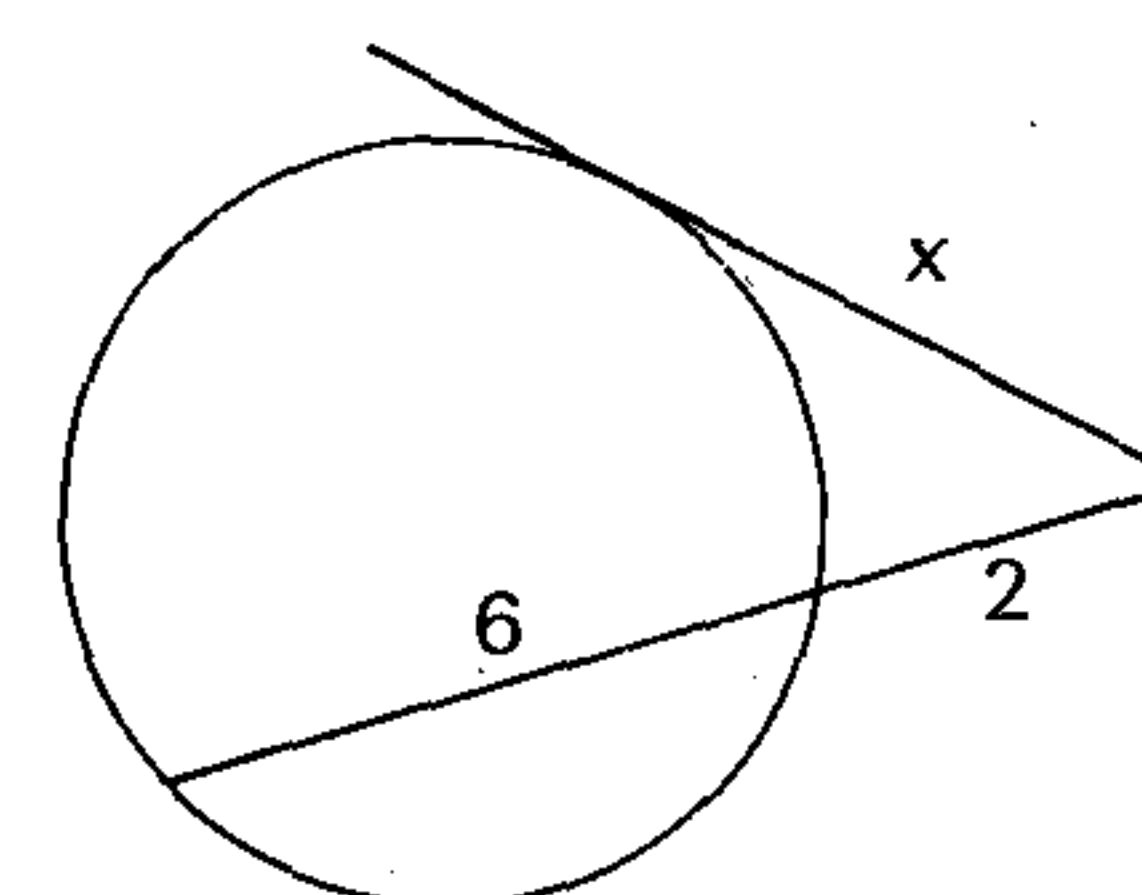
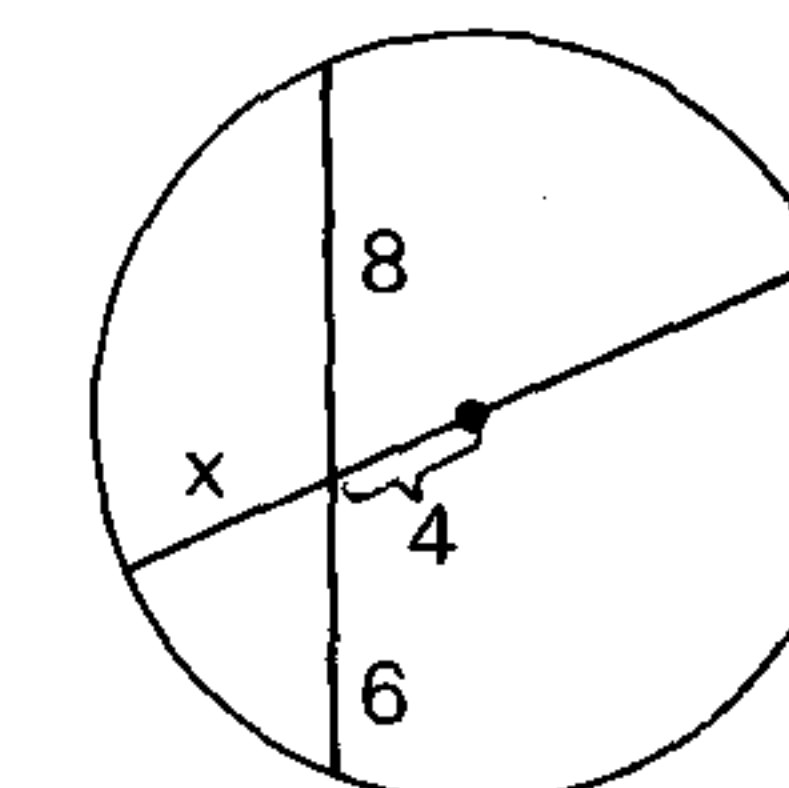
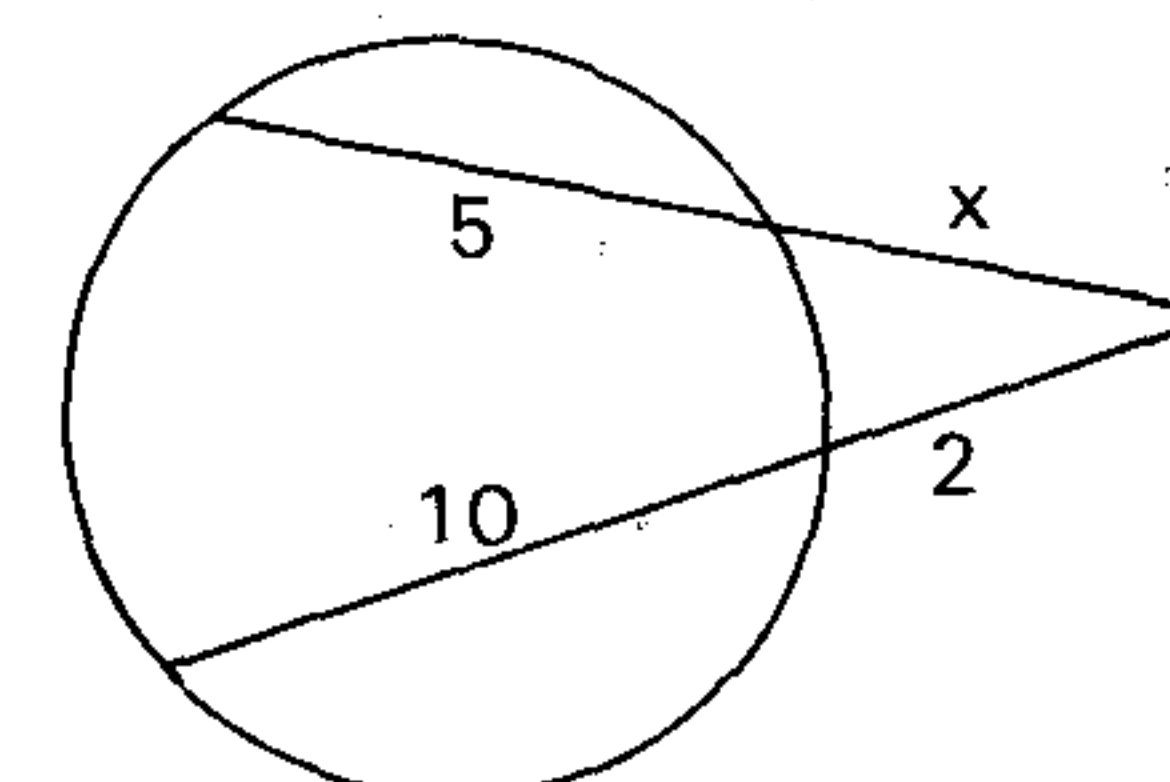
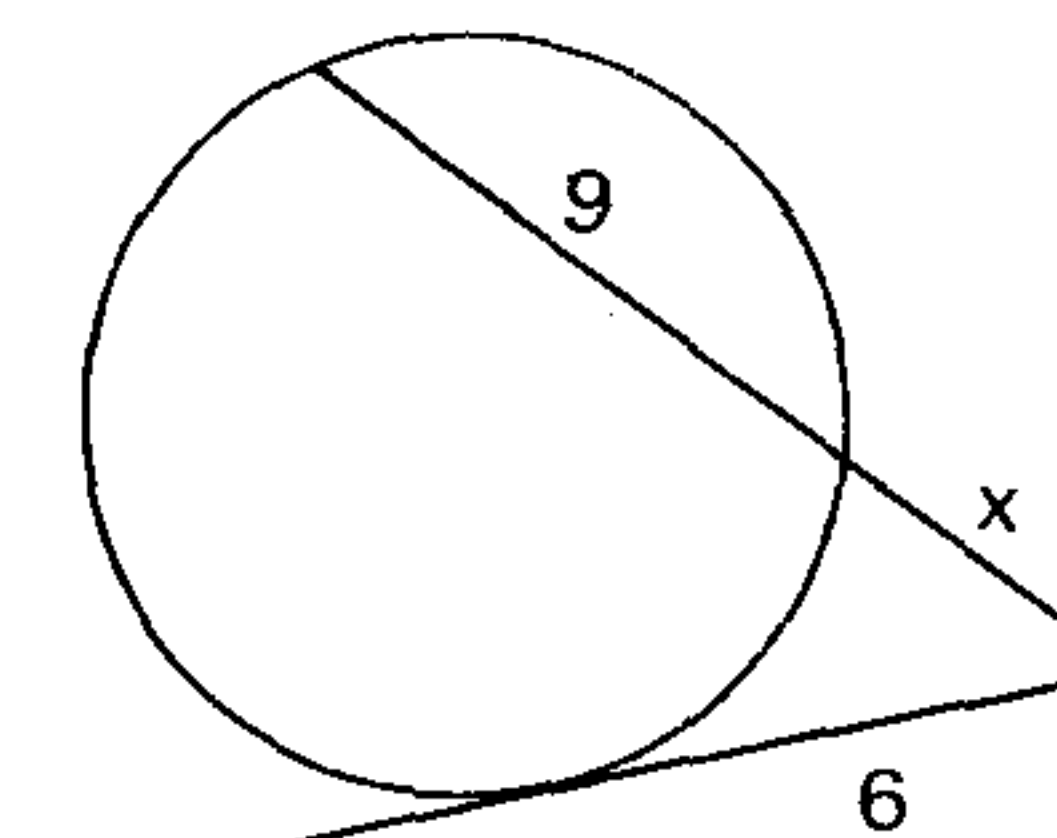
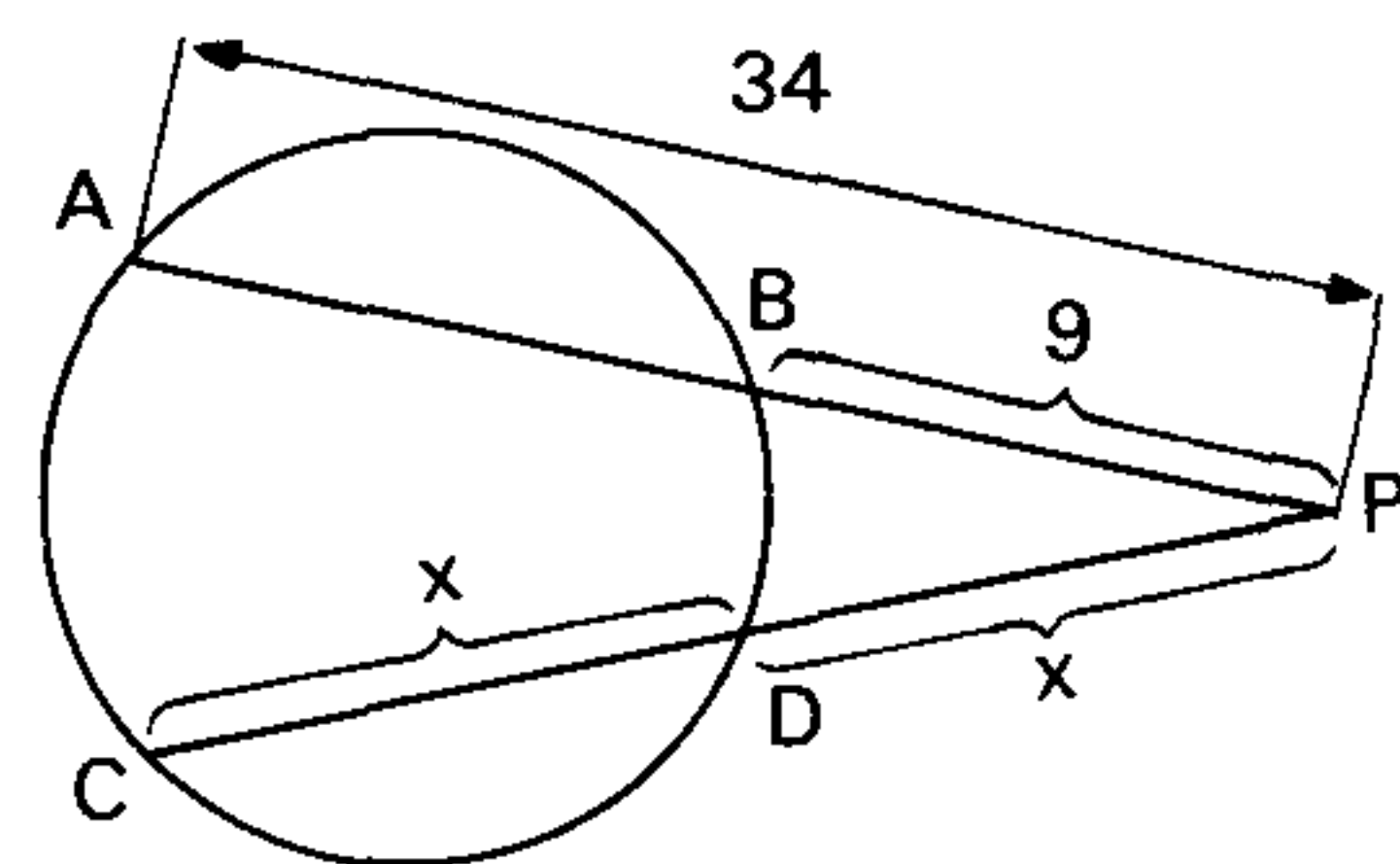
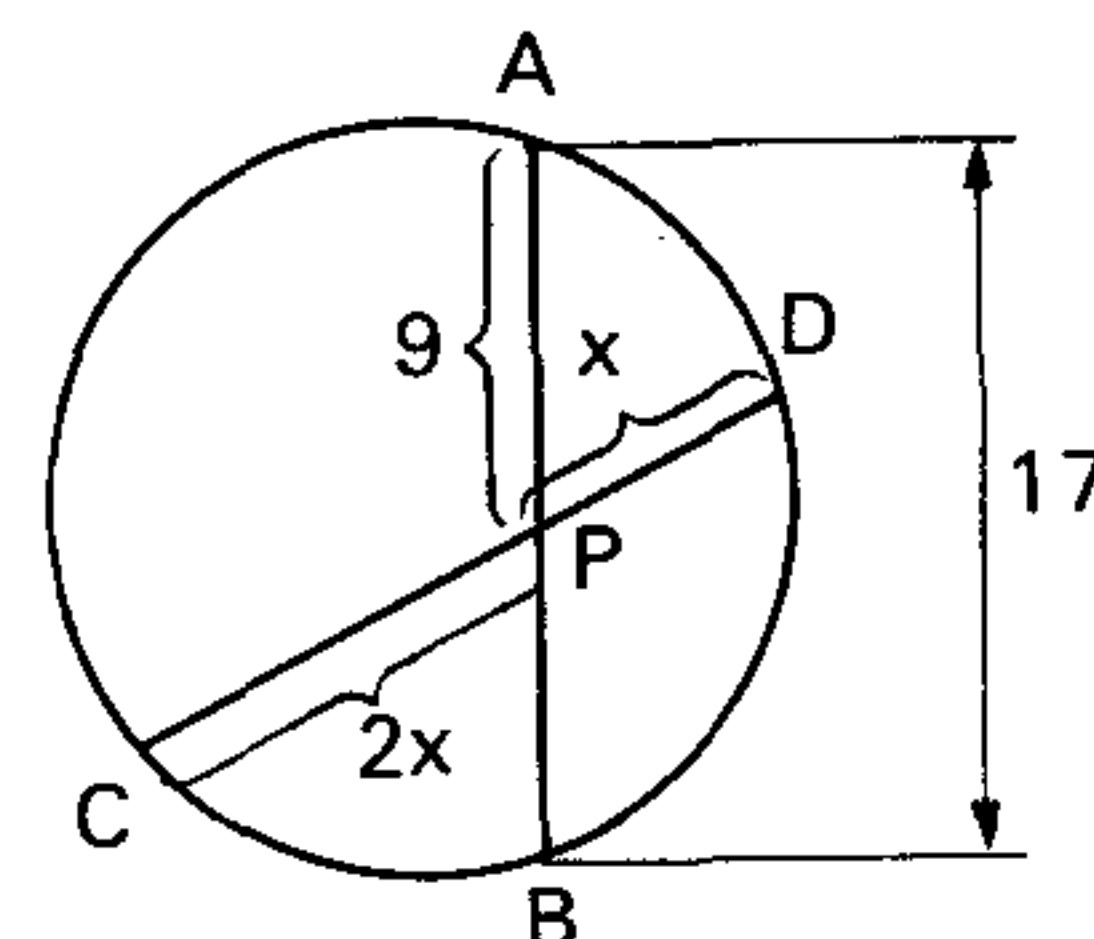
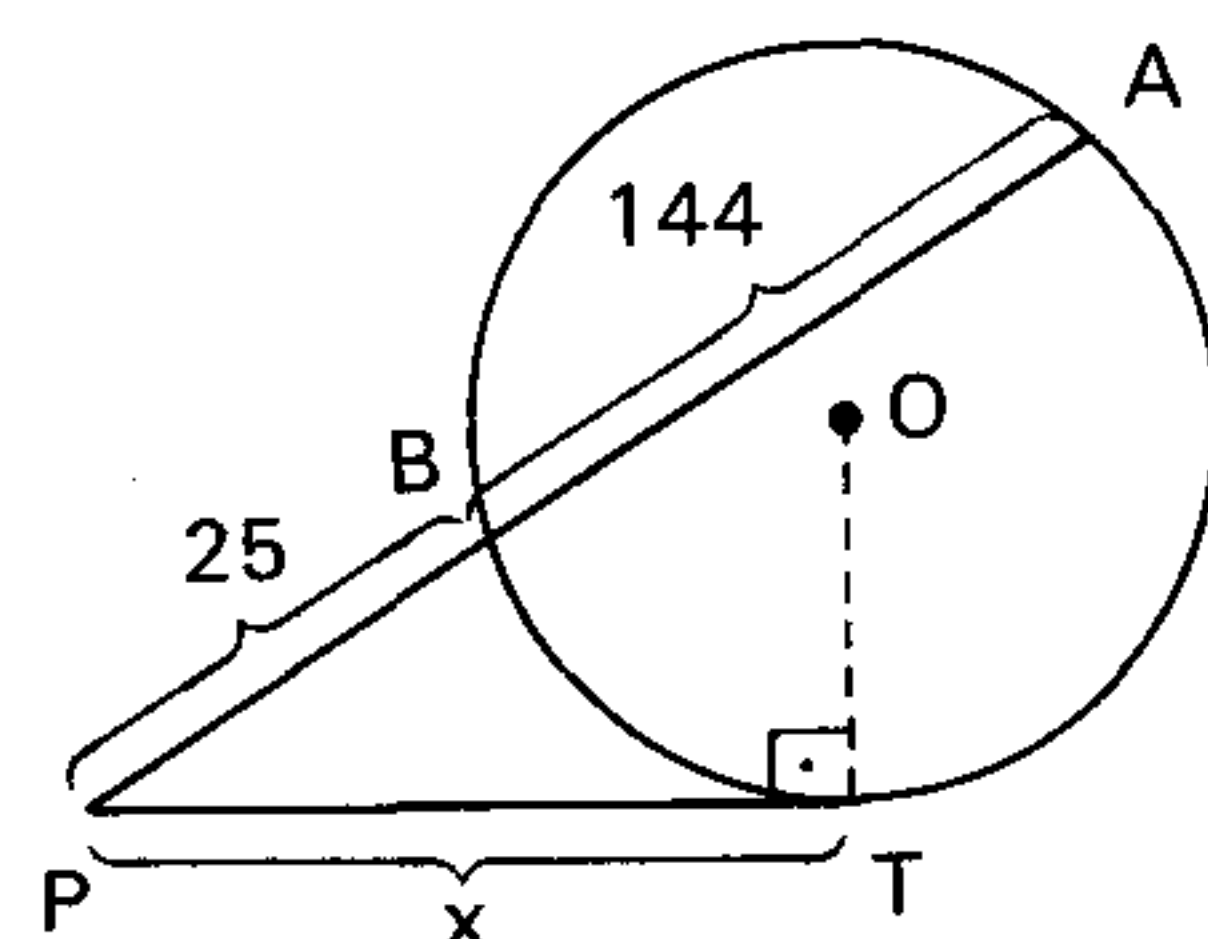
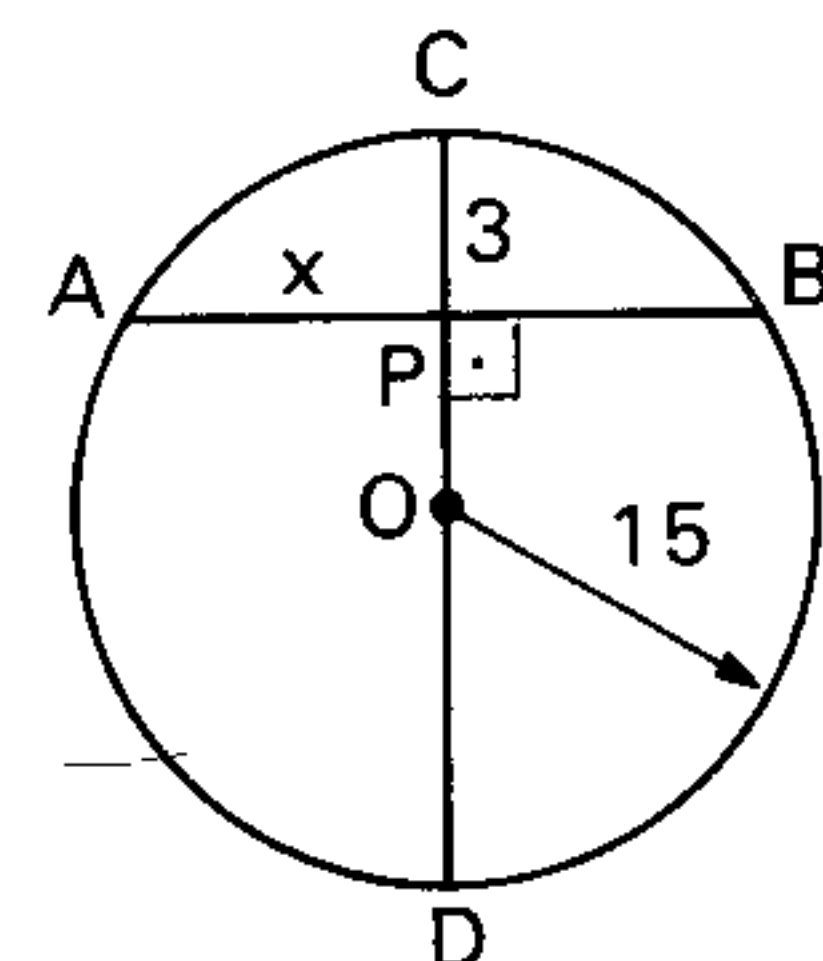
Consideremos o segmento secante $\overline{PA}$, sua parte exterior $\overline{PB}$ e um segmento $\overline{PT}$ tangente a λ.

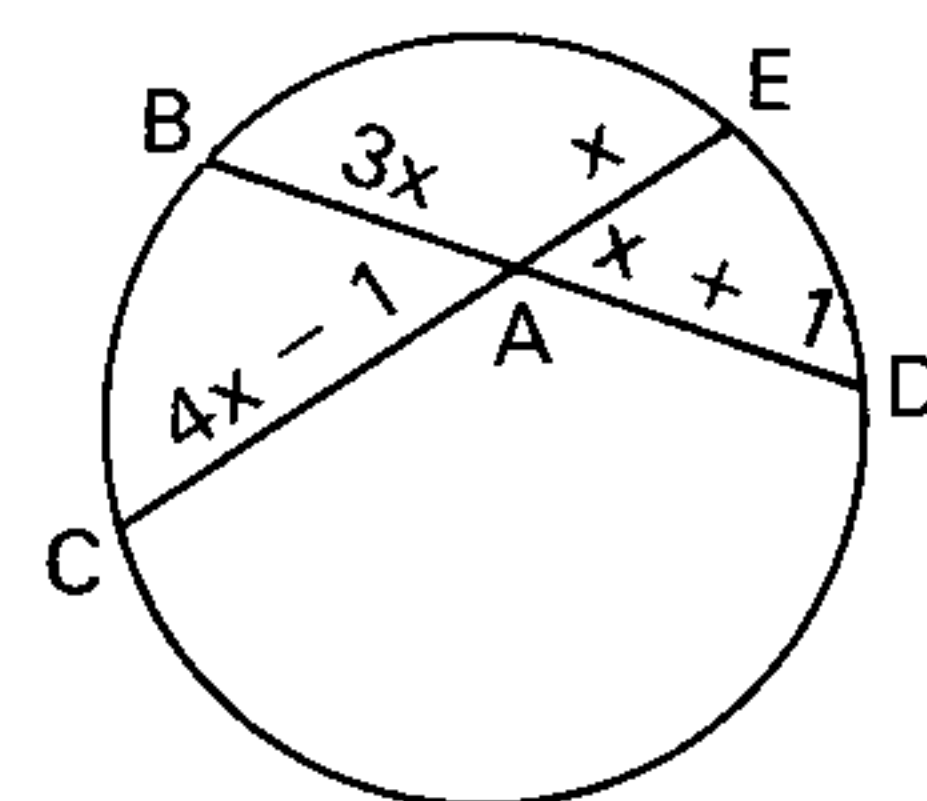
Analisando os triângulos PAT e PTB, vem:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P} \text{ comum} \\ \hat{A} = \hat{T} = \dfrac{\overset{\frown}{TB}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta PAT \sim \Delta PTB \Longrightarrow$$

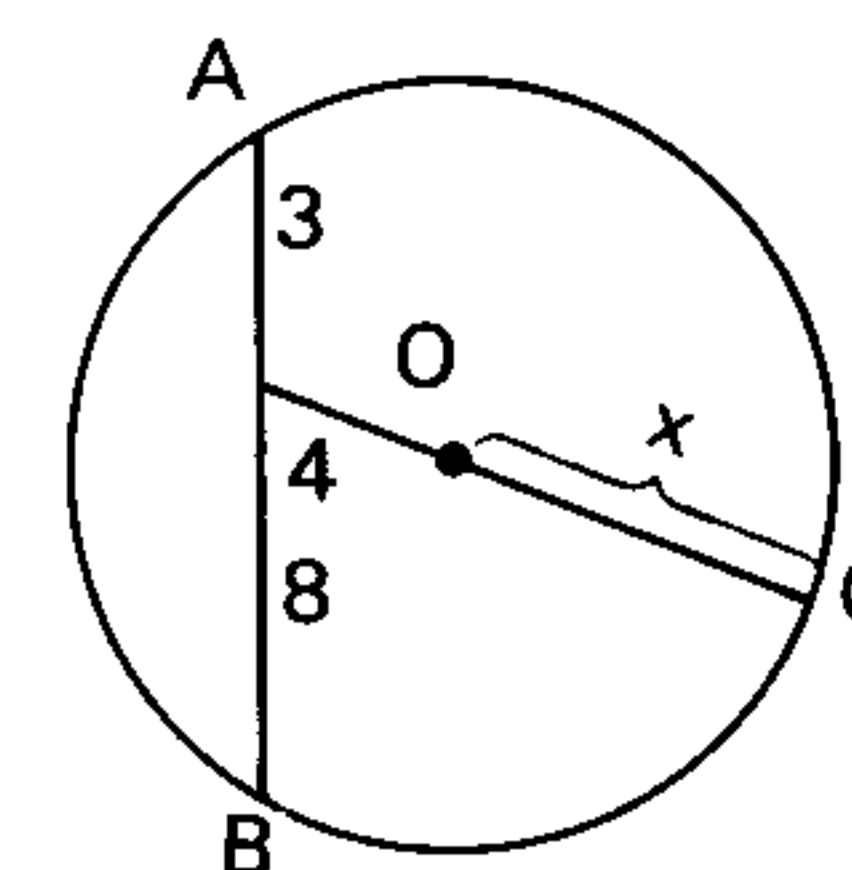
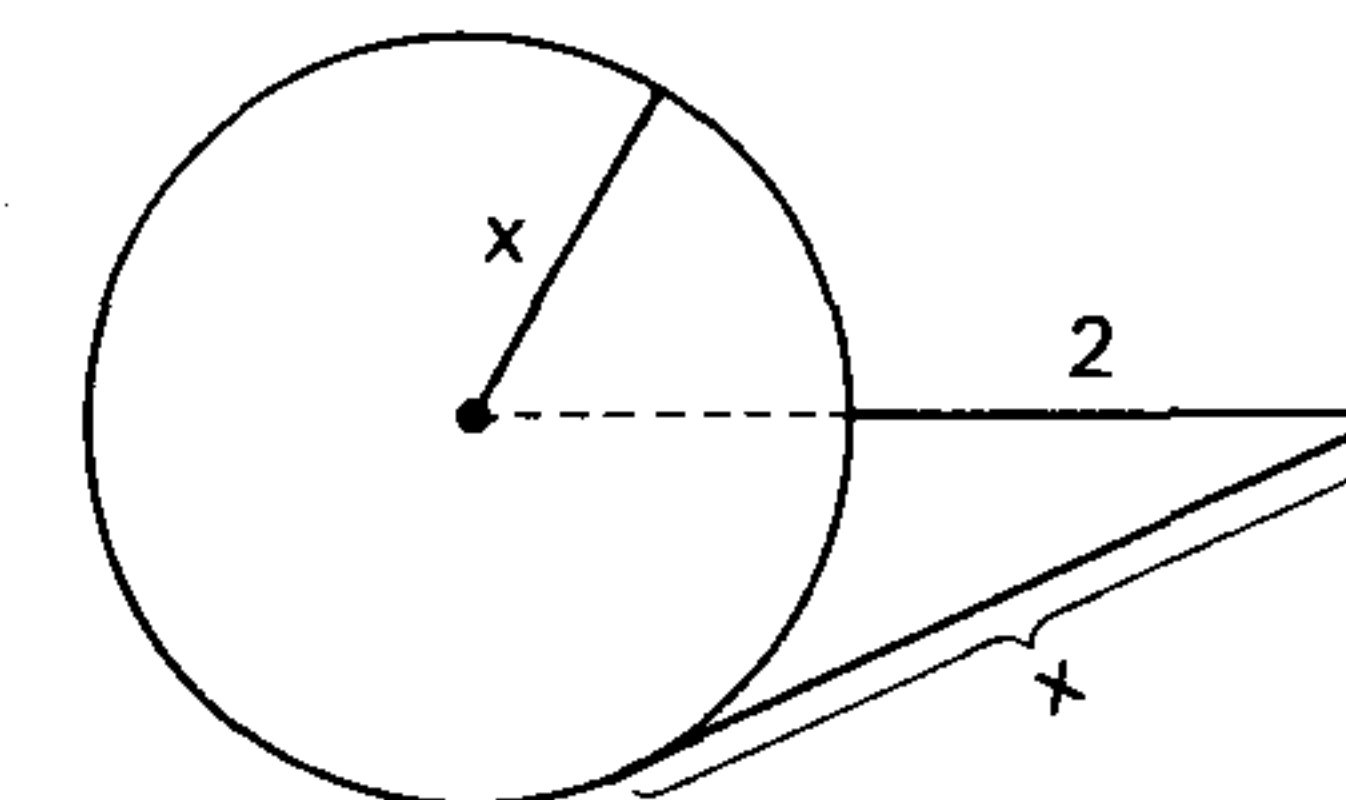
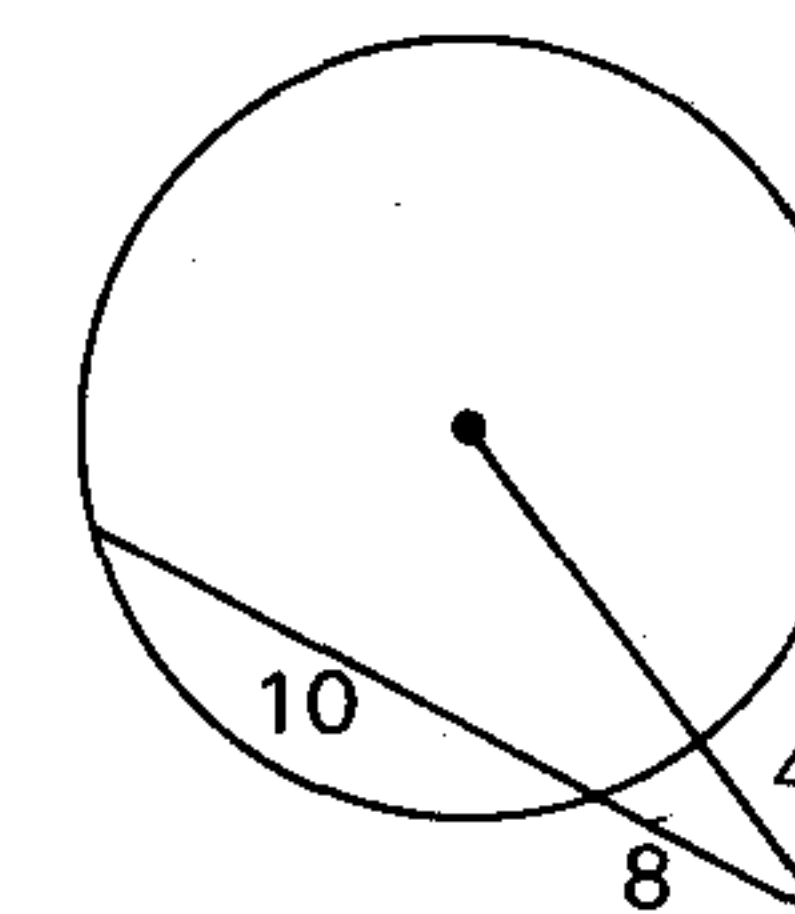
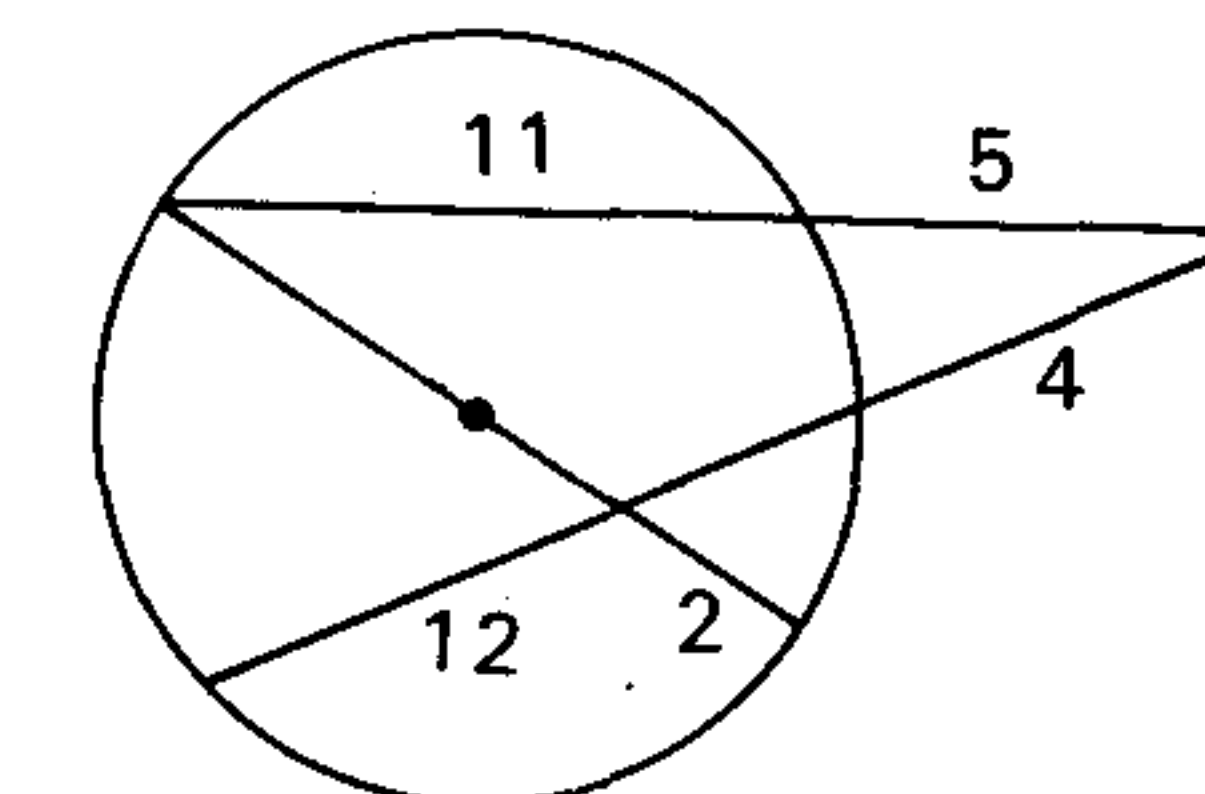
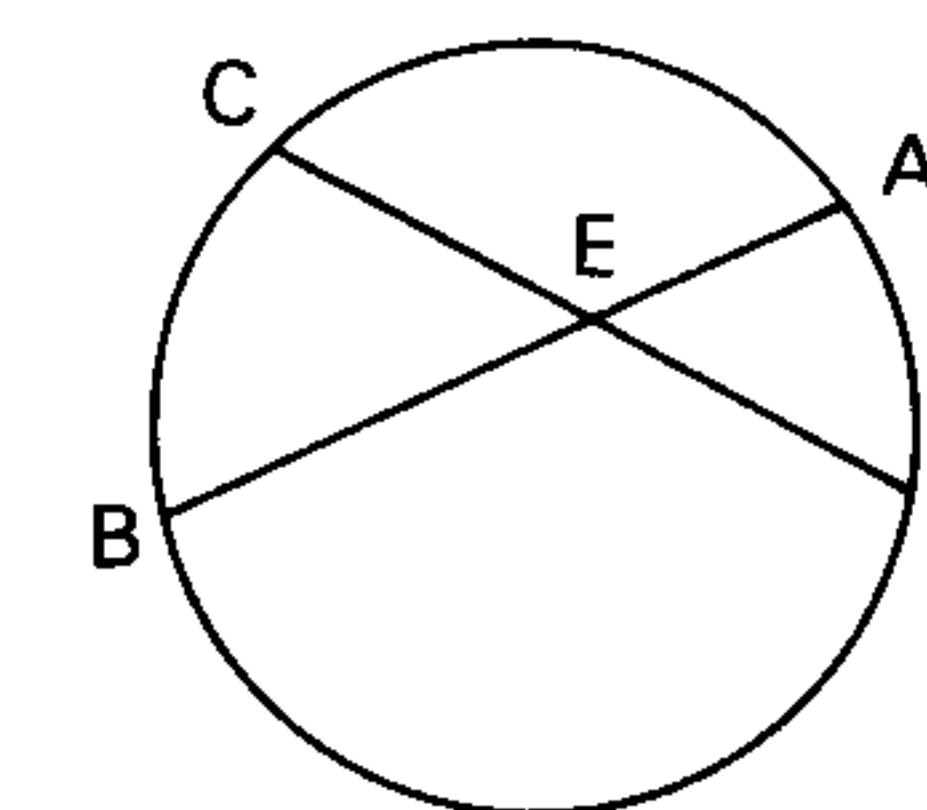
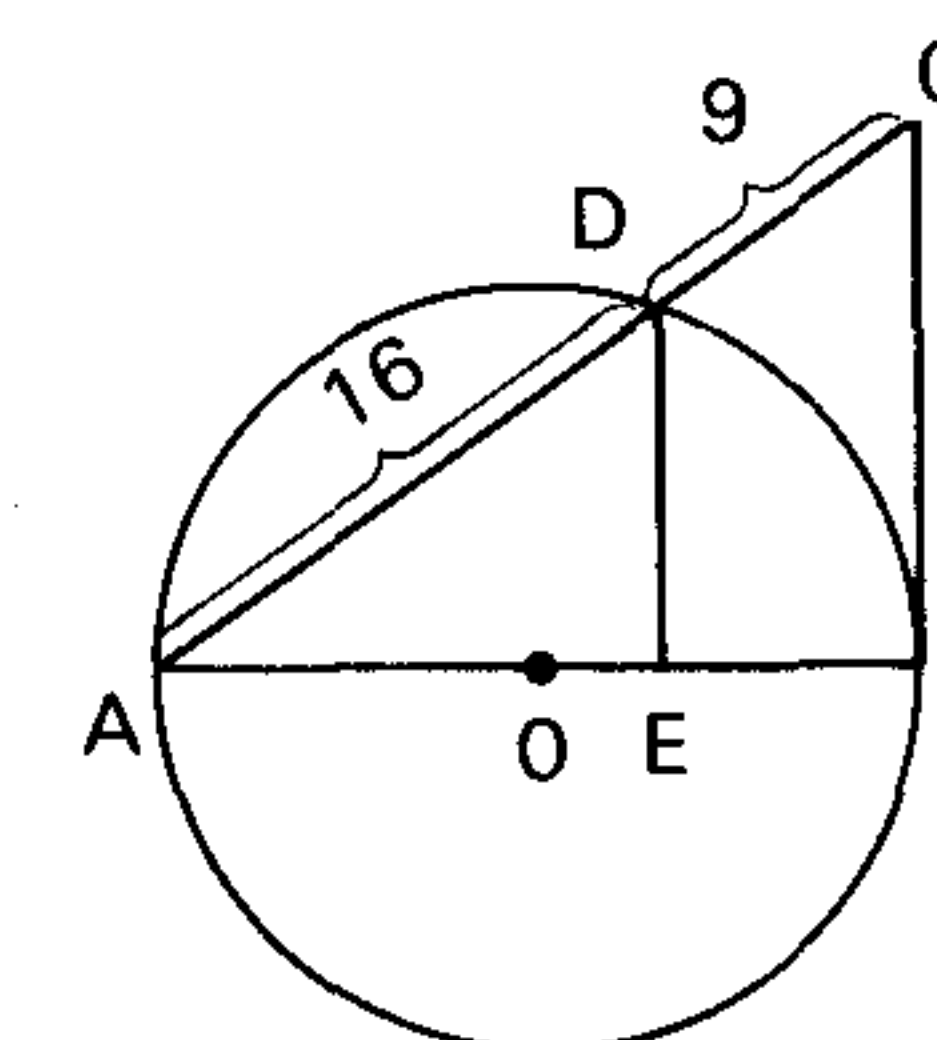
$$\Longrightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Longrightarrow (PA) \times (PB) = (PT)^2$$

Com o resultado acima, e procedendo de modo análogo ao feito no 1º caso, temos:

$$(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD) = (PE) \times (PF) = \ldots = (PM) \times (PN) = (PT)^2 = \text{Potência do ponto } P \text{ em relação à circunferência } \lambda(O, r).$$

EXERCÍCIOS

491. Em cada caso, determine a incógnita.

a) b) c) d) e) f)

492. Determine o valor de x nas figuras abaixo.

a) b)

493. Determine x nos casos:

a) b)

494. Na figura, calcule as medidas das cordas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$.

AB = 3x
AC = 4x − 1
AD = x + 1
AE = x

Solução

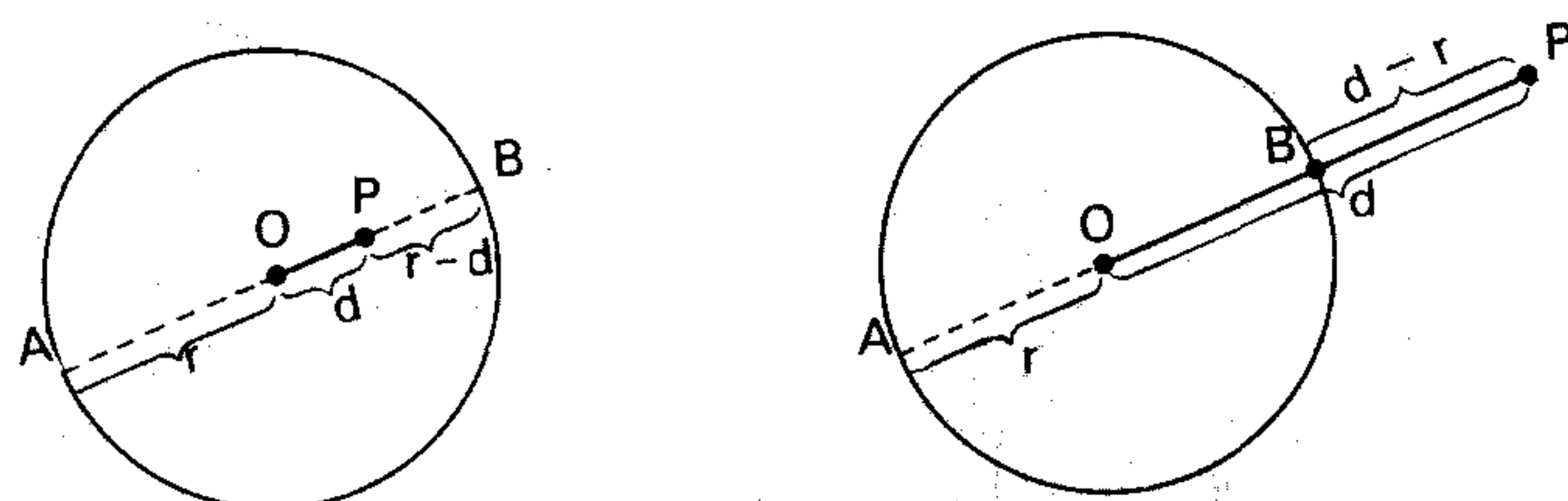
(AB) × (AD) = (AC) × (AE)
3x(x + 1) = (4x − 1)x
x = 0 (não serve) ou x = 4
BD = 3x + x + 1 = 17;
CE = 4x − 1 + x = 19

495. Determine o valor de x nas figuras abaixo.

a) b)

496. Determine o raio do círculo nos casos:

a) b)

497. Na figura, sendo $ED : EC = 2 : 3$, $AE = 6$ e $EB = 16$, calcule o comprimento de $\overline{CD}$.

498. Determine a medida do segmento $\overline{DE}$ da figura, sabendo que $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência, B o ponto de tangência do segmento $\overline{BC}$ à circunferência e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

Solução

Potência de ponto $\Longrightarrow$ $(BC)^2 = 9(25)$ $\Longrightarrow$ $BC = 15$

Semelhança $\Longrightarrow$ $\dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AD}$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{15}{DE} = \dfrac{25}{10}$ $\Longrightarrow$ $DE = \dfrac{48}{5}$

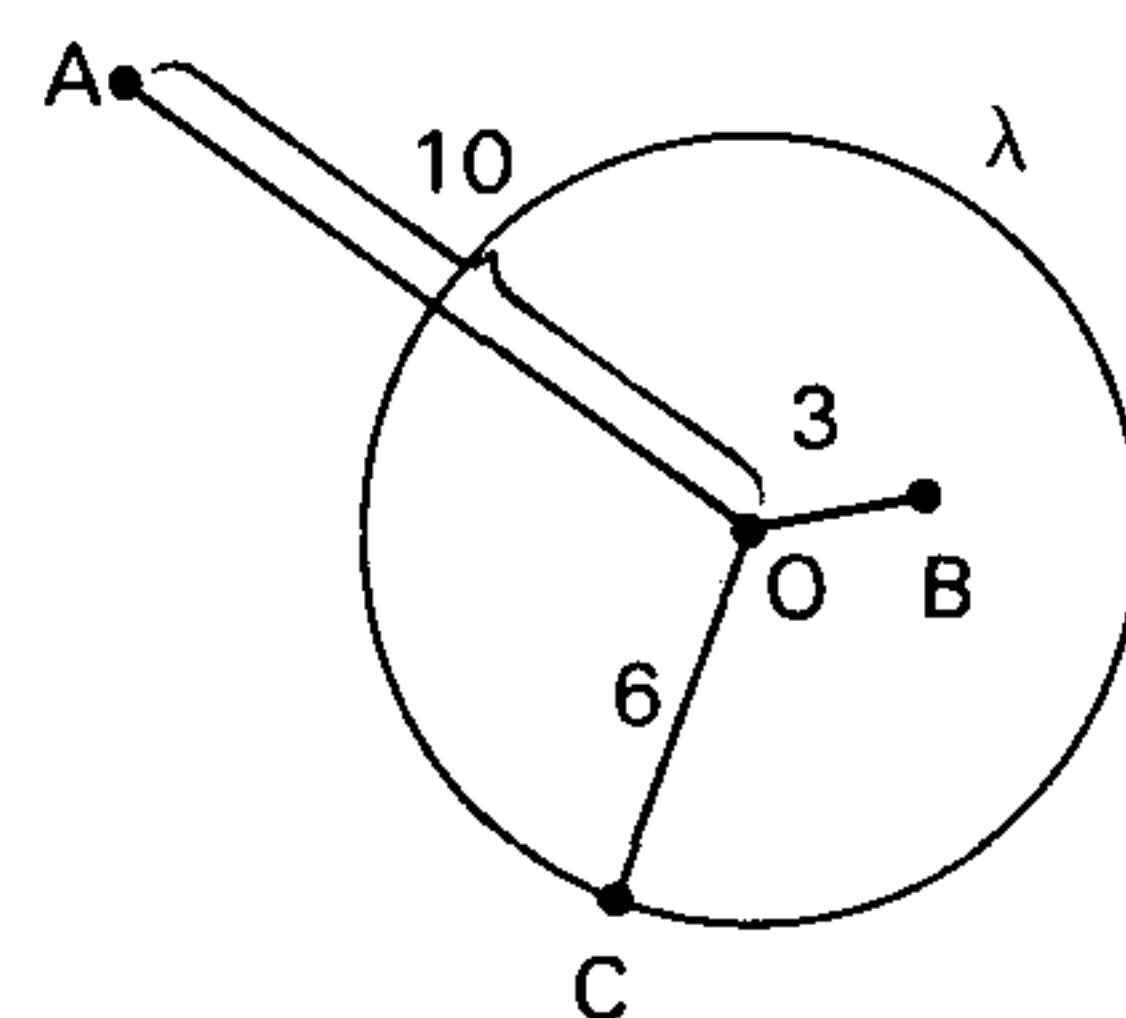
499. Calcule a potência de um ponto P em relação a uma circunferência de centro O e raio r, em função da distância d entre O e P e do raio r.

Solução

Conforme vimos nos itens 193 e 194, qualquer corda (ou segmento secante) serve para nos dar a potência x de P em relação à circunferência.

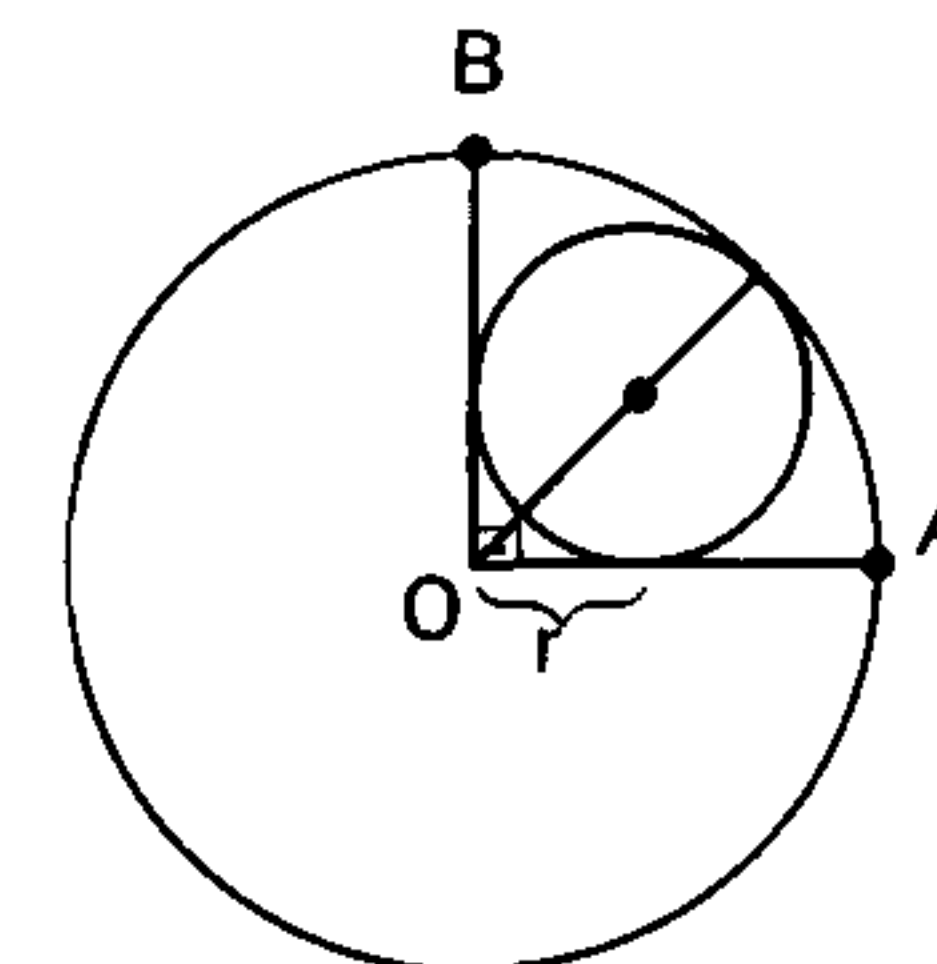
No 1º caso: $x = (\overline{PA}) \times (\overline{PB}) = (d + r) \times (r - d) = r^2 - d^2$

No 2º caso: $x = (\overline{PA}) \times (\overline{PB}) = (d + r) \times (d - r) = d^2 - r^2$

Nos dois casos: $x = |d^2 - r^2|$.

500. Na figura ao lado, calcule *pot A* + *pot B* + *pot C*.

Obs.: pot A = potência de A em relação a λ.

501. Por um ponto P distante *18 cm* de uma circunferência, traça-se uma secante que determina na circunferência uma corda $\overline{AB}$ de medida *10 cm*. Calcule o comprimento da tangente a essa circunferência traçada do ponto P, sabendo que $\overline{AB}$ passa pelo centro da circunferência.

502. Determine o raio do círculo menor inscrito num quadrante do círculo maior, da figura ao lado, sendo $2R$ o diâmetro do círculo maior.

503. Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se num ponto P interno a uma circunferência. Determine a medida do segmento $\overline{BP}$, sabendo que os segmentos $\overline{CP}$, $\overline{DP}$ e a corda $\overline{AB}$ medem, respectivamente, *1 cm, 6 cm* e *5 cm*.

504. Num círculo duas cordas se cortam. O produto dos dois segmentos da primeira corda é $25\ cm^2$. Sabe-se que na segunda corda o menor segmento vale $\frac{1}{4}$ do maior. Determine a medida do maior segmento dessa segunda corda.

505. $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são duas cordas de medidas iguais, pertencentes a um círculo. Uma corda $\overline{AD}$ intercepta a corda $\overline{BC}$ num ponto P. Prove que os triângulos ABD e APB são semelhantes.

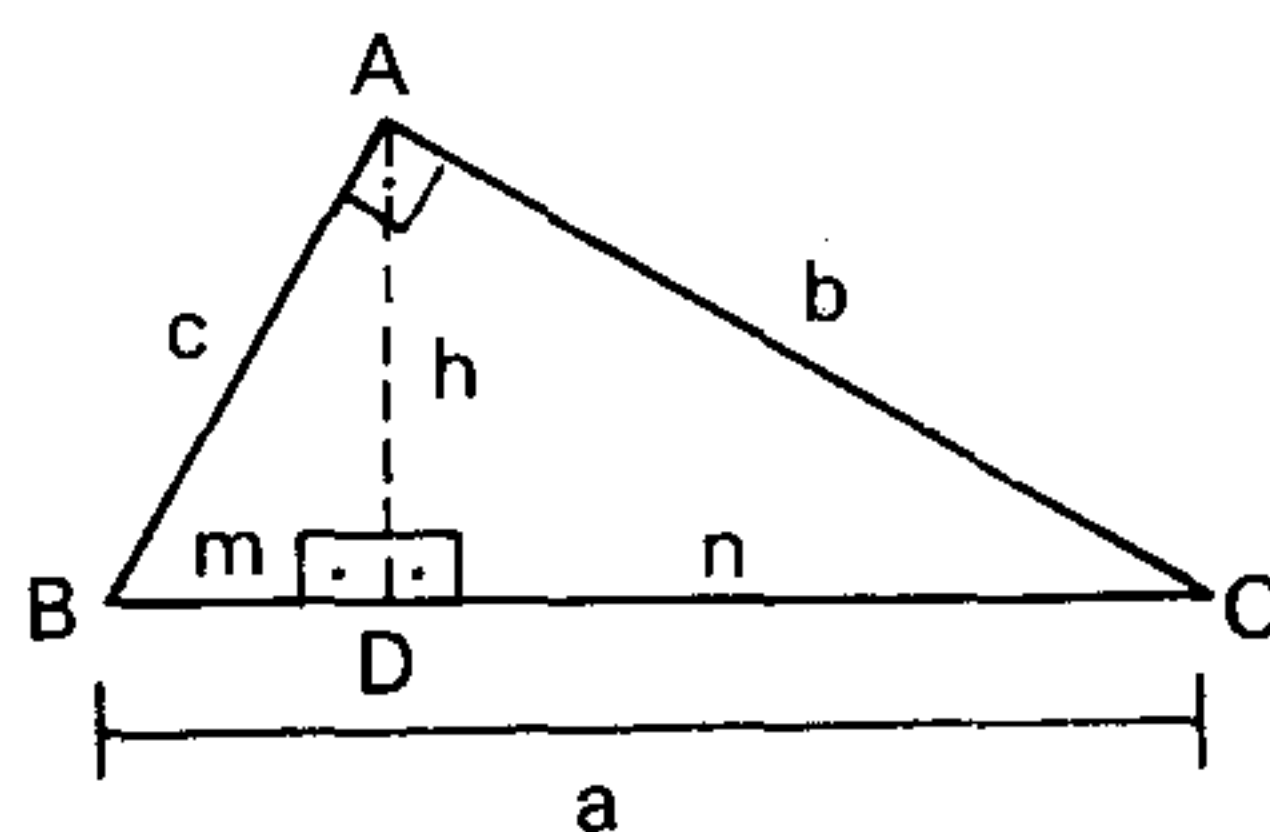
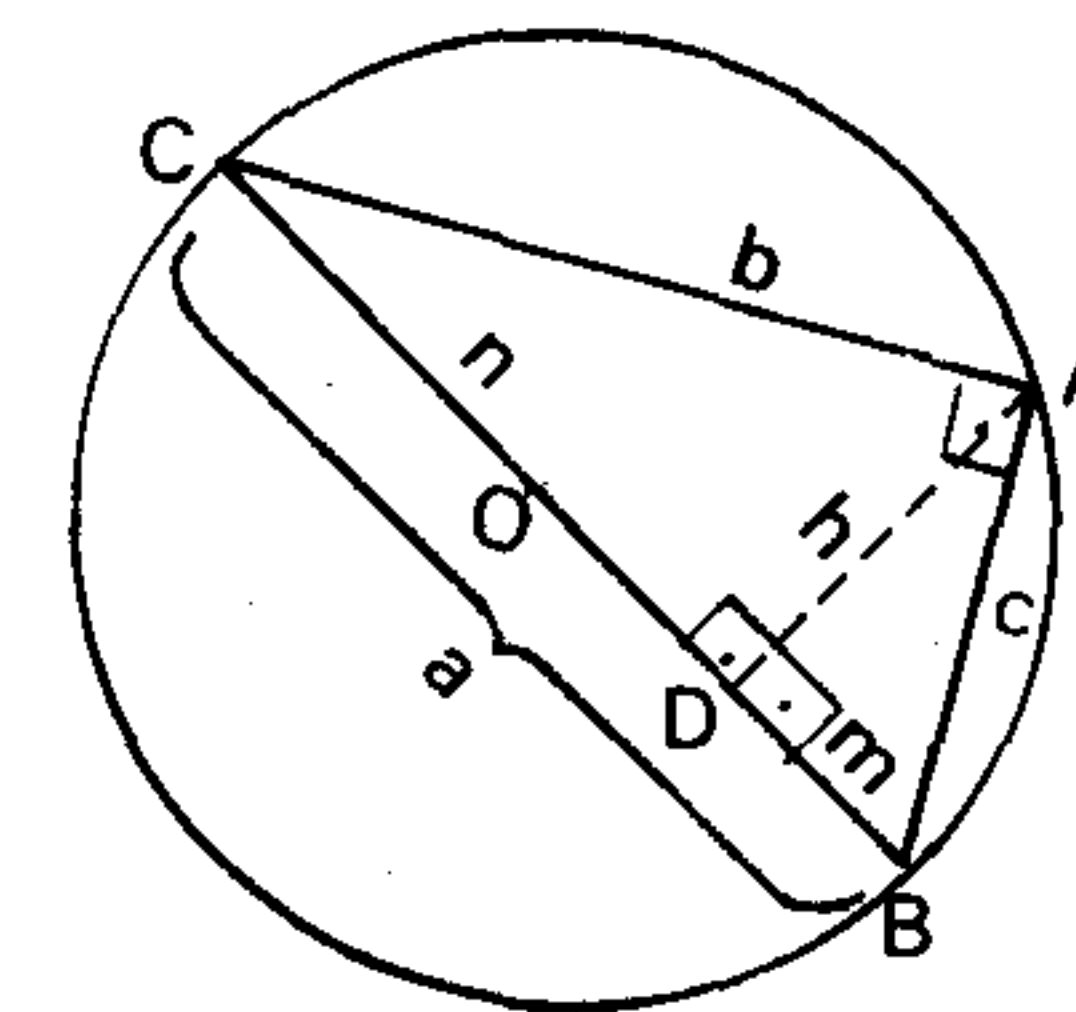
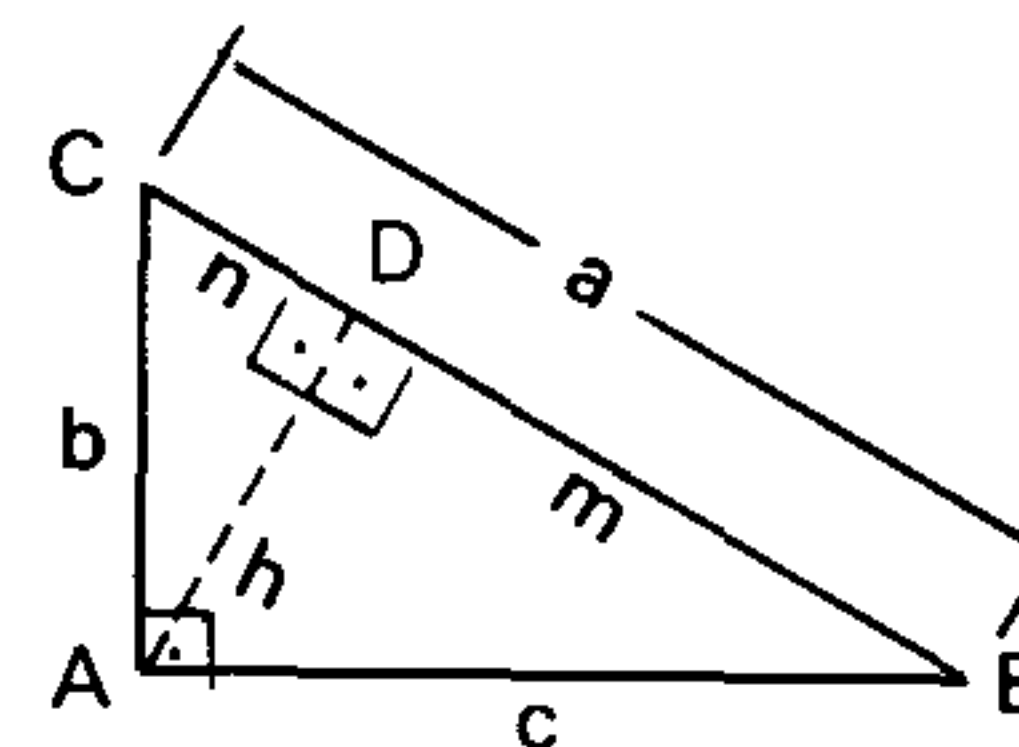
CAPÍTULO XIV

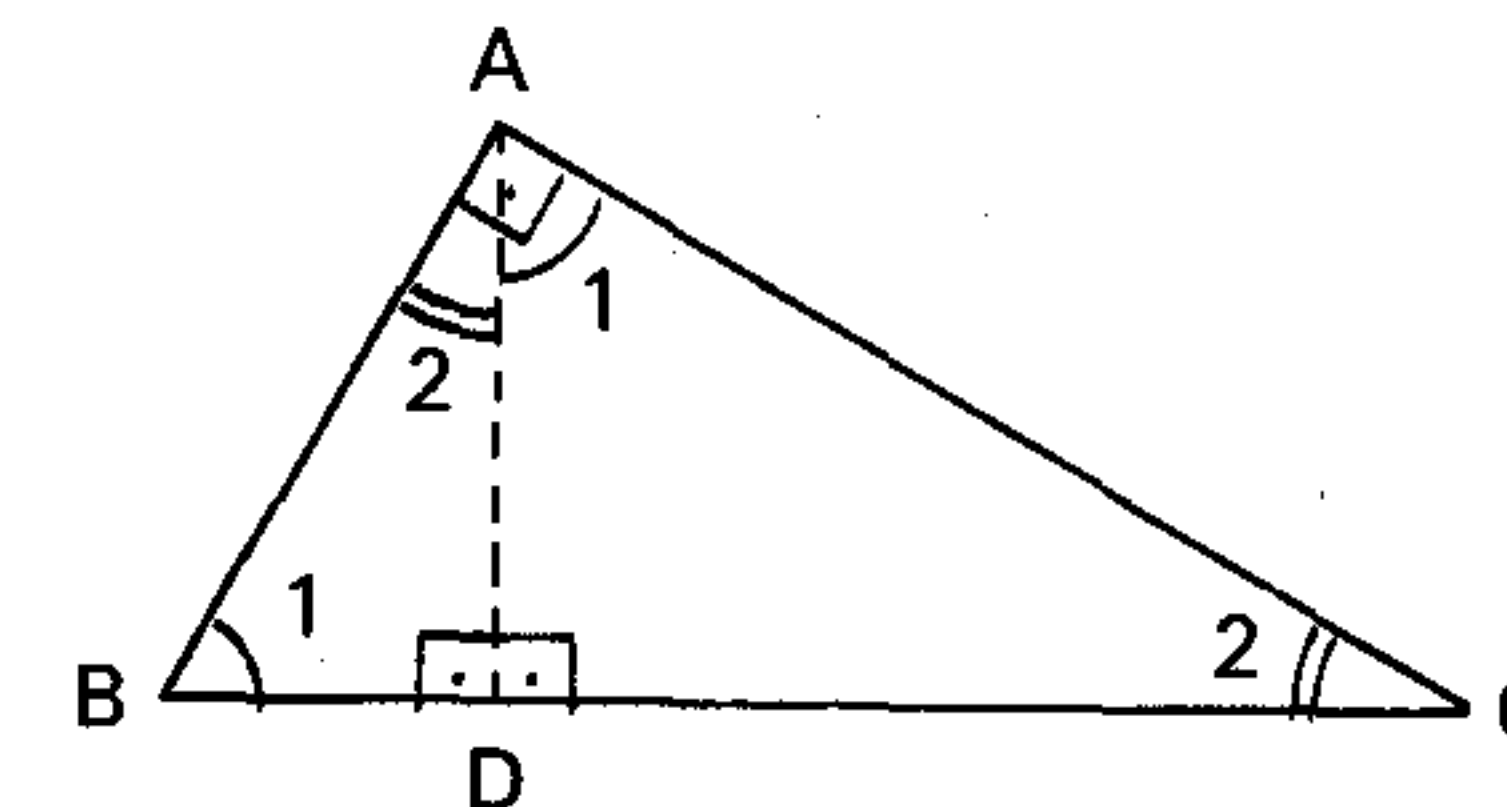
Triângulos Retângulos

I. Relações métricas

195. Elementos

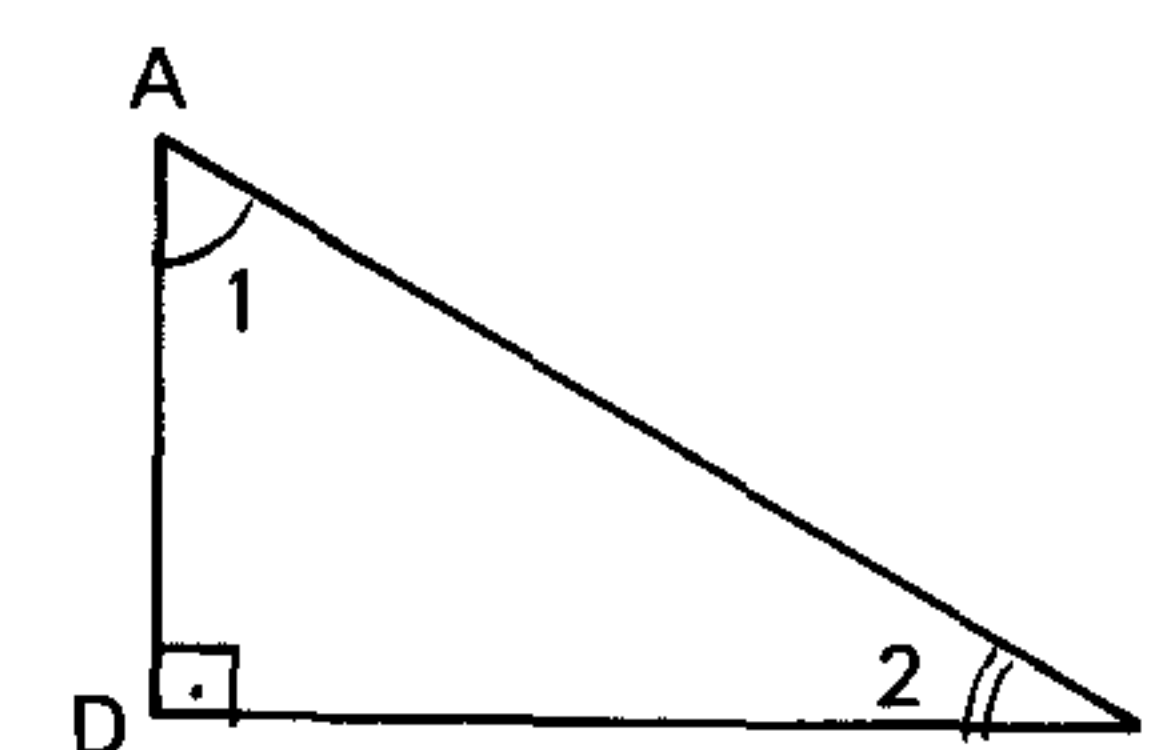
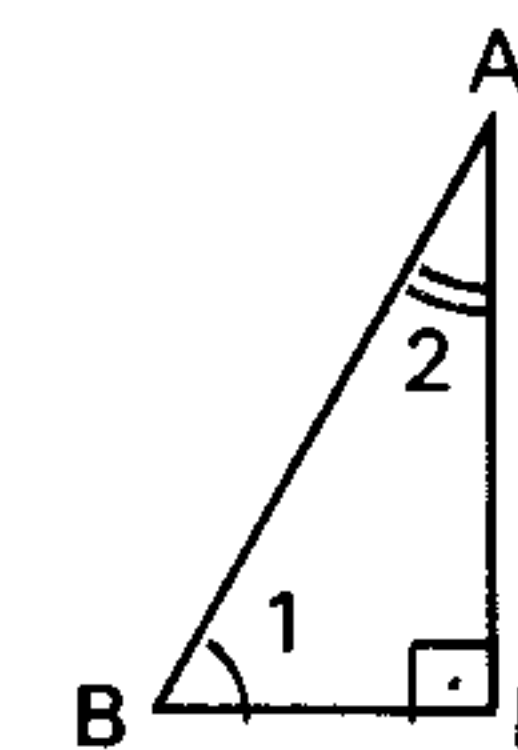
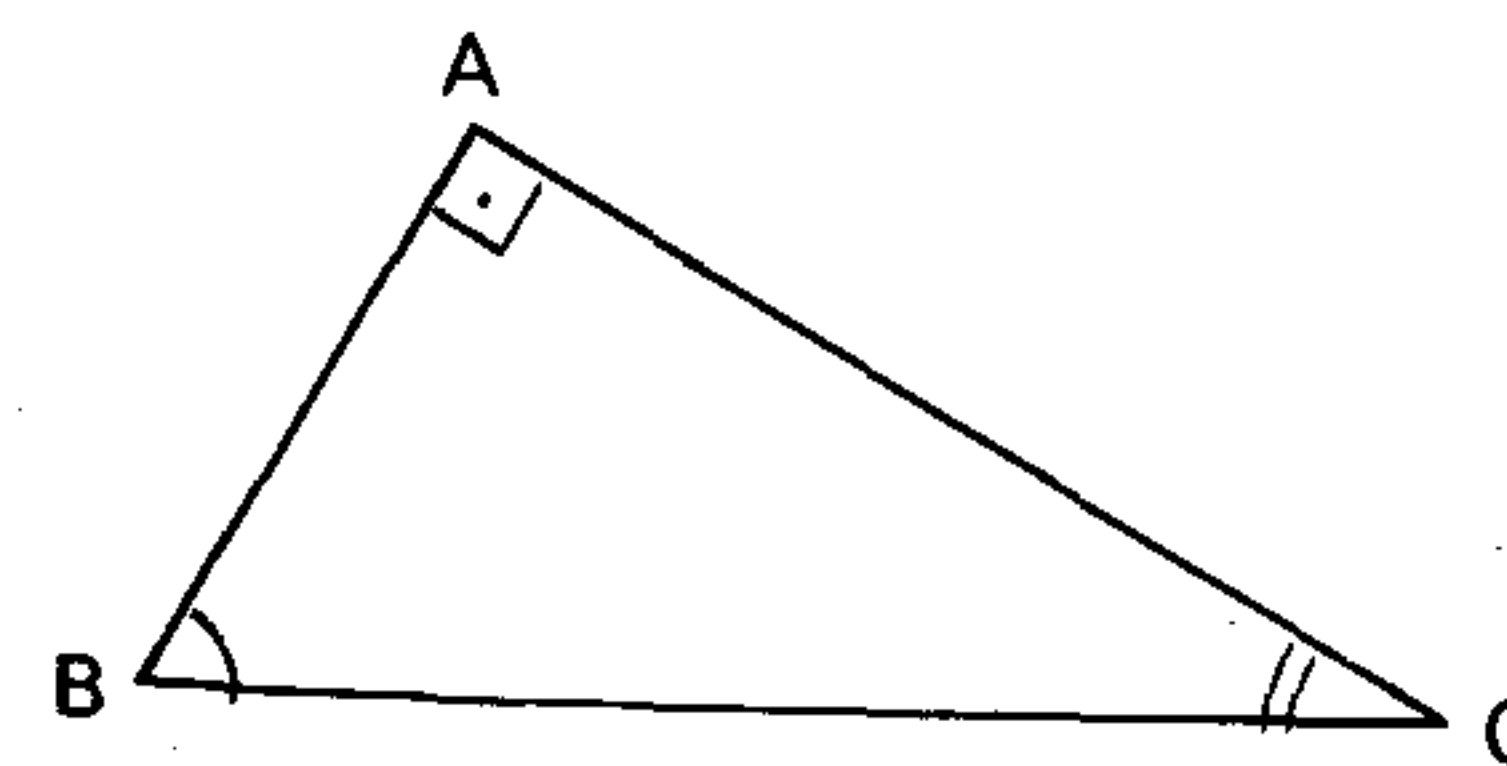
Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$, vamos caracterizar os elementos seguintes:

$\overline{BC} = a$: hipotenusa,
$\overline{AC} = b$: cateto,
$\overline{AB} = c$: cateto,
$\overline{BD} = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa,
$\overline{CD} = n$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa,
$\overline{AD} = h$: altura relativa à hipotenusa.

Note que, para simplificar, confundimos um segmento com a sua medida. Assim, dizemos que a é a hipotenusa, podendo ser entendido que a é a *medida* da hipotenusa.

196. Semelhanças

Conduzindo a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois triângulos retângulos DBA e DAC semelhantes ao triângulo ABC.

De fato, devido à congruência dos ângulos indicados na figura acima,

$\hat{B} \equiv \hat{1}$ (complementos de $\hat{C}$) e
$\hat{C} \equiv \hat{2}$ (complementos de $\hat{B}$)

temos:

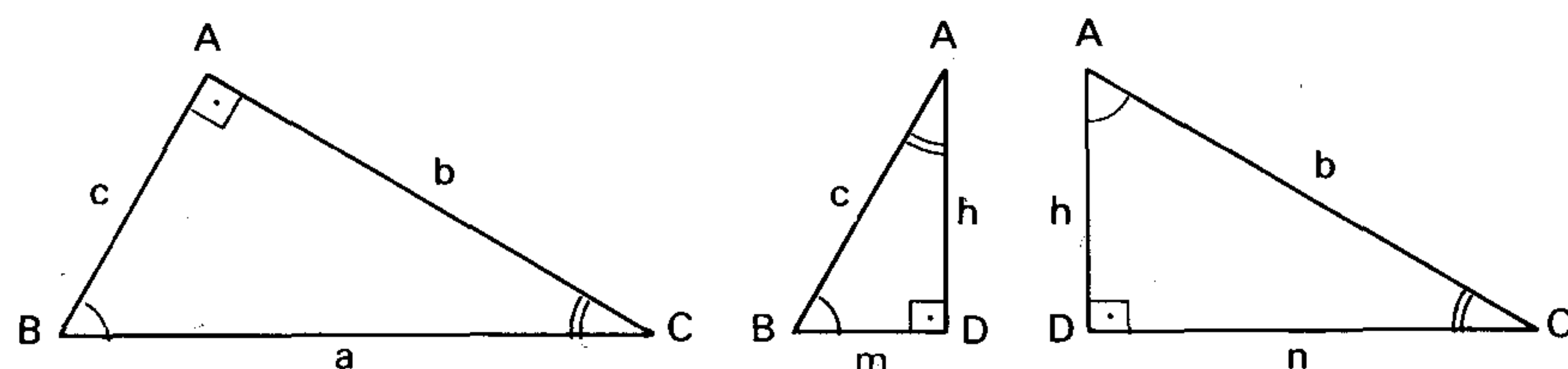
$\Delta ABC \sim \Delta DBA$ $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ $\Delta DBA \sim \Delta DAC$

pois eles têm dois ângulos congruentes.

Logo:

$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC}$$

197. *Relações métricas*

a) **Dedução**

Com base nas semelhanças dos triângulos citados no item anterior e com os elementos já caracterizados, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \Rightarrow bc = ah & (4) \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am & (2) \\ \dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow ch = bm & (6) \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an & (1) \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h} \Rightarrow bc = ah & (4) \\ \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{h} \Rightarrow bh = cn & (5) \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{b} = \dfrac{h}{n} \Rightarrow bh = cn & (5) \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow ch = bm & (6) \\ \dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn & (3) \end{cases}$$

Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas, temos:

(1) $b^2 = a \cdot n$	(3) $h^2 = m \cdot n$	(5) $b \cdot h = c \cdot n$
(2) $c^2 = a \cdot m$	(4) $b \cdot c = a \cdot h$	(6) $c \cdot h = b \cdot m$

b) **Enunciados**

Média proporcional dos segmentos *r* e *s* dados é o segmento *x* que, com os segmentos dados, forma as seguintes proporções:

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{s} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{r} = \frac{s}{x}$$

Dessas proporções segue que:

$$x^2 = r \cdot s \quad \text{ou ainda} \quad x = \sqrt{r \cdot s}$$

A média proporcional de *r* e *s* coincide com a *média geométrica* de *r* e *s*.

Em qualquer triângulo retângulo:

1º) cada cateto é média proporcional (ou *média geométrica*) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

$$b^2 = a \cdot n \qquad c^2 = a \cdot m$$

2º) a altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou *média geométrica*) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.

$$h^2 = m \cdot n$$

3º) o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

$$b \cdot c = a \cdot h$$

4º) o produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

$$b \cdot h = c \cdot n \qquad c \cdot h = b \cdot m$$

c) **Teorema de Pitágoras**

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Demonstração

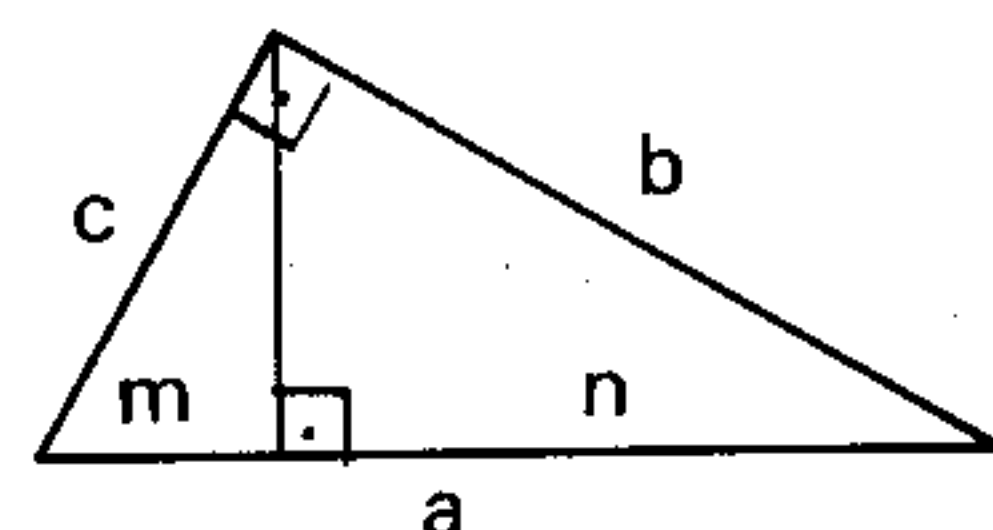
Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} b^2 + c^2 = am + an \Longrightarrow b^2 + c^2 = a\underbrace{(m+n)}_{a} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

d) **Observações**

1ª) As três primeiras relações métricas

$$b^2 = a \cdot n \quad (1)$$
$$c^2 = a \cdot m \quad (2)$$
$$h^2 = m \cdot n \quad (3)$$

são as mais importantes.

Delas decorrem todas as outras. Por exemplo, fazendo (1) × (2) membro a membro e usando a (3), temos:

$$b^2 \cdot c^2 = an \cdot am \Longrightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{mn}_{(3)} \Longrightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

2ª) Num triângulo retângulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa.

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

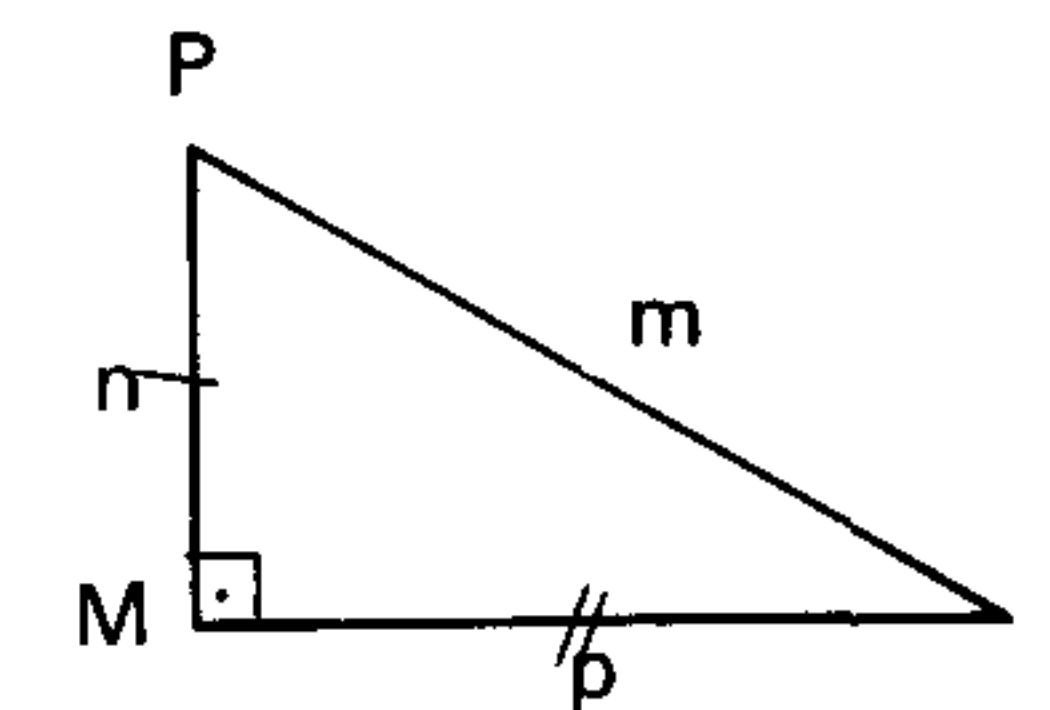
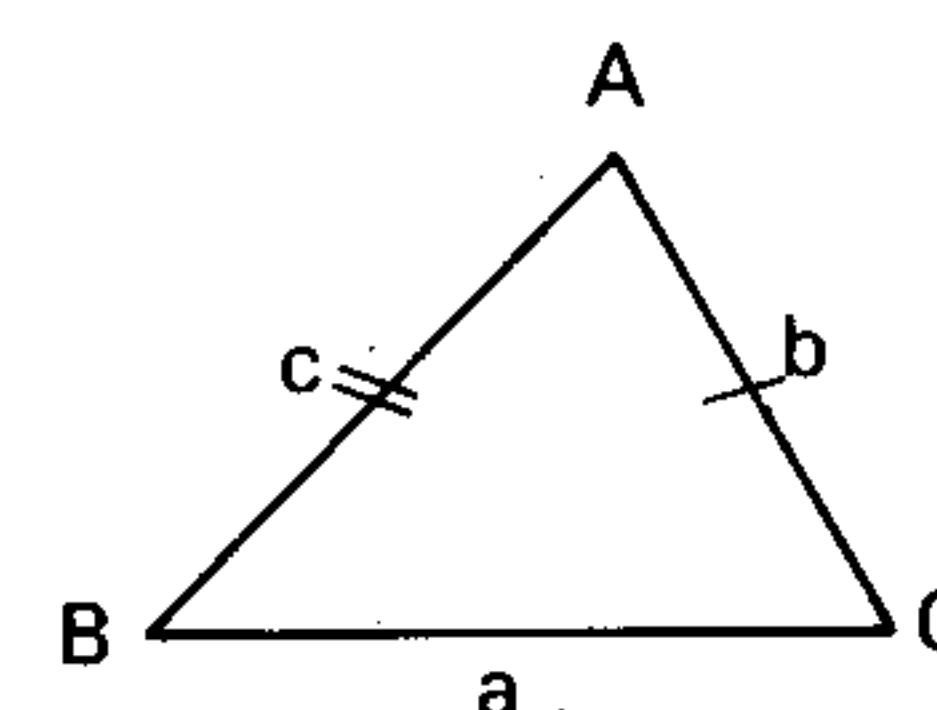
De fato:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{\underbrace{b^2 \cdot c^2}_{(4)}} = \frac{a^2}{a^2 \cdot h^2} = \frac{1}{h^2}$$

3ª) **Recíproco do teorema de Pitágoras**

Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

Hipótese		*Tese*
ΔABC em que $a^2 = b^2 + c^2$	$\Longrightarrow$	ΔABC é retângulo

Demonstração

Construindo o triângulo *MNP*, retângulo em *M* e cujos catetos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ sejam respectivamente congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, temos:

ΔMNP retângulo em $M \Longrightarrow m^2 = n^2 + p^2$

Como $n = b$ e $p = c$, vem $m^2 = b^2 + c^2$.

Logo, $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$.

Então, pelo caso *LLL*, $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ e, como ΔMNP é retângulo em *M*, o ΔABC é retângulo em *A*.

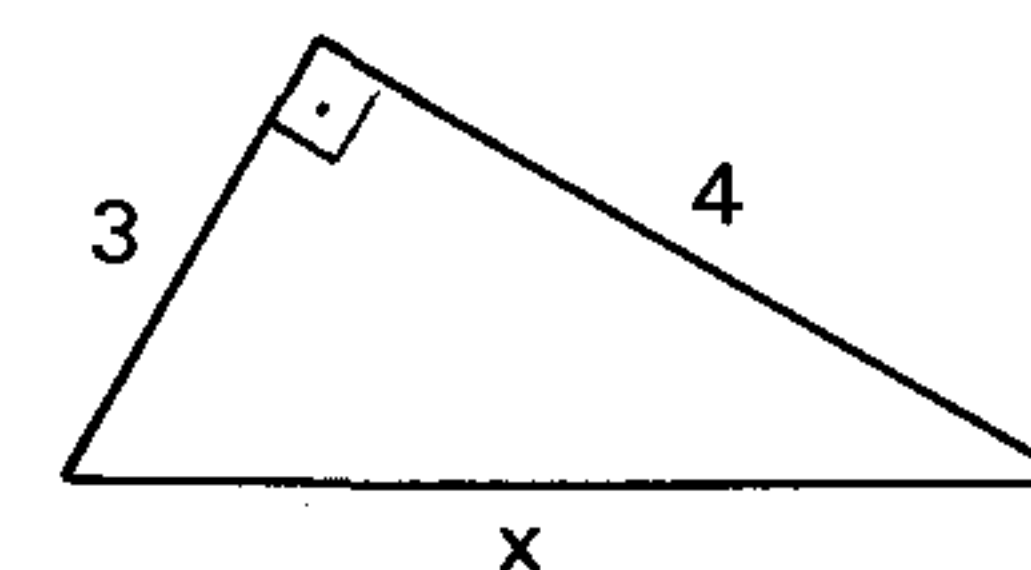
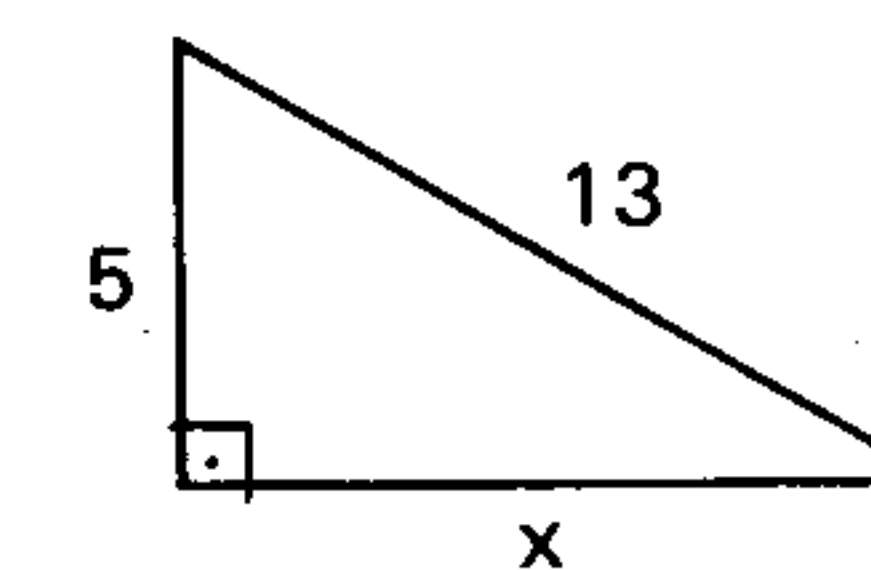
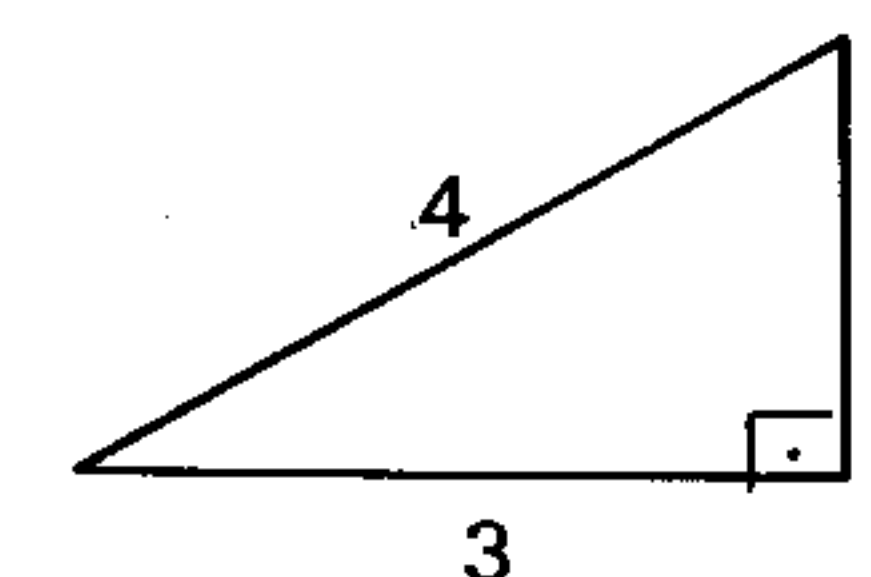
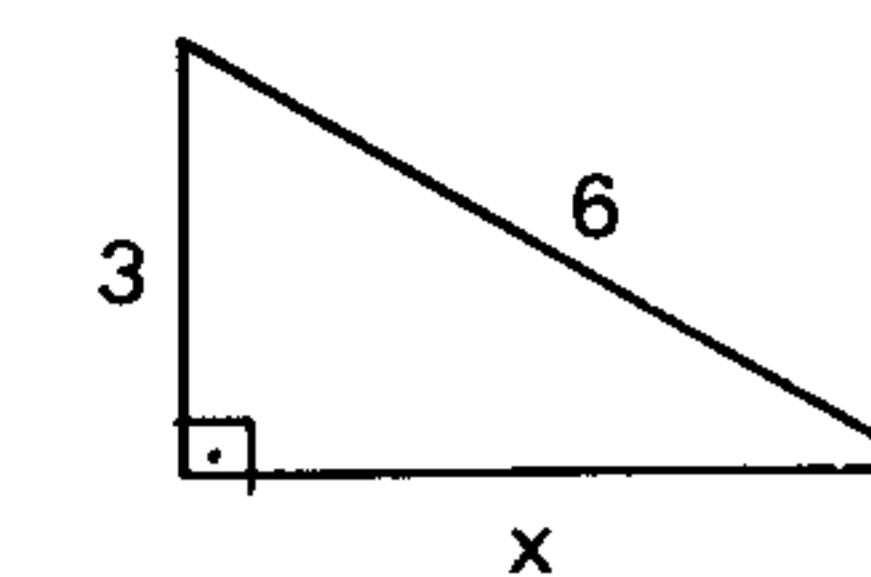
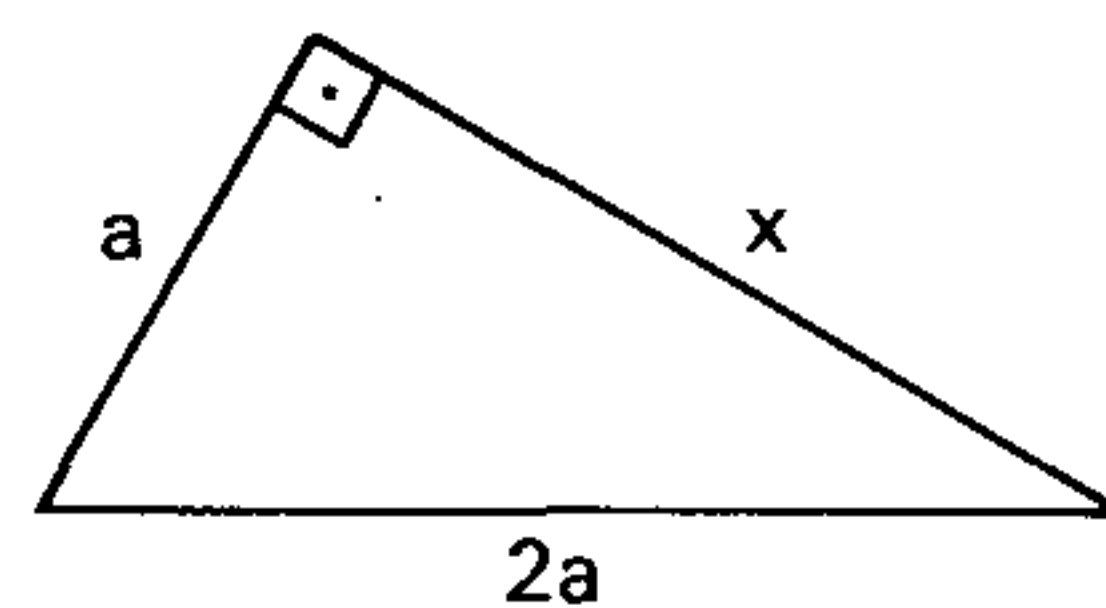
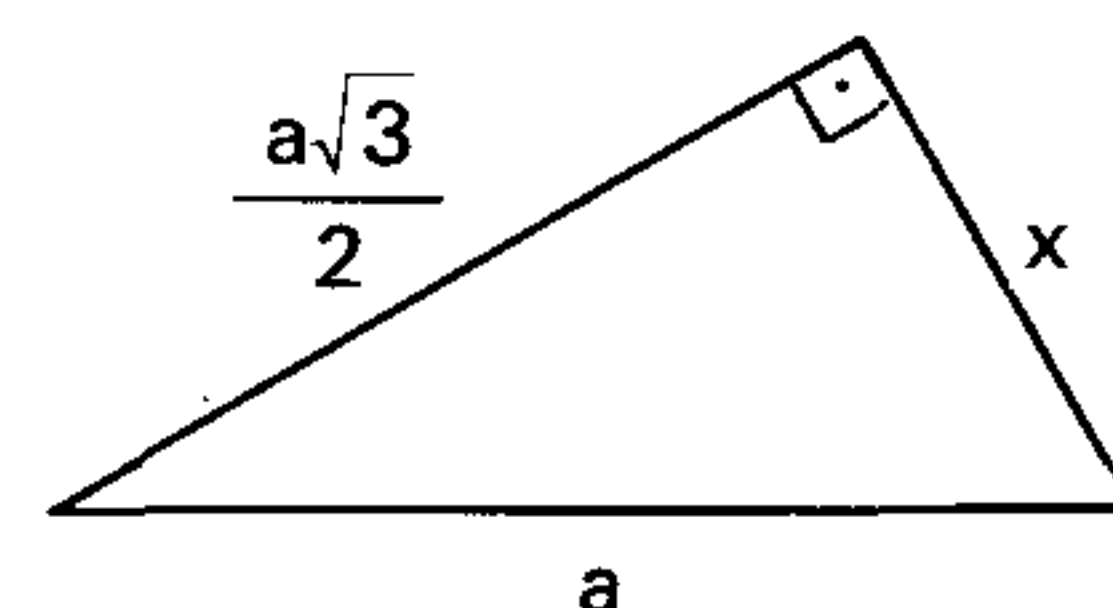
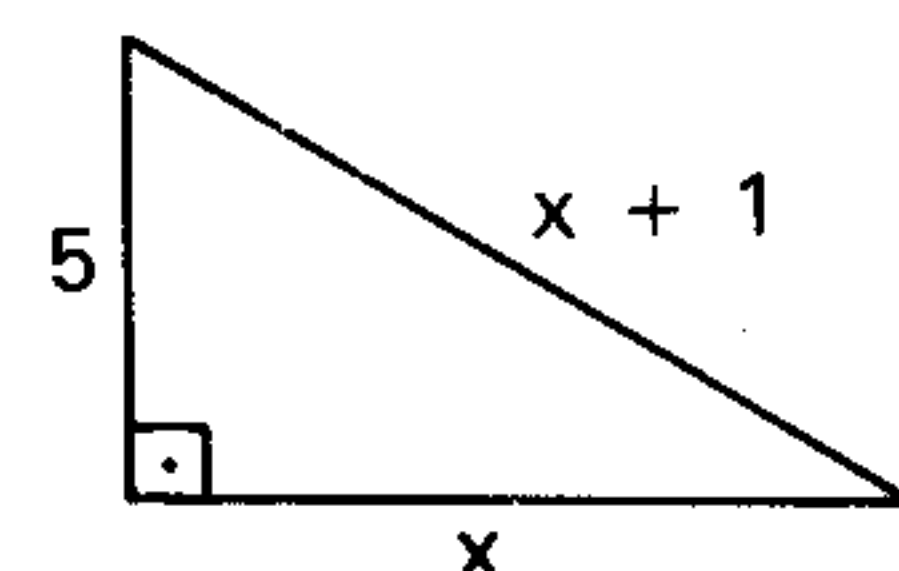
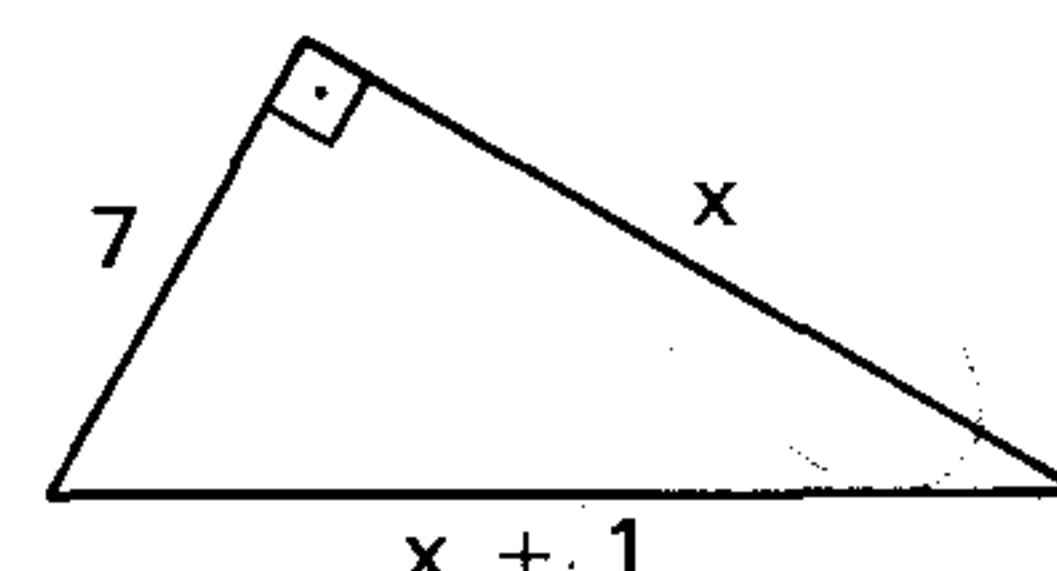
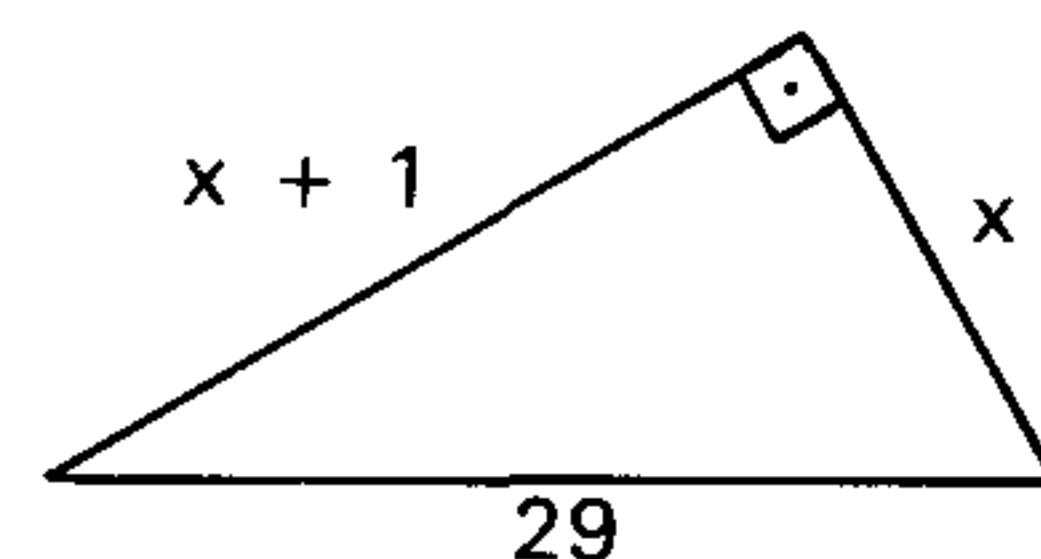
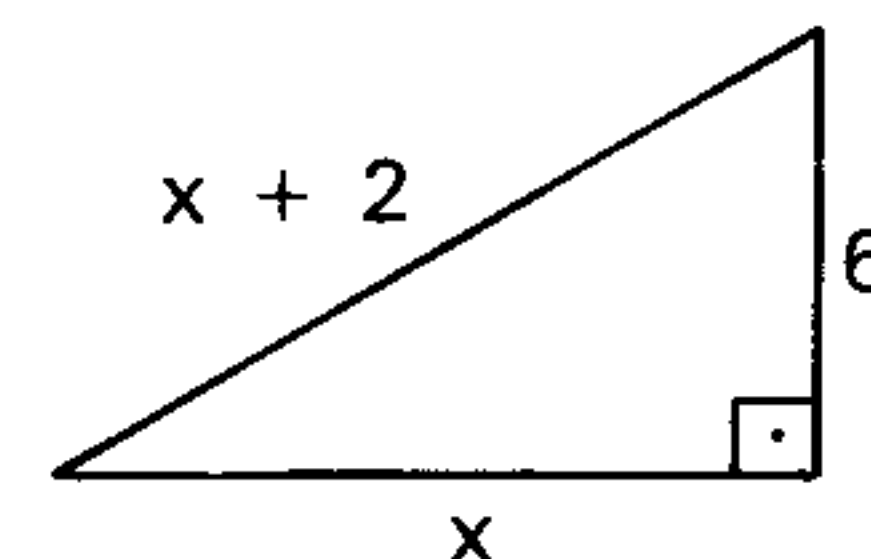
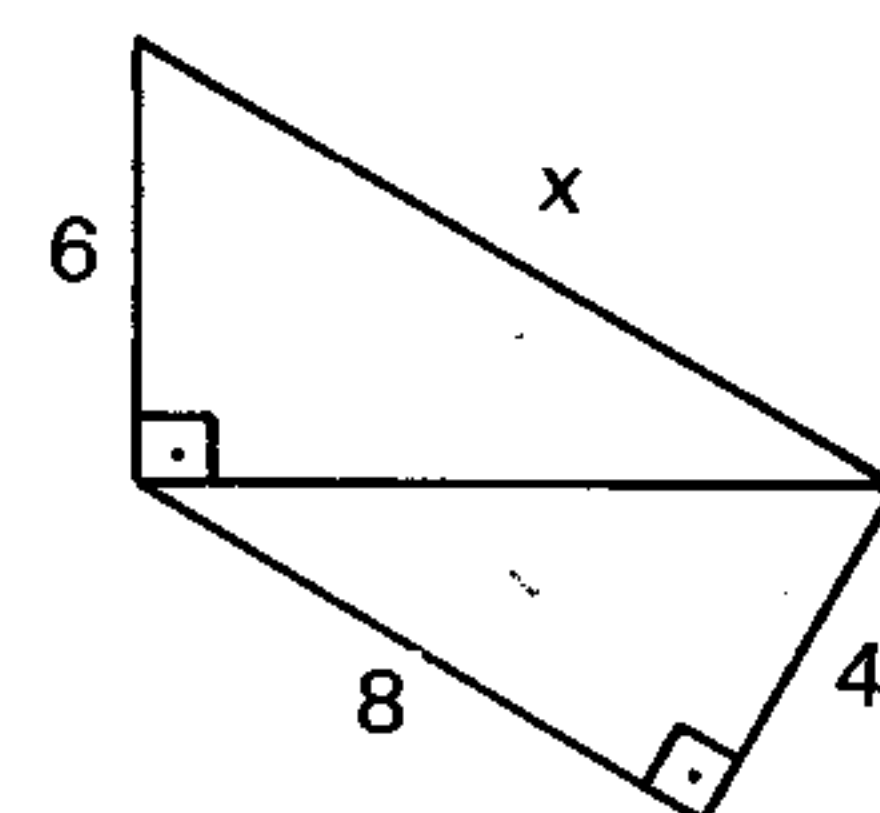
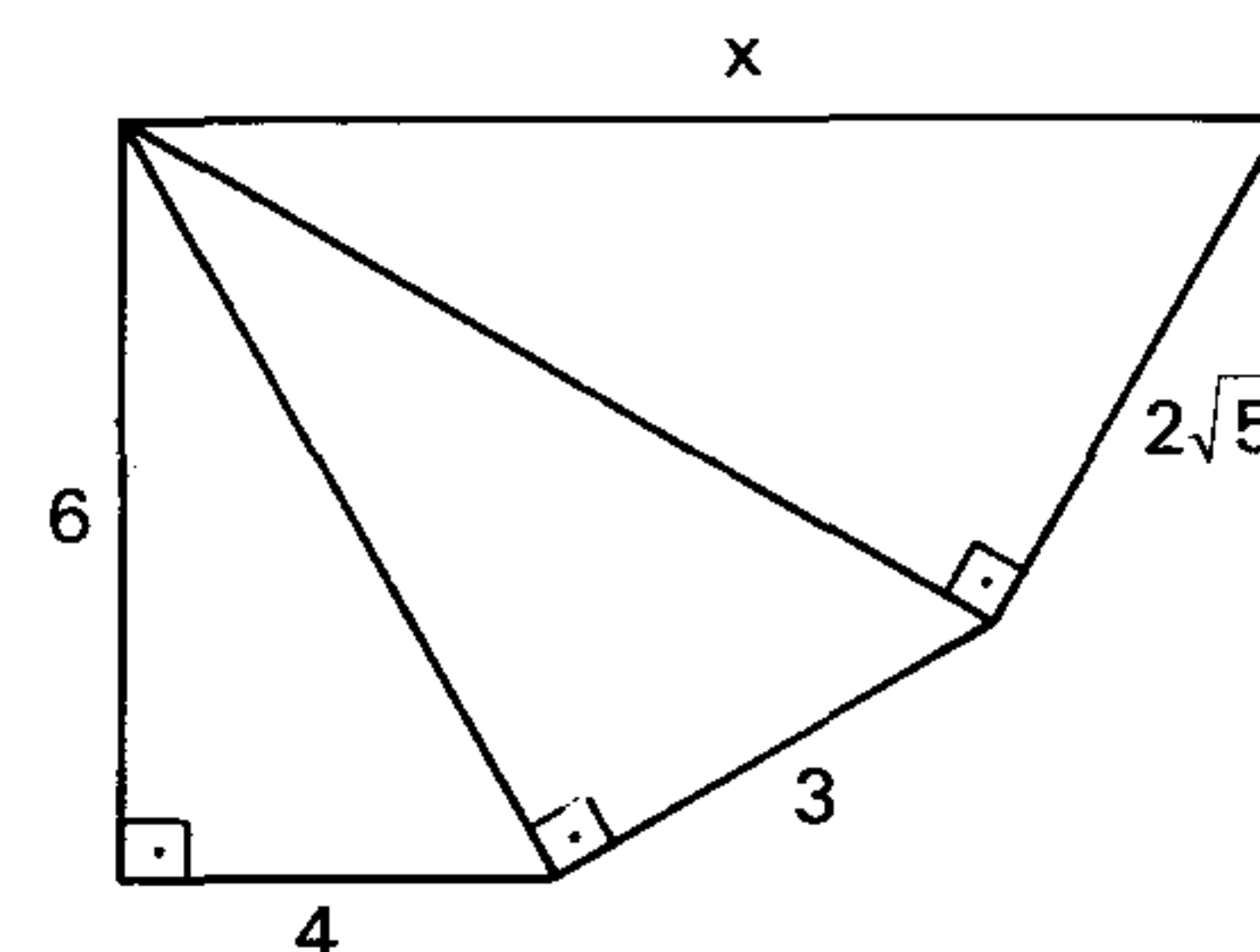
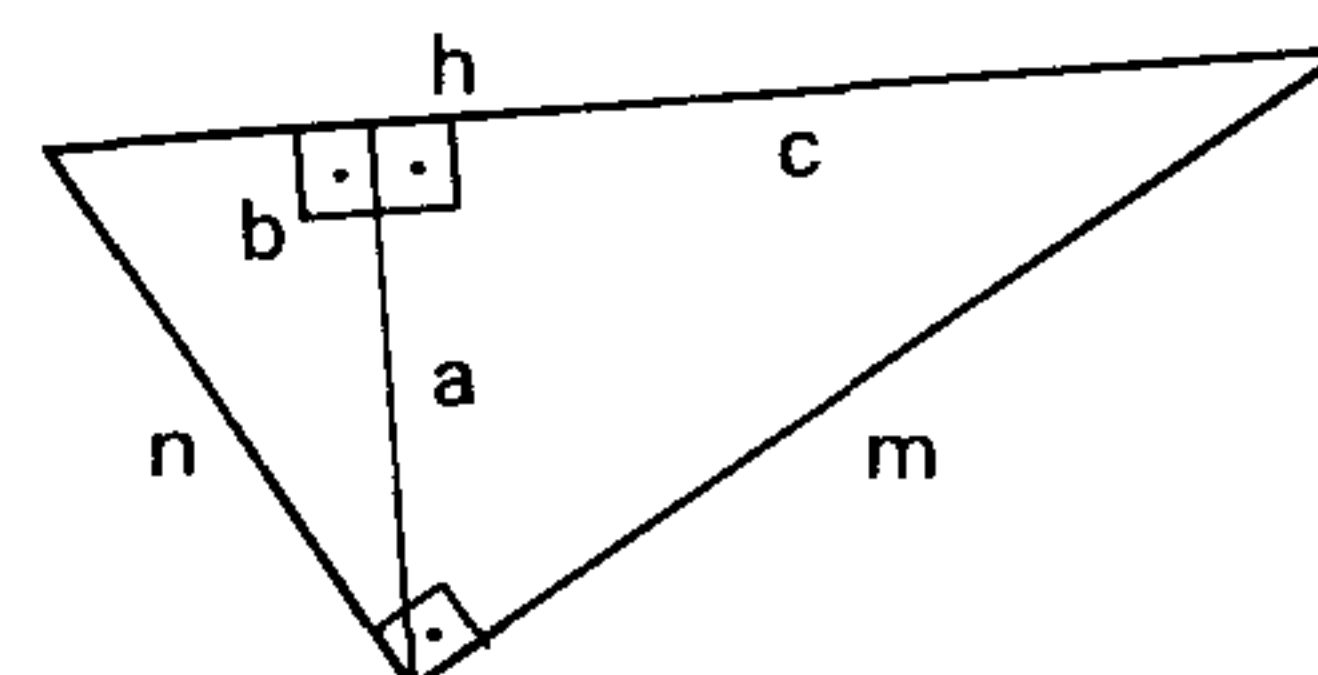
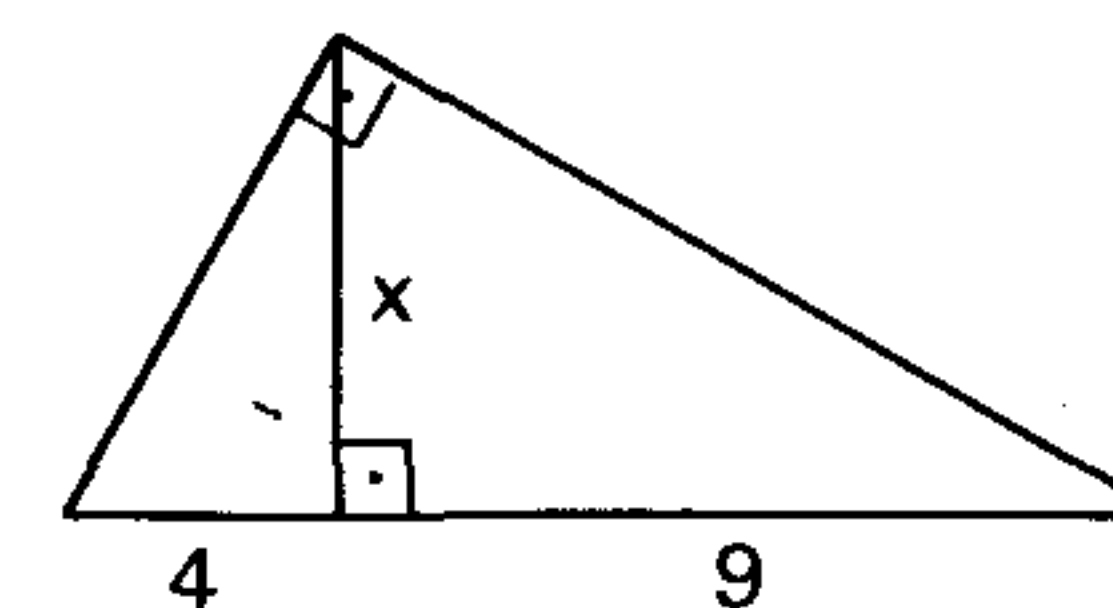
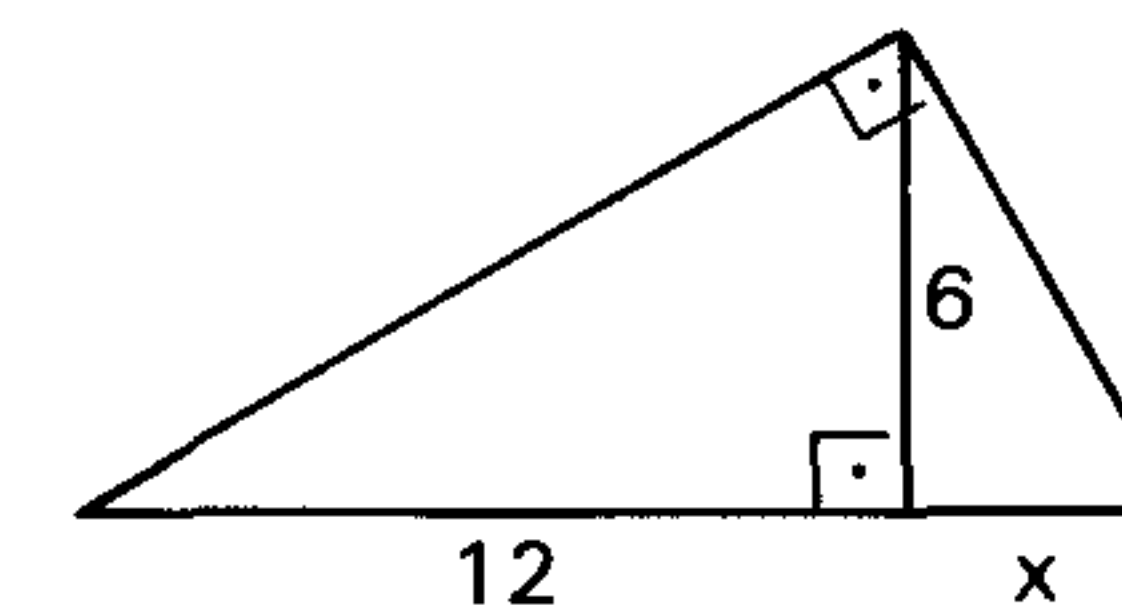
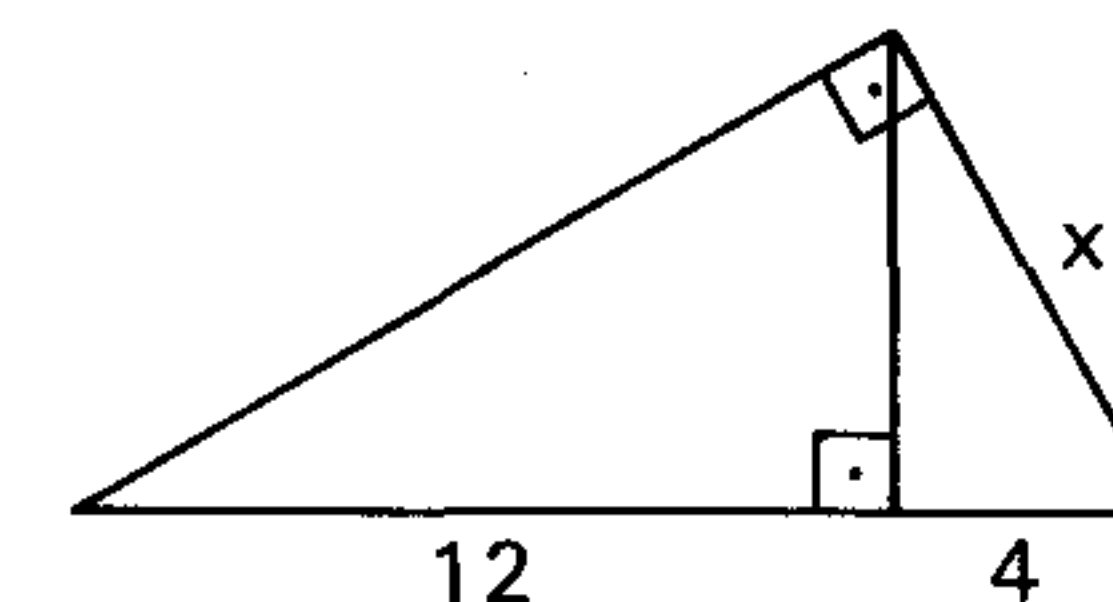
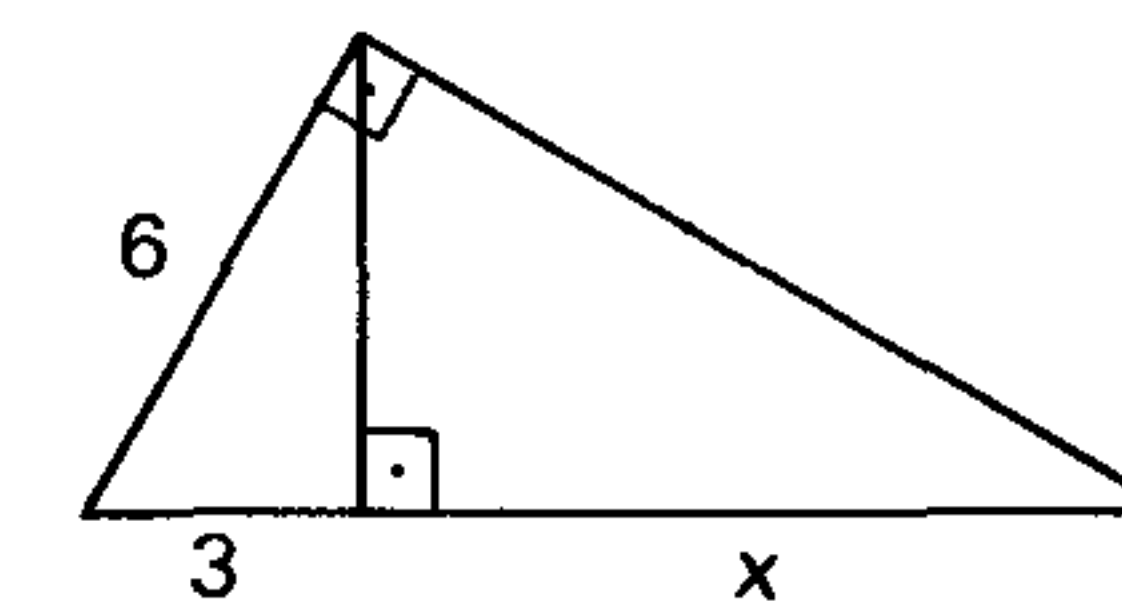
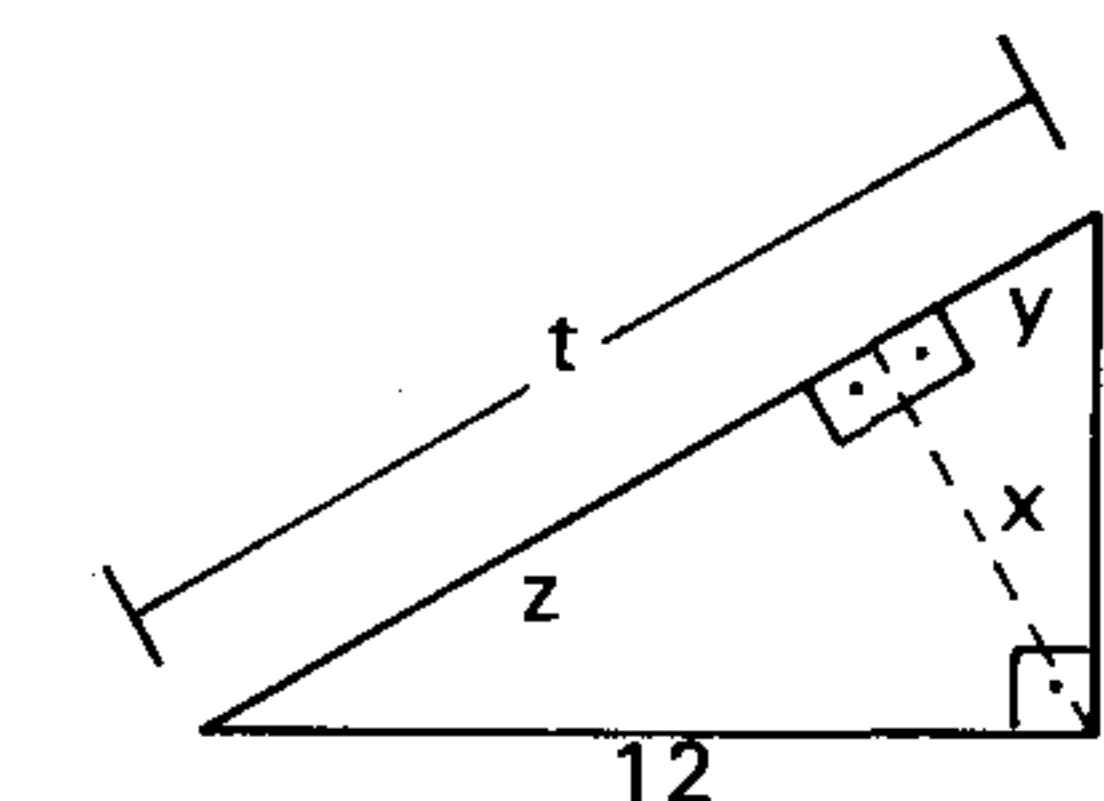
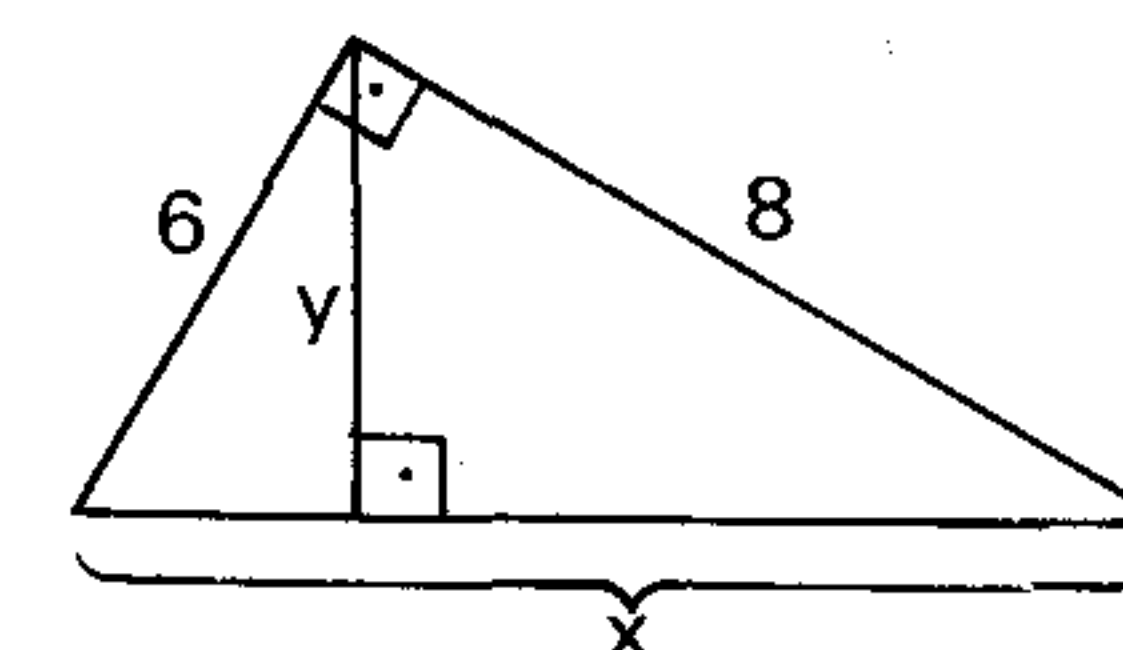
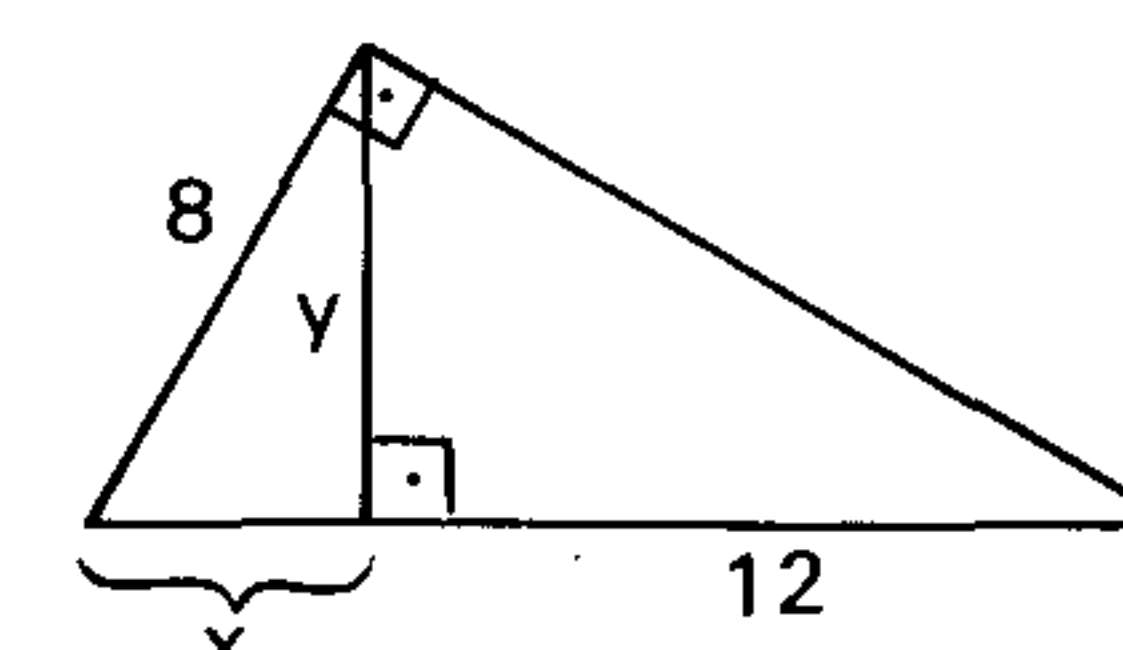
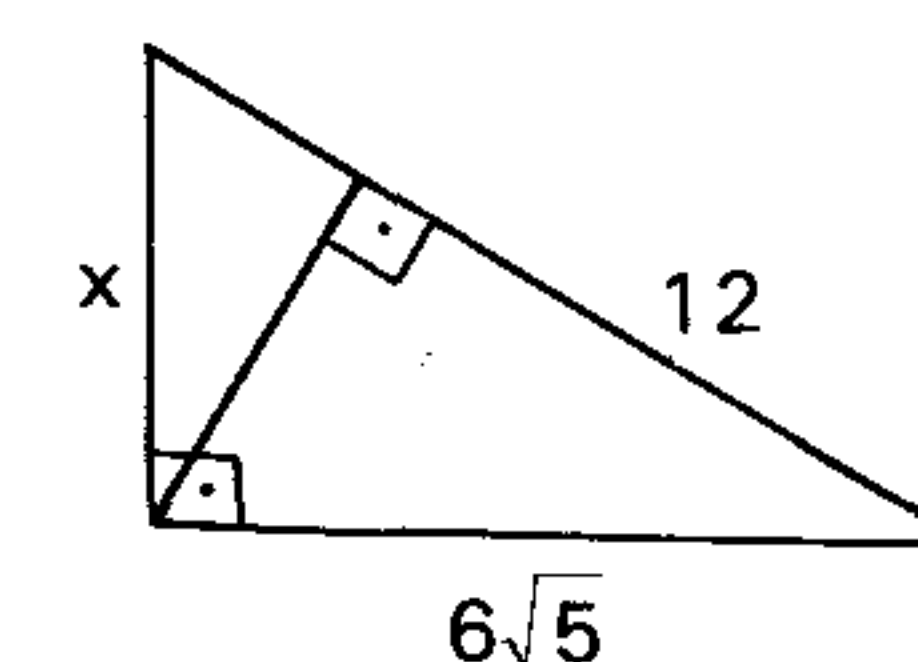
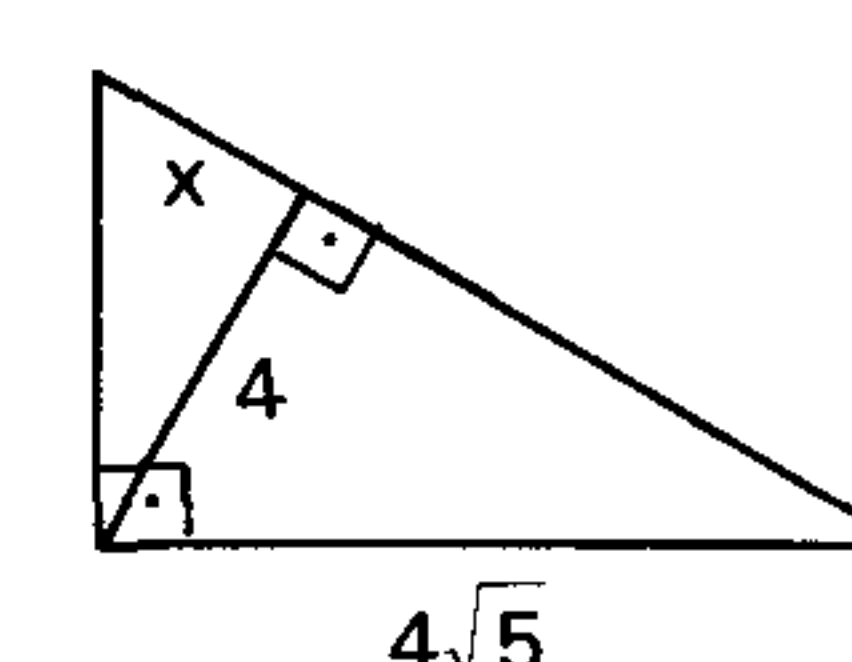
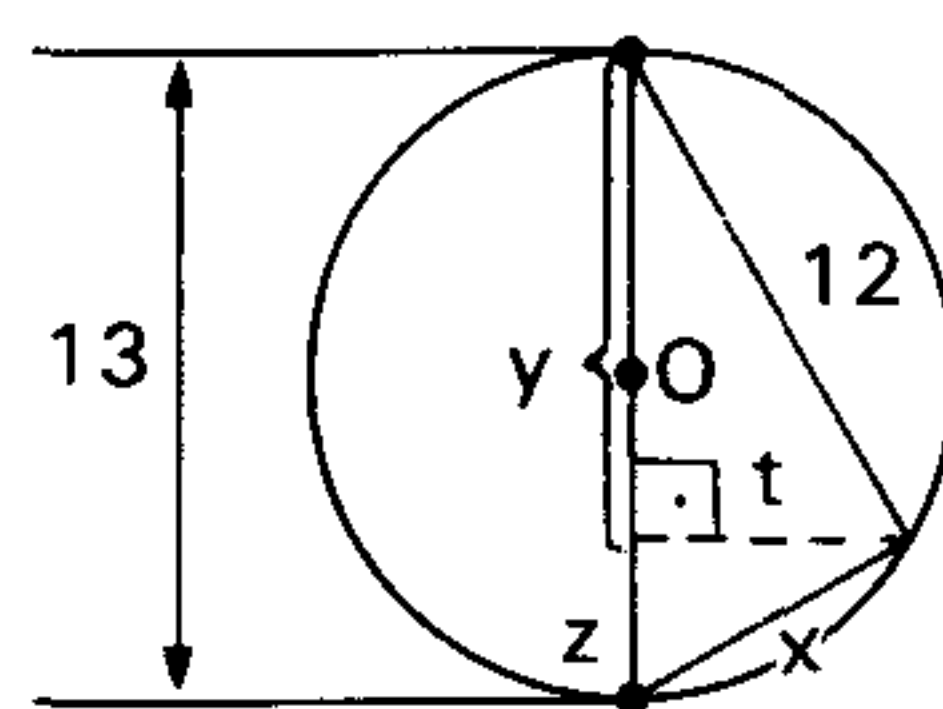
EXERCÍCIOS

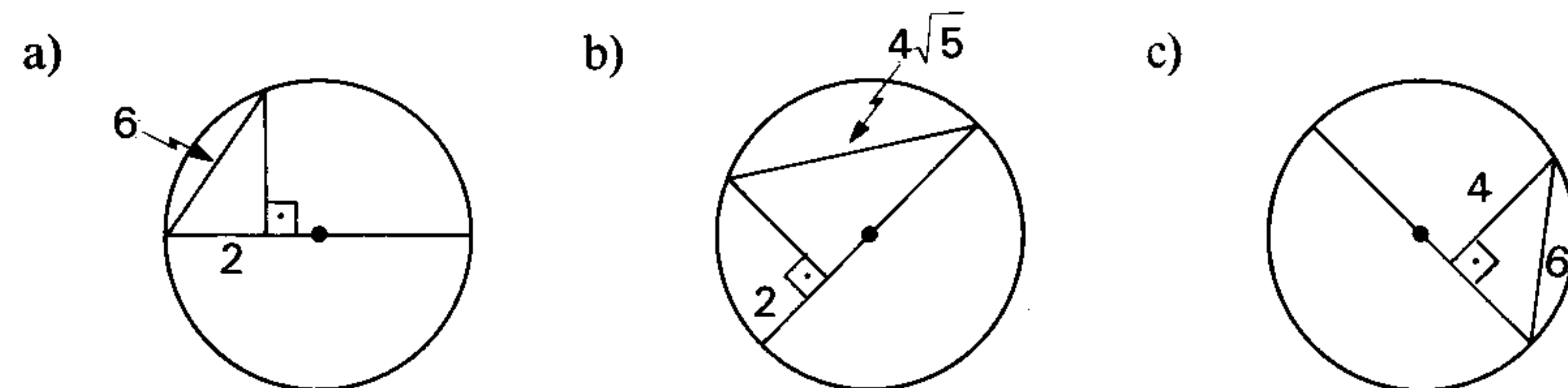
506. Determine o valor de x nos casos:

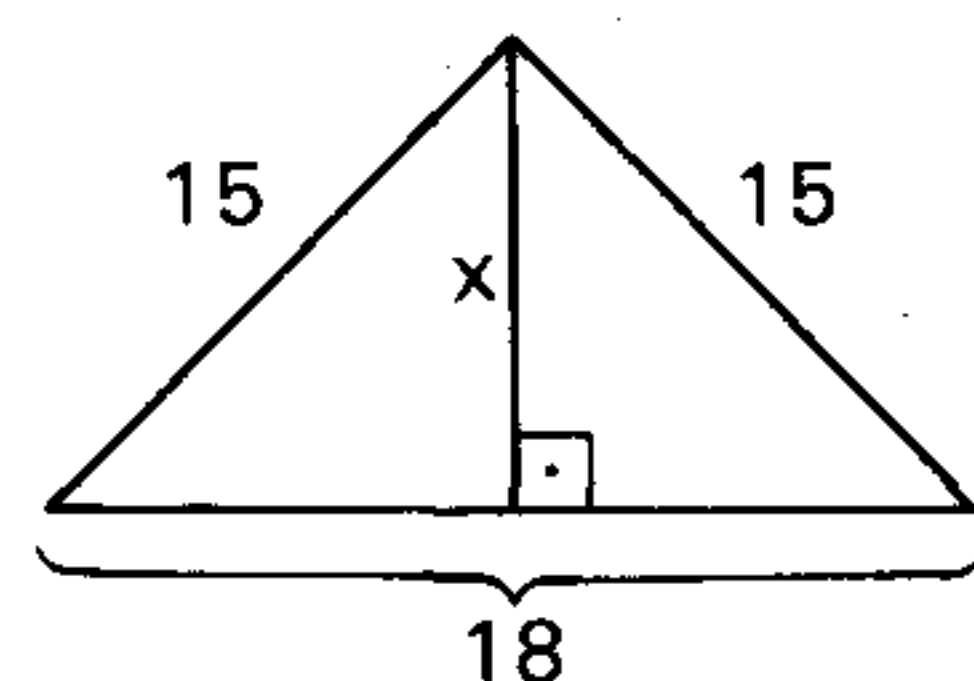
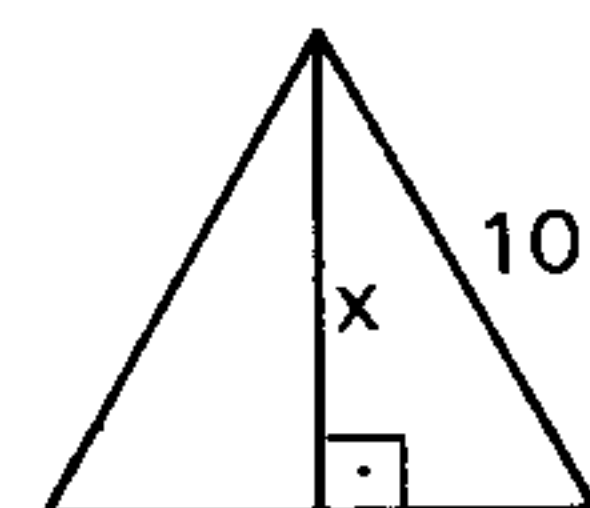
a) catetos 3 e 4, hipotenusa x

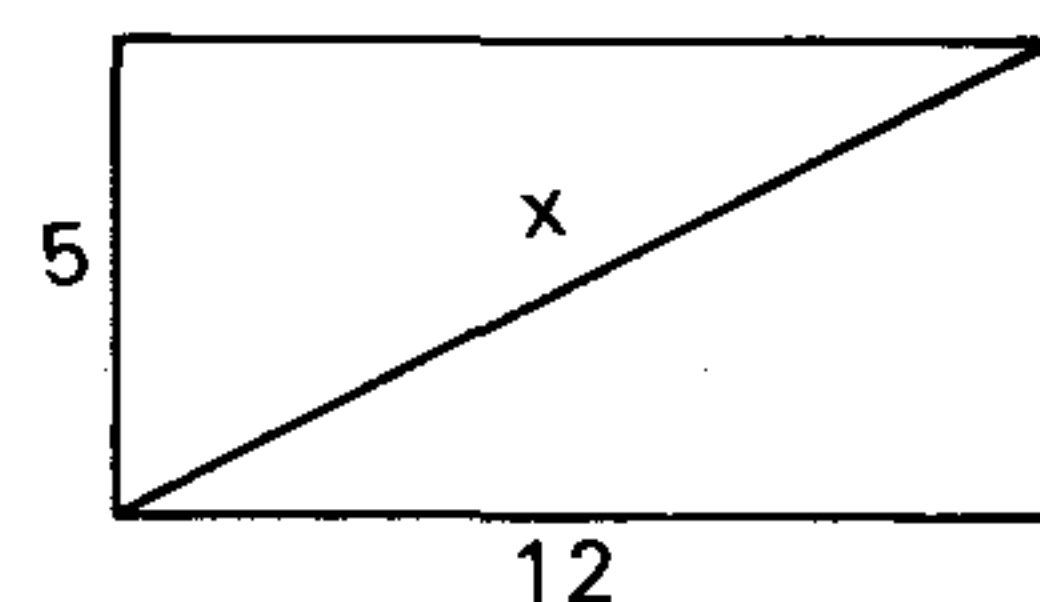
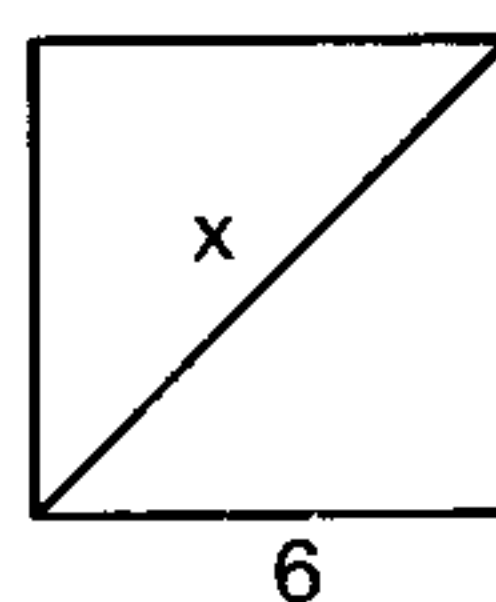
b) cateto 5, hipotenusa 13, cateto x

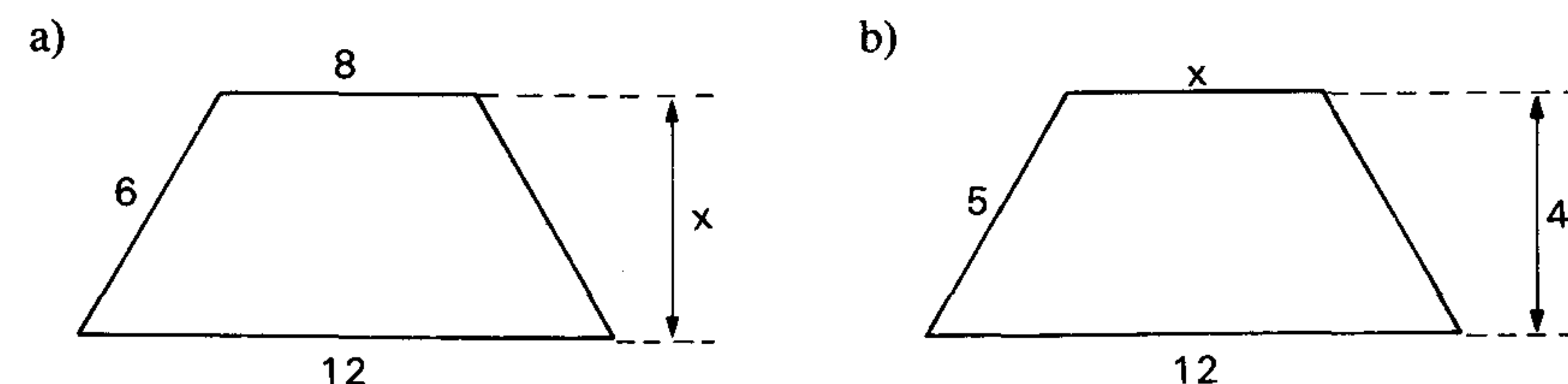
c) hipotenusa 4, cateto 3, cateto x

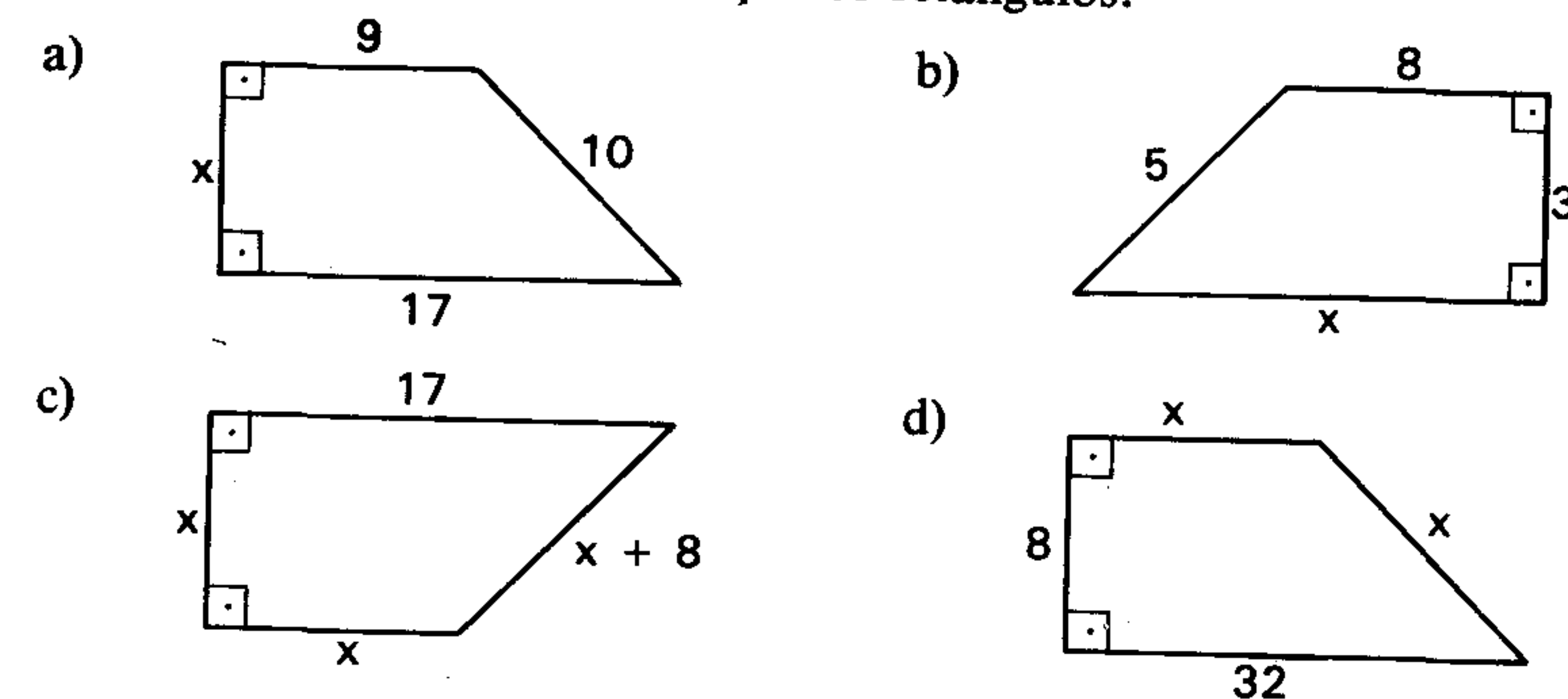
d) cateto 3, hipotenusa 6, cateto x

507. Determine x em função de a nos casos:

a) b)

508. Determine x nos casos:

a) b)

c) d)

509. Determine x nos casos:

a) b)

510. Escreva *10* relações métricas com os elementos indicados na figura.

511. Determine x nos casos:

a) b)

c) d)

512. Na figura, determine os elementos x, y, z e t.

513. Determine x e y nos casos:

a) b)

514. Determine o valor de x.

a) b)

515. Calcule os elementos y, z, t e x na figura ao lado.

516. Determine o raio do círculo nos casos:

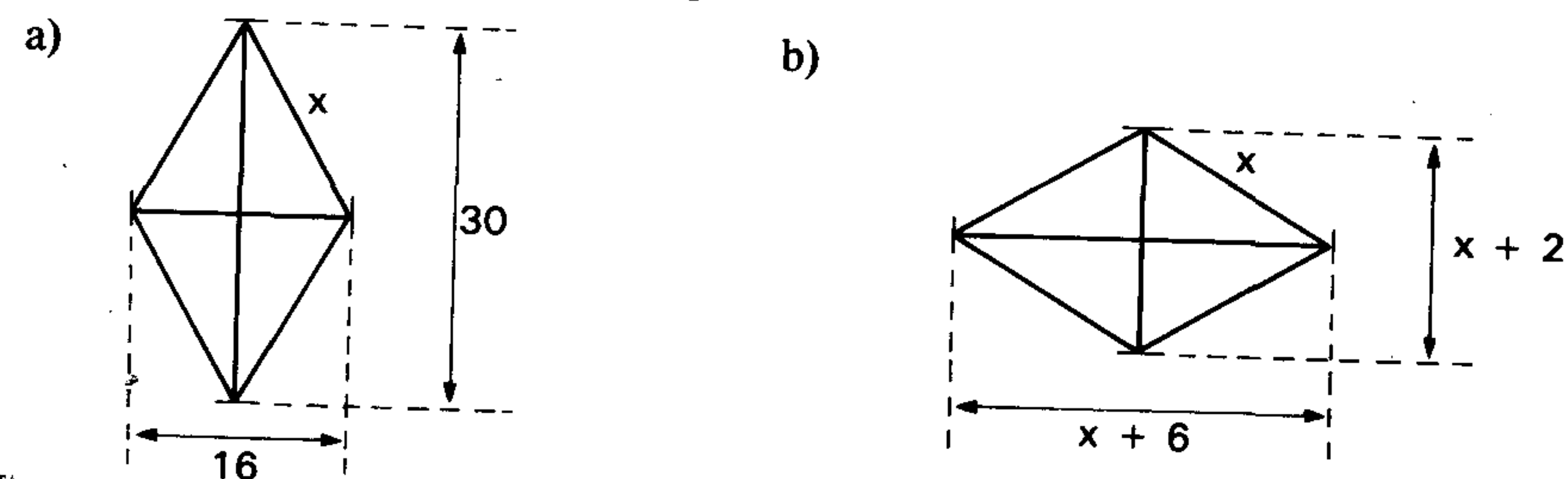
a) b) c)

517. Determine x nos casos:

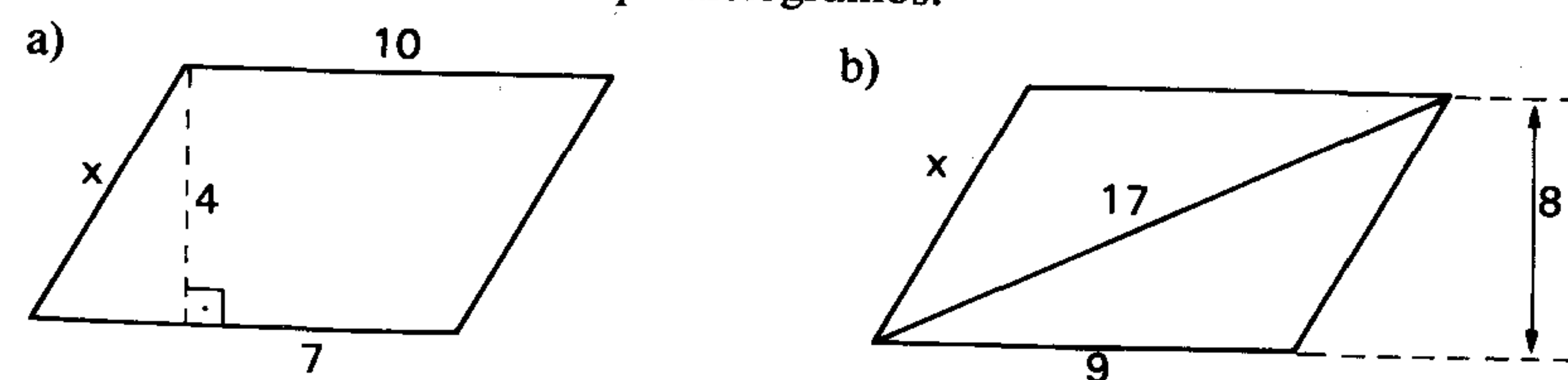
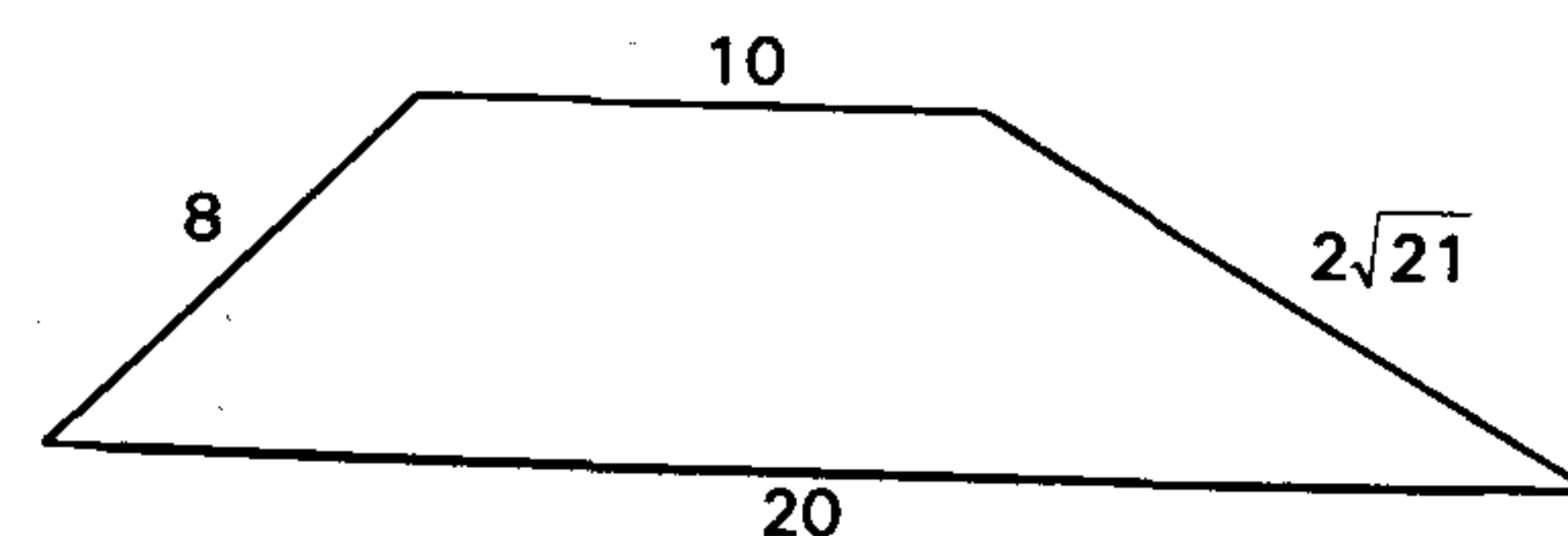
a) triângulo isósceles

b) triângulo equilátero

518. Determine o valor de x nos casos:

a) retângulo

b) quadrado

519. Determine o valor de x nos trapézios isósceles.

a) b)

520. Determine o valor de x nos trapézios retângulos.

a) b) c) d)

521. Determine o valor de x nos losangos.

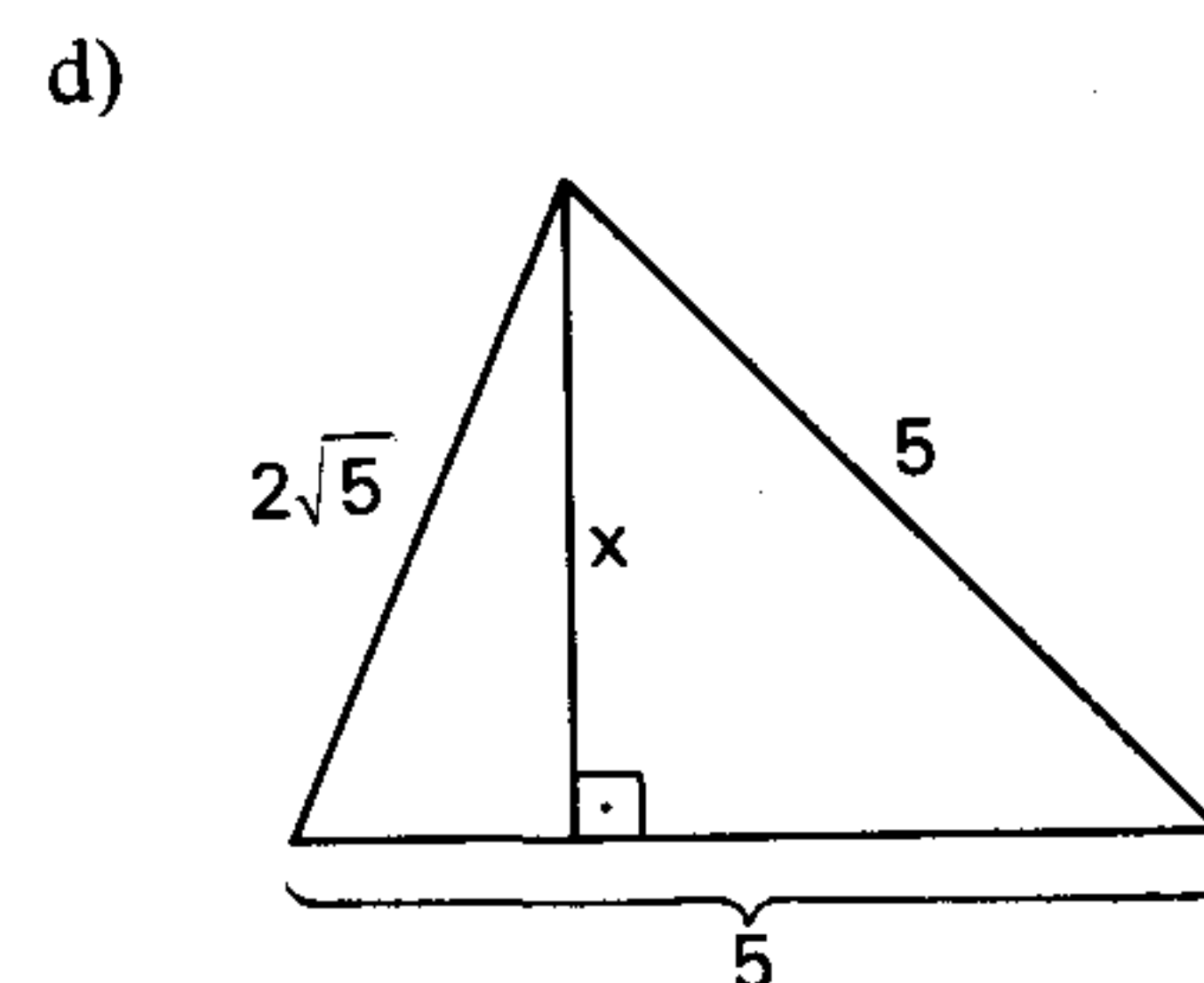
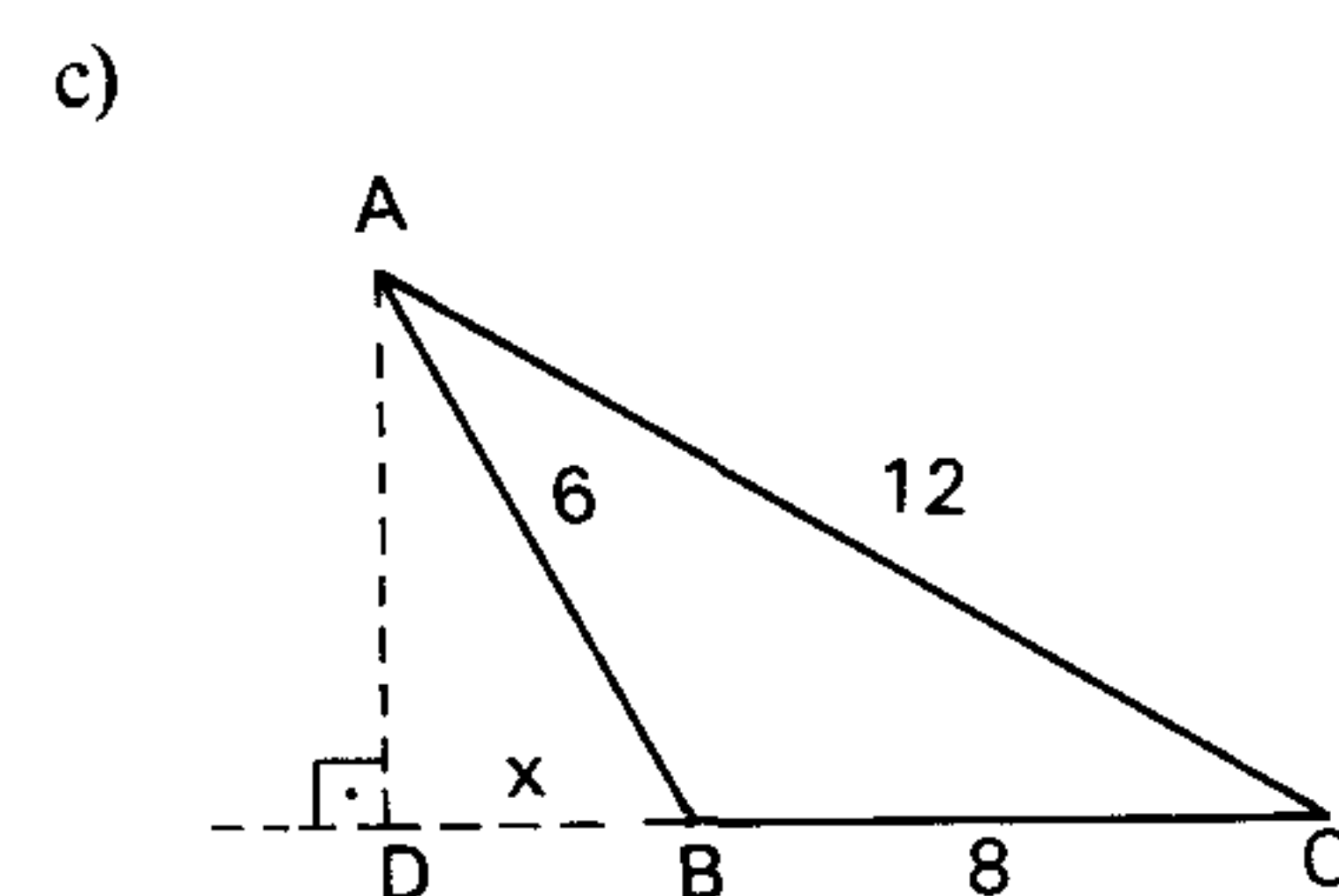
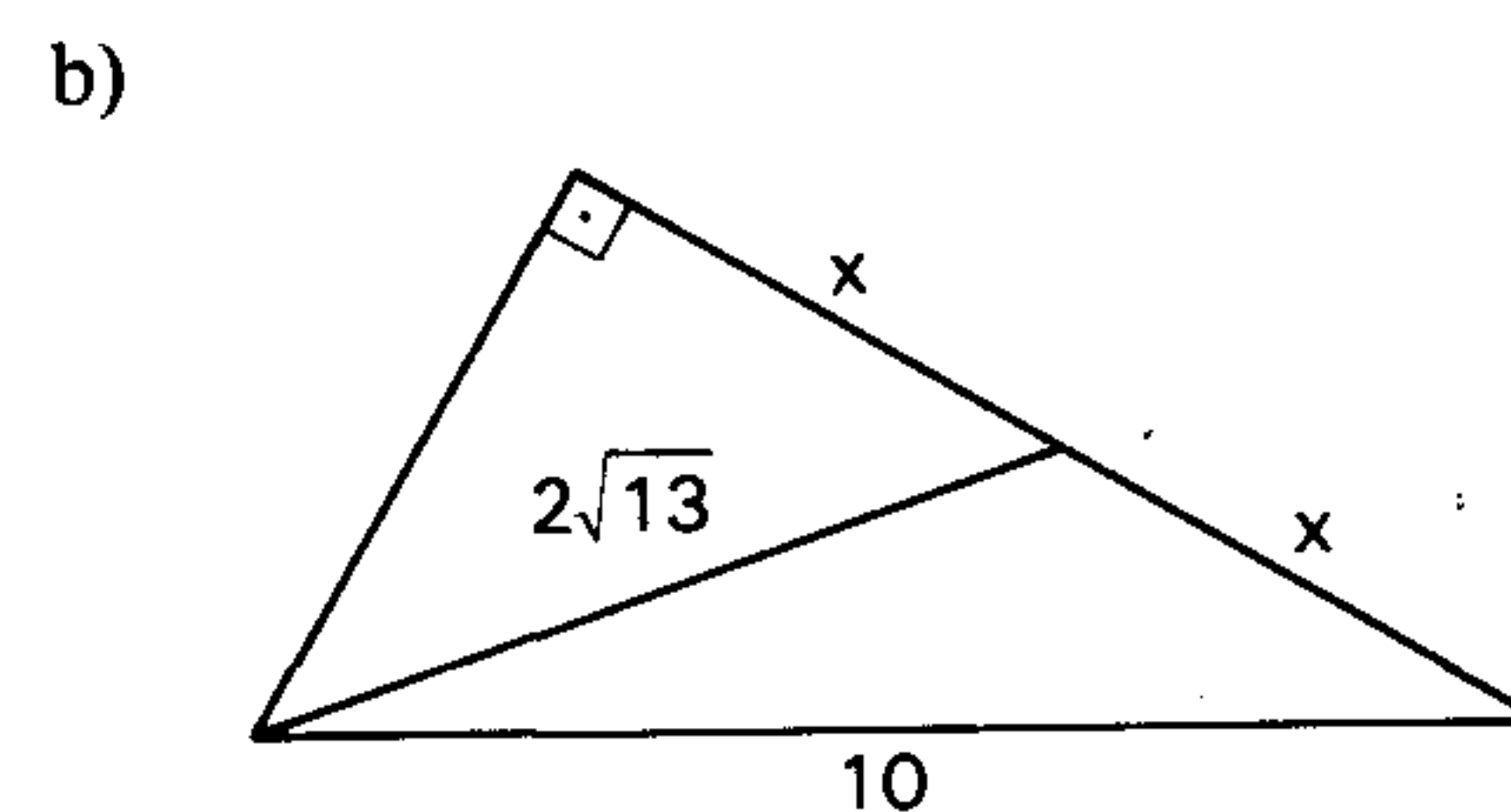
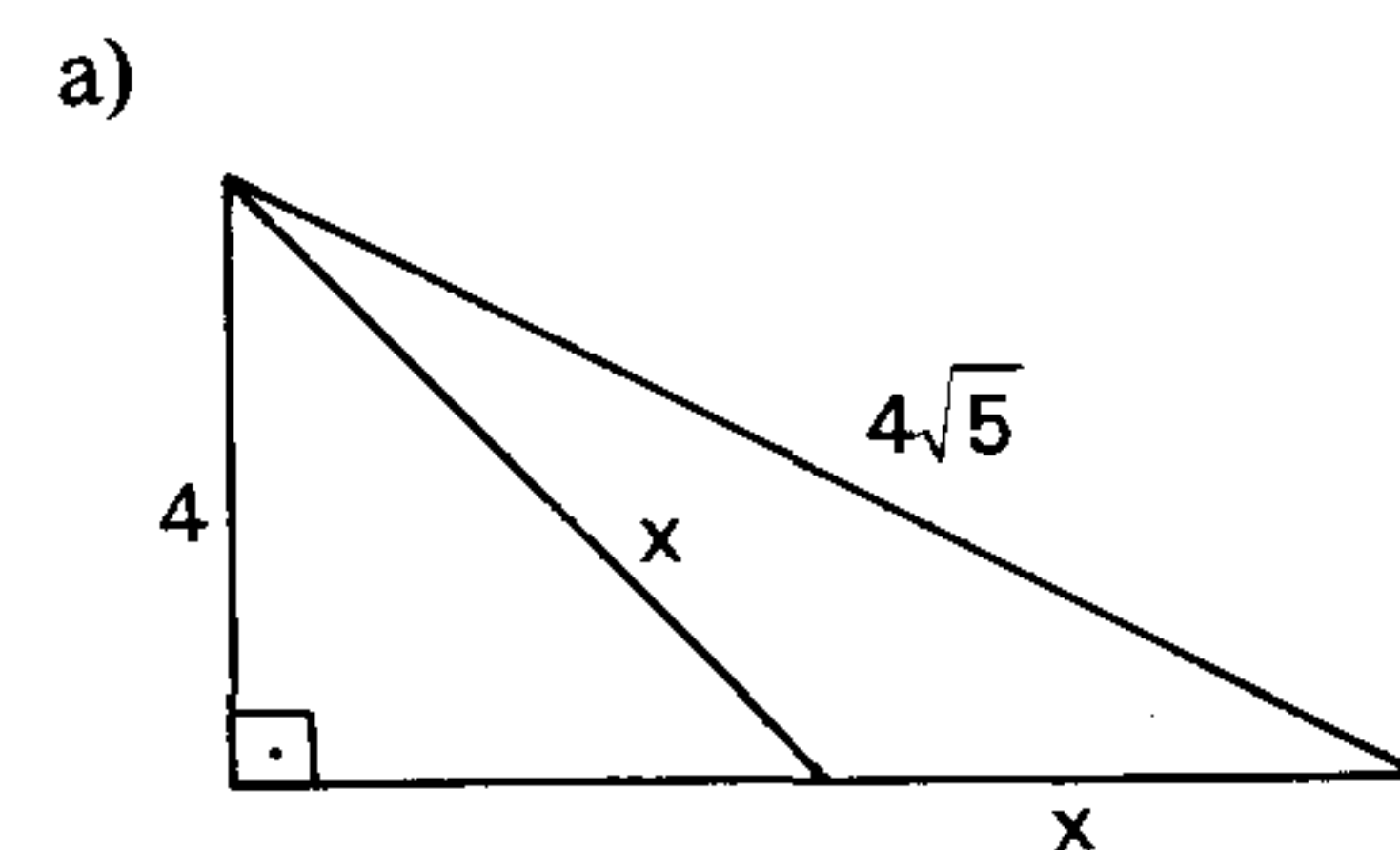
a) b)

522. Determine o valor de x nos paralelogramos.

a) b)

523. Determine a altura do trapézio da figura.

524. Determine o valor de x nos casos.

a)

b)

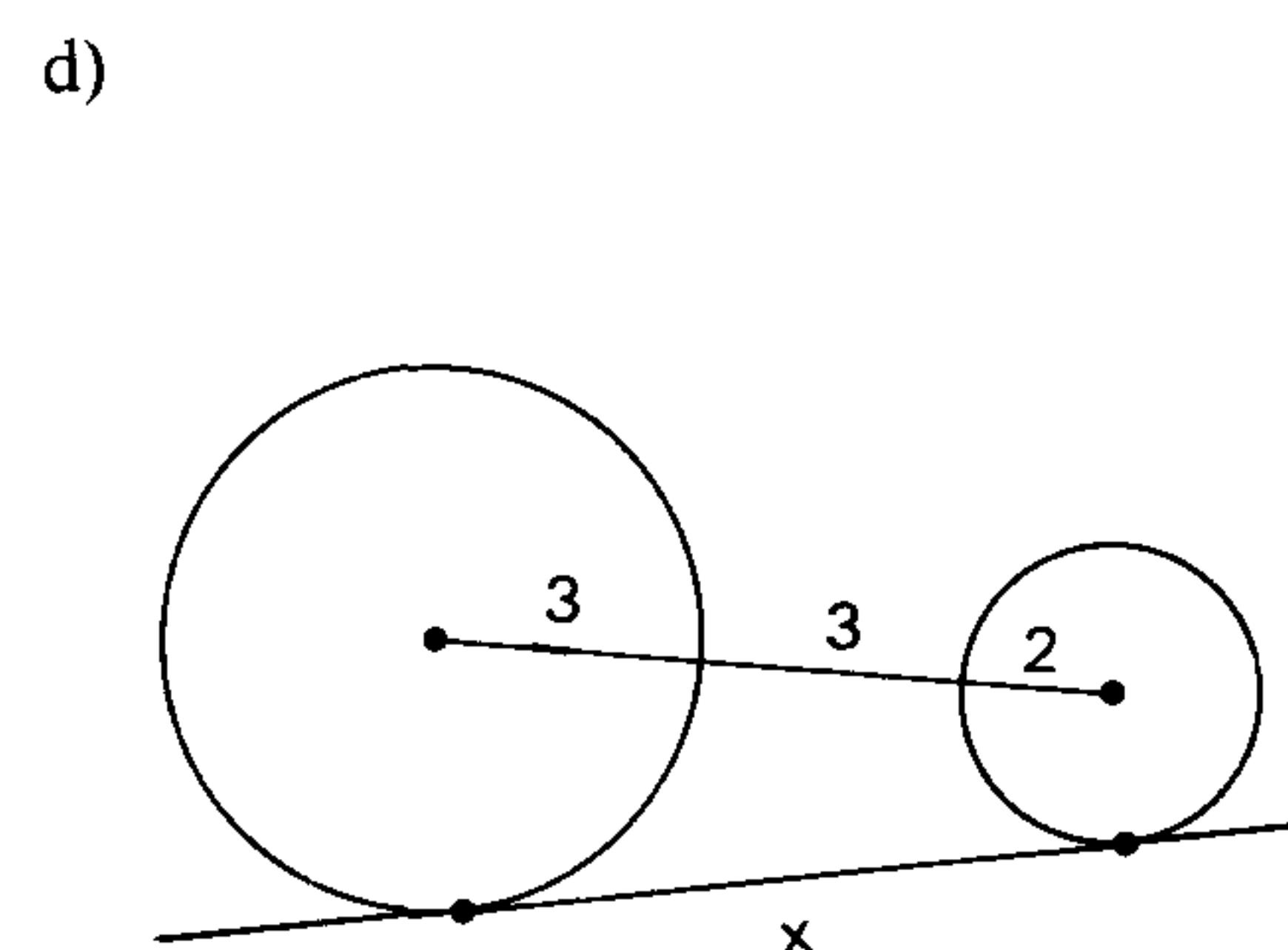
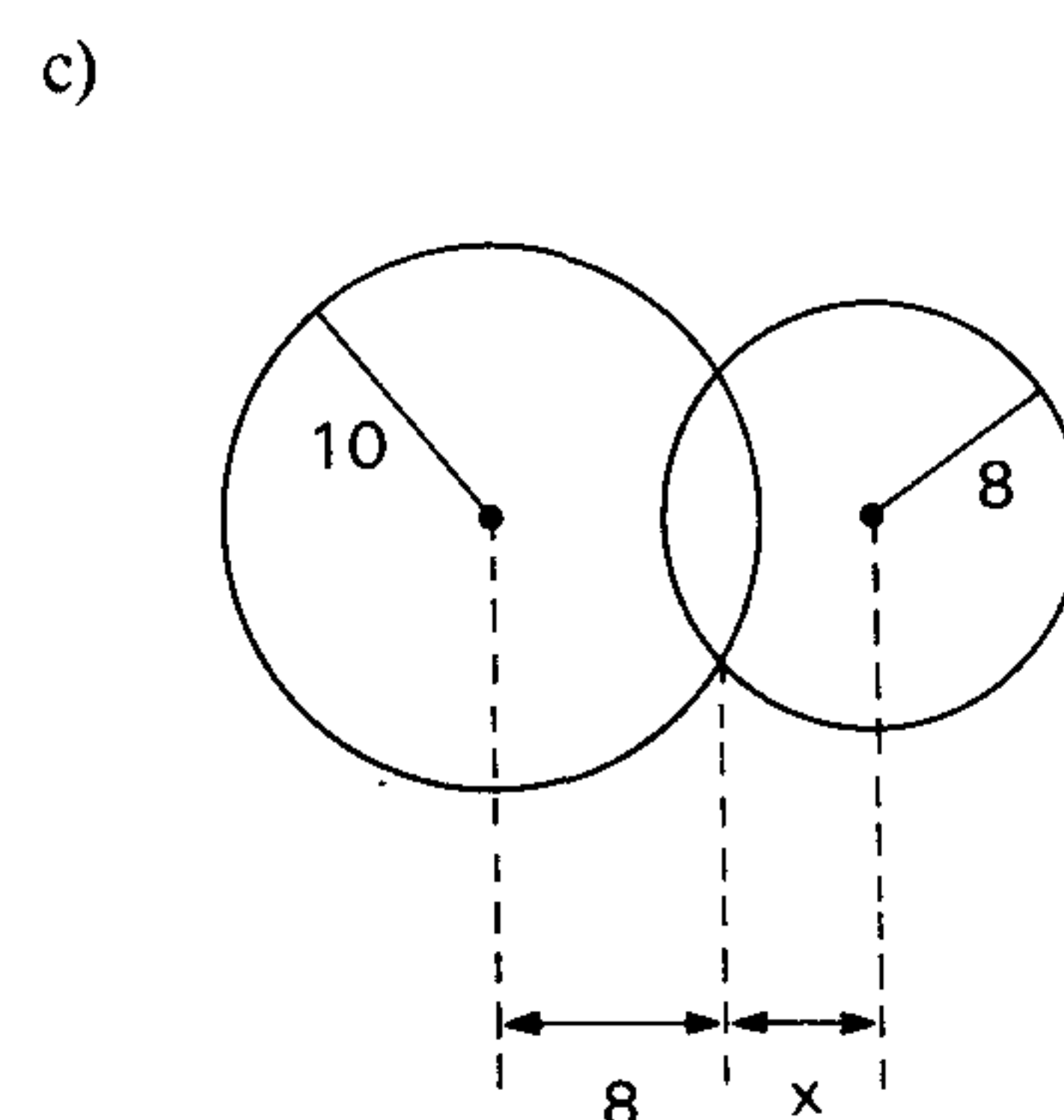
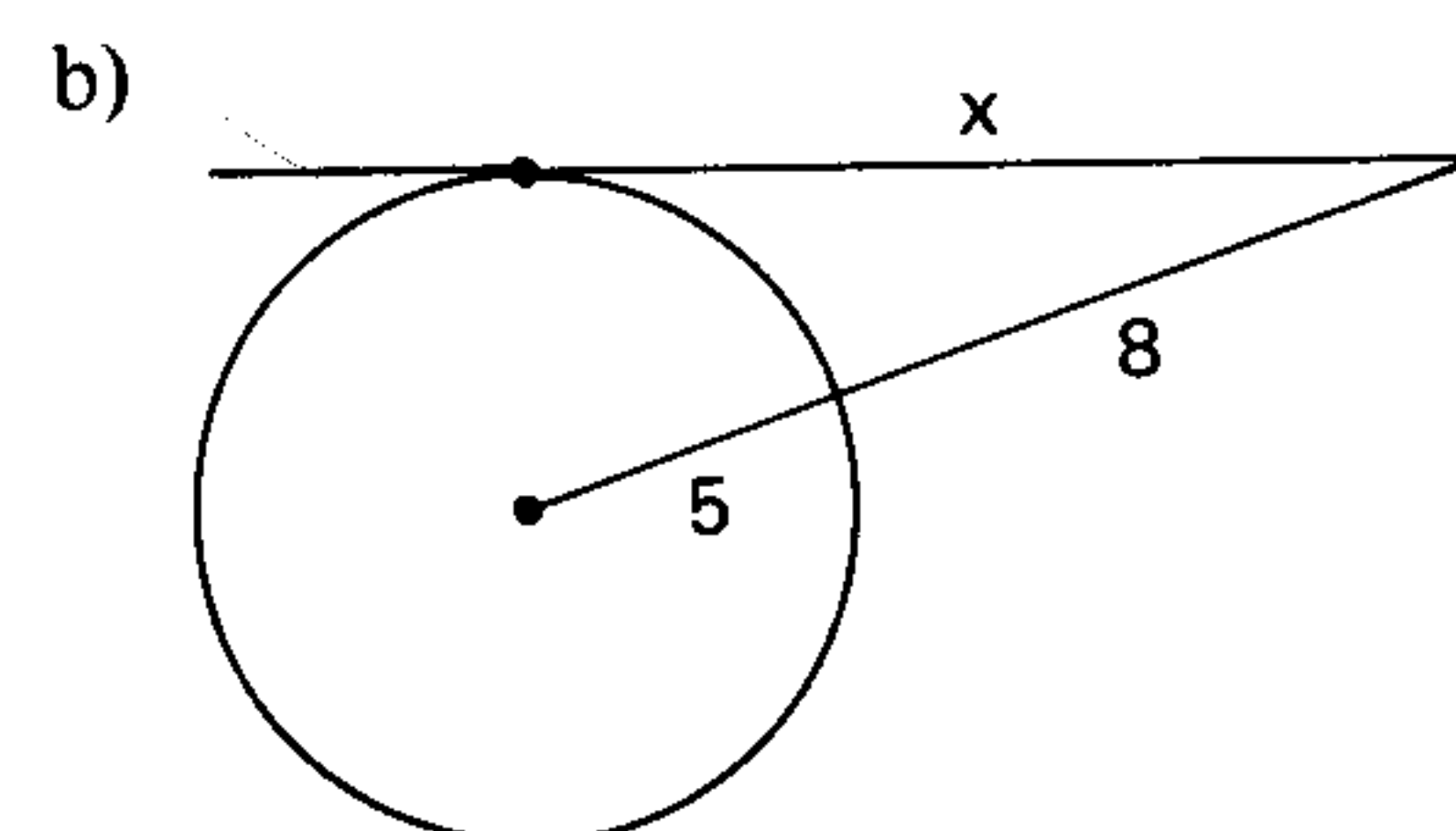
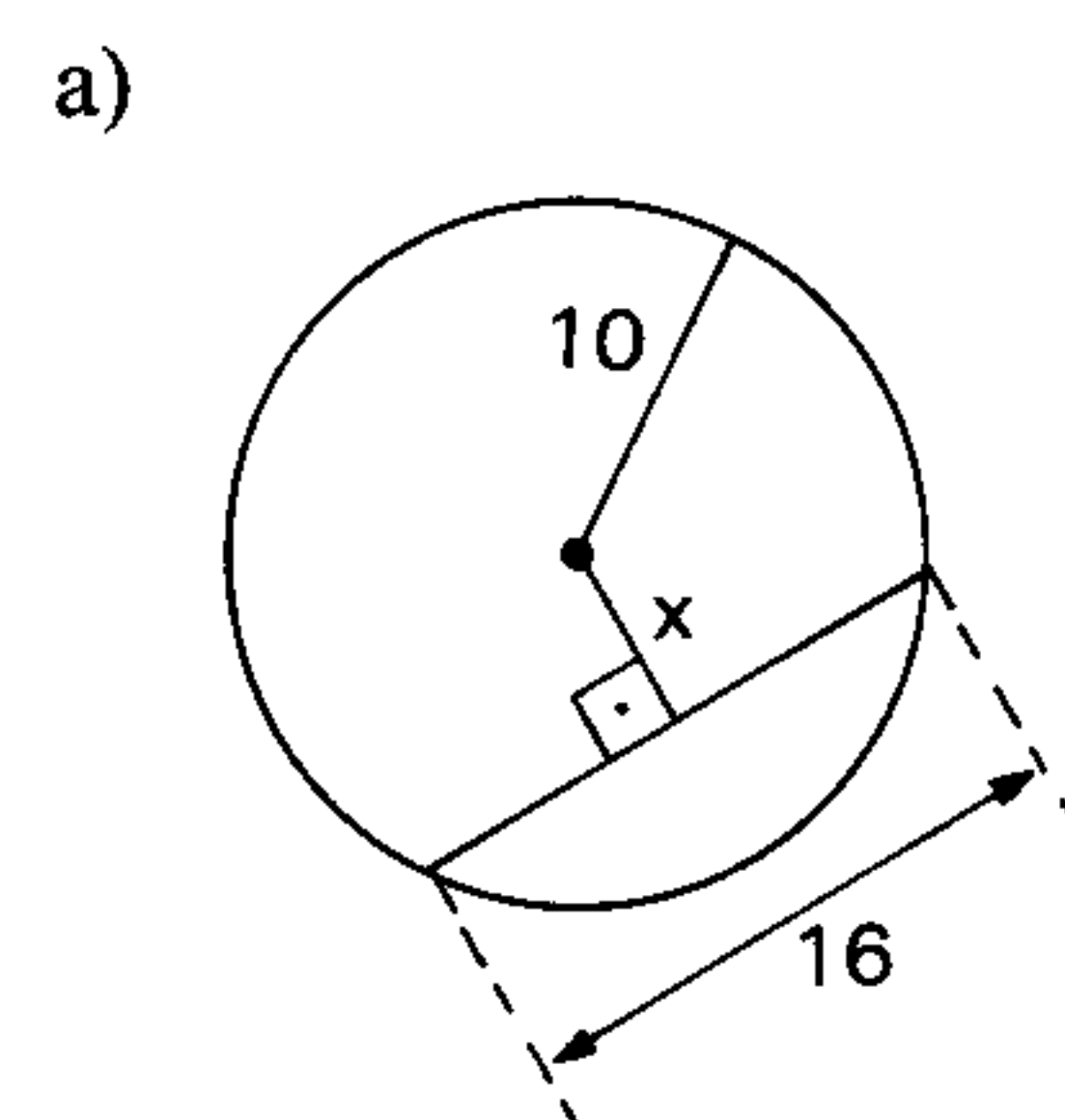
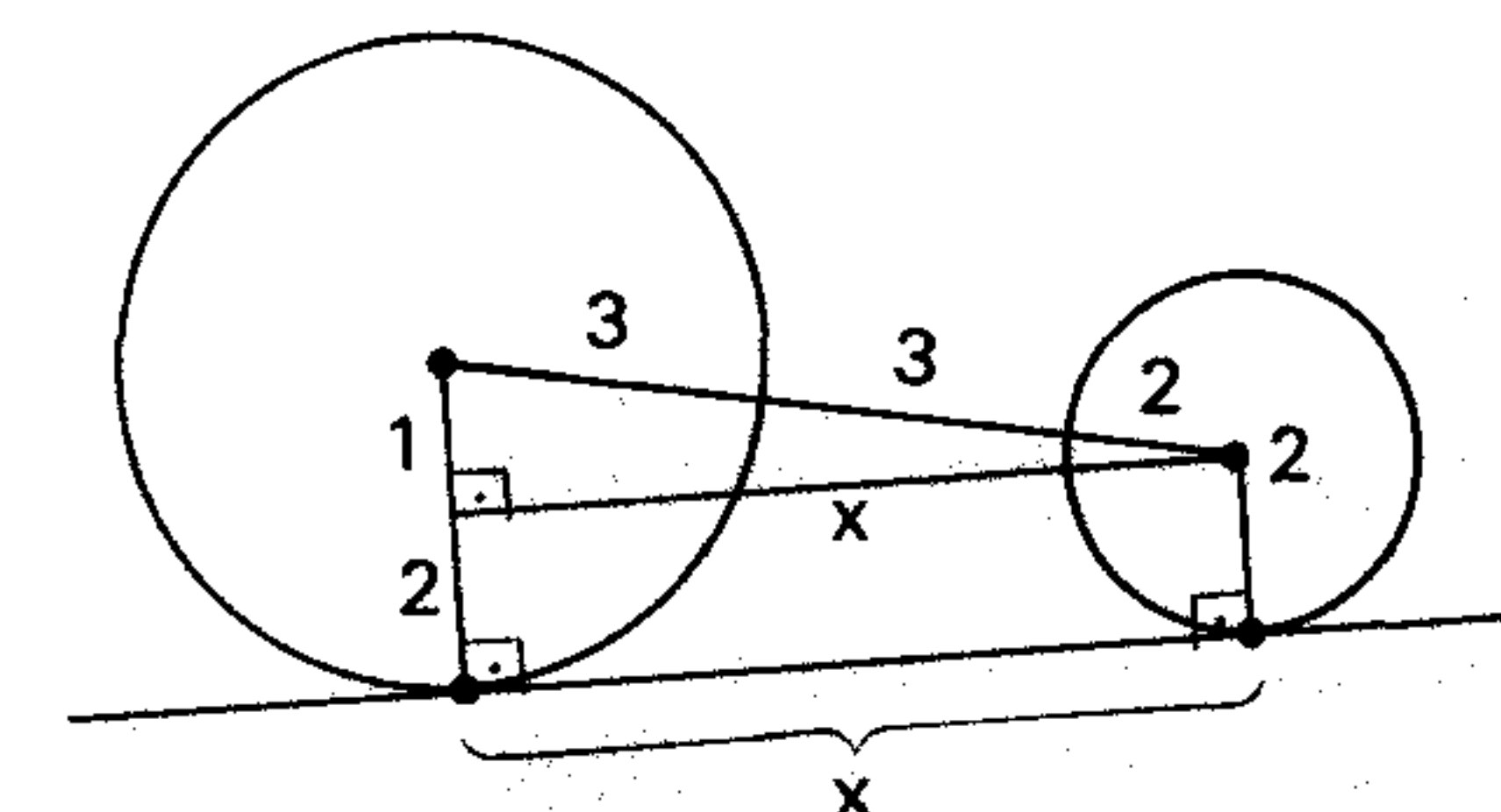
c)

d)

525. Determine o valor de x nos casos:

a)

b)

c)

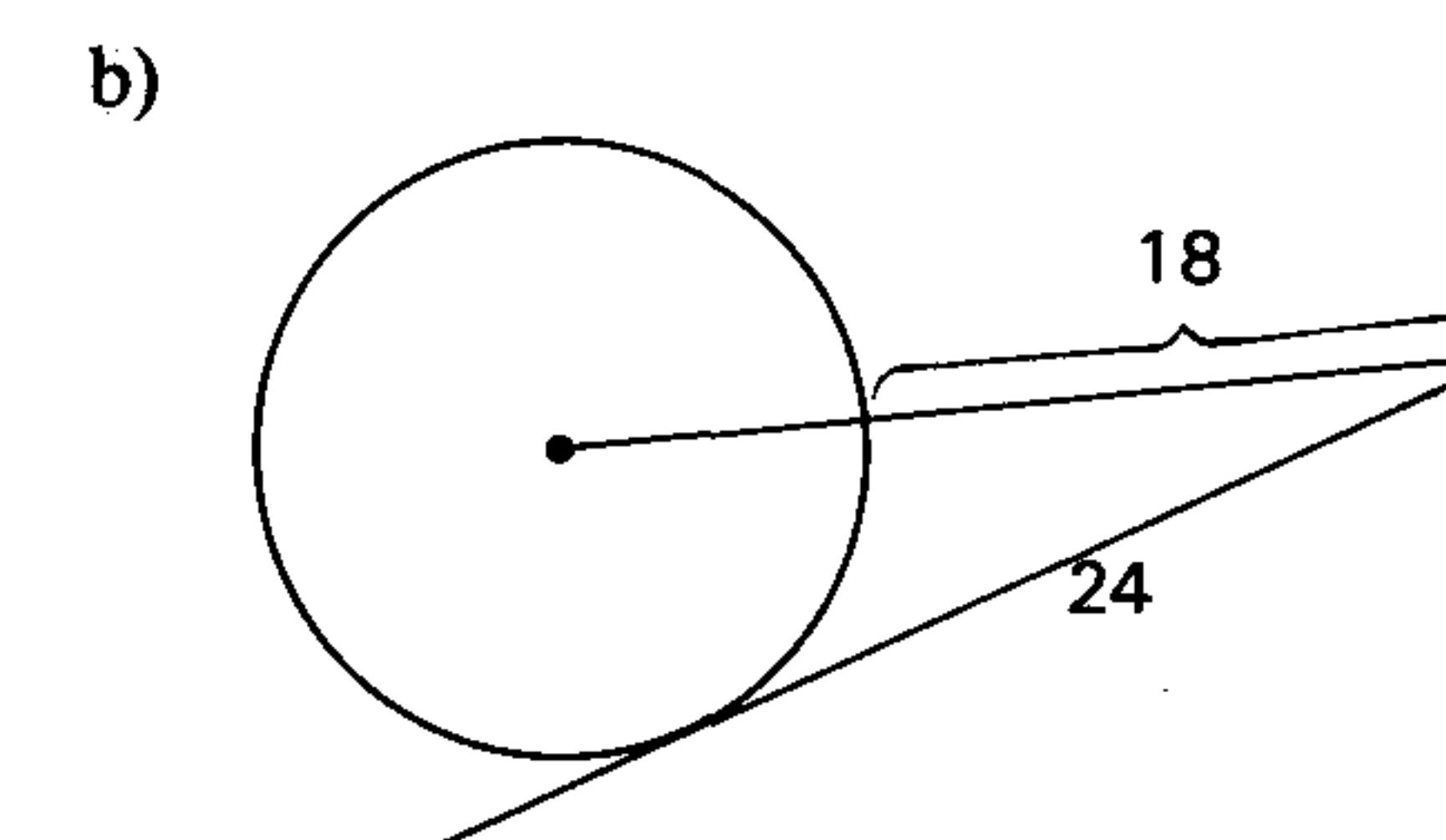
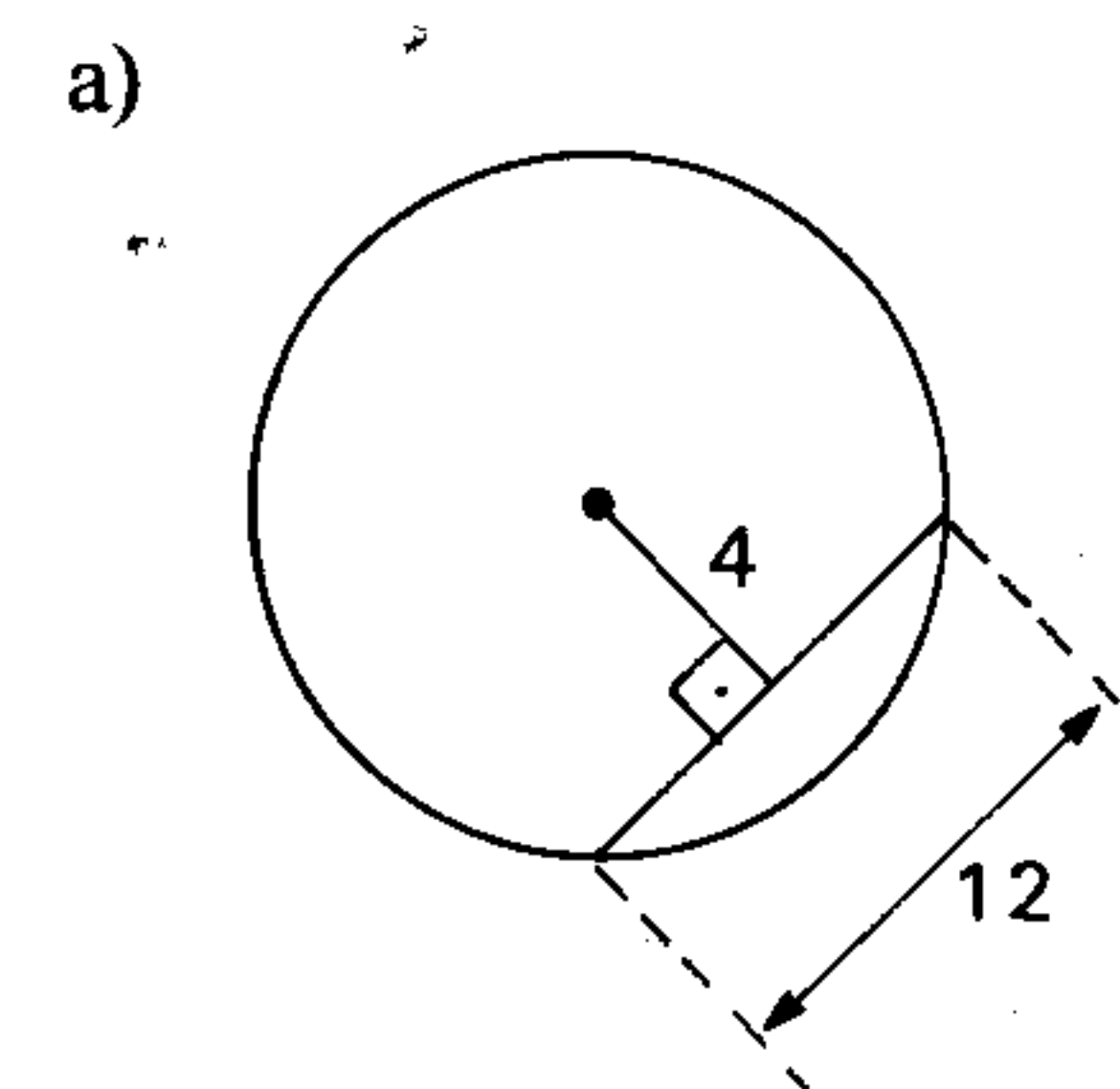
d)

Solução do item d

Traçando os raios que vão até os pontos de contato, obtemos um trapézio retângulo cuja altura é x.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo sombreado, obtemos:

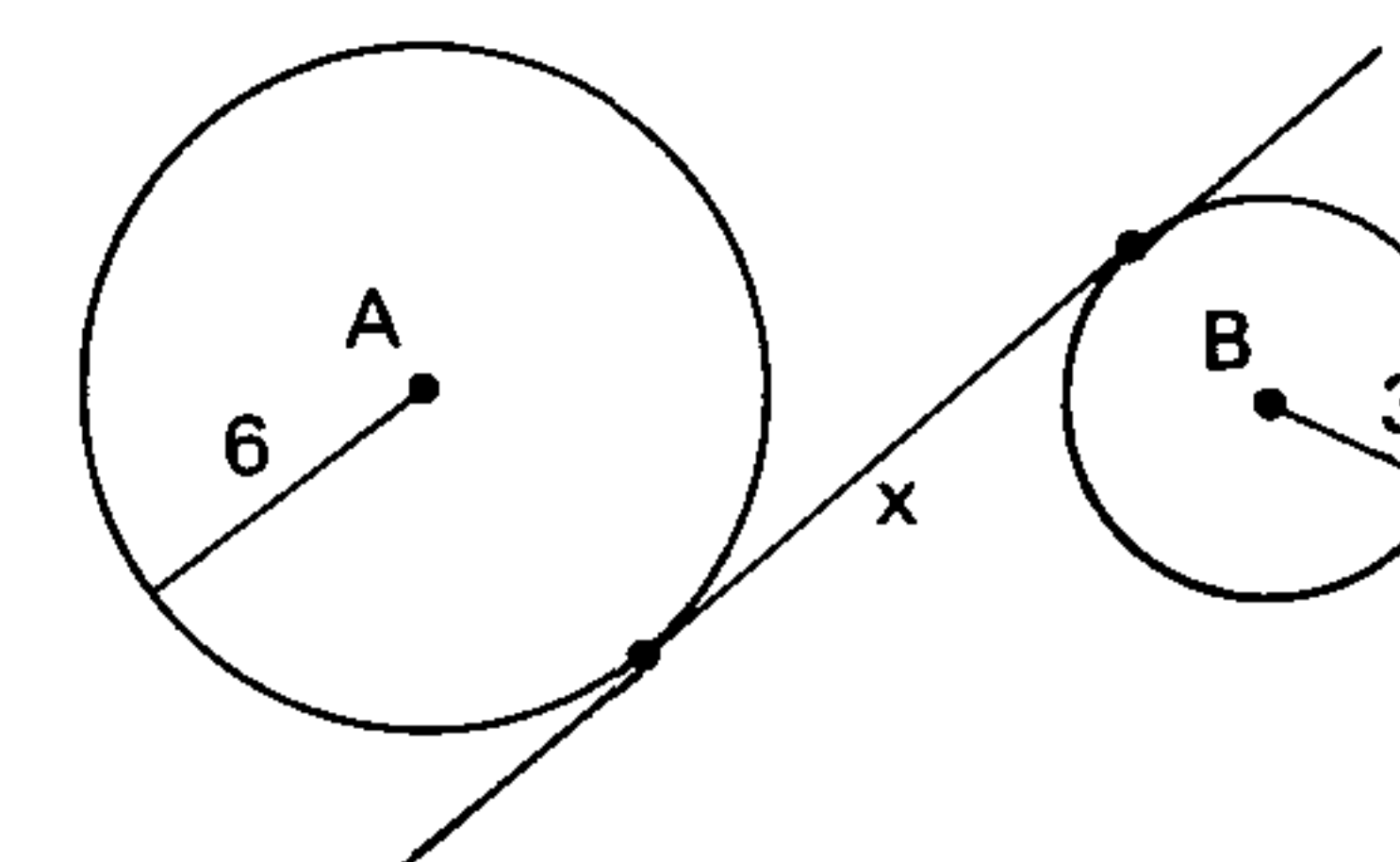
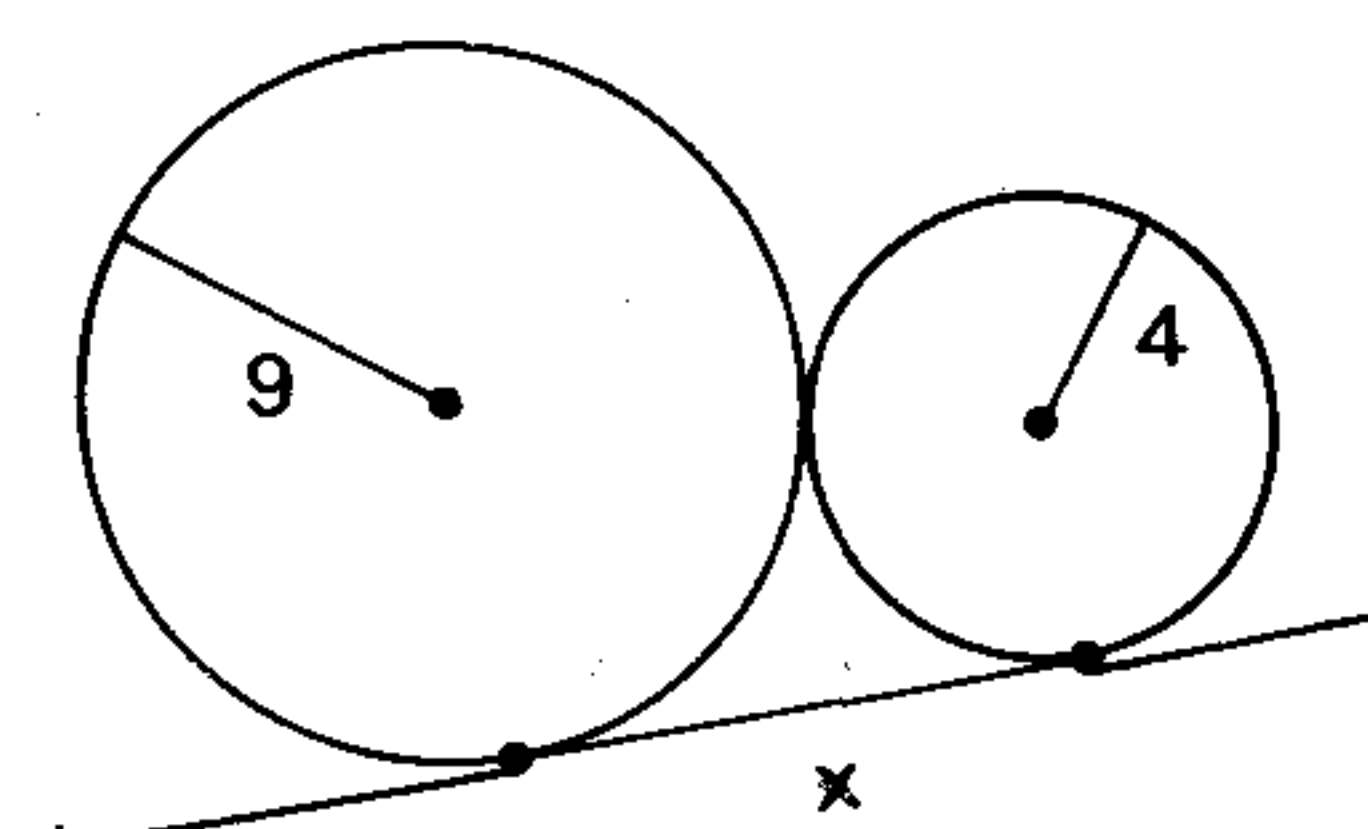
$$x^2 + 1^2 = 8^2 \implies x^2 = 63 \implies x = 3\sqrt{7}$$

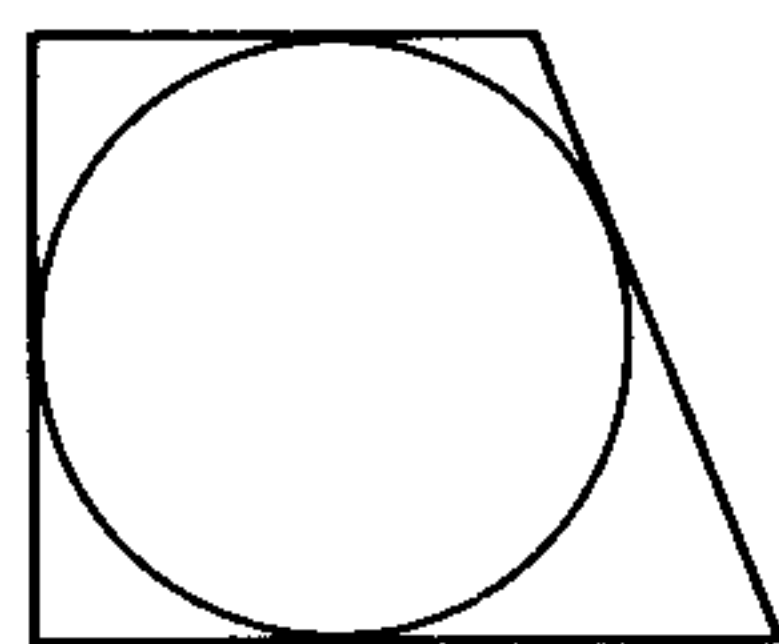
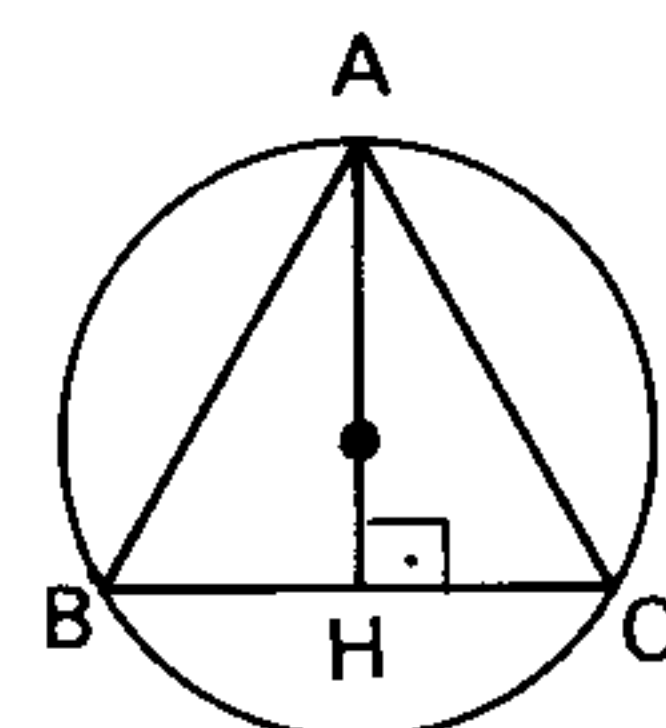
526. Determine o raio do círculo nos casos:

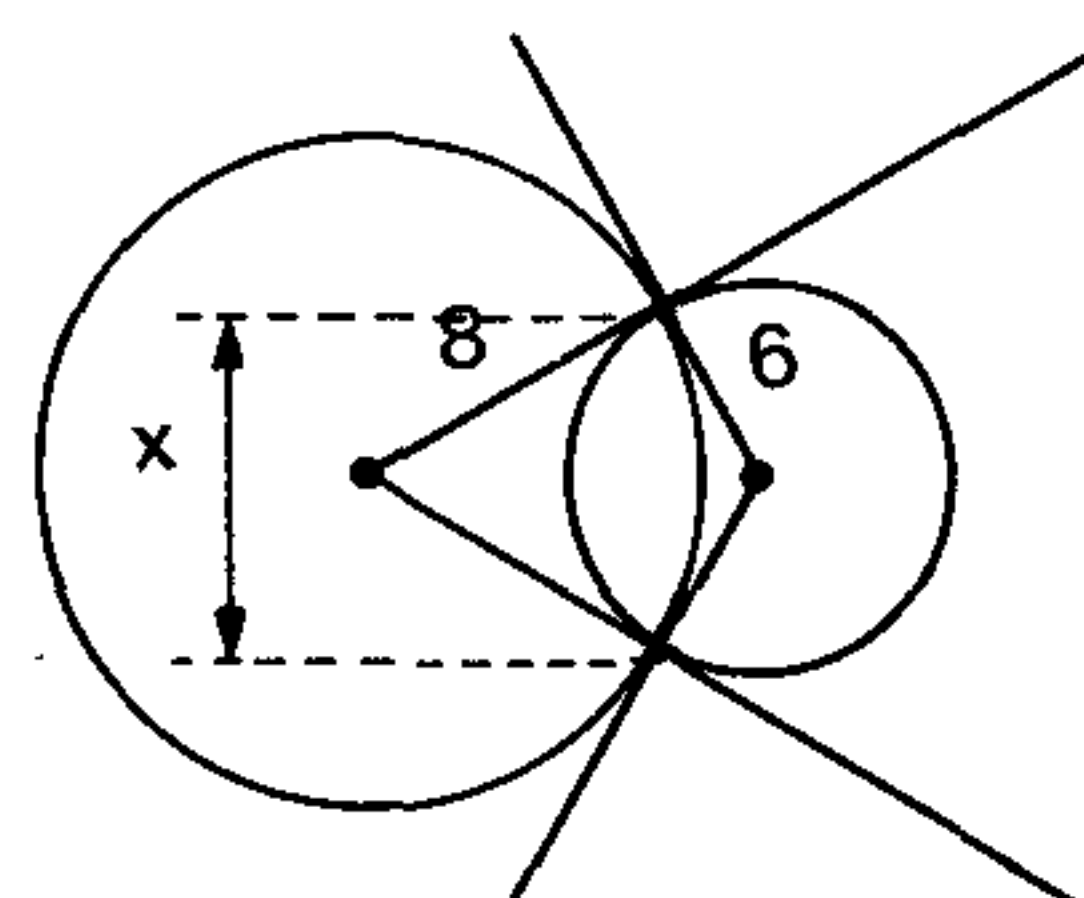
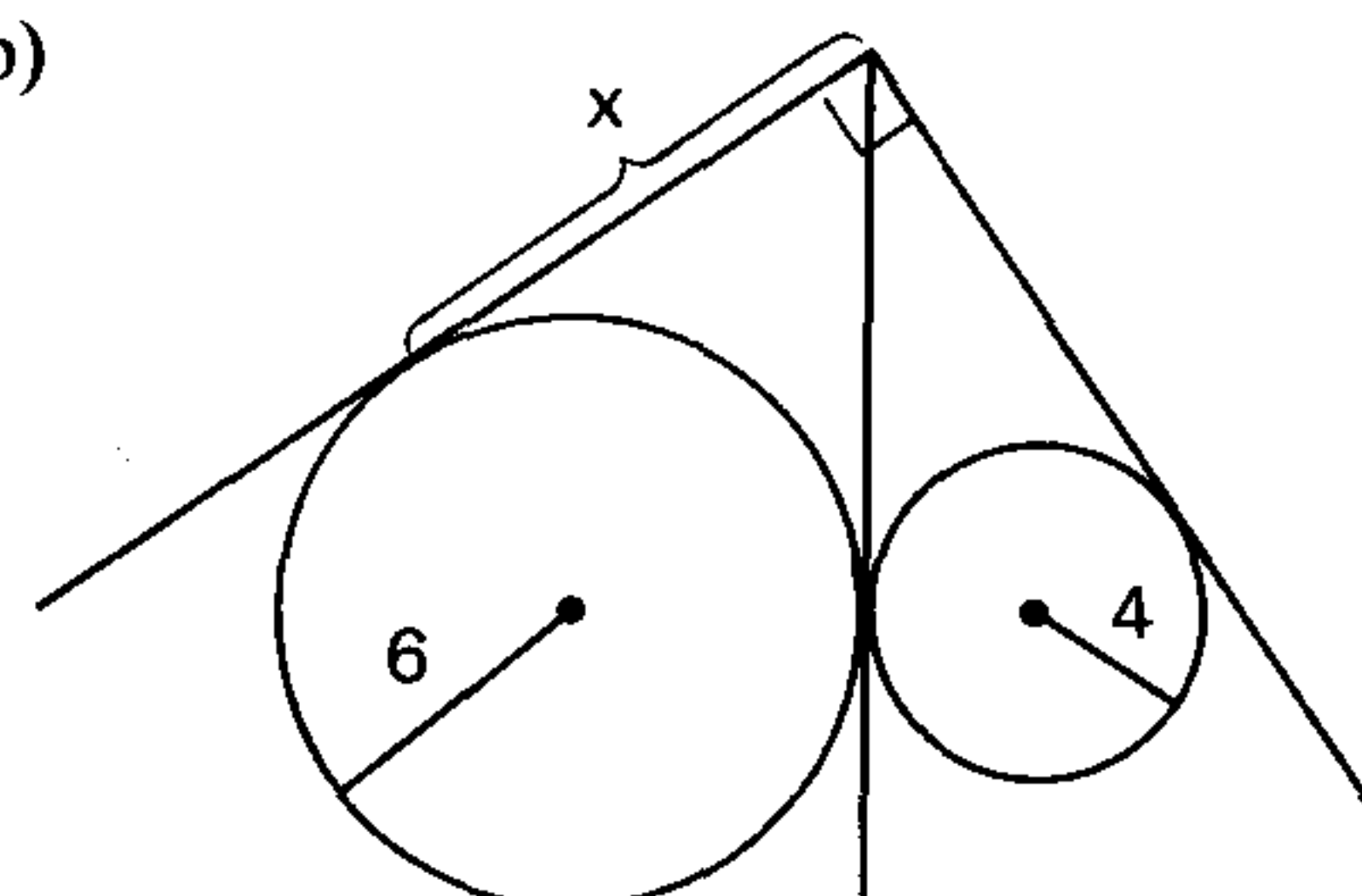
a)

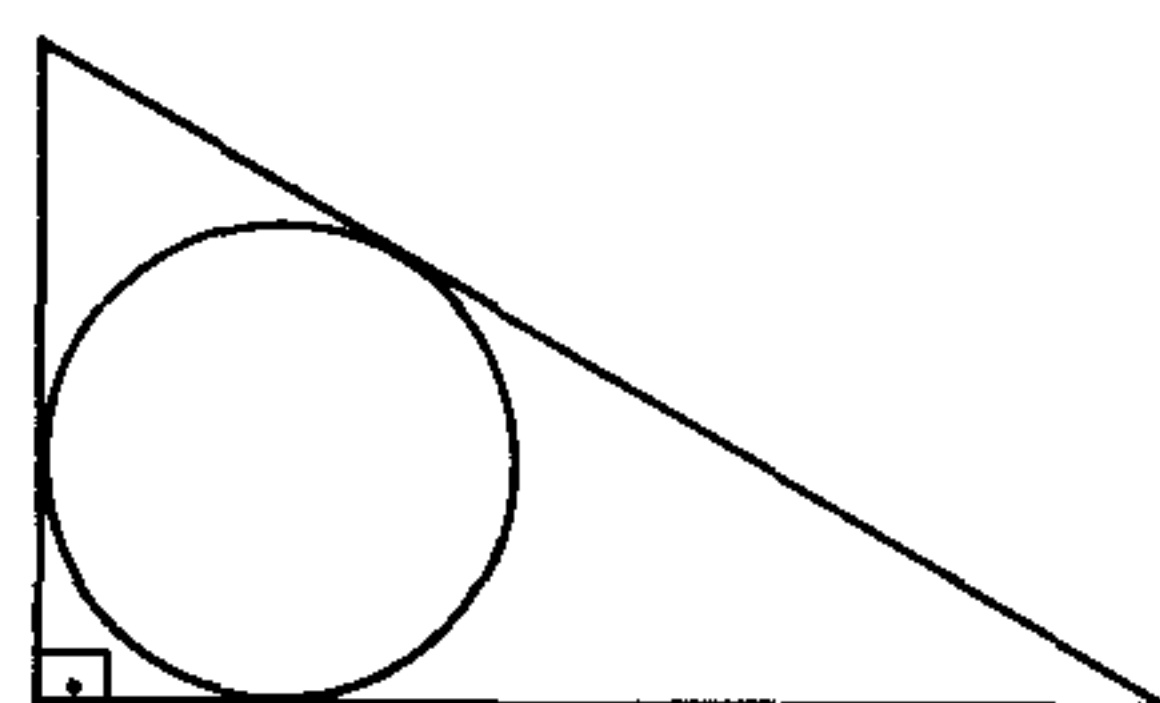
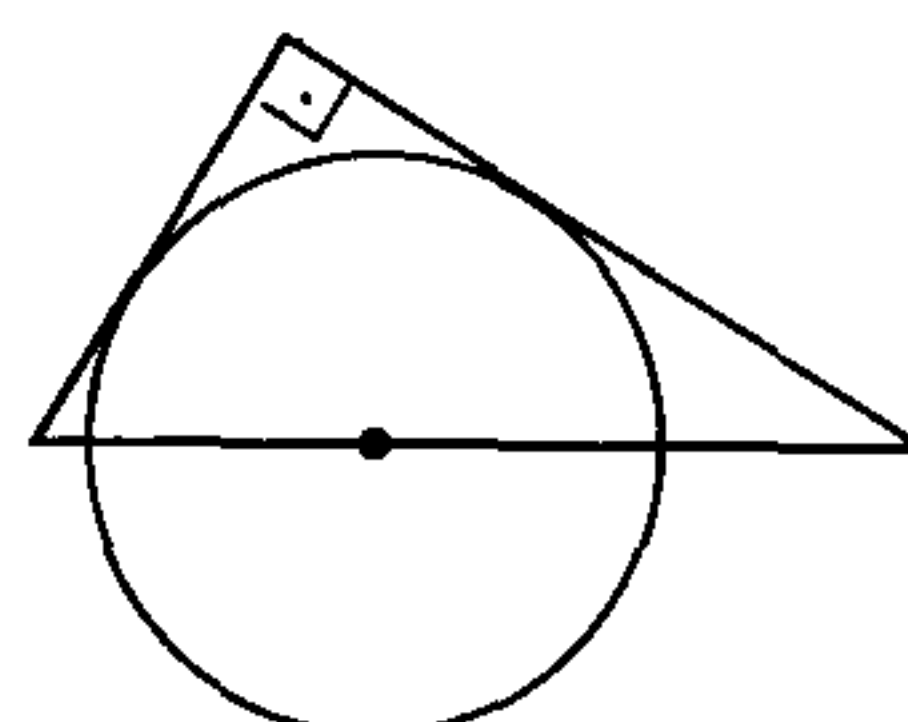
b)

527. Determine o valor de x nos casos:

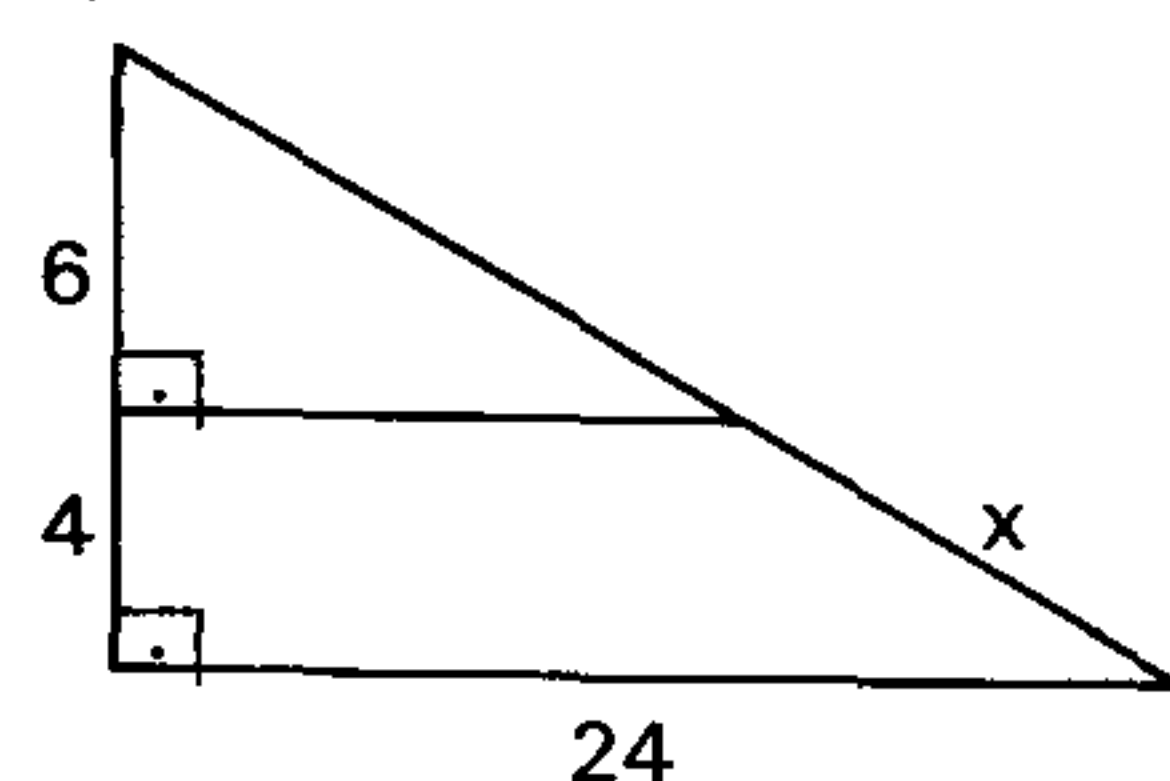
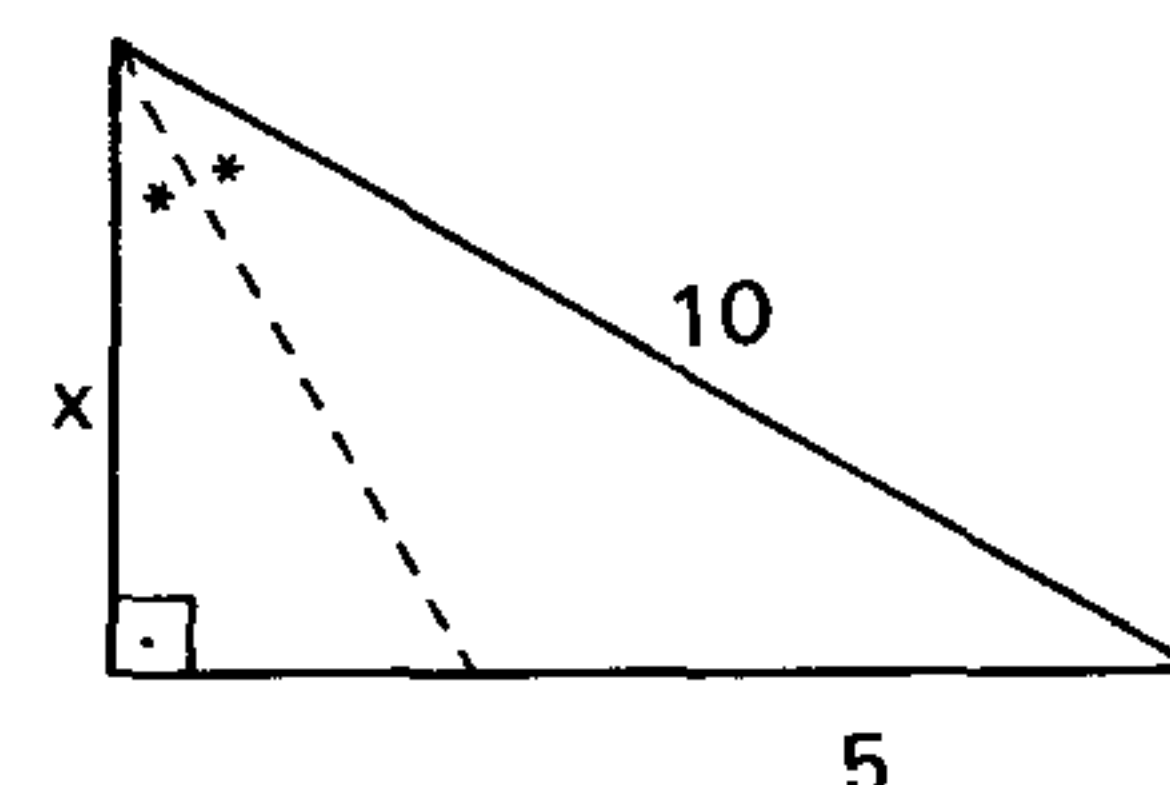
a)

b) AB = 15

528. Determine o raio do círculo nas figuras:

a) Trapézio retângulo de bases 10 m e 15 m

b) AH = 25 m e BC = 30 m e AB = AC

529. Determine o valor de x nos casos:

a)

b)

530. Determine o raio do círculo, nos casos, se o triângulo retângulo possui:

a) catetos de 6 m e 8 m

b) um cateto de 8 m e hipotenusa de $4\sqrt{13}$ m

531. Determine o valor de x nas figuras:

a)

b)

532. Determine a diagonal de um quadrado de perímetro *20 m*.

533. Determine a diagonal de um retângulo de perímetro *20 m* e base *6 m*.

534. O perímetro de um losango é *52 m* e uma diagonal mede *10 m*. Calcule a outra diagonal.

535. Determine a altura de um triângulo equilátero de perímetro *24 m*.

536. Determine o perímetro de um triângulo equilátero de altura *6 m*.

537. O perímetro de um triângulo isósceles é de *18 m* e a altura relativa à base mede *3 m*. Determine a base.

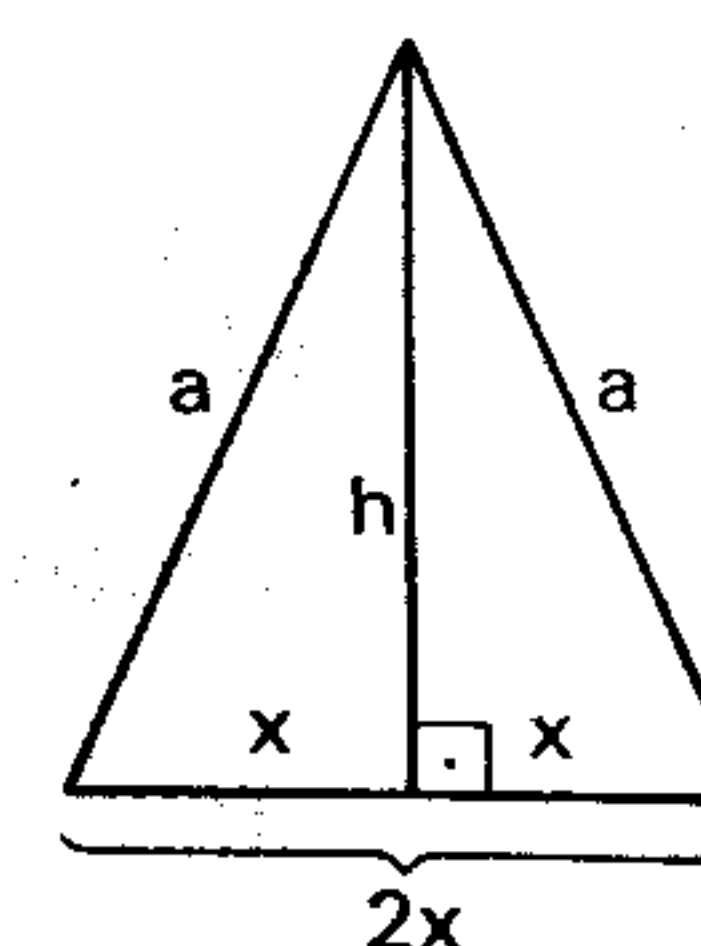
538. Determine a menor altura de um triângulo cujos lados medem *4 m, 5 m* e *6 m*.

539. Determine a altura não relativa à base de um triângulo isósceles de lados *10 m, 10 m* e *12 m*.

540. A altura de um retângulo mede *8 m*, a diagonal excede a base em *2 m*. Calcule a diagonal.

541. O perímetro de um retângulo é de *30 m* e a diagonal mede $5\sqrt{5}$ *m*. Determine os lados desse retângulo.

542. A altura relativa à base de um triângulo isósceles excede a base em *2 m*. Determine a base, se o perímetro é de *36 m*.

Solução

Sendo $2x$ a medida da base (para simplificar os cálculos) e considerando as medidas indicadas na figura, temos:

$$\begin{cases} h = 2x + 2 \\ 2x + 2a = 36 \\ x^2 + h^2 = a^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h = 2x + 2 \\ a = 18 - x \\ x^2 + h^2 = a^2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 + (2x + 2)^2 = (18 - x)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 + 4x^2 + 8x + 4 = 324 - 36x + x^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4x^2 + 44x - 320 = 0 \Longrightarrow x^2 + 11x - 80 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = 5 \Longrightarrow \text{A base mede 10 m.}$$

543. Cada um dos lados congruentes de um triângulo isósceles excede a base em *3 m*. Determine a base, se a altura relativa a ela é de *12 m*.

544. A diferença entre as medidas das diagonais de um losango de *68 m* de perímetro é *14 m*. Determine as diagonais desse losango.

545. As bases de um trapézio retângulo medem *3 m* e *9 m* e o seu perímetro é de *30 m*. Calcule a altura.

546. Calcule a altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, no triângulo retângulo de catetos *12 cm* e *16 cm*.

547. Calcule a hipotenusa, a altura relativa à hipotenusa, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos *3* e *4*.

548. Dado um triângulo equilátero de lado a, calcule sua altura.

549. Uma escada de *2,5 m* de altura está apoiada em uma parede e seu pé dista *1,5 m* da parede. Determine a altura que a escada atinge na parede, nessas condições.

550. A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede *12 m*. Se a hipotenusa mede *25 m*, calcule os catetos.

551. Num triângulo ABC, retângulo em A, a altura relativa à hipotenusa mede *1,2 cm* e a hipotenusa mede *2,5 cm*. Sendo m e n, respectivamente, as projeções do maior e do menor cateto sobre a hipotenusa, calcule $\frac{m}{n}$.

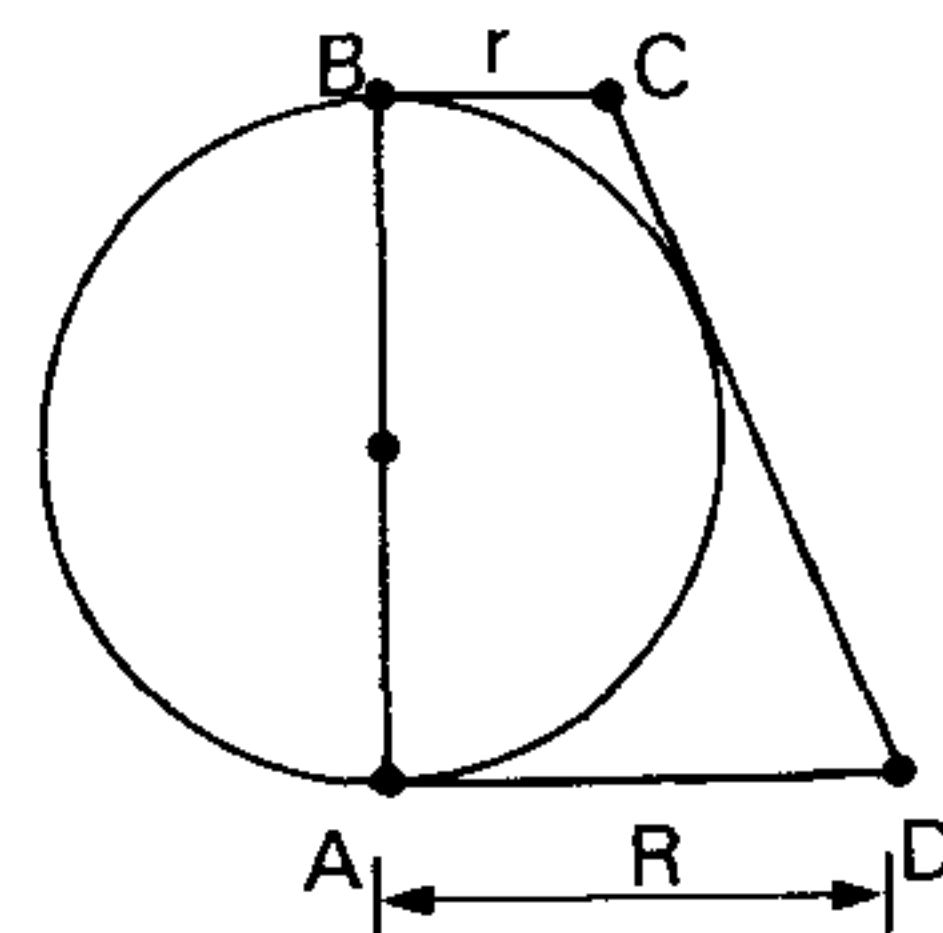
552. Dois ciclistas partem de uma mesma cidade em direção reta; um em direção leste e outro em direção norte. Determine a distância que os separa depois de duas horas, sabendo que a velocidade dos ciclistas é de *30 km/h* e *45 km/h*, respectivamente.

553. As bases de um trapézio isósceles medem *12 m* e *20 m*, respectivamente. A soma dos lados não paralelos é igual a *10 m*. Quanto mede a altura?

554. As bases de um trapézio isósceles medem *7* e *19* e os lados não paralelos *10*. Calcule a altura desse trapézio.

555. Em um trapézio retângulo, a soma das bases é de *16 cm*, sendo uma delas os $\frac{3}{5}$ da outra. Determine a altura, sabendo que o lado oblíquo mede *5 cm*.

556. Na figura, calcule a altura do trapézio retângulo $ABCD$.

B r C
A R D

557. Sabendo que a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a *200*, determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

558. Calcule o perímetro do triângulo isósceles de *16 cm* de base e *6 cm* de altura.

559. Determine a altura de um trapézio de bases *24 cm* e *10 cm*, sabendo que os lados não paralelos medem respectivamente *15 cm* e *13 cm*.

560. A base maior e um dos lados oblíquos às bases de um trapézio isósceles circunscritível a um círculo são respectivamente iguais a *18 cm* e *13 cm*. Determine a medida da altura do trapézio.

561. Uma corda comum a dois círculos secantes mede *16 cm*. Sendo *10 cm* e *17 cm* as medidas dos raios dos círculos, determine a distância entre seus centros.

562. Seja um ponto P, externo a uma circunferência. A menor distância desse ponto à circunferência vale *6 cm* e a maior distância desse ponto à circunferência vale *24 cm*. Determine o comprimento do segmento tangente à circunferência, por esse ponto.

563. Dois círculos de raios *12 cm* e *20 cm* são tangentes externamente. Determine o comprimento do segmento $\overline{PQ}$, tangente comum aos dois círculos, sendo P e Q pontos de tangência.

564. Um trapézio isósceles circunscritível tem bases medindo *8 cm* e *16 cm*. Calcule a altura do trapézio.

565. Prove que o diâmetro de um círculo inscrito em um trapézio isósceles é média geométrica entre as bases do trapézio.

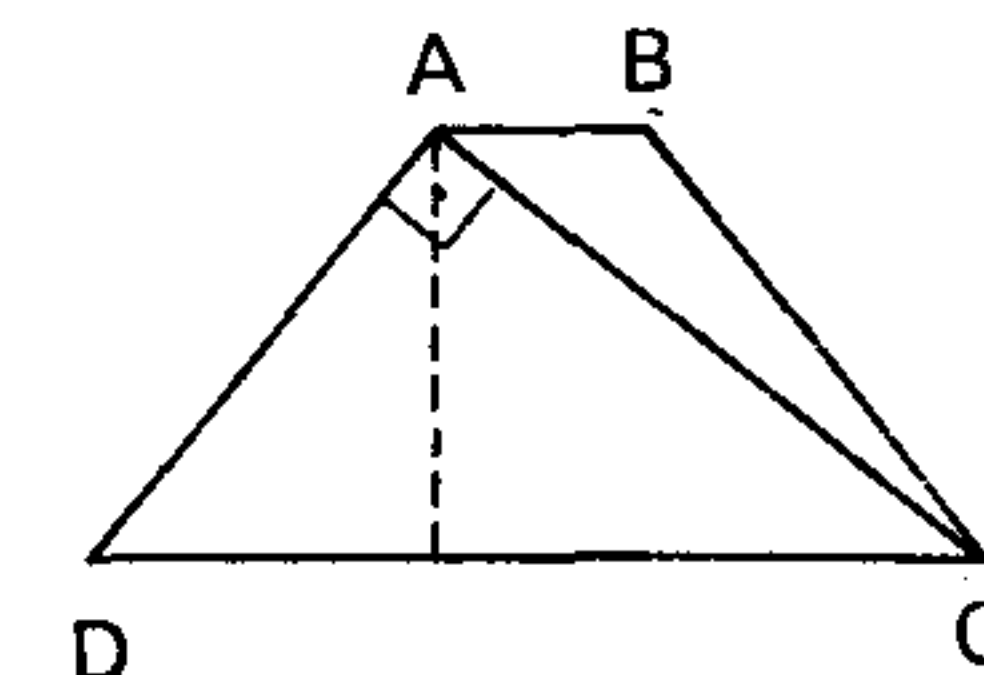
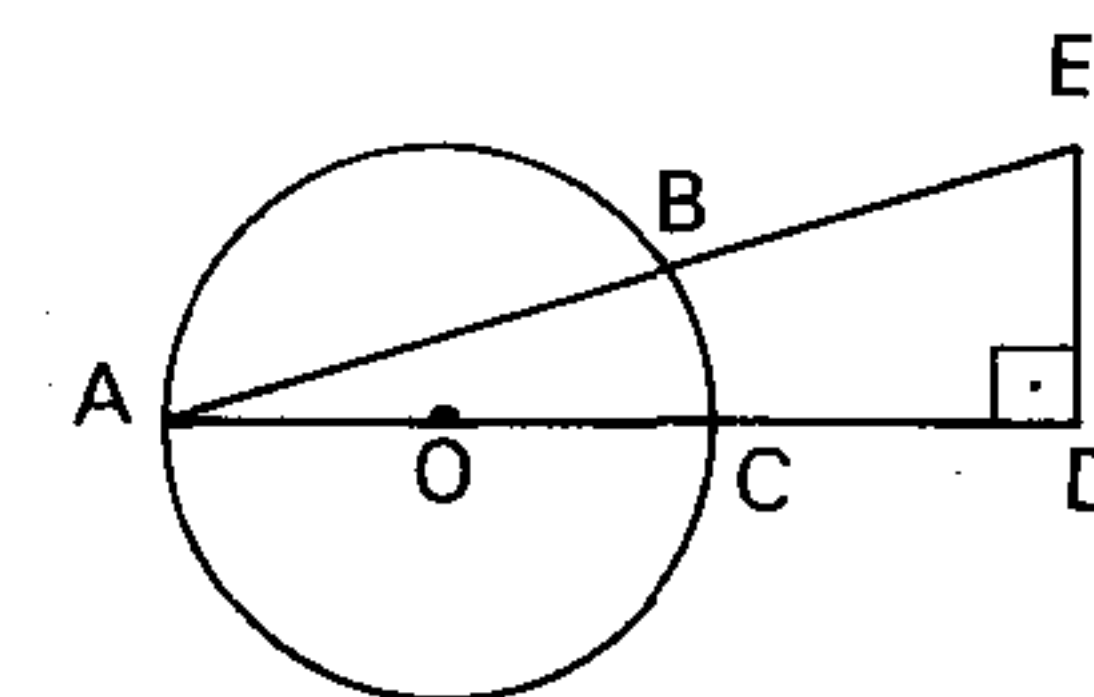
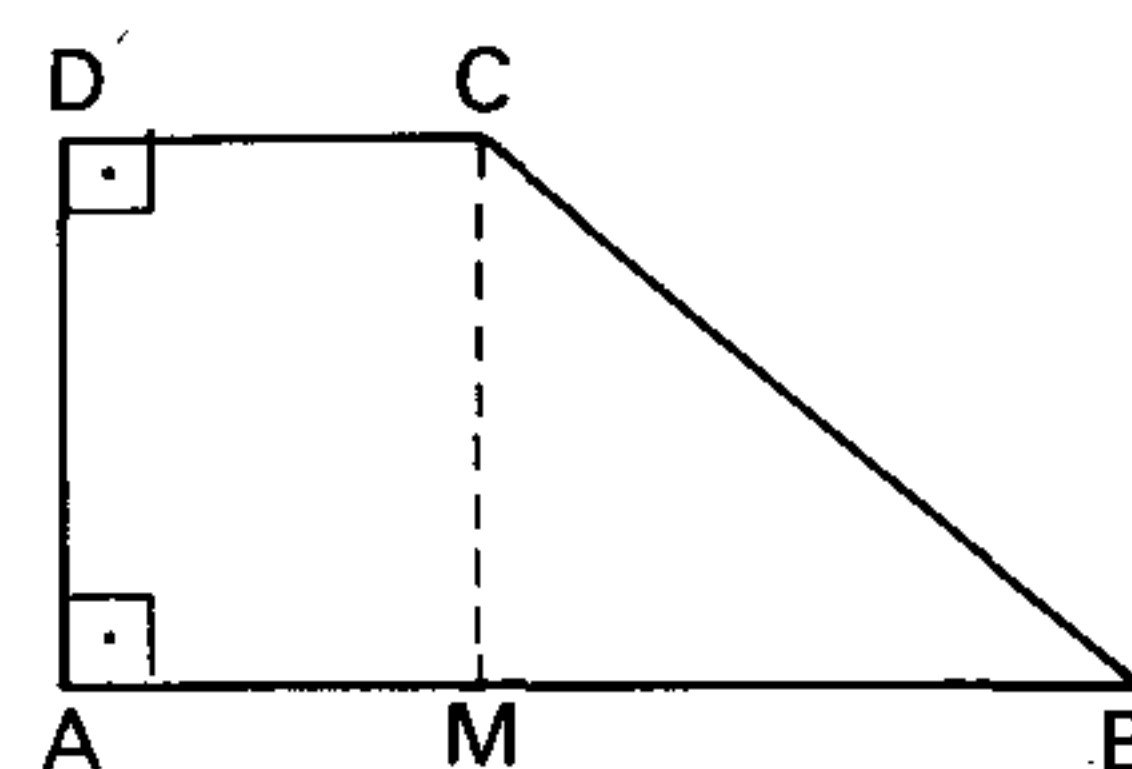
566. Calcule a medida do raio do círculo, na figura ao lado, sabendo que $AD = 12 cm$, $AE = 15 cm$ e $AB = 8 cm$.

E B A O C D

567. Num triângulo isósceles de altura *8*, inscreve-se uma circunferência de raio *3*. Calcule a medida da base do triângulo.

568. Sobre a hipotenusa $\overline{AB}$ de um triângulo retângulo ABC é construído um segundo triângulo retângulo ABD, com hipotenusa $\overline{AB}$. Se $BC = 1$, $AC = b$ e $AD = 2$, calcule $\overline{BD}$.

569. No trapézio $ABCD$ ao lado, a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado oblíquo $\overline{AD}$. Sendo $CD = 25$ *cm* e $AD = 15$ *cm*, determine a medida da altura do trapézio.

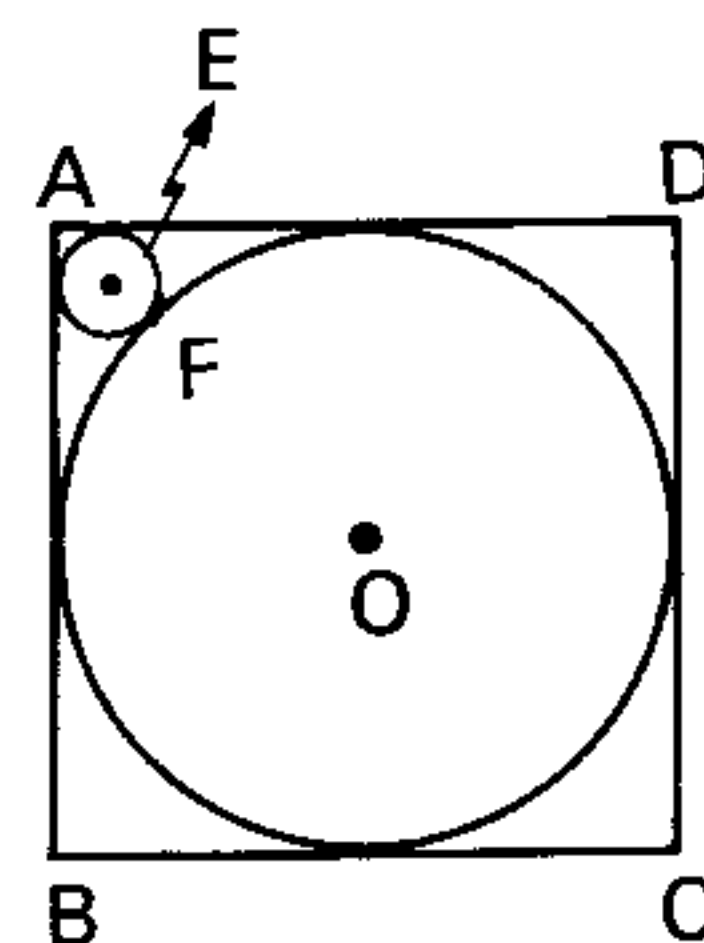
A B D C

570. Determine a medida da diagonal $\overline{AC}$ do trapézio retângulo da figura ao lado, sabendo que as bases medem respectivamente *4 cm* e *9 cm* e que o lado $\overline{BC}$ mede $\sqrt{34}$ *cm*.

571. O segmento $\overline{AB}$ tem suas extremidades A e B como pontos de tangência às circunferências de centros O_1 e O_2. Sendo *15 cm* e *3 cm* os raios dessas circunferências, respectivamente, e *24 cm* a distância entre seus centros, determine o segmento $\overline{AB}$.

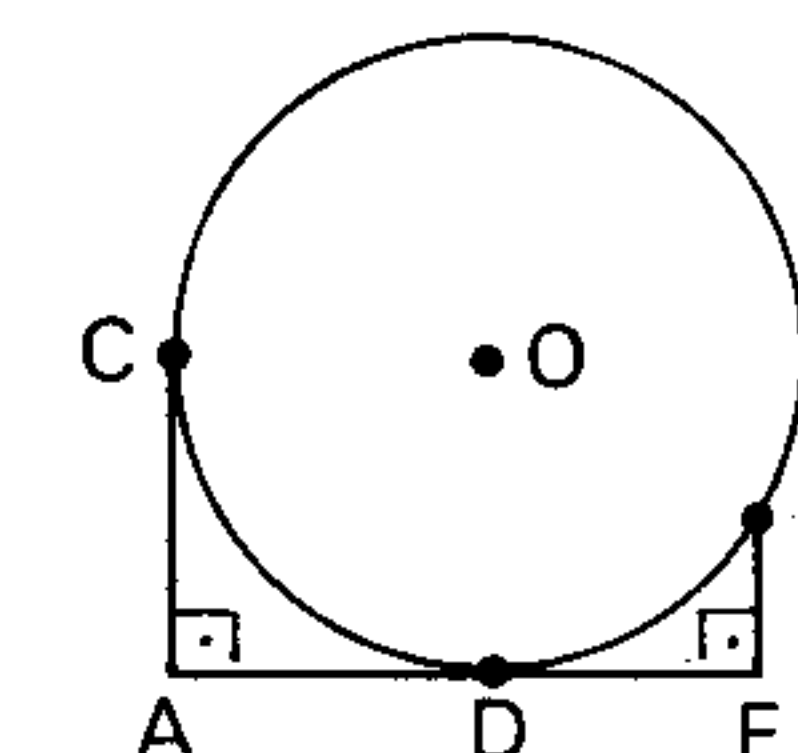
572. Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo sendo *24 m* o seu perímetro e $\frac{24}{5}$ *m* a medida da altura relativa à hipotenusa.

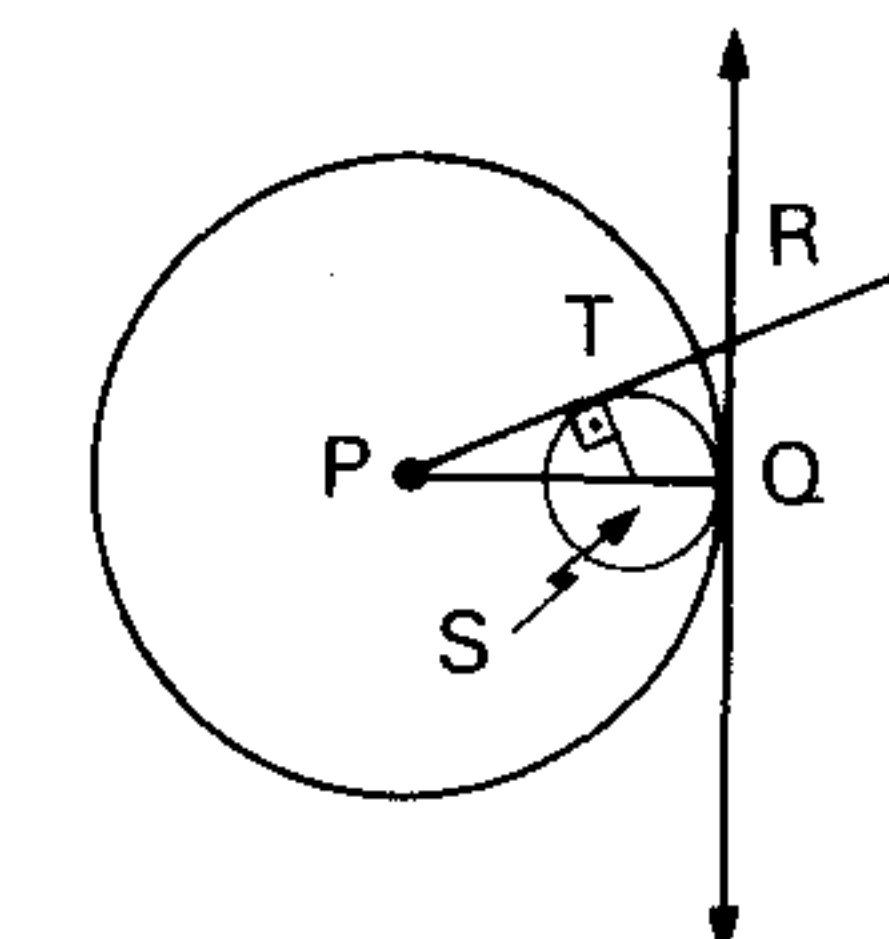
573. Considere-se uma semicircunferência de diâmetro $AOB = 2r$. Construímos internamente duas novas semicircunferências com diâmetros $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e uma circunferência tangente a essas três semicircunferências. Calcule a medida do raio dessa circunferência.

574. Do mesmo lado de uma reta são traçados três círculos tangentes à reta e tangentes entre si dois a dois. Sabendo que dois deles têm raio igual a *16*, calcule o raio do terceiro.

575. Um octógono regular é formado cortando-se triângulos retângulos isósceles nos vértices de um quadrado. Se o lado do quadrado mede *1*, quanto medem os catetos dos triângulos retirados?

576. Consideremos dois círculos tangentes como na figura ao lado. Sendo E o centro do círculo menor, F o ponto de tangência entre os dois círculos e a o lado do quadrado, determine o raio do círculo menor em função de a.

577. Considere um quadrado Q de lado a e cinco círculos de mesmo raio r interiores a Q, dos quais um é concêntrico com Q e tangente exteriormente aos quatro outros, e cada um destes tangencia dois lados consecutivos de Q. Determine a medida de r em função da medida a do lado quadrado.

578. Na figura, determine o raio da circunferência, sabendo que $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ tangenciam a circunferência nos pontos C e D, respectivamente, e que $BE = 12$ *cm* e $AE = 54$ *cm*.

579. Dois teleféricos T_1 e T_2 partem de uma estação E situada num plano horizontal, em direção aos picos P_1 e P_2 de duas montanhas. Determine a distância entre P_1 e P_2, sabendo que os teleféricos percorreram *1 500 m* e *2 900 m*, respectivamente, e que a primeira montanha tem *900 m* de altura e a segunda *2 000 m* e que os pés das montanhas e E estão em linha reta.

580. Sejam dois círculos tangentes entre si, internamente, como na figura ao lado. Sendo $PQ = 8$ *cm* e $ST = 3$ *cm*, calcule a medida de $\overline{RQ}$.

581. Num círculo de centro O e raio R, considera-se uma corda $AB = \frac{R}{2}$. Calcule a medida do raio do círculo inscrito no setor circular OAB.

582. Sobre os lados de um quadrado, desenhamos externamente quatro triângulos isósceles com alturas relativas às bases iguais a *3 cm*. Determine o perímetro do quadrado, sabendo que os vértices dos quatro triângulos pertencem a uma mesma circunferência, de raio igual a $3(\sqrt{2} + 2)$ *cm*.

583. Dois quadrados $ABCD$ e $CDEF$ têm em comum o lado $\overline{CD}$. Traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{EC}$. Sendo $AM = \frac{1}{3}\overline{AC}$ e $\overline{EP} = \frac{1}{2}\overline{CE}$, com M em $\overline{AC}$ e P em $\overline{CE}$, determine o segmento $\overline{PM}$, em função do lado a dos quadrados.

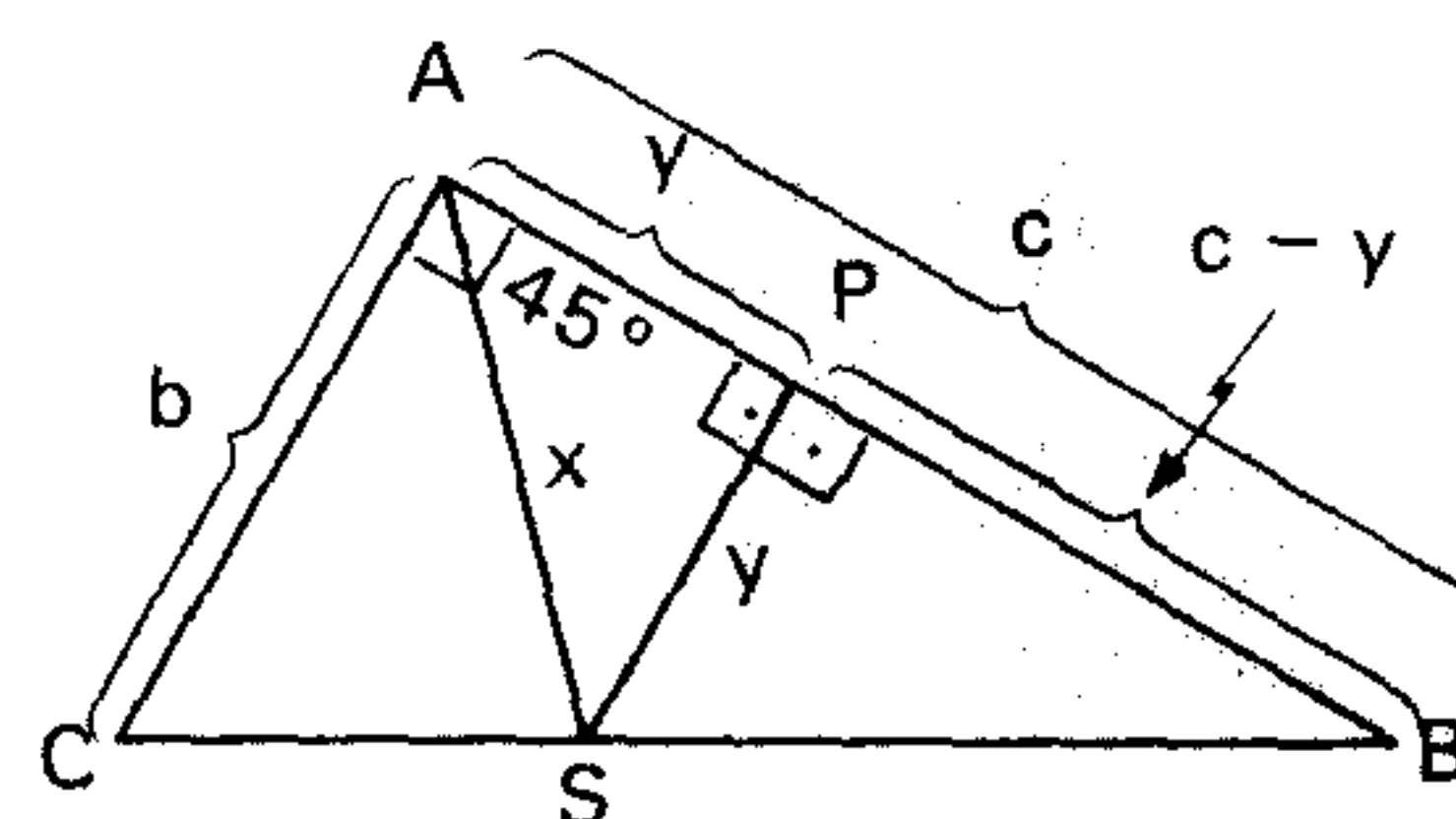
584. Determine a distância entre os pés da altura e da mediana relativas à hipotenusa de um triângulo retângulo de $(18 + 6\sqrt{3})m$ de perímetro, sabendo que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa são diretamente proporcionais aos números *1* e *3*.

585. Determine o perímetro de um triângulo, sabendo que a mediana e a altura, relativas à hipotenusa, medem respectivamente *4 cm* e $2\sqrt{3}$ *cm*.

586. Dado o triângulo retângulo ABC de catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente iguais a *80 cm* e *60 cm*, considere a altura $\overline{AH}$ e a mediana $\overline{AM}$ relativas à hipotenusa do triângulo. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{AH}$, $\overline{AM}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{MH}$, bem como a hipotenusa do triângulo.

587. Determine a altura relativa à base de um triângulo isósceles em função da base a e do raio do círculo inscrito r.

588. Determine a bissetriz interna, relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos b e c.

Solução

Seja x a medida da bissetriz $\overline{AS}$ relativa à hipotenusa. Por S tracemos um segmento paralelo a um dos catetos, paralelo a b por exemplo.

Note que os triângulos BAC e BPS são semelhantes. Então:

$$\begin{cases} y^2 + y^2 = x^2 \\ \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{c-y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ cy = bc - by \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow c \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = bc - b \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \Longrightarrow xb + xc = \sqrt{2}bc \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}bc}{b + c}$$

589. Num triângulo isósceles ABC, M é um ponto qualquer da base $\overline{BC}$. Demonstre que:

$$(AB)^2 - (AM)^2 = (MB) \cdot (MC)$$

590. Determine o perímetro de um triângulo isósceles em função da projeção a da altura relativa à base do triângulo sobre um dos lados congruentes, e em função dessa altura h.

591. Em um quadrado $ABCD$ tomamos um ponto E, sobre o lado $\overline{AD}$, tal que $AE = \frac{1}{4}\overline{AD}$, e o ponto O, médio de $\overline{AB}$. Sendo $\overline{OP}$ perpendicular a $\overline{CE}$, em que P é o pé da perpendicular tomado sobre $\overline{CE}$, prove que:

$$(OP)^2 = (EP) \cdot (CP)$$

592. Consideremos um triângulo ABC e as bissetrizes $\overline{AD}$ interna e $\overline{AE}$ externa ao triângulo. Prove que:

$$\frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{BD} = 2$$

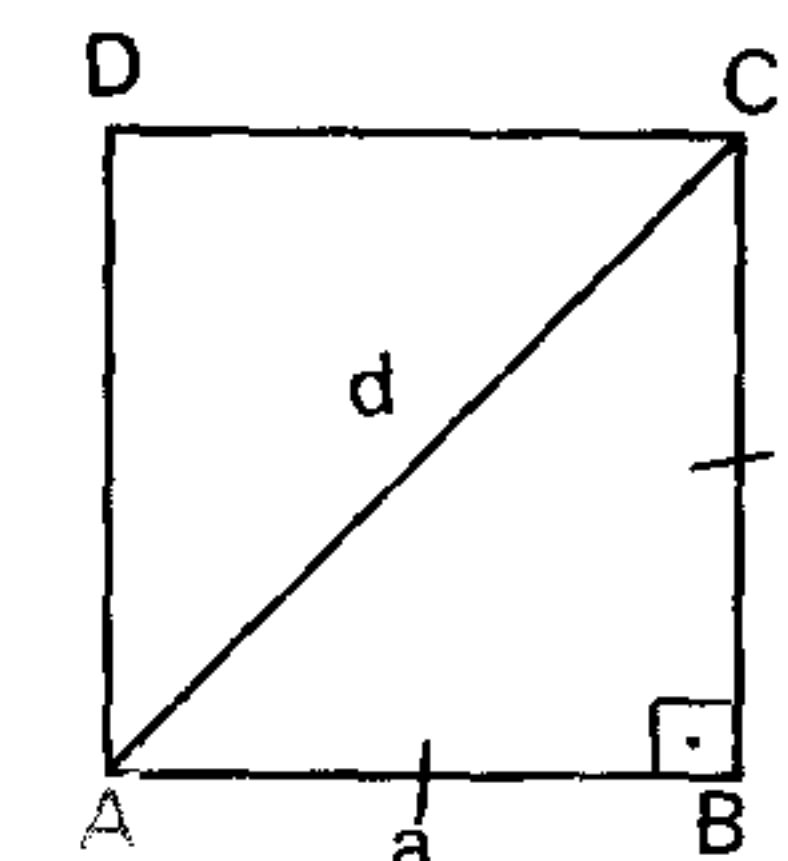
593. Seja um semicírculo de diâmetro $\overline{AB} = 2r$, e as tangentes $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ ao semicírculo. A tangente em um ponto C, qualquer, da semicircunferência encontra $\overline{AX}$ em D e $\overline{BY}$ em E. Demonstre que:

$$(CD) \cdot (CE) = r^2$$

II. Aplicações do teorema de Pitágoras

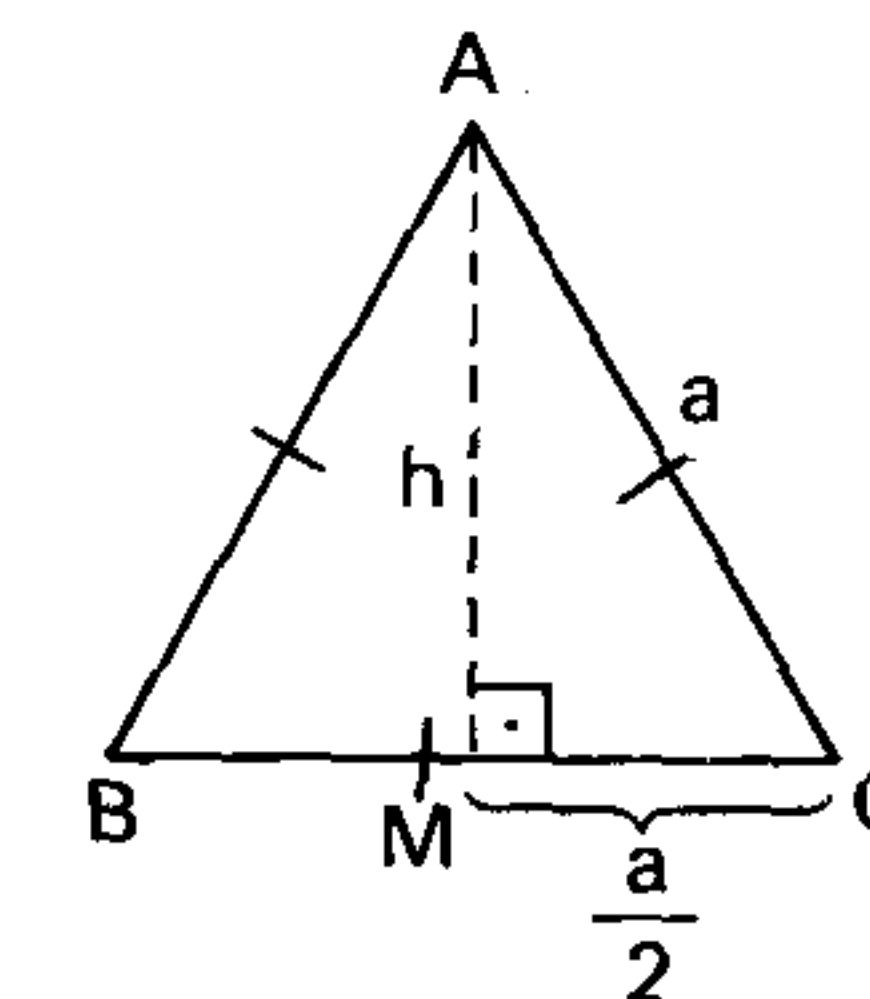
198. Diagonal do quadrado

Dado um quadrado de lado a, calcular sua diagonal d.

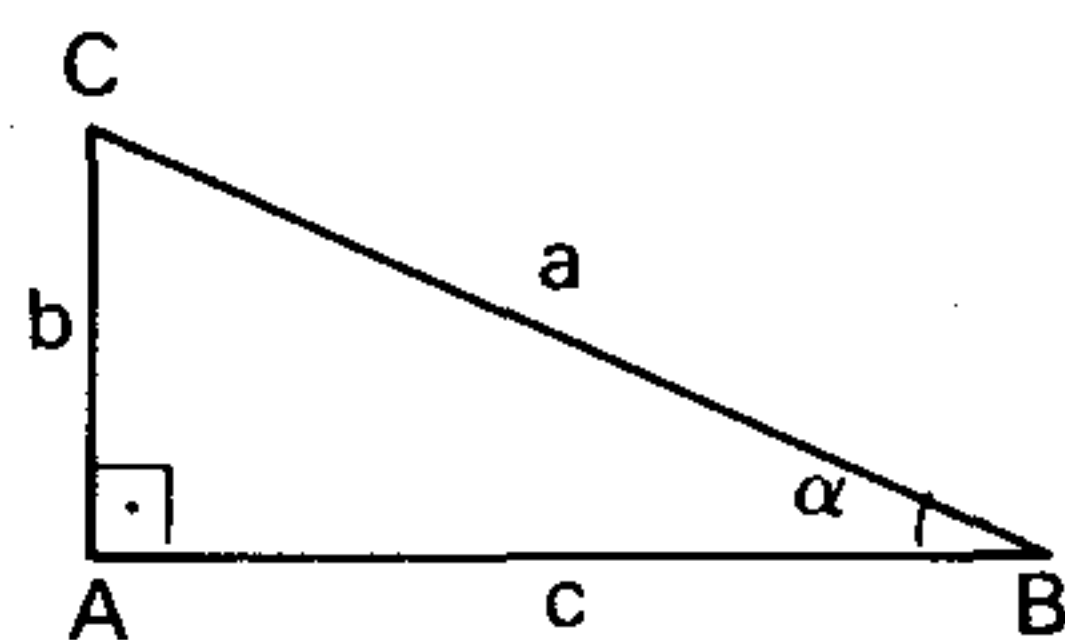
Sendo $ABCD$ o quadrado de lado a, aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Longrightarrow d^2 = 2a^2 \Longrightarrow \boxed{d = a\sqrt{2}}$$

199. Altura do triângulo equilátero

Dado um triângulo equilátero de lado a, calcular sua altura h.

Sendo ABC um triângulo equilátero de lado a, M o ponto médio de $\overline{BC}$, calculamos $\overline{AM} = h$ aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAMC.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Longrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Longrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

200. *Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°*

Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, pondo-se:

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \quad \text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$$

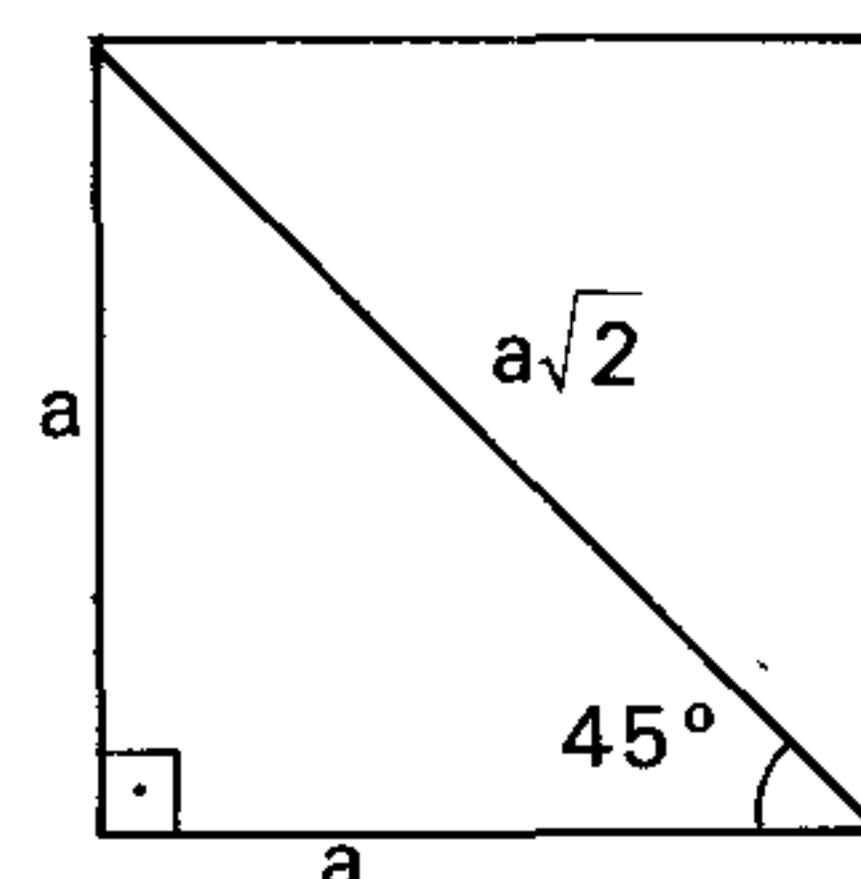
$$\text{cosseno de } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}, \quad \cos \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$$

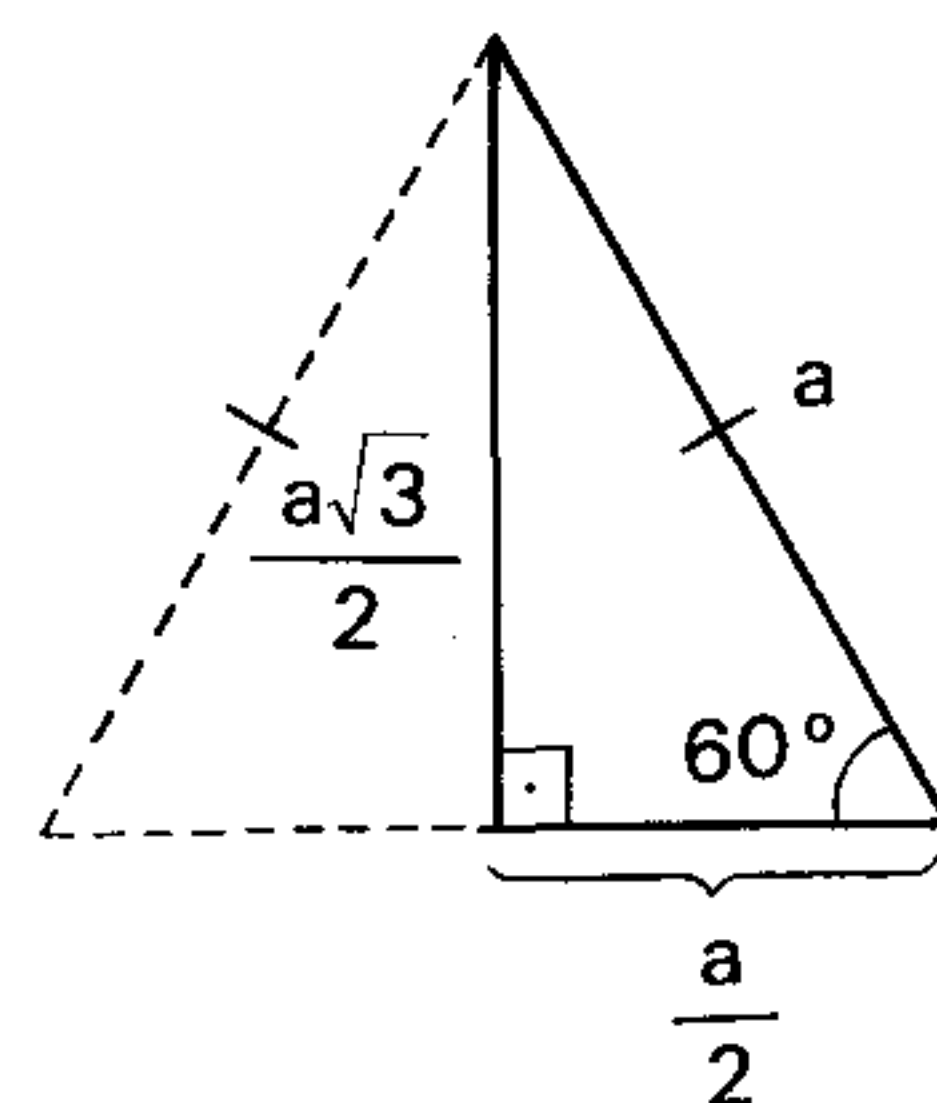
e usando os resultados anteriores, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

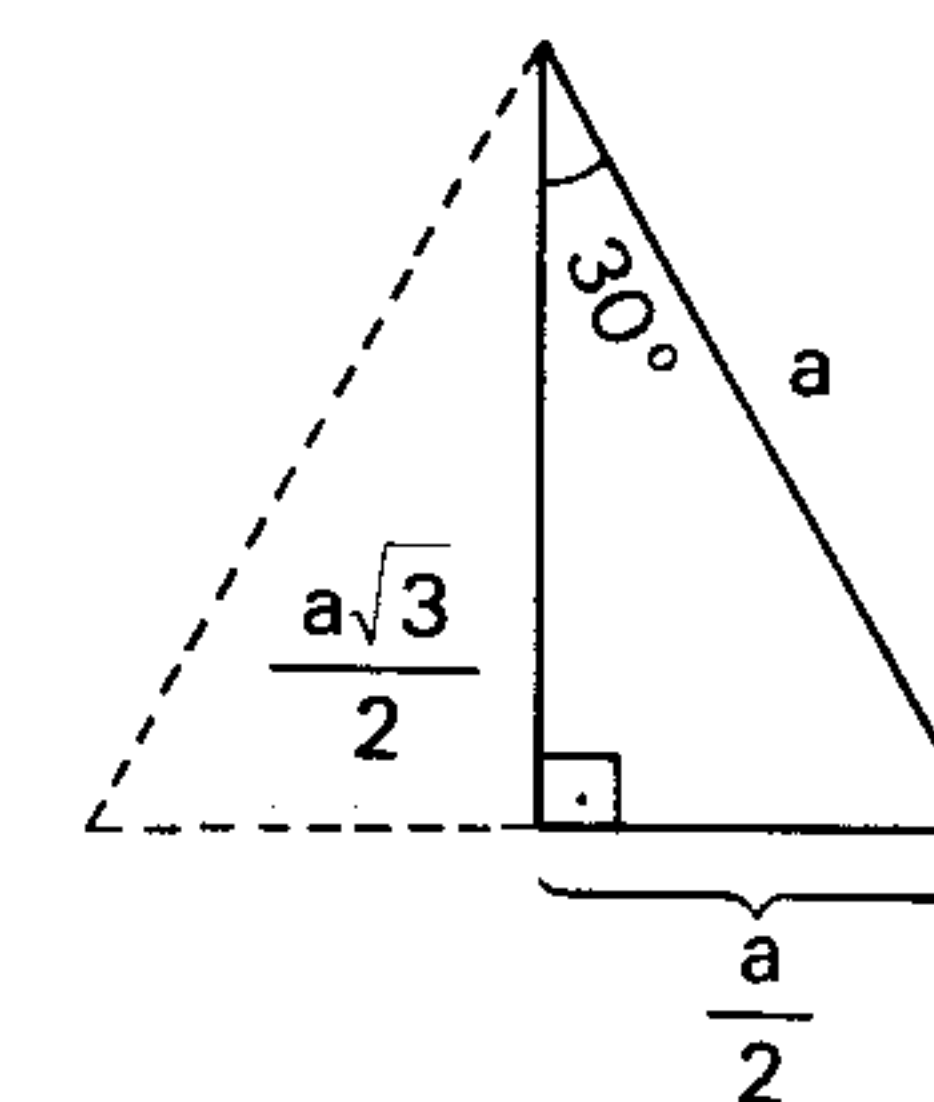
$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{sen } 60° = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

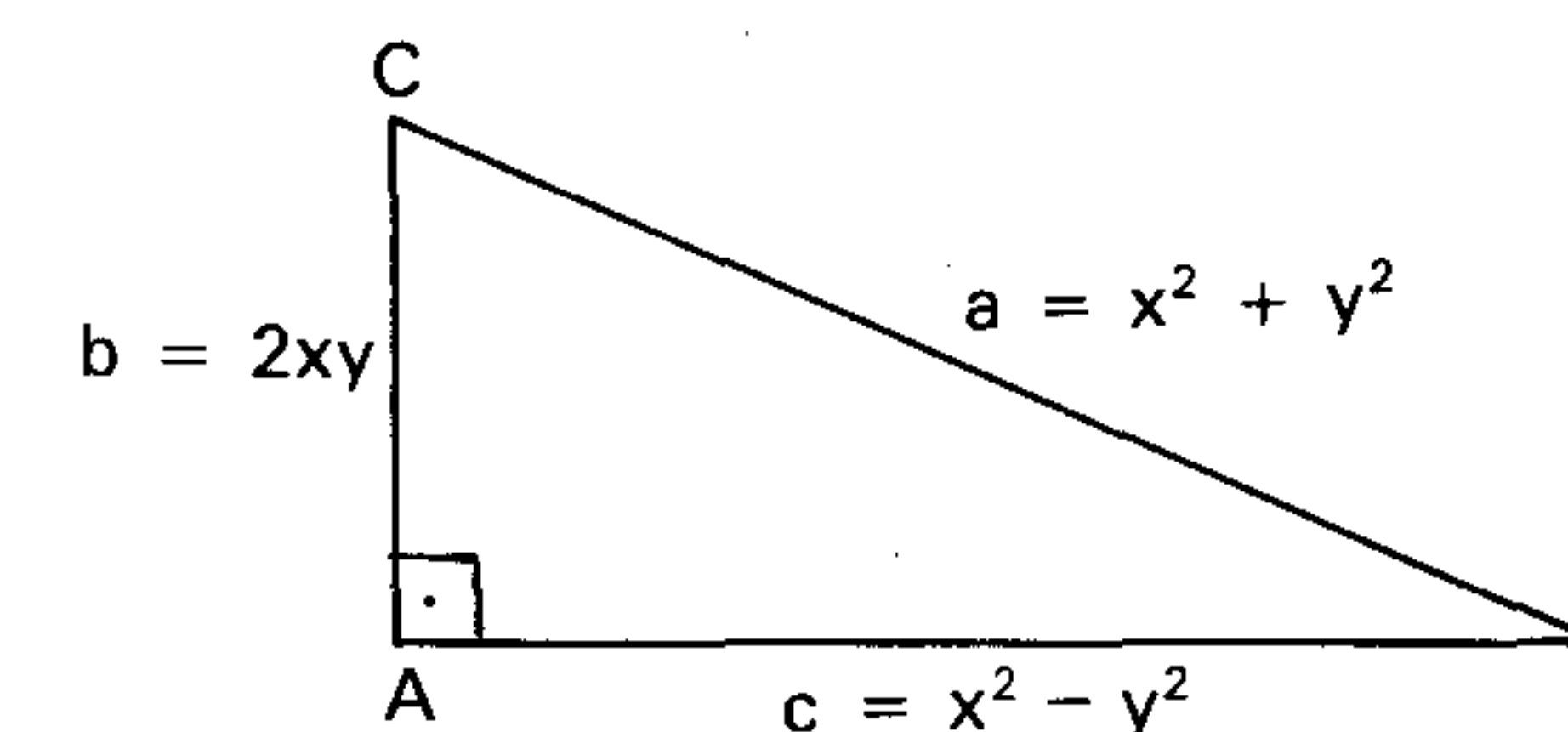
$$\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

201. *Triângulos pitagóricos*

Veremos como obter triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros, triângulos estes chamados *pitagóricos*.

Calculemos a hipotenusa a de um triângulo retângulo com um cateto $b = 2xy$ e outro $c = x^2 - y^2$.

$$a^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \implies$$

$$\implies a^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \implies a^2 = (x^2 + y^2)^2 \implies a = x^2 + y^2$$

Então, temos:

Tomando x e y inteiros, primos entre si, um deles sendo par e x maior que y, vem a tabela:

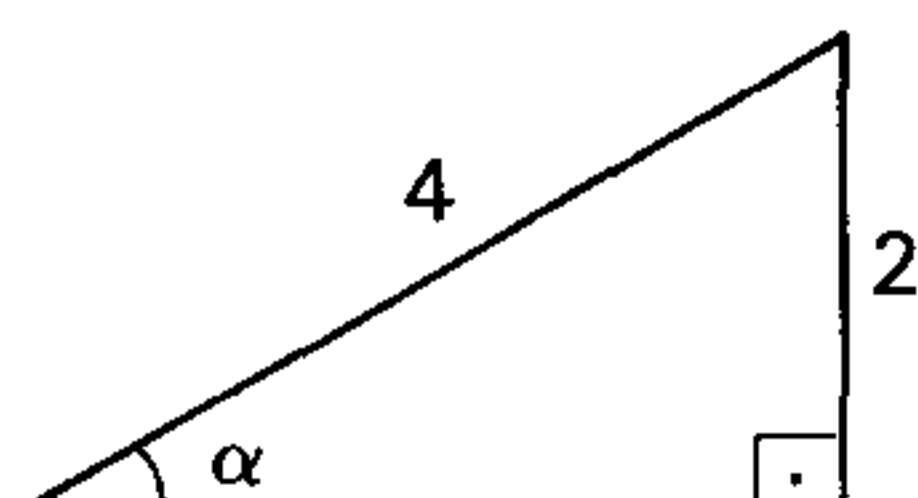
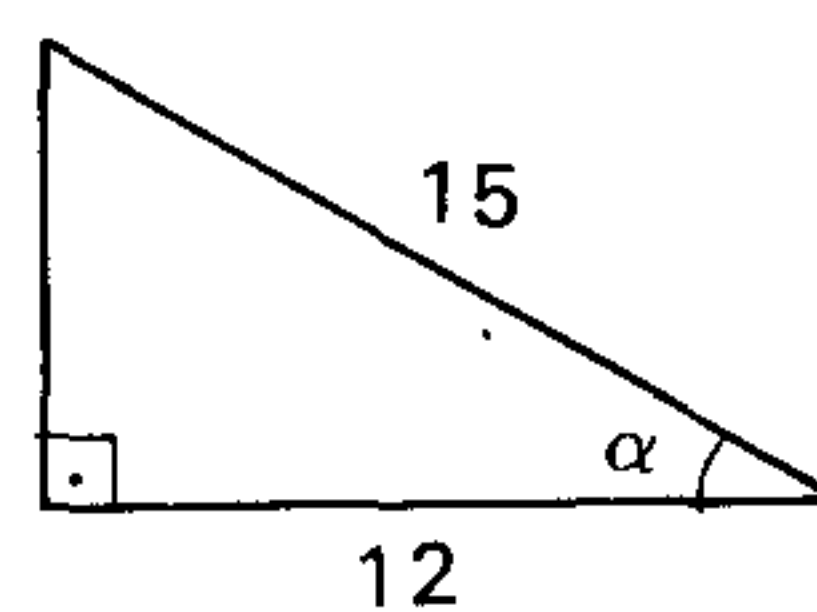
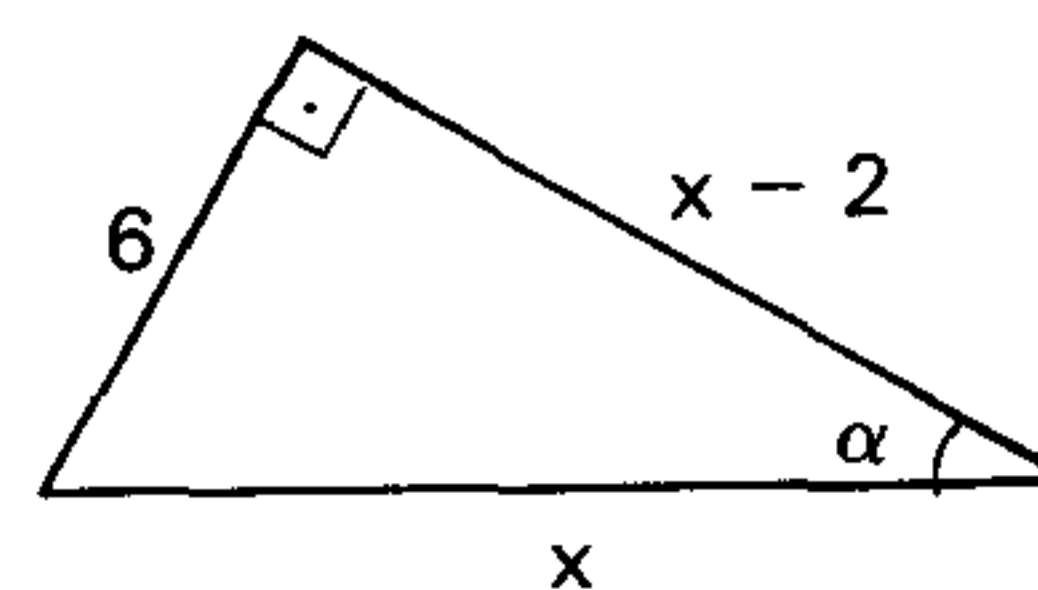
		Cateto	Cateto	Hipotenusa
x	y	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

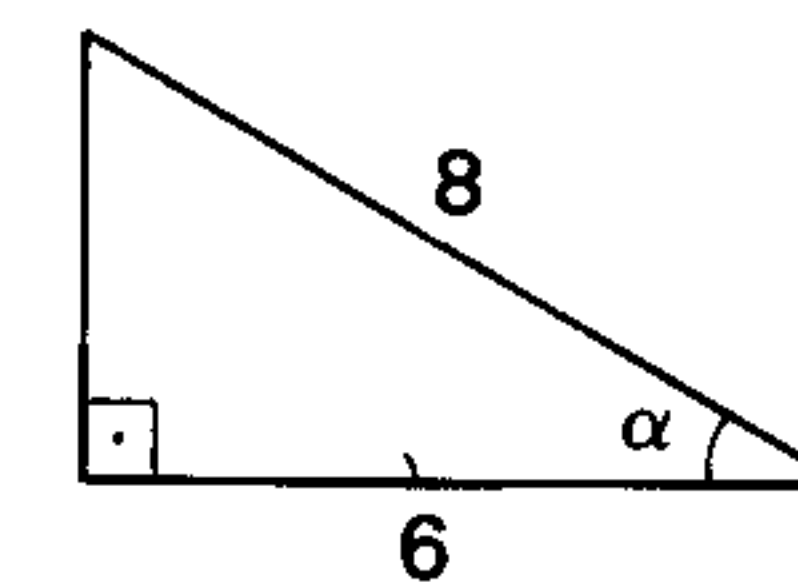
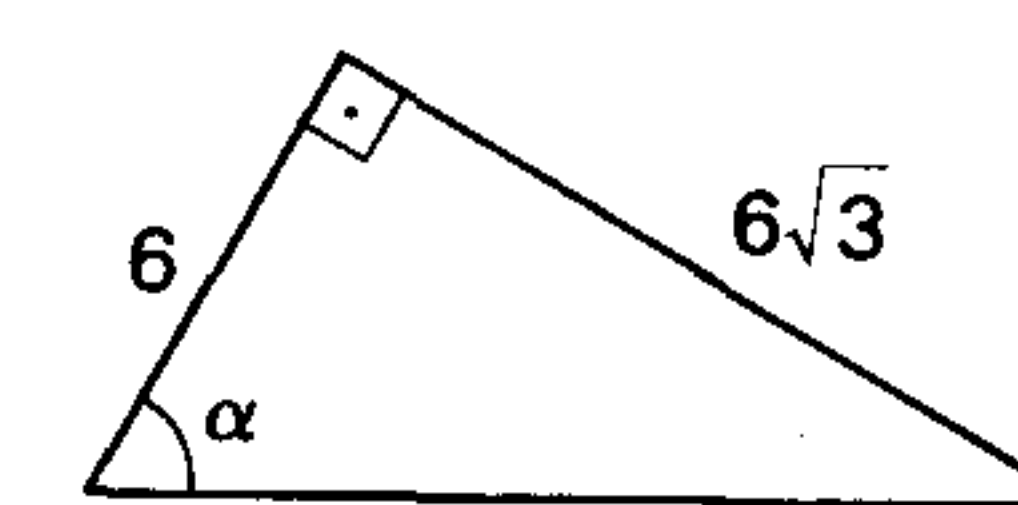
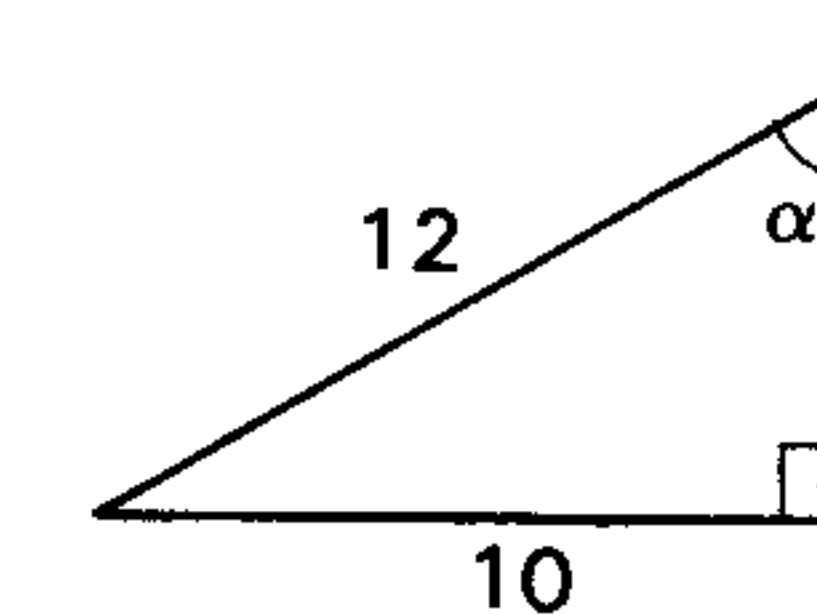
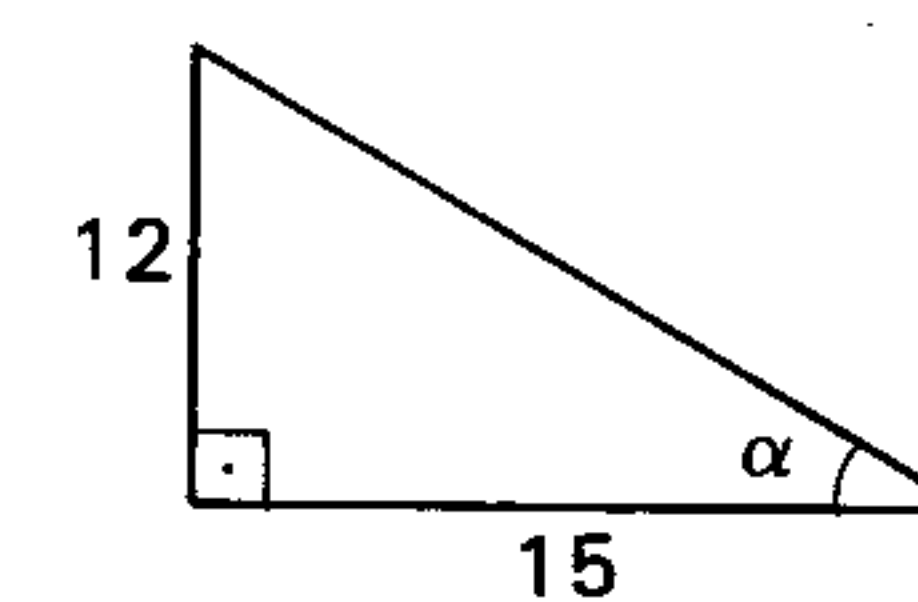
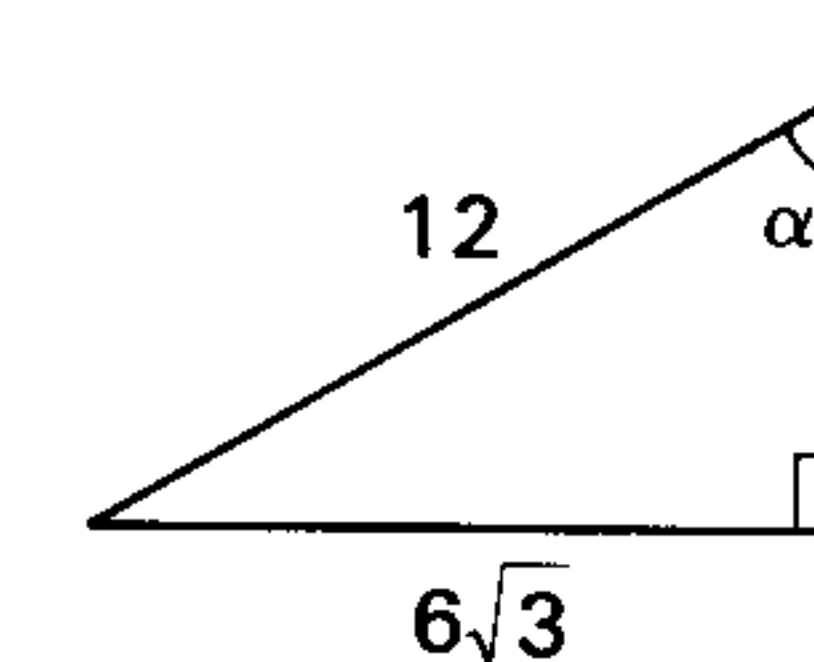
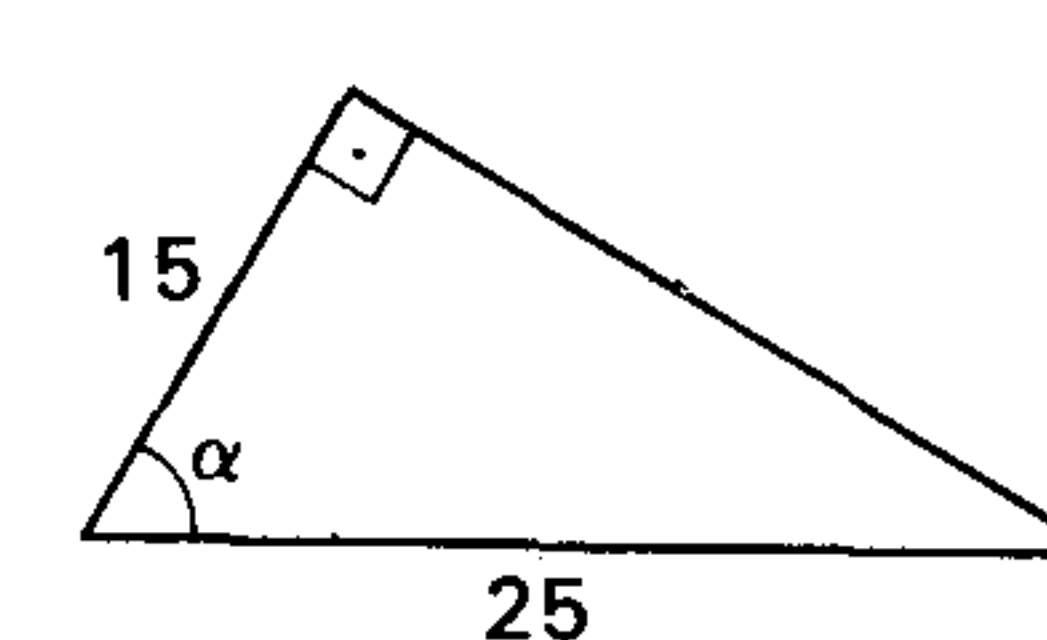
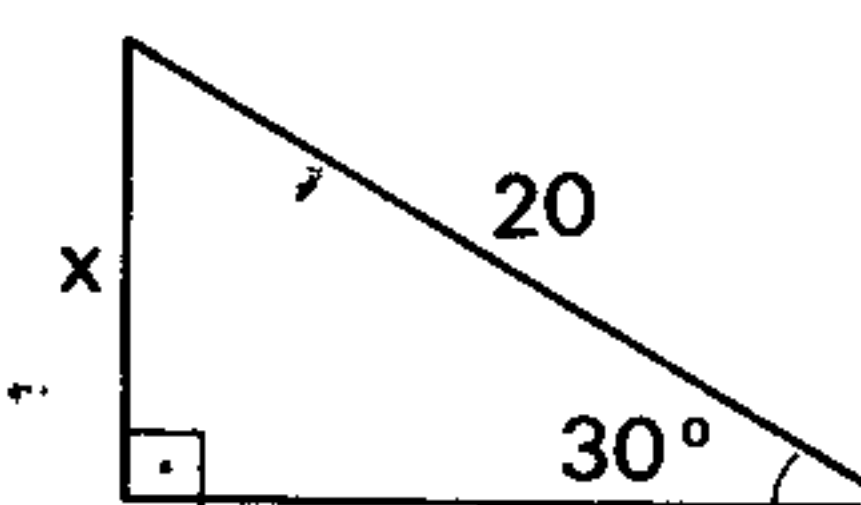
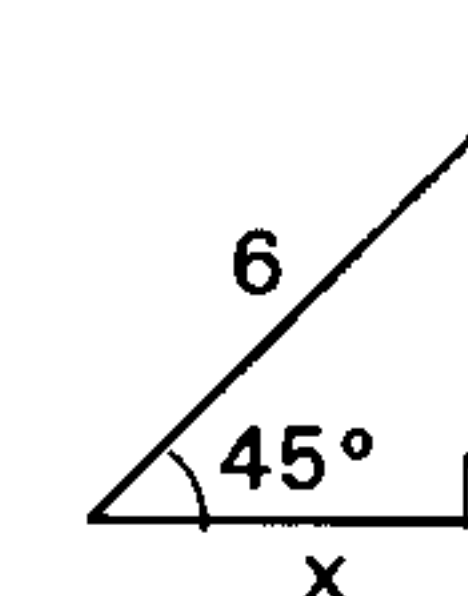
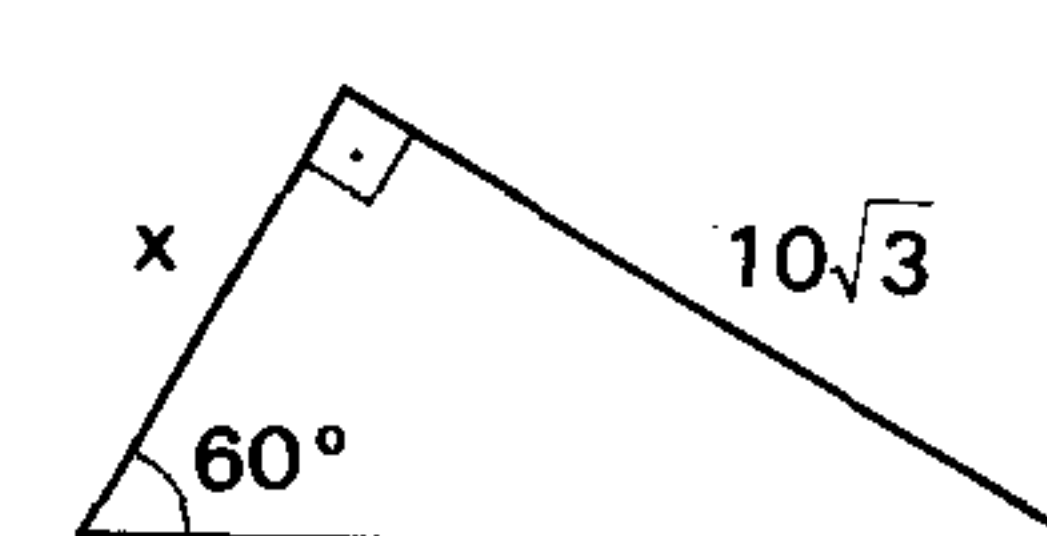
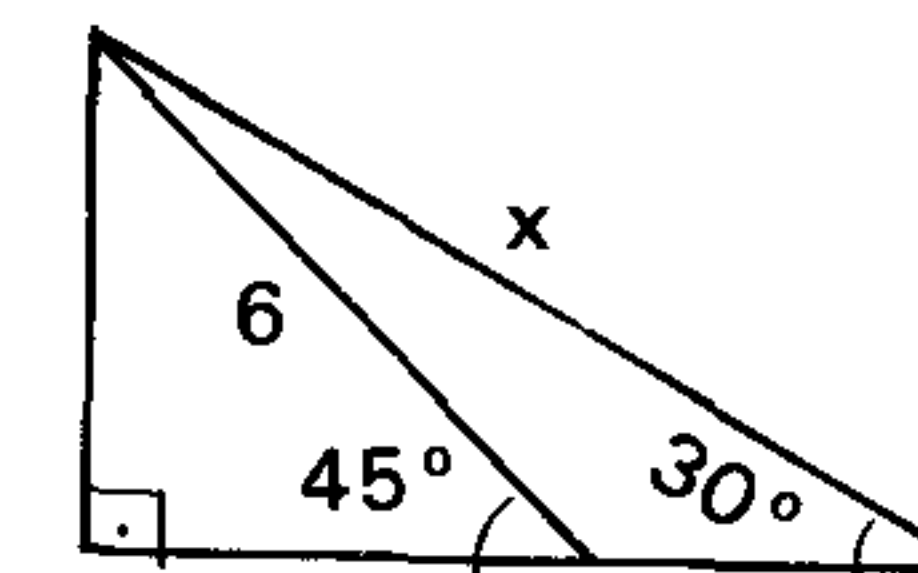
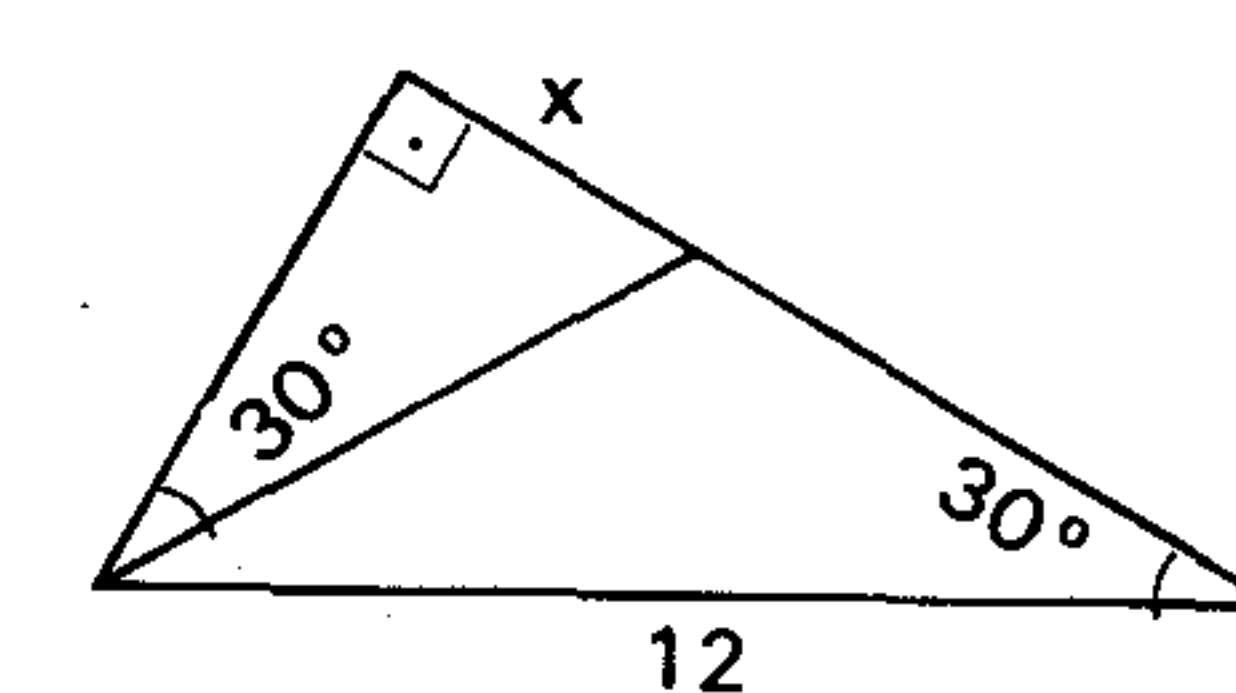
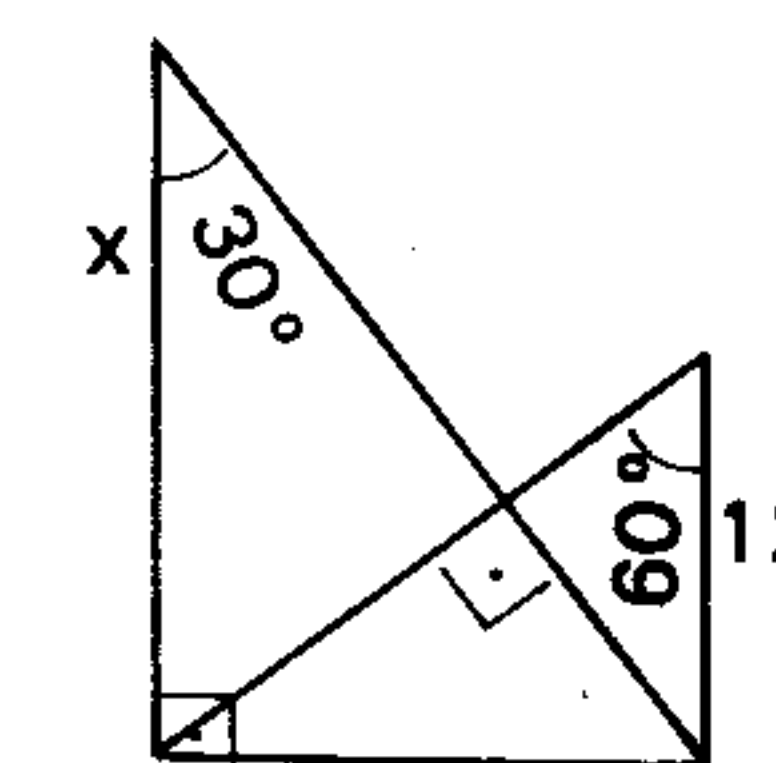
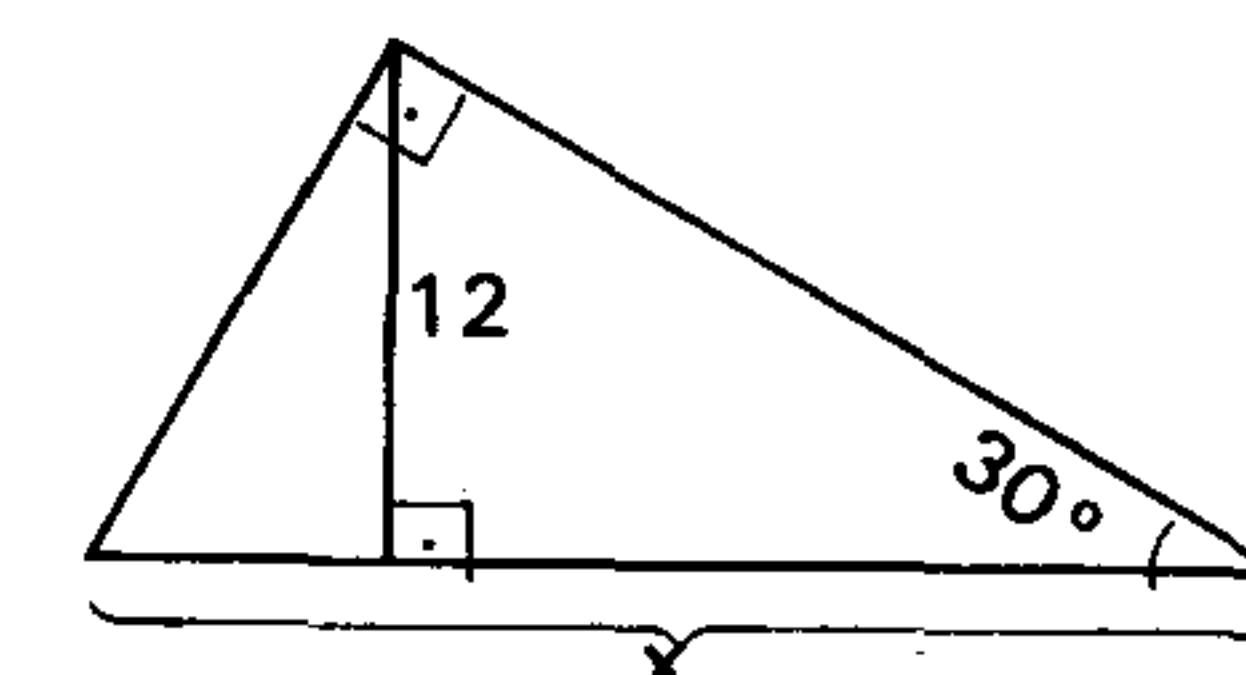
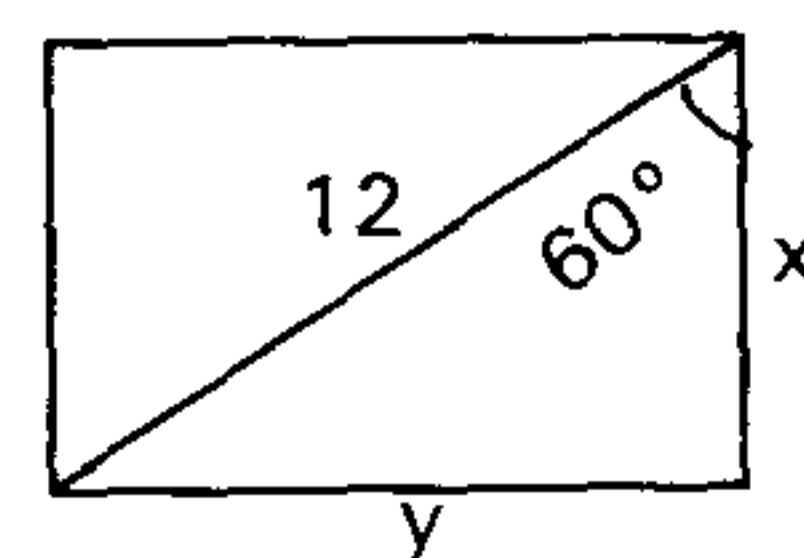
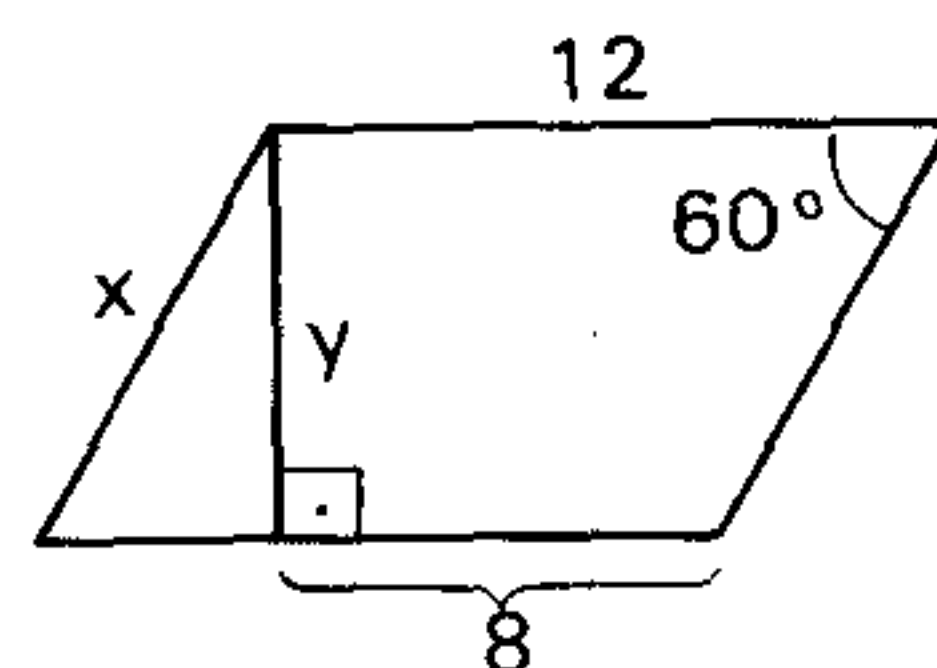
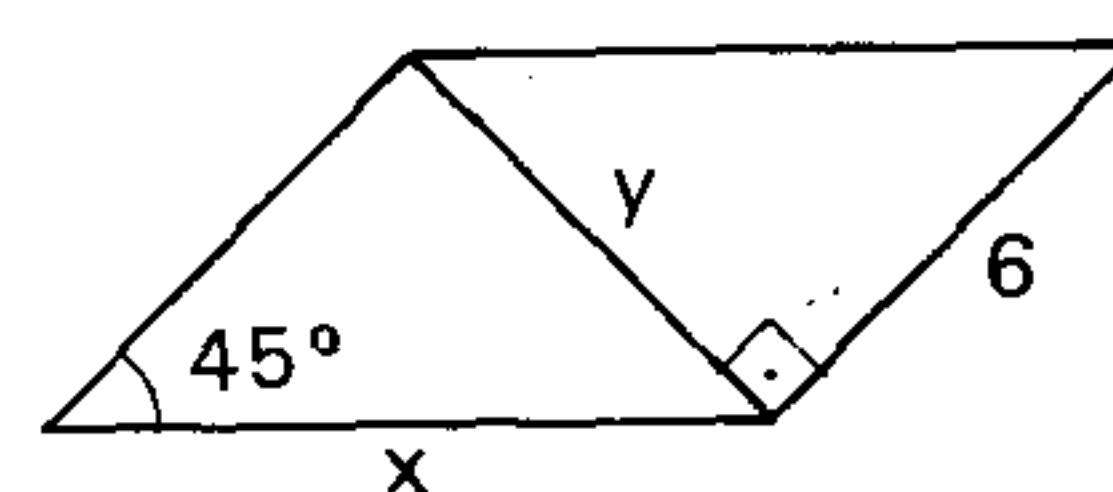
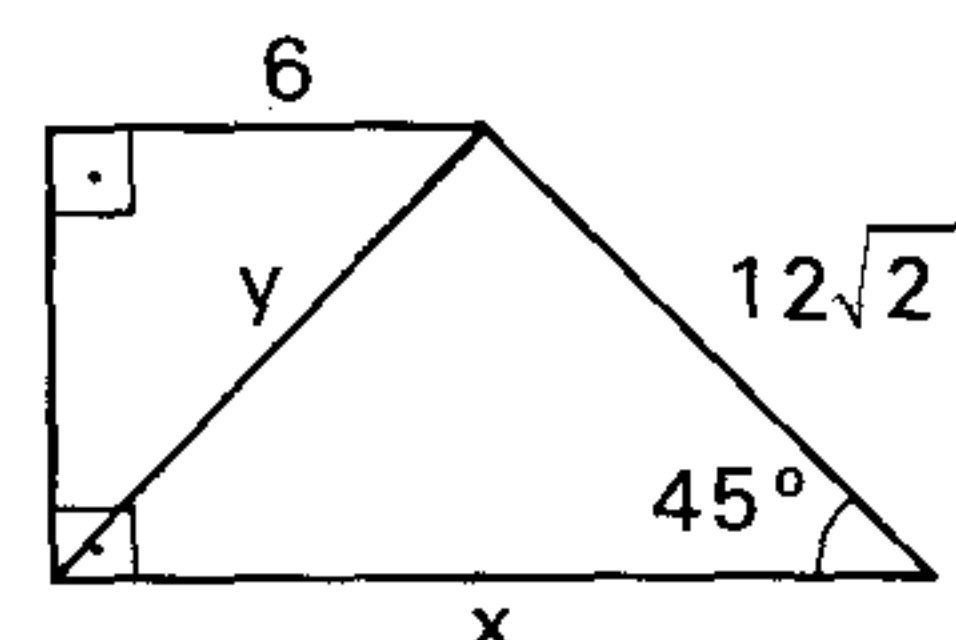
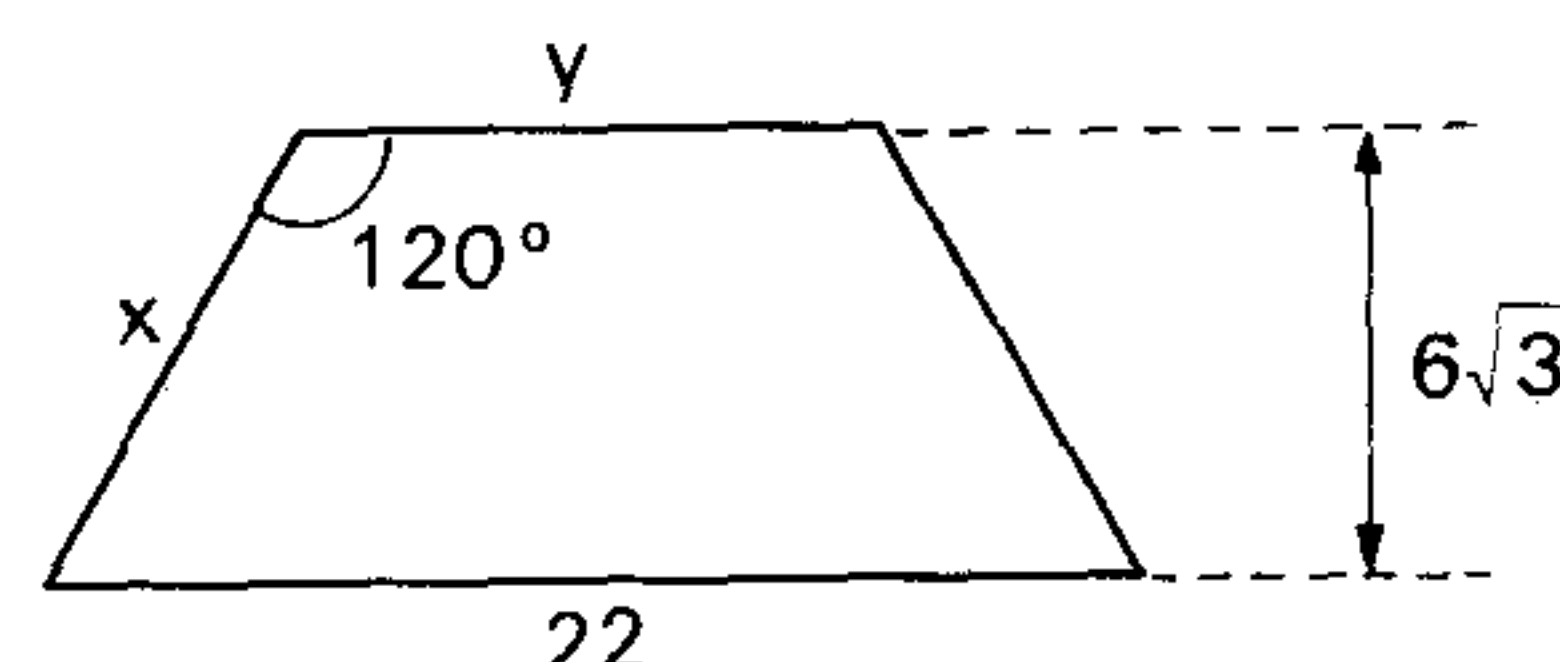
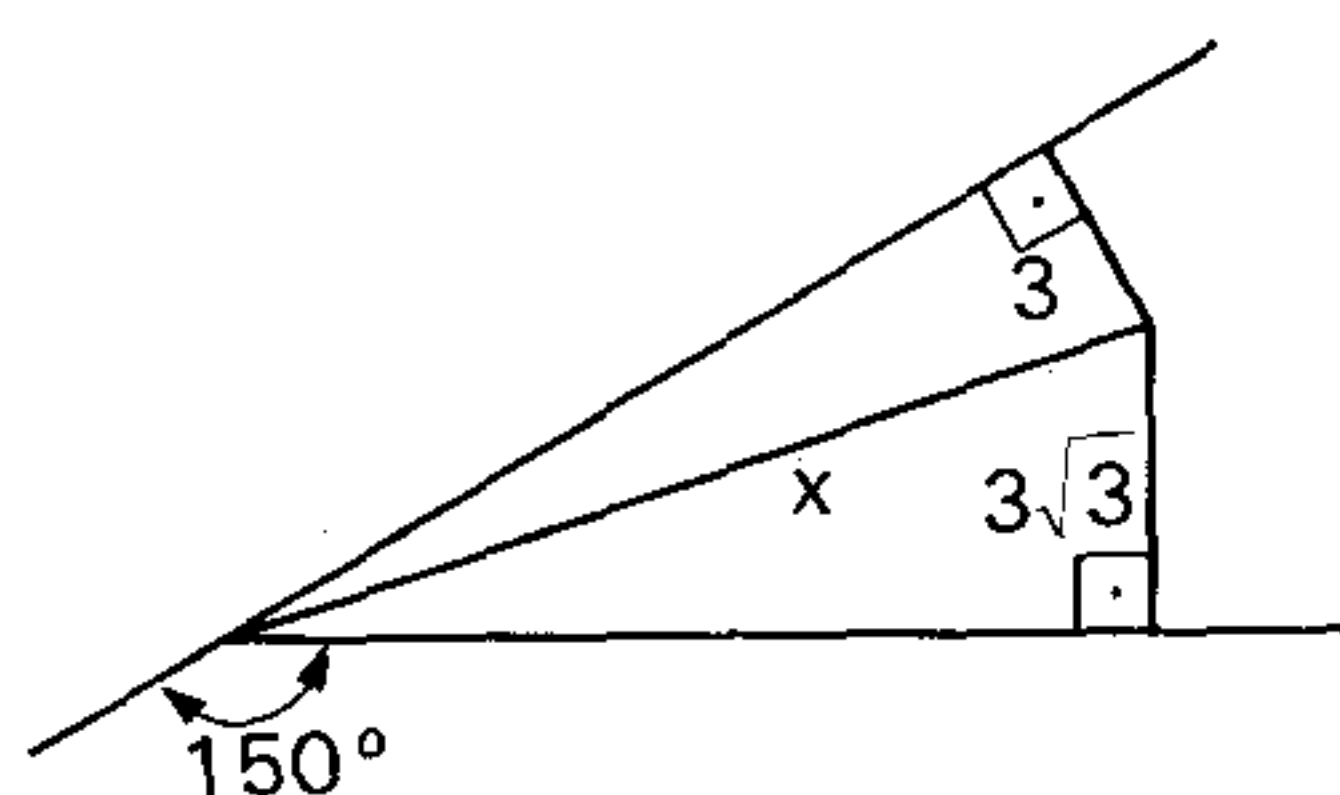
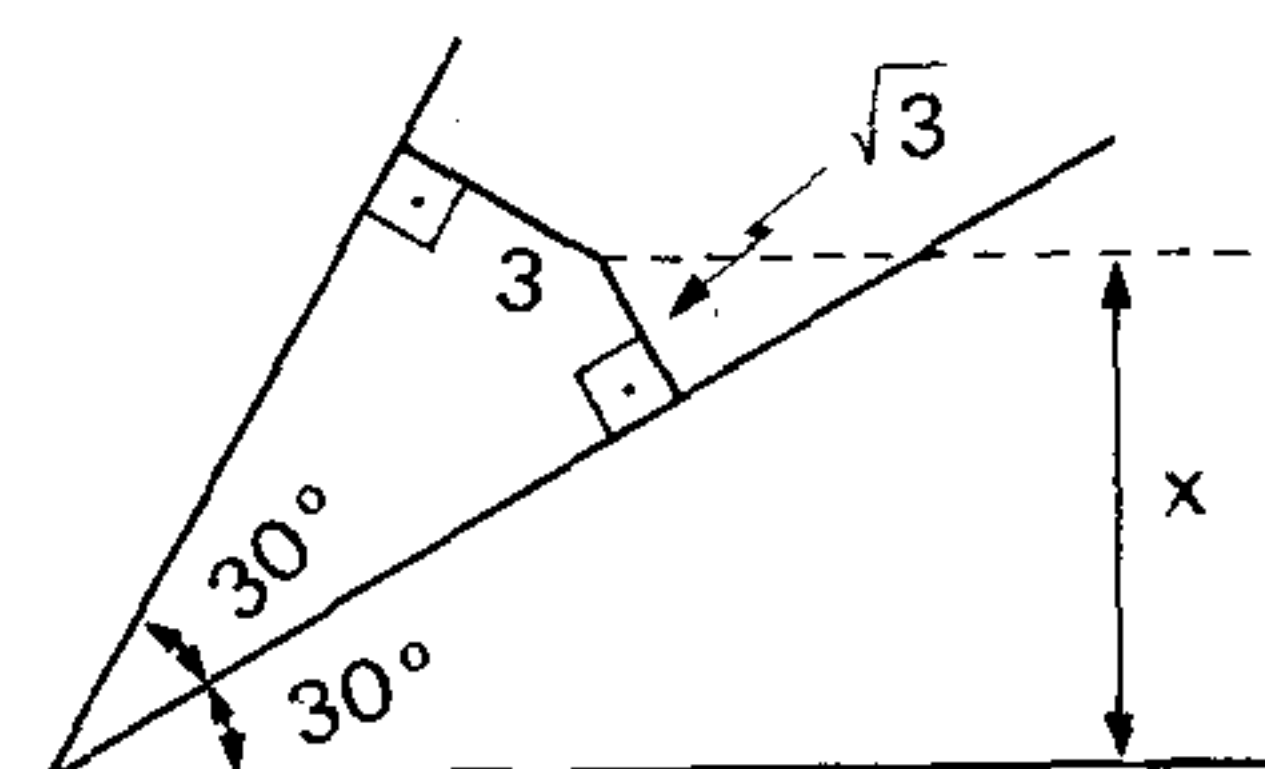
Notemos que os triângulos retângulos cujos lados são dados pelos ternos:

a) (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20)... são semelhantes entre si;
b) (5, 12, 13), (10, 24, 26), (15, 36, 39), (20, 48, 52)... são semelhantes entre si;
c) (8, 15, 17), (16, 30, 34), (24, 45, 51), (32, 60, 68)... são semelhantes entre si, etc.

EXERCÍCIOS

594. Determine *sen* α nos casos:

a) b) c)

595. Determine *cos* α nos casos:

a) b) c)

596. Obtenha *tg* α nos casos:

a) b) c)

597. Determine o valor de *x* nos casos:

a) b) c)

598. Determine o valor de *x* nos casos:

a) b)

c) d)

599. Determine os valores de x e y nos casos:

a) retângulo b) paralelogramo c) paralelogramo

d) trapézio retângulo e) trapézio isósceles

600. Determine o valor de x nos casos:

a) b)

601. Um ponto de um lado de um ângulo de $60°$ dista $16\ m$ do vértice do ângulo. Quanto ele dista do outro lado do ângulo?

602. Um ponto de um lado de um ângulo de $30°$ dista $6\ m$ do outro lado. Determine a distância da projeção ortogonal desse ponto sobre este outro lado até o vértice do ângulo.

603. Um ponto P interno de um ângulo reto dista $4\ m$ e $8\ m$ dos lados do ângulo. Qual a distância entre P e o vértice desse ângulo?

604. Um ponto interno de um ângulo reto dista $4\ m$ e $10\ m$ dos lados do ângulo. Qual a distância desse ponto à bissetriz desse ângulo?

605. Um ponto P, interno de um ângulo reto, dista, respectivamente, $\sqrt{2}\ m$ e $2\ m$ de um lado e da bissetriz do ângulo. Determine a distância entre P e o vértice desse ângulo.

606. Um ponto P, interno de um ângulo de $60°$, dista $6\ m$ e $9\ m$ dos lados desse ângulo. Qual a distância entre P e a bissetriz do ângulo?

607. Um ponto P, interno de um ângulo de $60°$, dista $3\ m$ e $6\ m$ dos lados do ângulo. Determine a distância entre P e o vértice desse ângulo.

608. Um ponto P, interno de um ângulo de $30°$, dista $3\ m$ de um lado e $3\sqrt{13}\ m$ do vértice do ângulo. Quanto esse ponto dista do outro lado do ângulo?

609. Um ponto P, externo de um ângulo de 60°, dista $9\sqrt{3}\ m$ e $3\sqrt{3}\ m$ dos lados do ângulo, sendo que nenhuma destas distâncias é até o vértice do ângulo. Qual é a distância entre P e a bissetriz do ângulo?

610. Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é o dobro do produto dos catetos. Calcule um dos ângulos agudos do triângulo.

611. Pelo vértice de um quadrado $ABCD$ de lado a, toma-se no interior do quadrado um segmento $\overline{BS}$ que forma um ângulo igual a $30°$ com $\overline{BA}$, com S em $\overline{AD}$. Determine AS e BS.

612. Um observador vê um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de $60°$. Se ele se afastar do edifício mais $30\ m$, passará a vê-lo sob ângulo de $45°$. Calcule a altura do edifício.

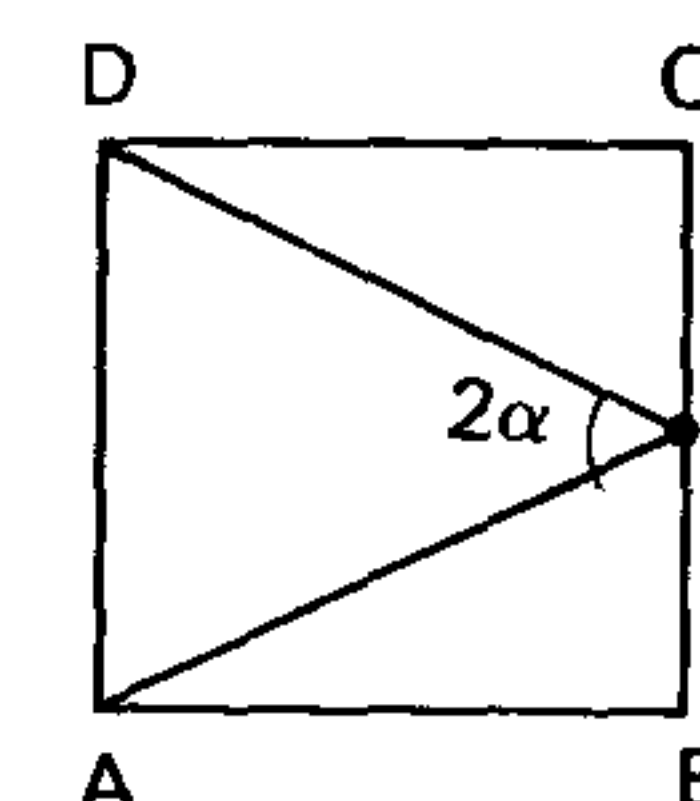
613. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC medem respectivamente a e $2a$, sendo $45°$ o ângulo formado por eles. Calcule a medida da altura $\overline{BD}$ e o lado $\overline{BC}$ do triângulo, em função de a.

614. As bases de um trapézio retângulo são b e $2b$ e um dos ângulos mede $60°$. Calcule a altura.

615. Um dos ângulos agudos de um trapézio isósceles mede $60°$. Sendo os lados não paralelos congruentes à base menor do trapézio e m a medida da base maior, determine o perímetro do trapézio em função de m.

616. Determine o ângulo que a diagonal de um trapézio isósceles forma com a altura do trapézio, sabendo que a altura do trapézio é igual a sua base média multiplicada por $\sqrt{3}$.

617. A base maior de um trapézio isósceles mede $100\ cm$ e a base menor $60\ cm$. Sendo $60°$ a medida de cada um de seus ângulos agudos, determine a altura e o perímetro do trapézio.

618. Determine $tg\ \alpha$, sabendo que E é ponto médio do lado $\overline{BC}$ do quadrado $ABCD$.

619. Determine o raio de um círculo inscrito num setor circular de $60°$ e $6\ dm$ de raio.

620. Seja $AB = 3r$, tangente em A a uma circunferência de centro O e raio r. Traça-se por B a tangente $\overline{BC}$, que tem C por ponto de contato. Calcule a distância de C à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

621. Consideremos um triângulo retângulo ABC, onde a medida de um ângulo agudo é α. Determine a medida do raio da circunferência inscrita em função de α e da hipotenusa a.

622. Um paralelogramo tem lados respectivamente iguais a $10\ cm$ e $8\ cm$. Sabendo que um de seus ângulos internos vale $120°$, calcule o perímetro do quadrilátero convexo formado pelas bissetrizes de seus ângulos internos.

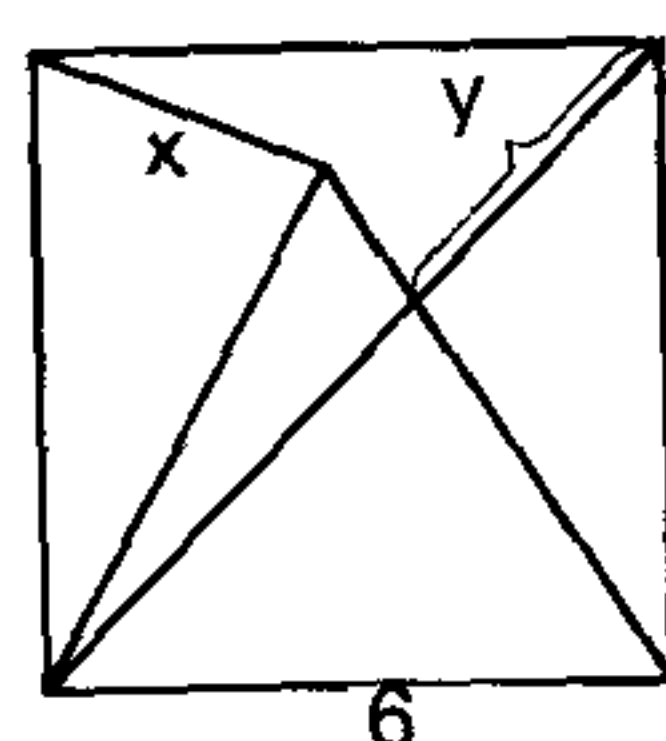
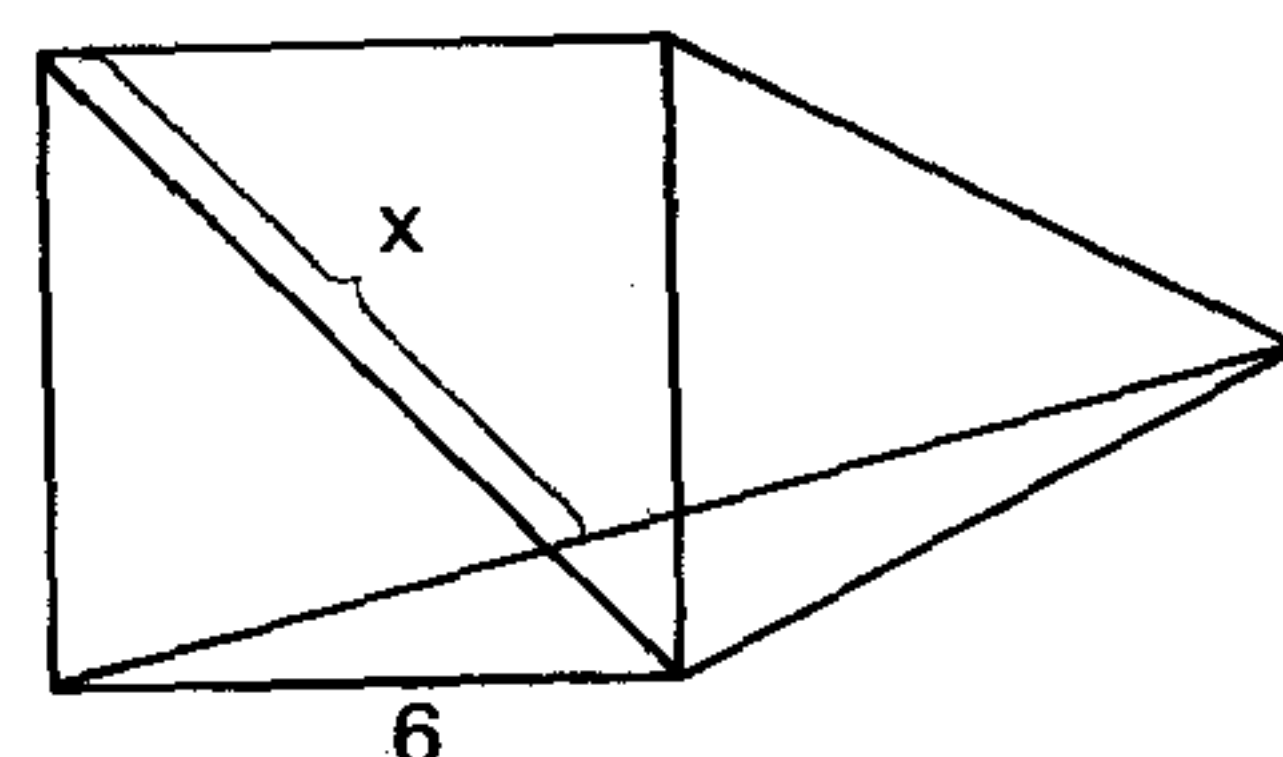
623. Na figura temos um quadrado e um triângulo equilátero. Determine as incógnitas.

a)

x
y
6

b)

x
6

CAPÍTULO XV

Triângulos Quaisquer

Relações métricas e cálculo de linhas notáveis

202. *Teorema dos senos*

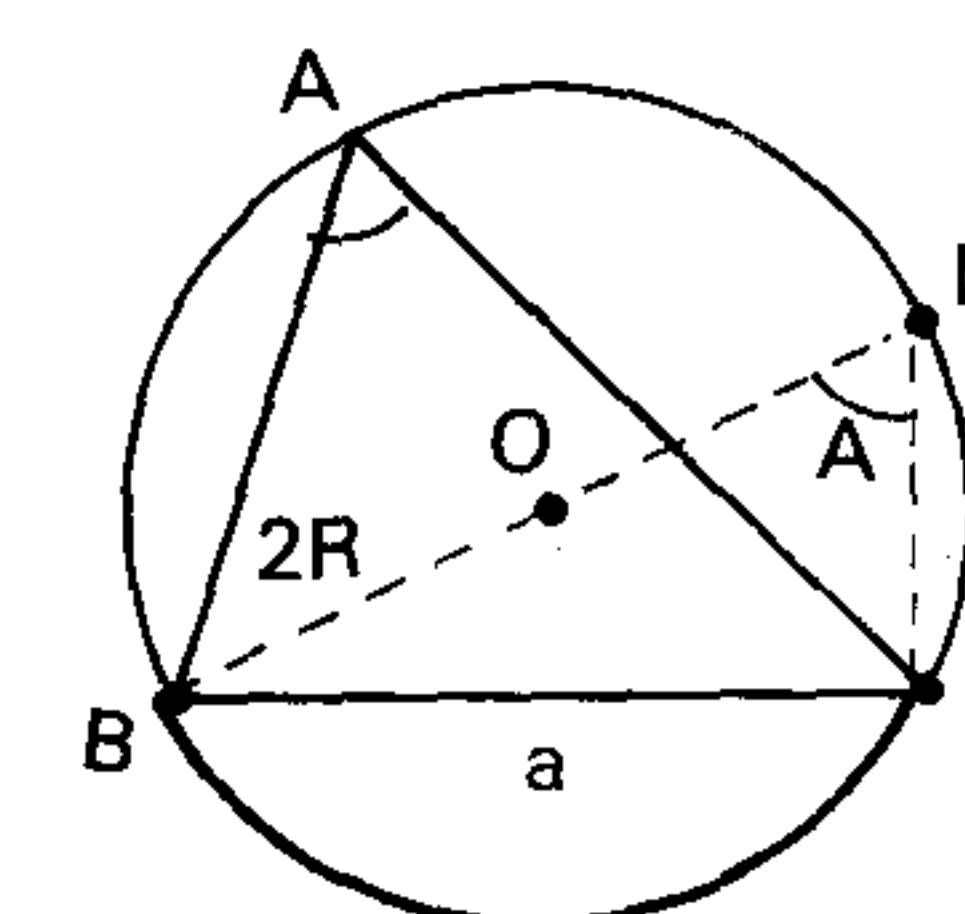
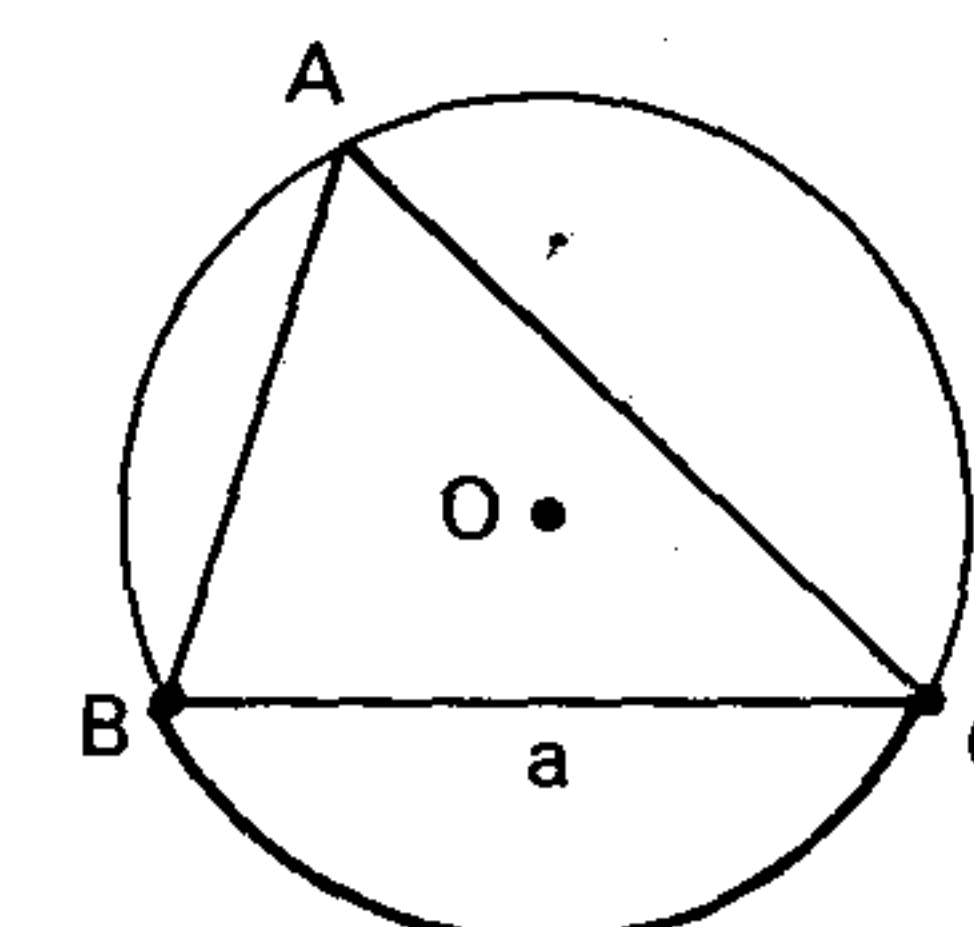
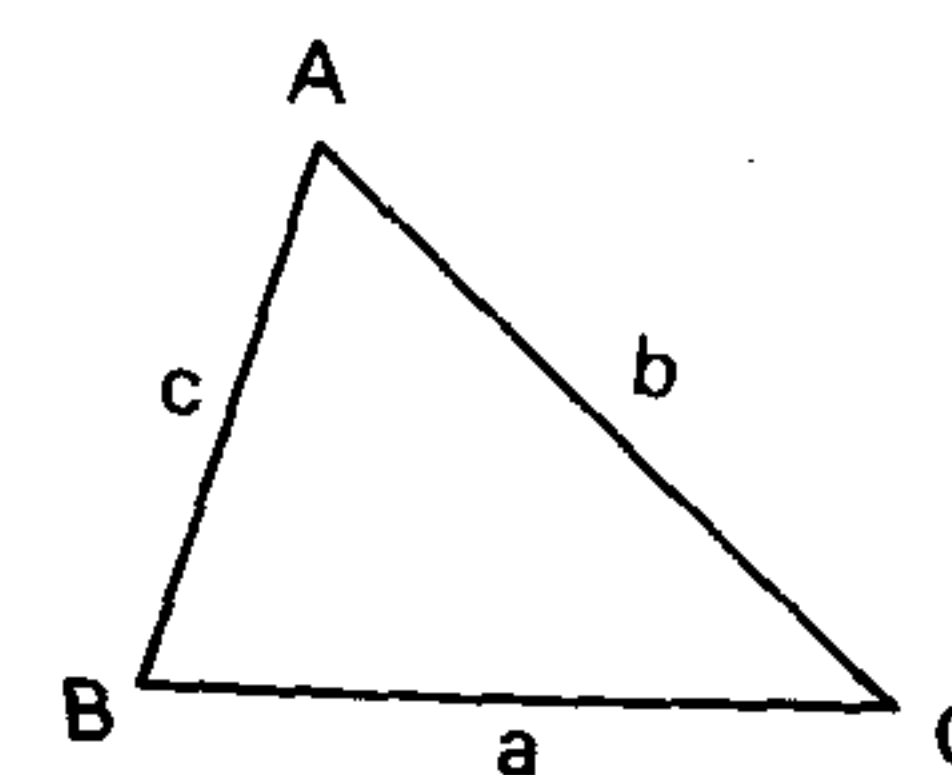
> Os lados de um triângulo são proporcionais aos *senos* dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração

Dado um ΔABC, consideremos a circunferência circunscrita. Seja O o centro dela e R o seu raio:

A
B
C
a
b
c

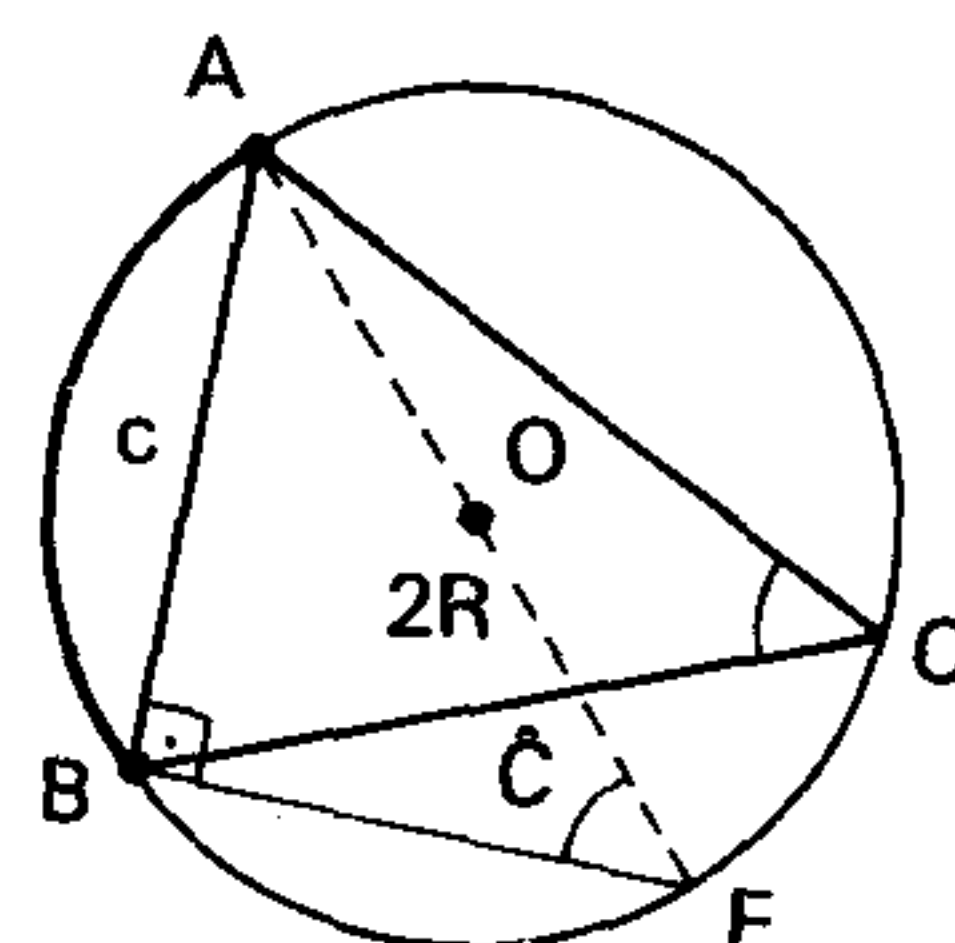
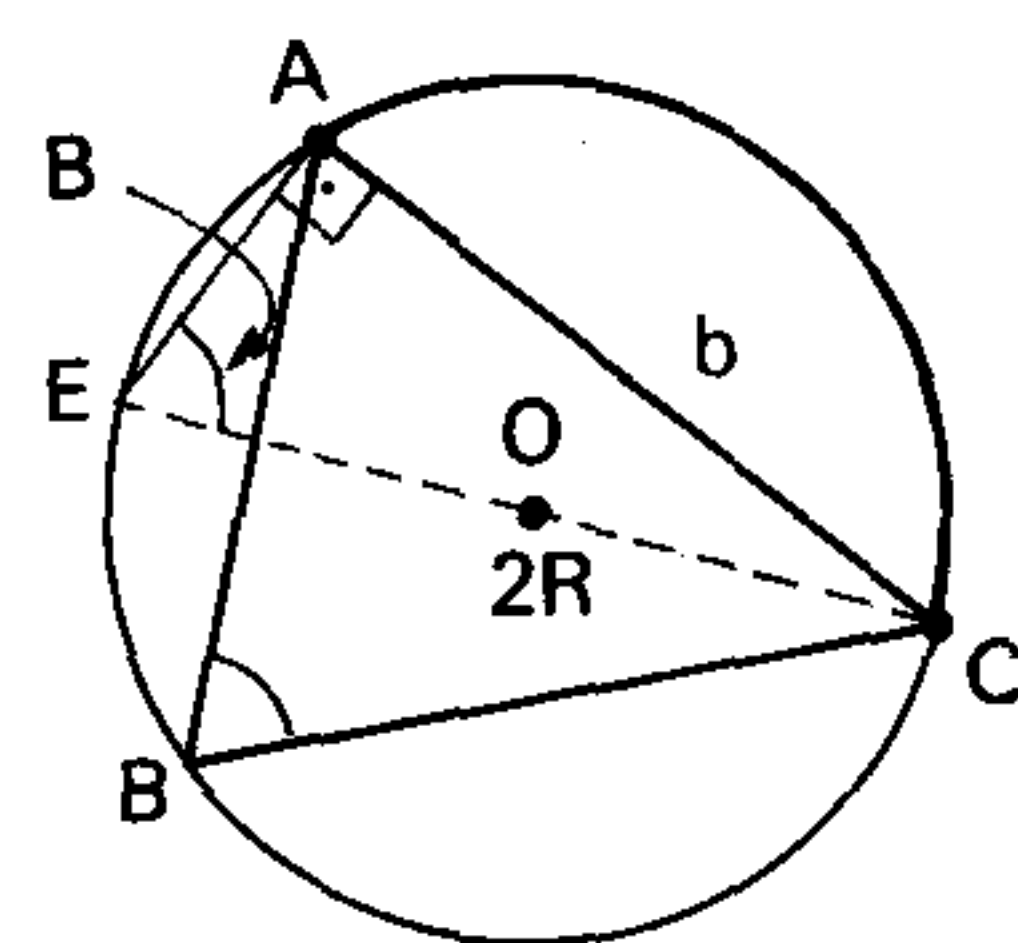
A
B
C
O
a

A
B
C
D
O
2R
A
a

Traçando o diâmetro $\overline{BD}$, temos:

$$\hat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2} \text{ e, como } \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}, \text{ decorre que } \hat{D} \equiv \hat{A}.$$

No ΔDCB retângulo em C, vem:

$$\text{sen } D = \frac{a}{2R} \implies \text{sen } A = \frac{a}{2R} \implies \frac{a}{\text{sen } A} = 2R$$

Procedendo de modo análogo, temos: $\frac{b}{\text{sen } B} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen } C} = 2R$.

Daí a expressão da lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

Nota

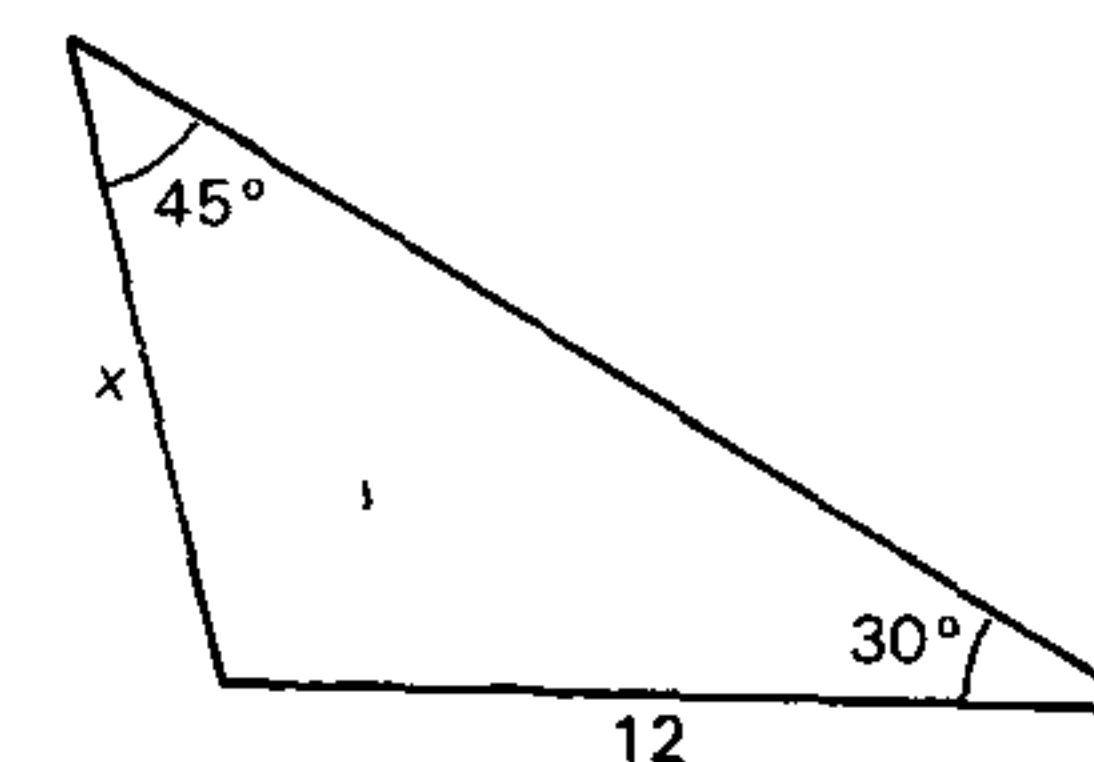
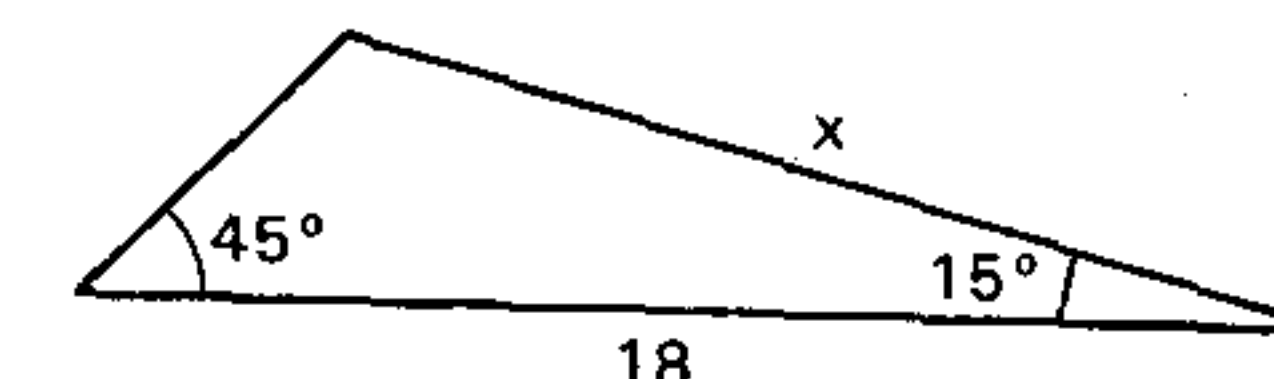
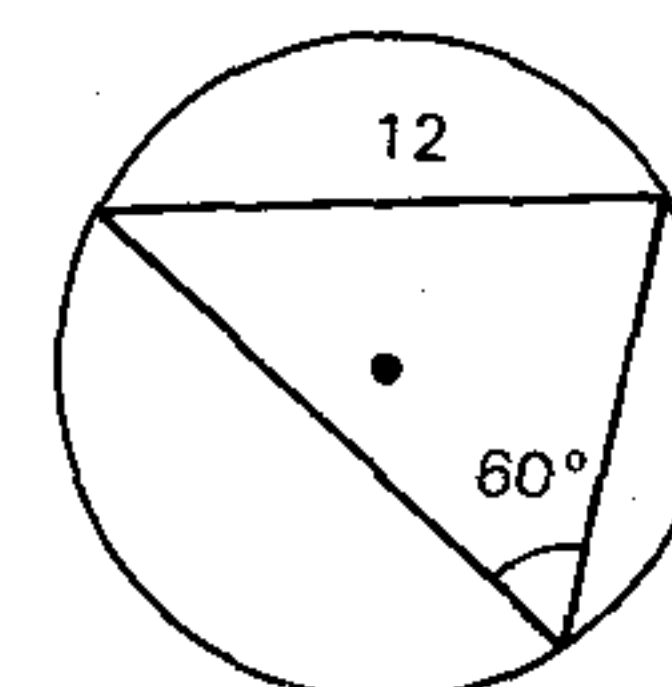
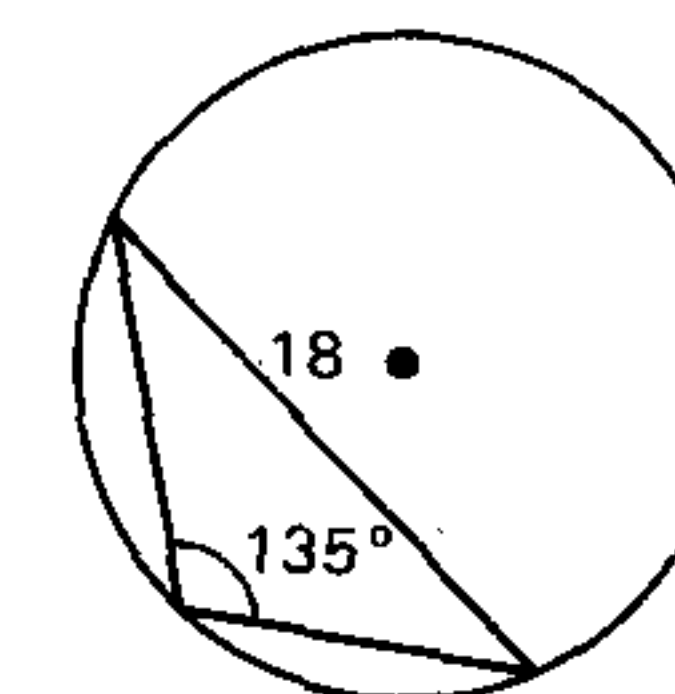
Caso $\hat{A}$ seja obtuso, em lugar de $\hat{D} \equiv \hat{A}$, teremos $\hat{D} = 180° - \hat{A}$, o que não altera o resultado, pois sen(180° − A) = sen A, como é sabido da *Trigonometria*.

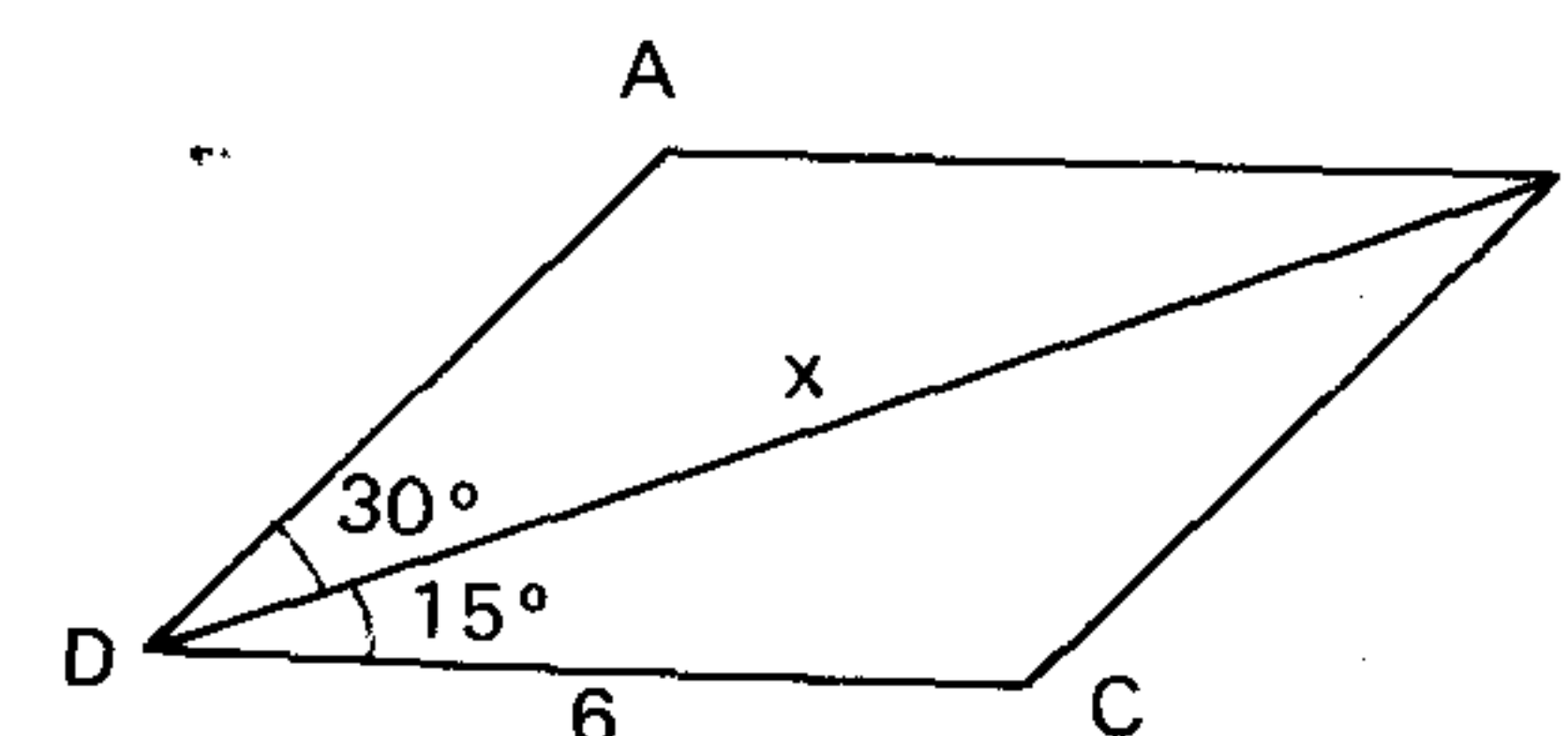
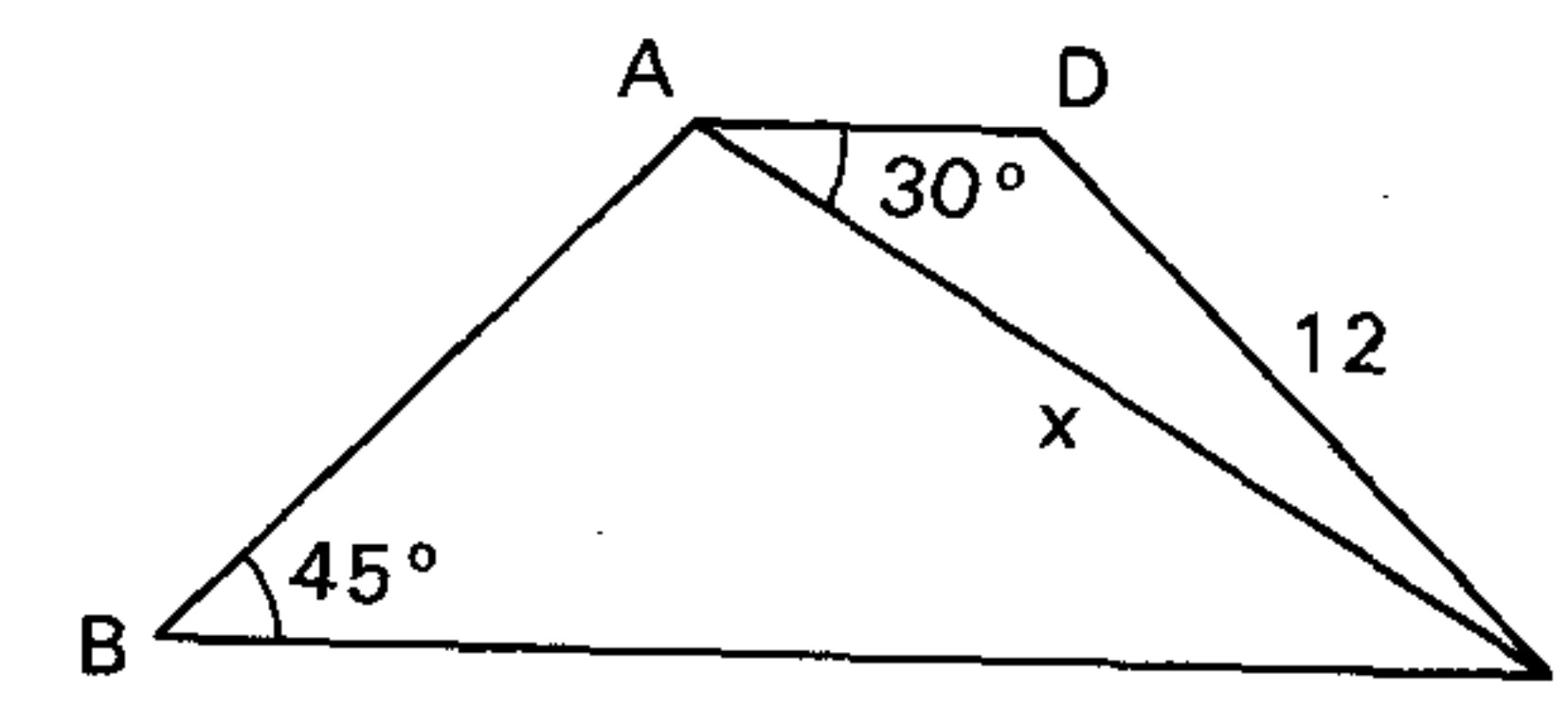
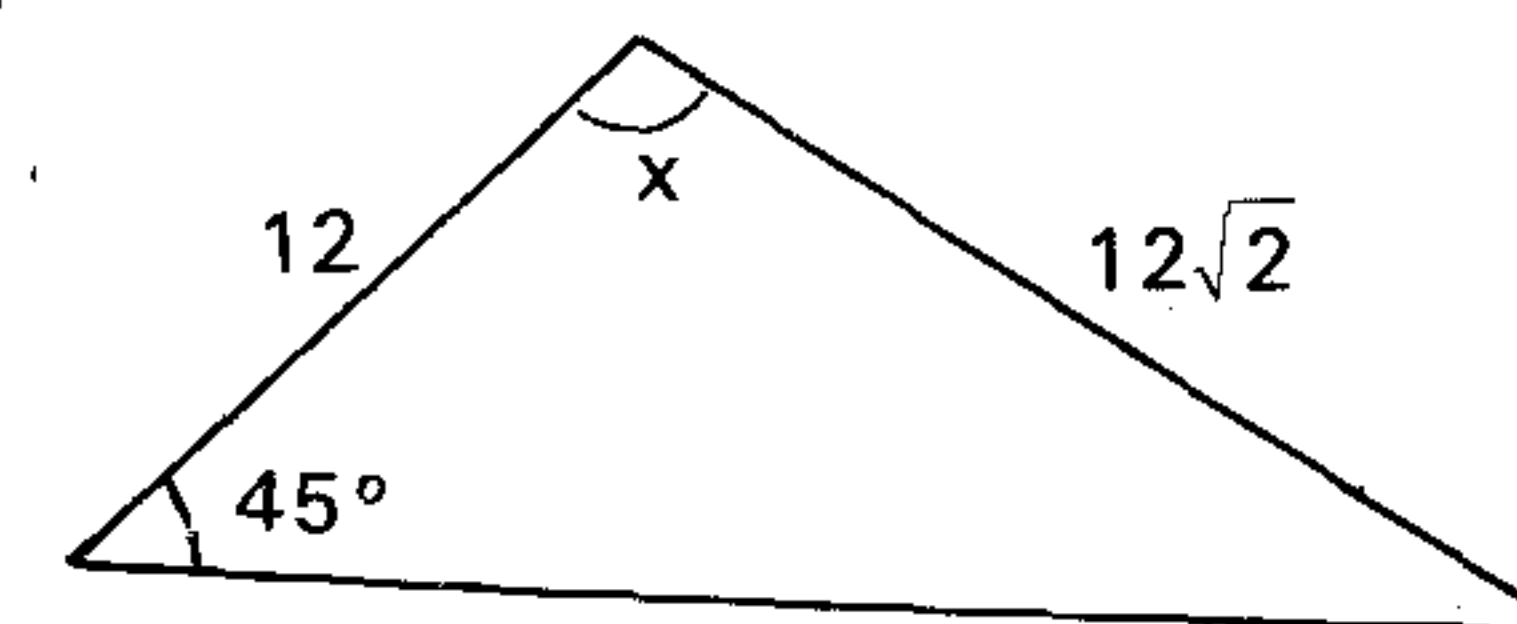
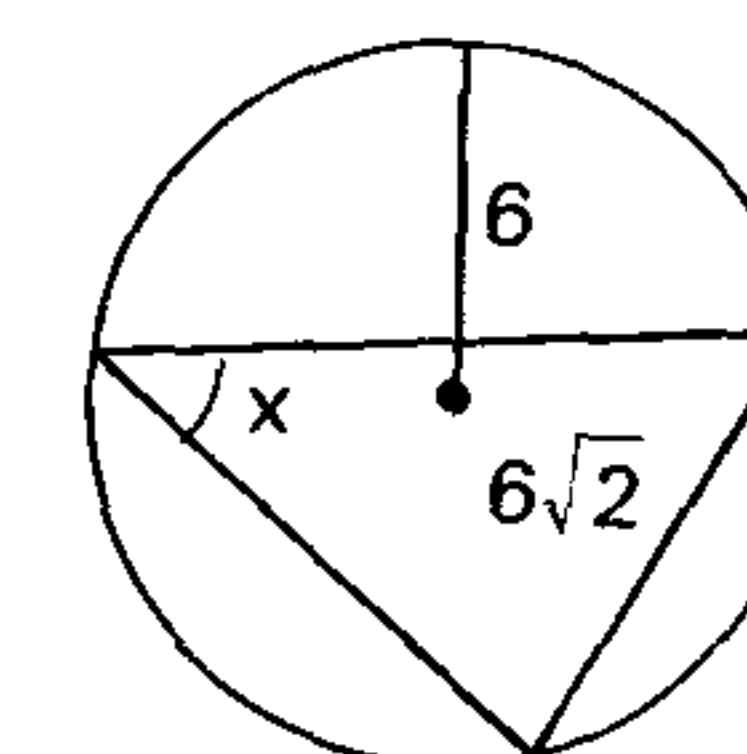
Caso $\hat{A}$ seja reto, também vale a relação, visto que sen 90° = 1.

EXERCÍCIOS

624. Sabendo que *sen(180° − x) = sen x* e *cos(180° − x) = −cos x*, determine:

a) sen 120°
b) cos 150°
c) cos 135°
d) sen 150°
e) sen 135°
f) cos 120°

625. Determine o valor de x nos casos:

a) b)

626. Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo nos casos:

a) b)

627. Obtenha o valor de x nos casos:

a) *ABCD* é paralelogramo

b) *ABCD* é trapézio isósceles

628. Determine o ângulo x nos casos:

a) b)

629. Num triângulo *ABC* são dados $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 45°$ e $BC = 4$ *cm*. Determine a medida de $\overline{AC}$.

630. Num triângulo obtusângulo e isósceles, os ângulos da base medem *30°* cada um. Determine a base do triângulo, sabendo que os lados congruentes medem *10 cm* cada um.

631. O triângulo *ABC* é obtusângulo com $\hat{A} = 120°$, $BC = 2\sqrt{3}\ dm$ e $AC = 2\ dm$. Determine a medida do ângulo do vértice *B* desse triângulo.

632. Se os lados de um triângulo *ABC* medem *a*, *b* e *c*, prove que:

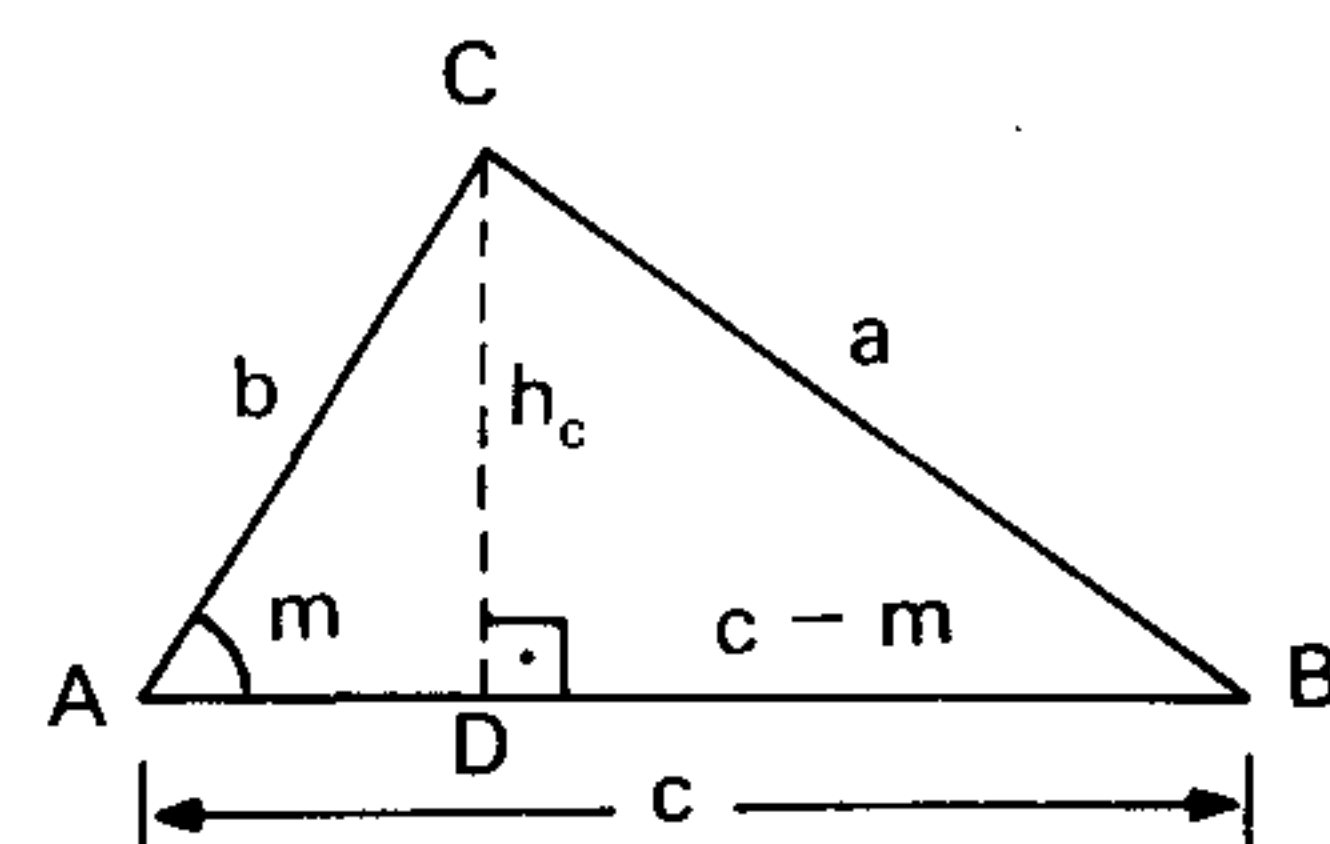
$$\frac{a+b}{b} = \frac{sen\ A + sen\ B}{sen\ B}$$

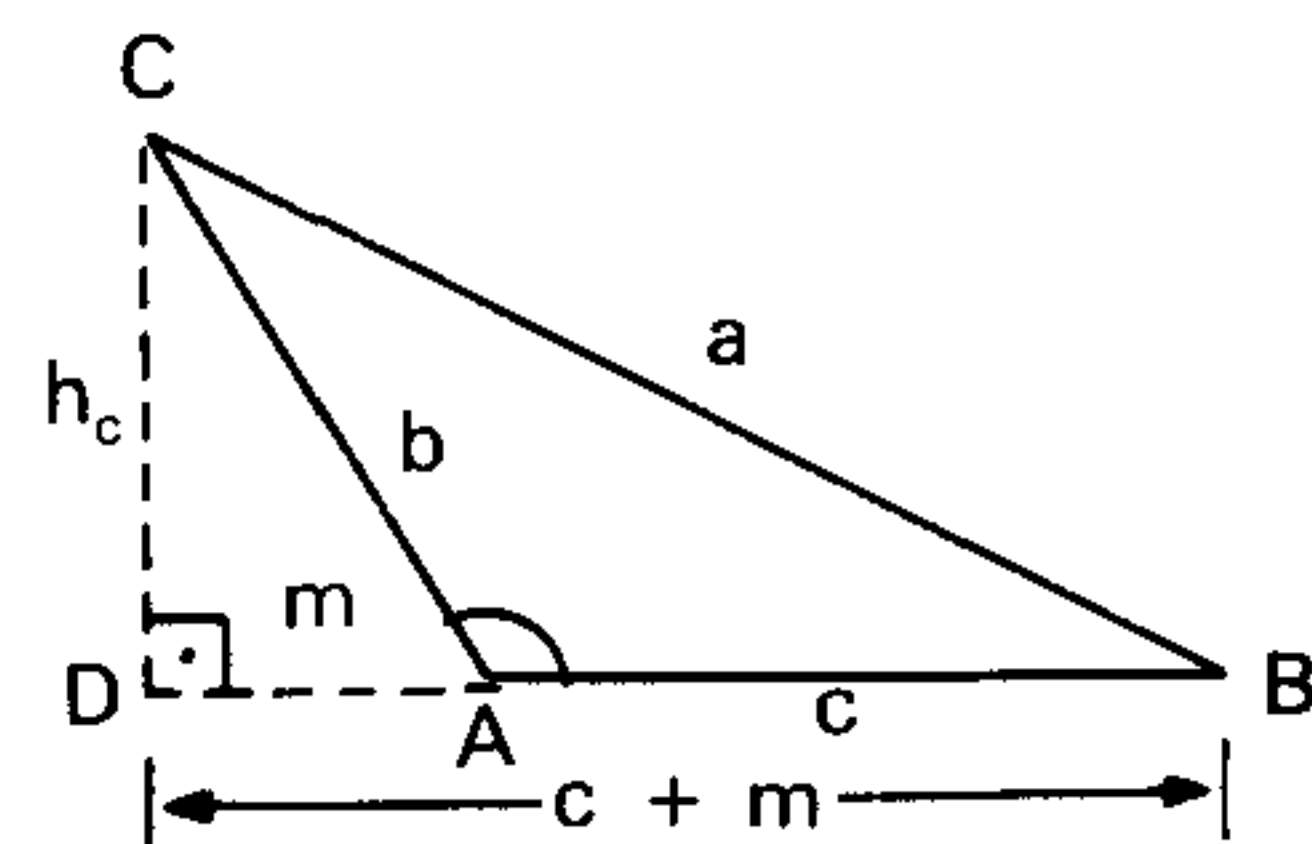
em que *A* e *B* são os ângulos dos vértices *A* e *B* do triângulo e *a*, *b* e *c* os lados opostos respectivamente aos vértices *A*, *B* e *C* desse triângulo.

633. No mesmo exercício anterior, prove que: $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{sen\ A - sen\ B}{sen\ B}$.

634. Sejam *a*, *b* e *c* os lados opostos aos vértices *A*, *B* e *C* de um triângulo *ABC*. Prove que: $\dfrac{sen\ A + sen\ B}{sen\ C} = \dfrac{a+b}{c}$, em que *A*, *B* e *C* são igualmente os ângulos dos vértices *A*, *B* e *C* do triângulo considerado.

203. *Relações métricas*

a) Num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um *ângulo agudo* é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, *menos* duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.

Hipótese		*Tese*
$A < 90°$, m = proj. de *b* sobre *c*	$\Longrightarrow$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$

b) Num triângulo obtusângulo qualquer, o quadrado do lado oposto ao *ângulo obtuso* é igual à soma dos quadrados dos outros lados, *mais* duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele (ou sobre a reta que o contém).

Hipótese		*Tese*
$A > 90°$, m = proj. de *b* sobre *c*	$\Longrightarrow$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$

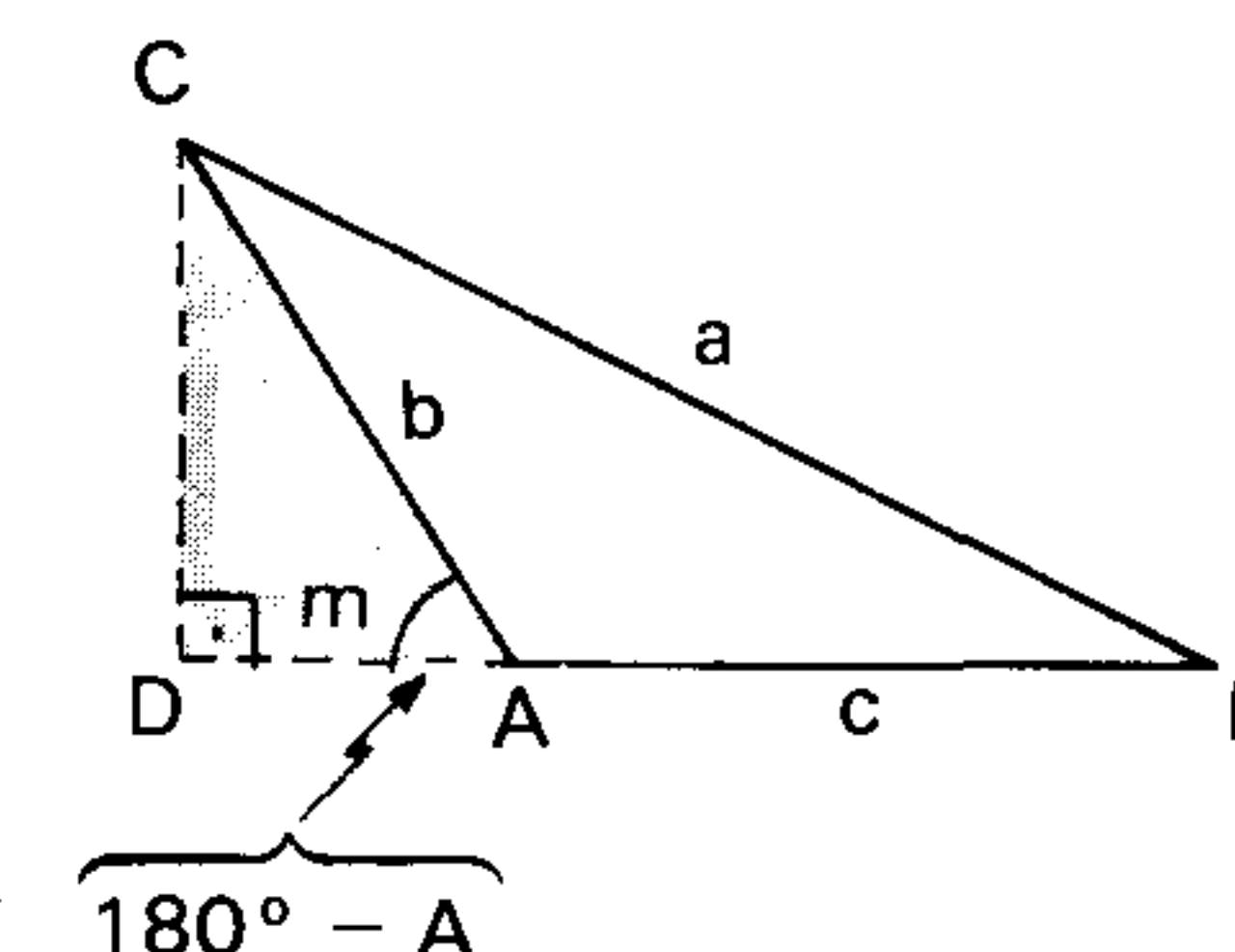
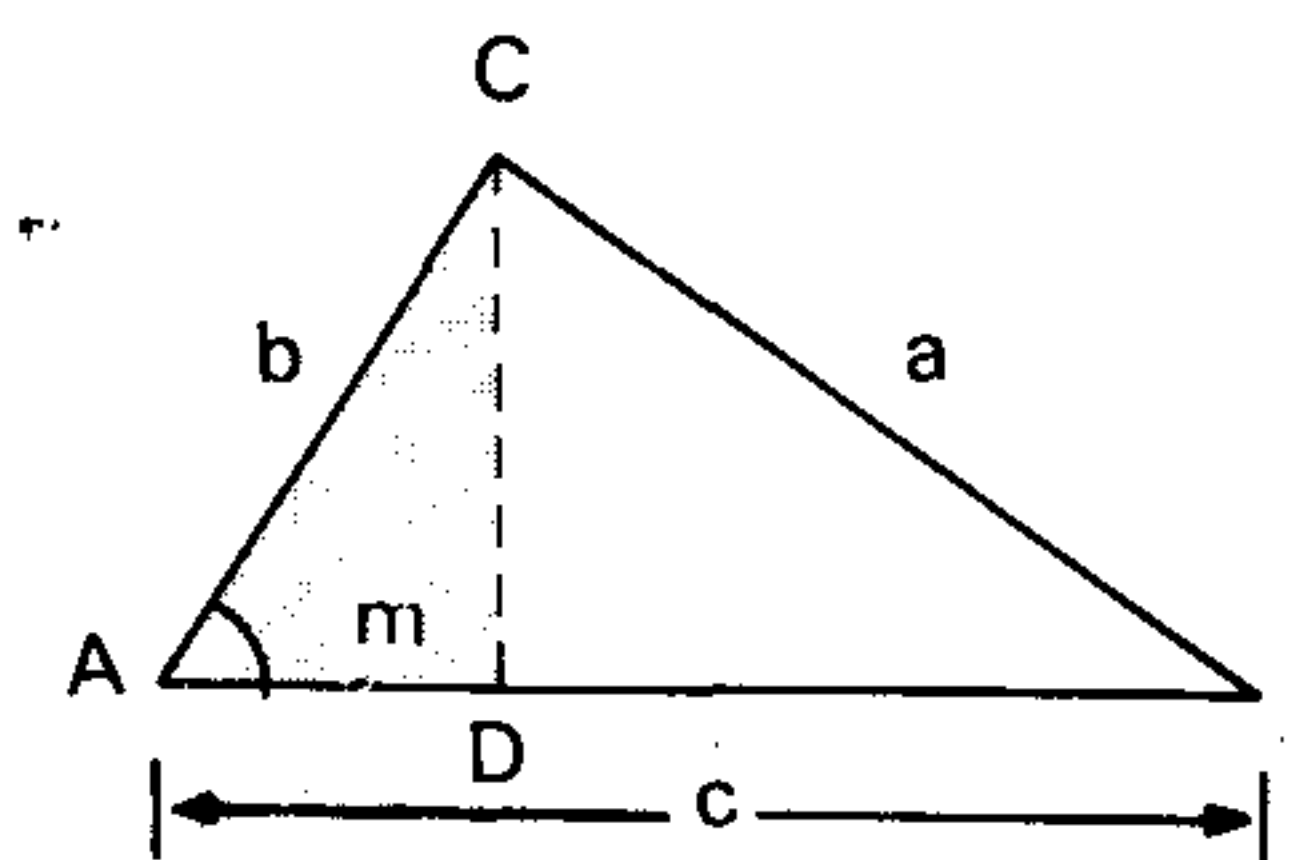
Demonstração (conjunta — para os dois casos)

Conduzindo $CD = h_c$ = altura relativa ao lado *c*, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta CDB:\ a^2 = h_c^2 + (c \pm m)^2 \\ \Delta CDA:\ h_c^2 = b^2 - m^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 \pm 2cm + m^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cm}\ (1) \quad \text{ou} \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2cm}\ (2)$$

204. *Teorema dos cossenos*

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados *menos* duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

No ΔABC: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$ (1)

No ΔCDA: $\cos A = \dfrac{m}{b} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow m = b \cdot \cos A$

Substituindo *m* em (1):

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c(b \cdot \cos A)$

No ΔABC: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$ (2)

No ΔCDA: $\cos(180° - A) = \dfrac{m}{b} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow -\cos A = \dfrac{m}{b} \Longrightarrow m = -b \cdot \cos A$

Substituindo *m* em (2):

$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b \cdot \cos A)$

Para os dois casos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$

Analogamente, temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

que são as expressões do teorema dos cossenos ou lei dos cossenos.

205. *Reconhecimento da natureza de um triângulo*

Conhecendo-se as medidas dos lados de um triângulo e chamando a maior delas de a e as outras duas de b e c, lembrando que

$$|b - c| < a < b + c$$

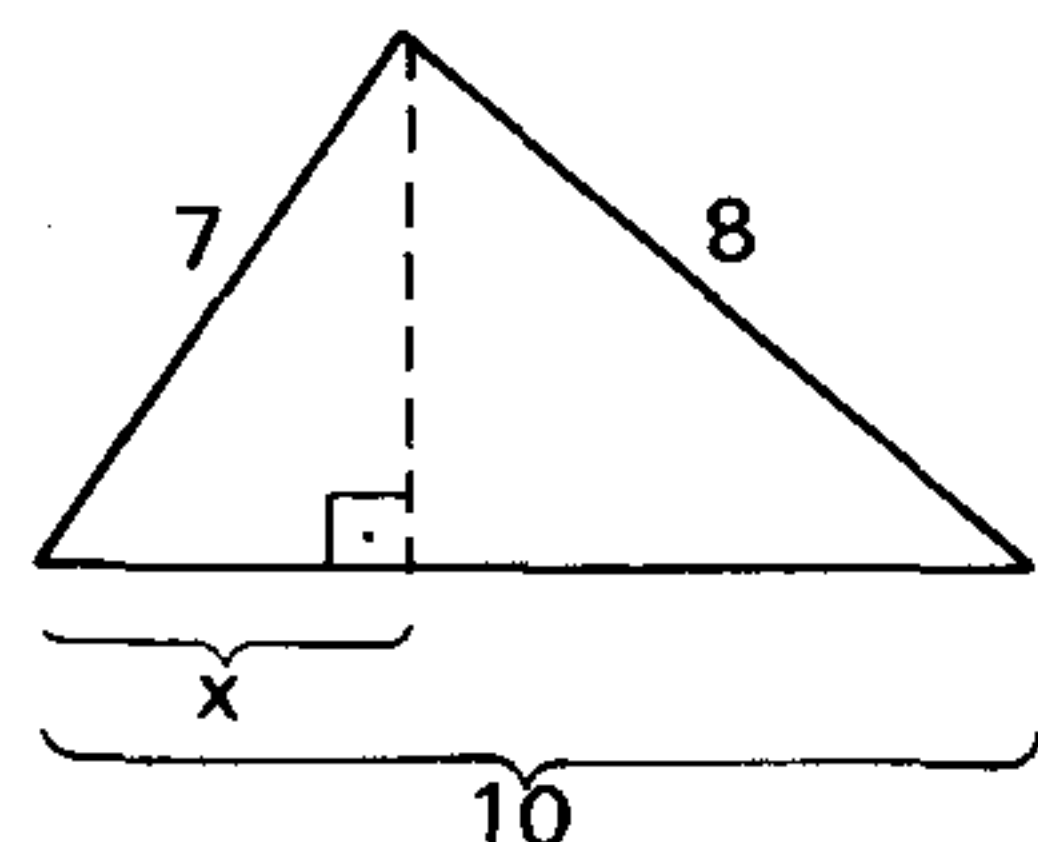
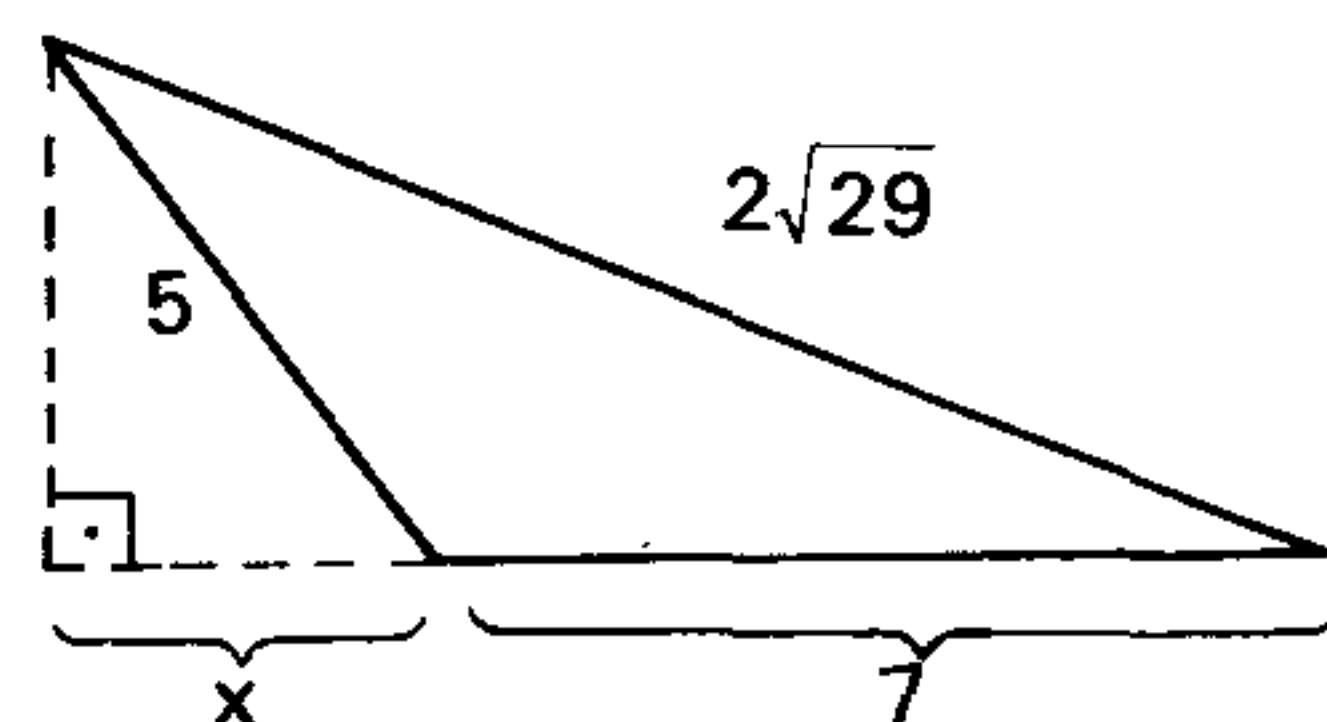
reconhecemos a natureza de um triângulo, com base nas equivalências abaixo:

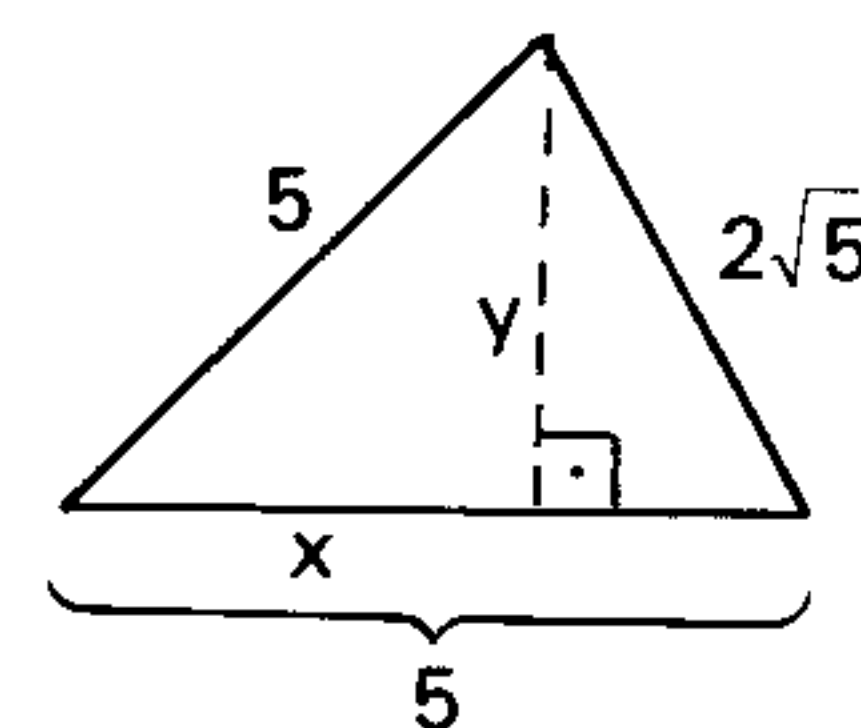
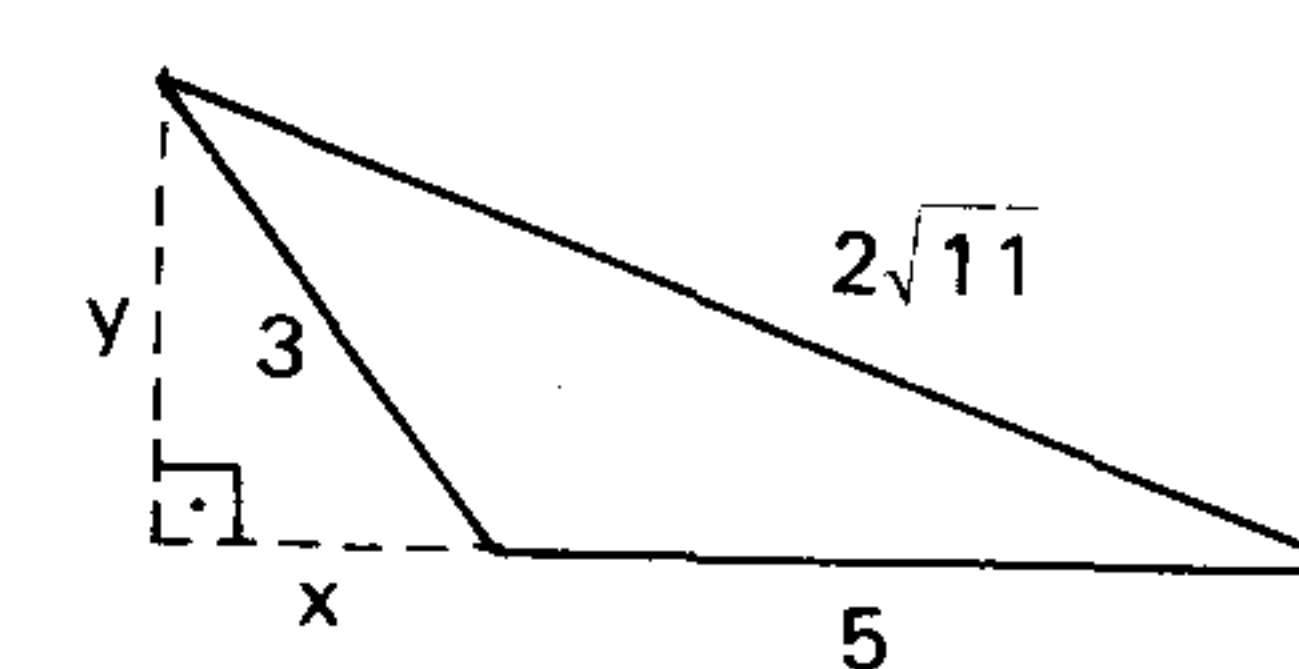
$$a^2 < b^2 + c^2 \Longrightarrow \text{triângulo acutângulo}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow \text{triângulo retângulo}$$
$$a^2 > b^2 + c^2 \Longrightarrow \text{triângulo obtusângulo}$$

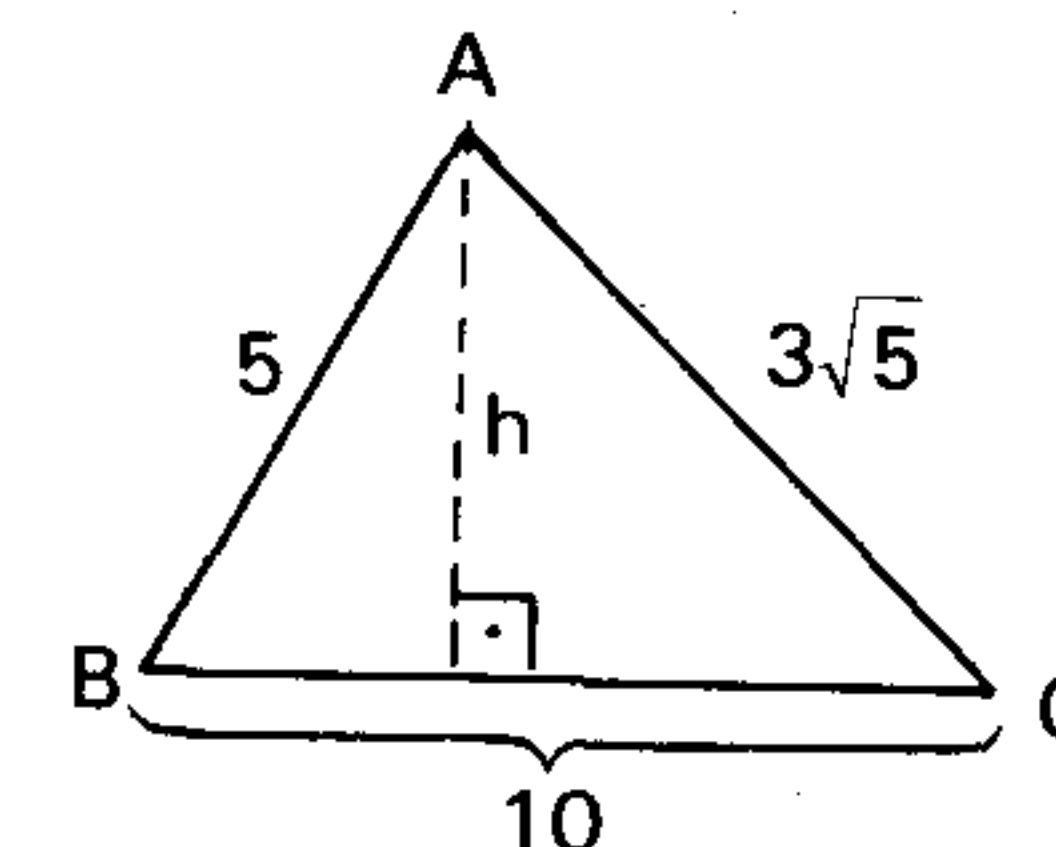
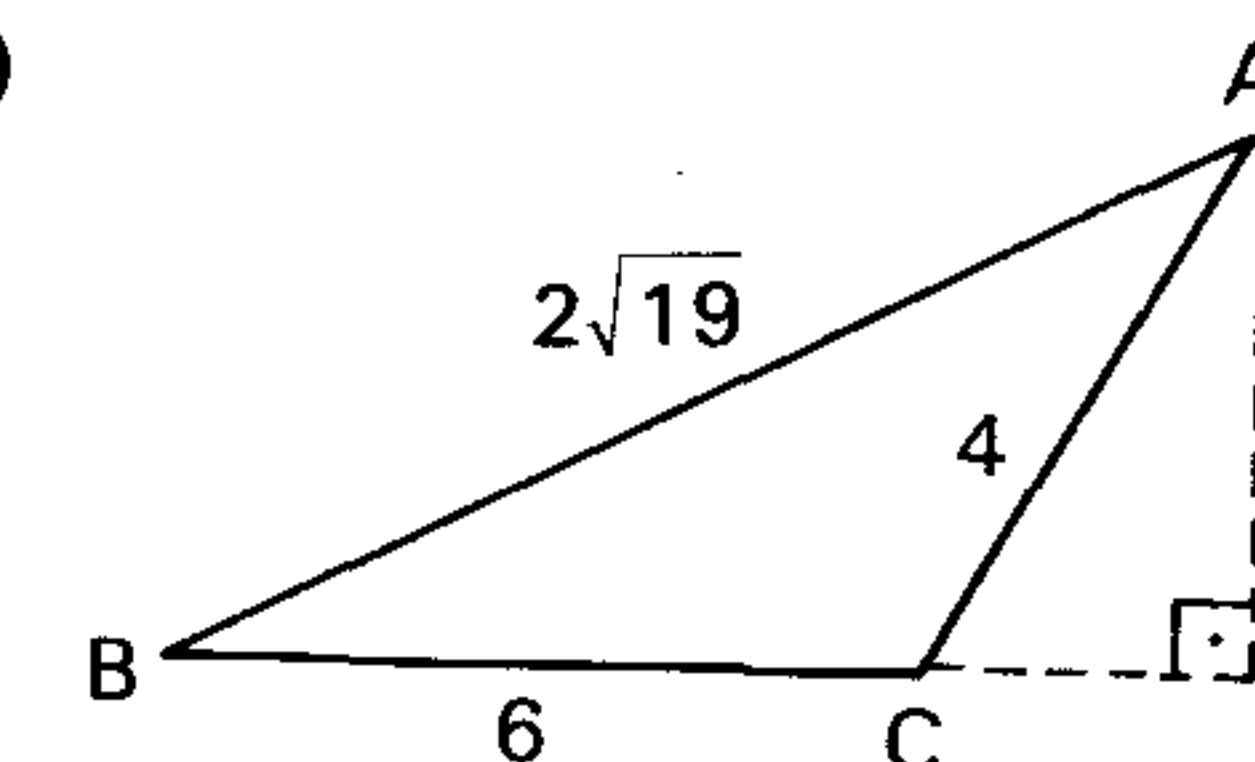
cujas demonstrações imediatas são decorrentes dos dois itens anteriores.

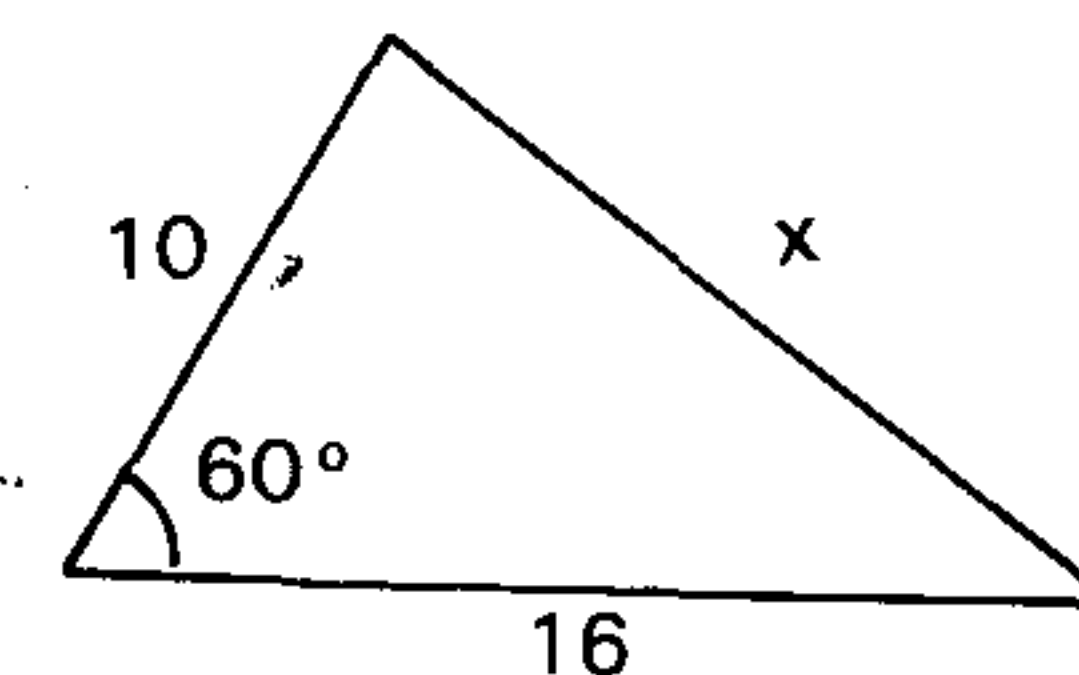
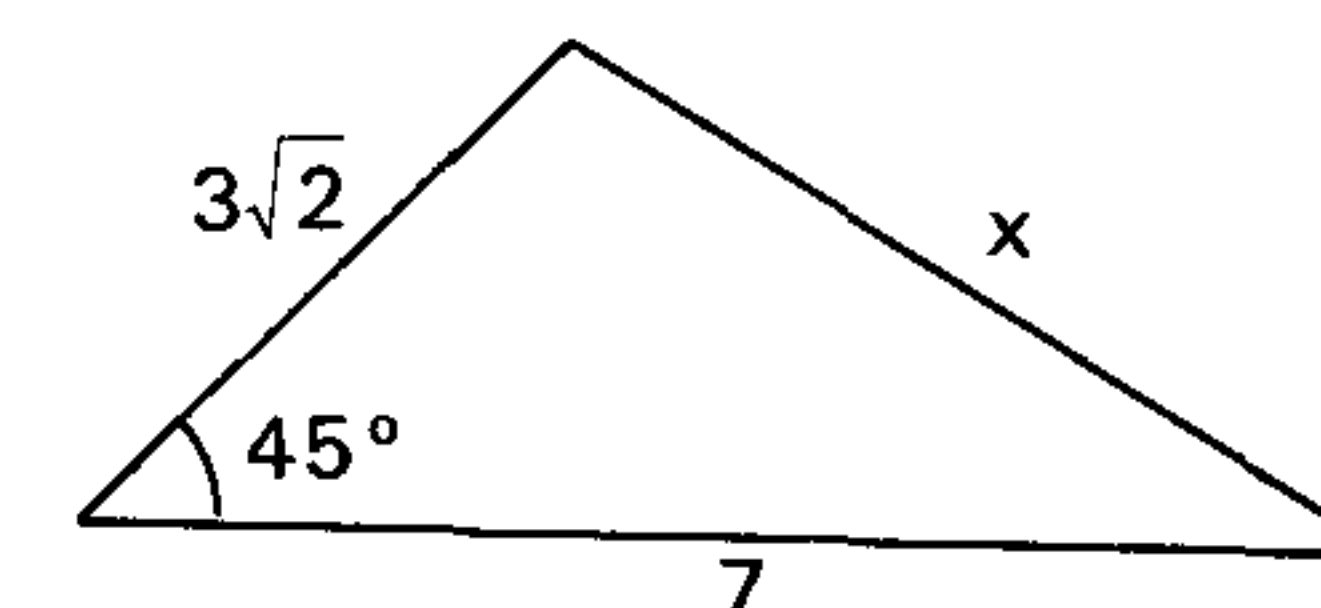
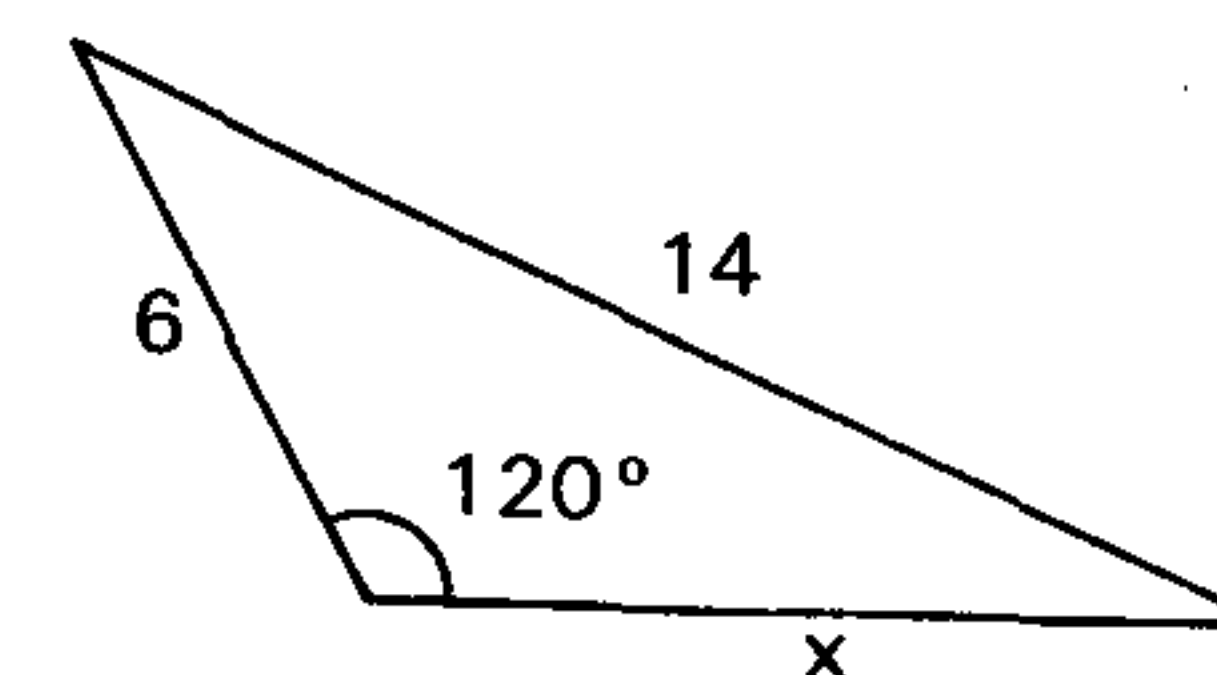
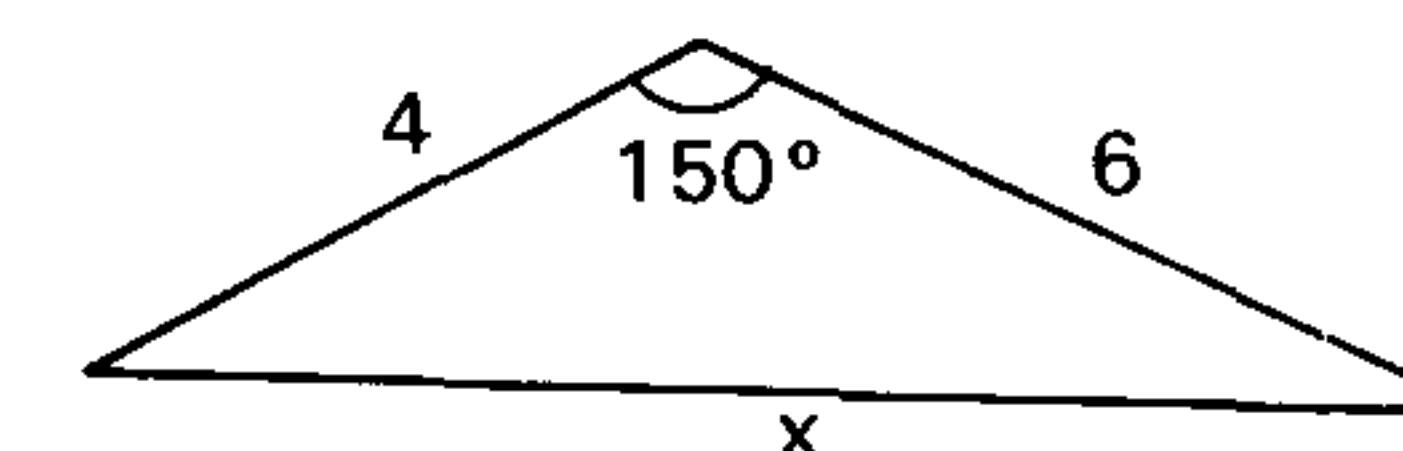
EXERCÍCIOS

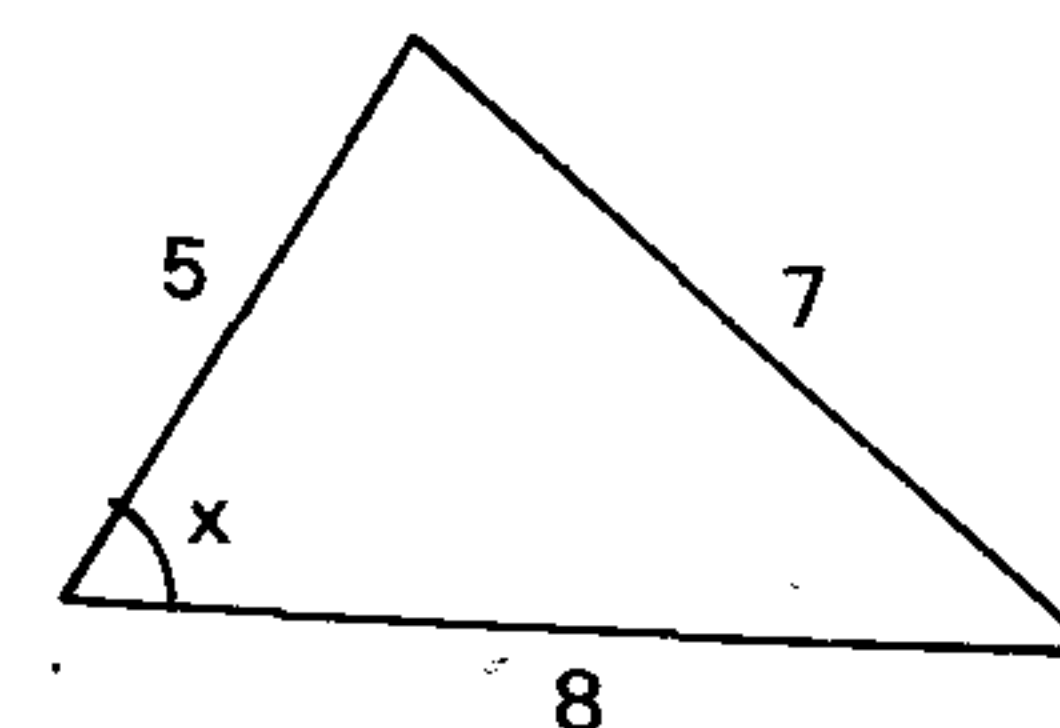
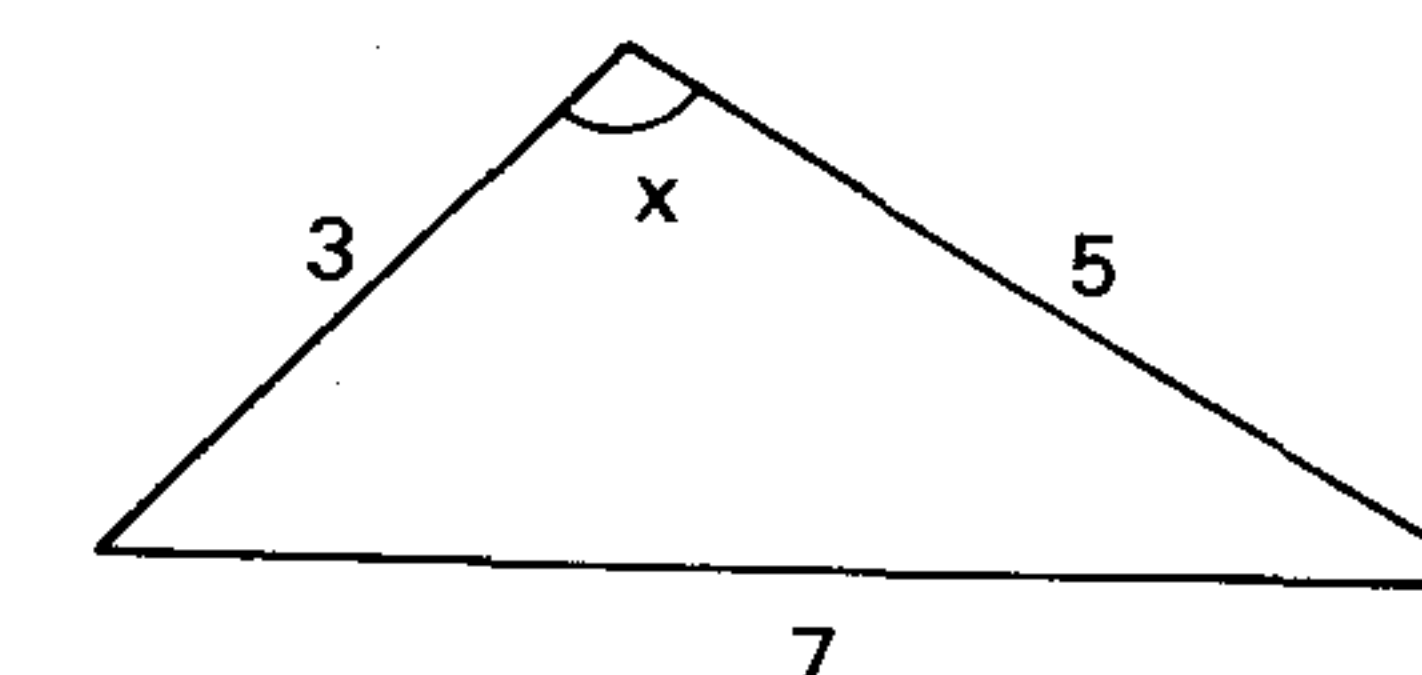
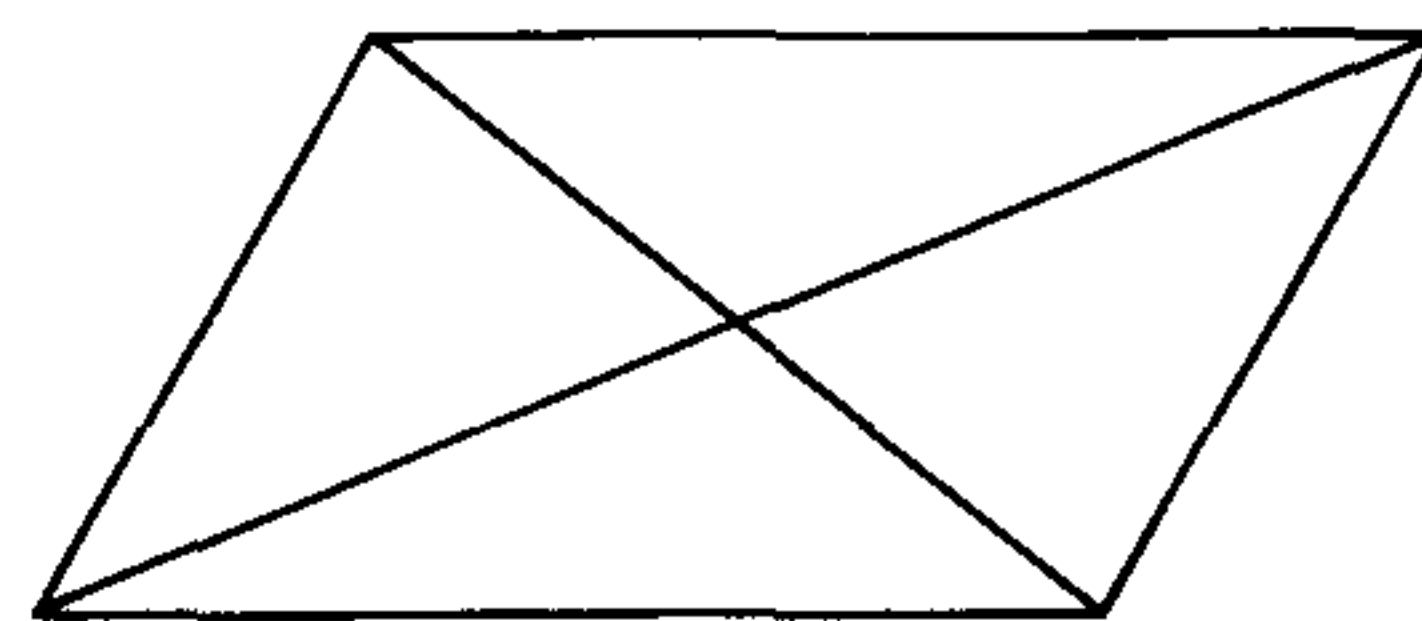
635. Determine o valor de x nos casos:

a)

b)

636. Determine x e y nos casos:

a)

b)

637. Calcule a altura h, relativa ao lado $\overline{BC}$, nos casos:

a)

b)

638. Determine o valor de x nos casos:

a)

b)

c)

d)

639. Determine a medida x do ângulo nos casos:

a)

b)

640. Se as diagonais do paralelogramo da figura medem *20 cm* e *32 cm* e formam um ângulo de *60°*, determine os lados do paralelogramo.

641. Reconheça a natureza de um triângulo:

a) cujos lados medem *6, 12* e *13*;
b) cujos lados medem *6, 10* e *12*;
c) cujos lados medem *5, 12* e *13*;
d) cujos lados estão na razão *3:4:4, 5*;
e) cujos lados são inversamente proporcionais a *3, 4* e *6*.

642. Reconheça a natureza de um triângulo cujos lados são inversamente proporcionais aos números *3, 4* e *5*.

643. Os lados de um triângulo medem *15 m, 20 m* e *25 m*. Determine a altura relativa ao maior lado.

644. Os lados de um triângulo medem *12 m, 20 m* e *28 m*. Determine a projeção do menor sobre a reta do lado de *20 m*.

645. Os lados de um triângulo medem *7 m, 24 m* e *25 m*. Determine a altura relativa ao lado menor.

646. Determine o lado $\overline{BC}$ de um triângulo acutângulo ABC, em que $AC = 7$ *cm*, $AB = 5$ *cm* e a projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overline{AB}$ mede *1 cm*.

647. Determine a medida do lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC, obtusângulo em A, sendo $BC = 8$ *cm*, $AC = 5$ *cm* e a projeção do lado $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$ igual a *3 mm*.

648. Determine a medida do lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC, em que $AC = 10$ *cm*, $AB = 6$ *cm* e a projeção do lado $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$ vale *10,4 cm*.

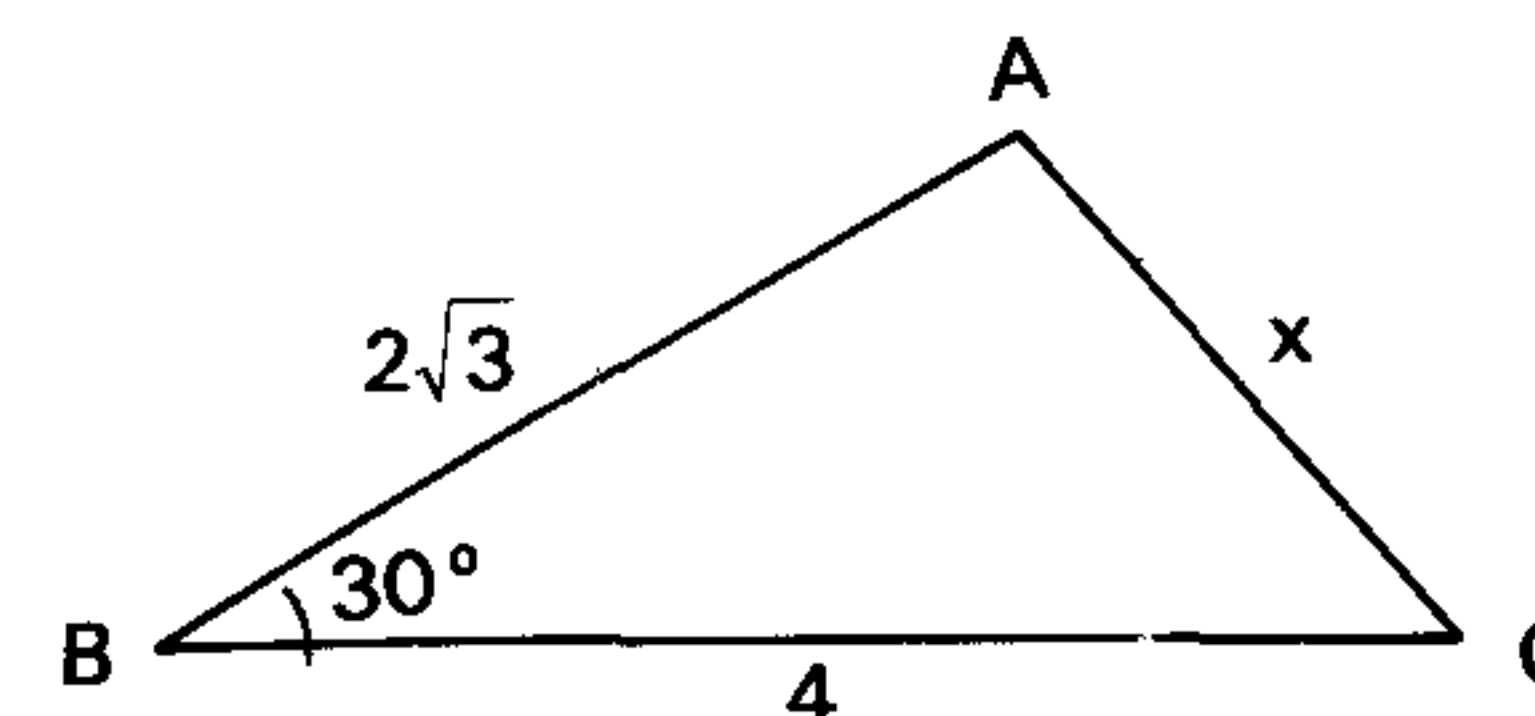
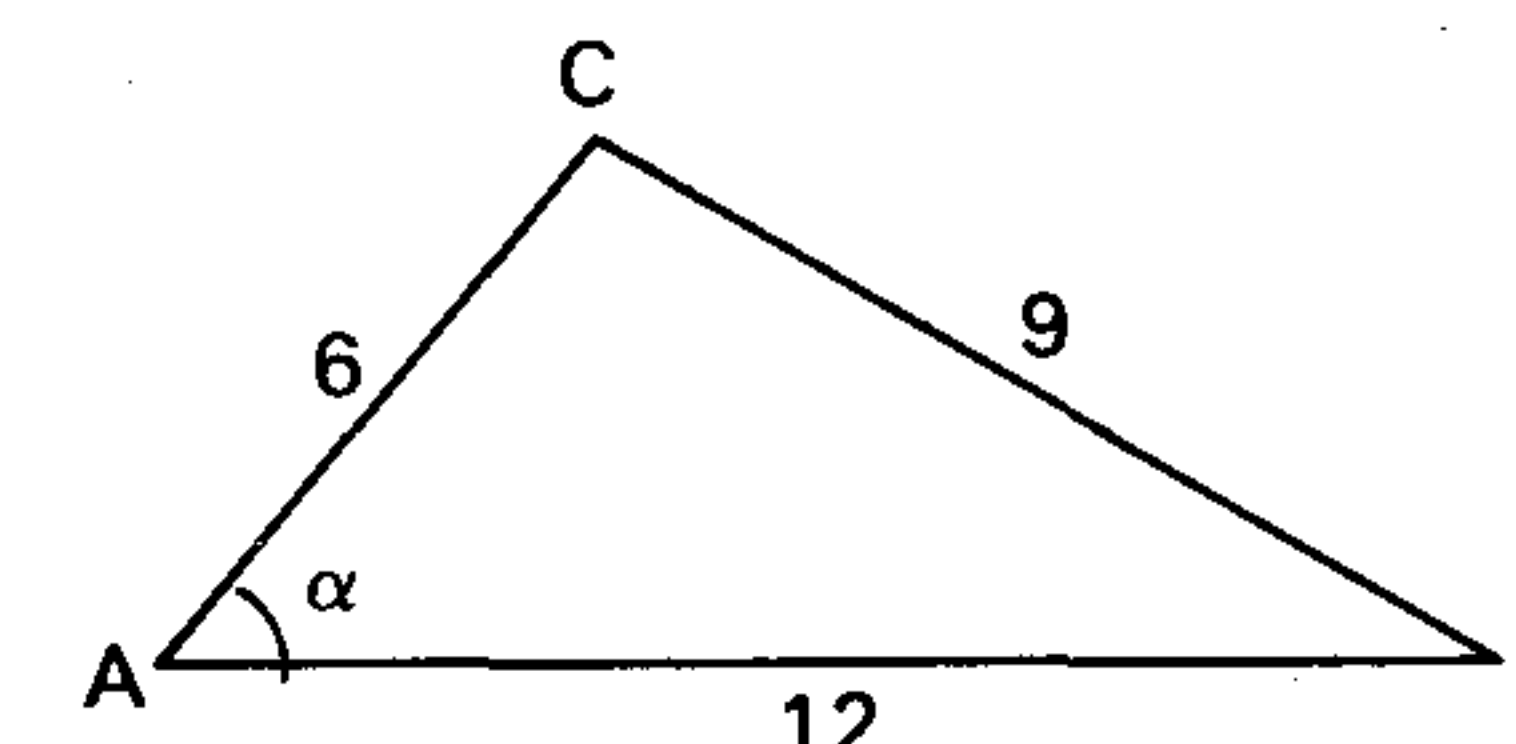
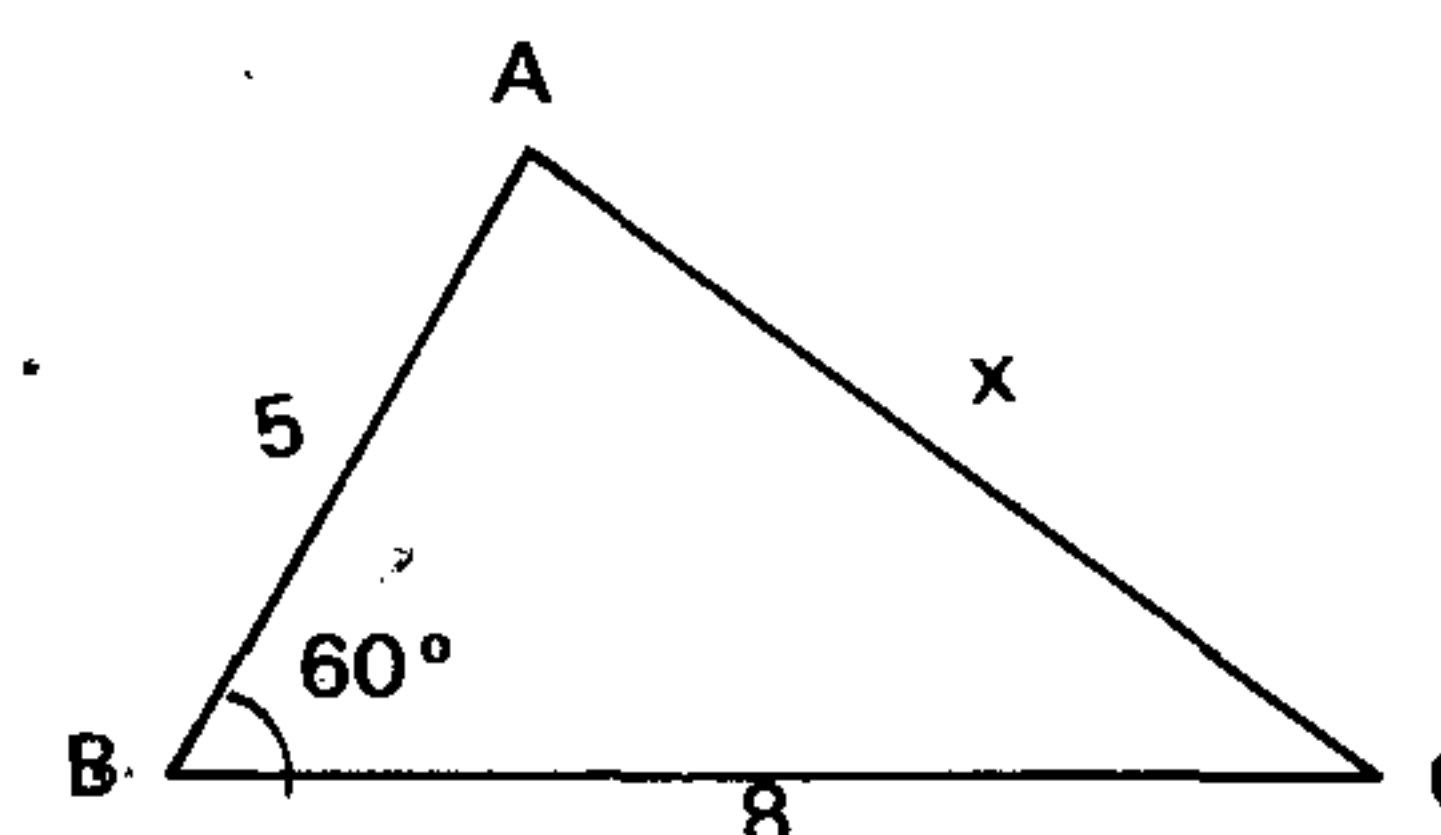
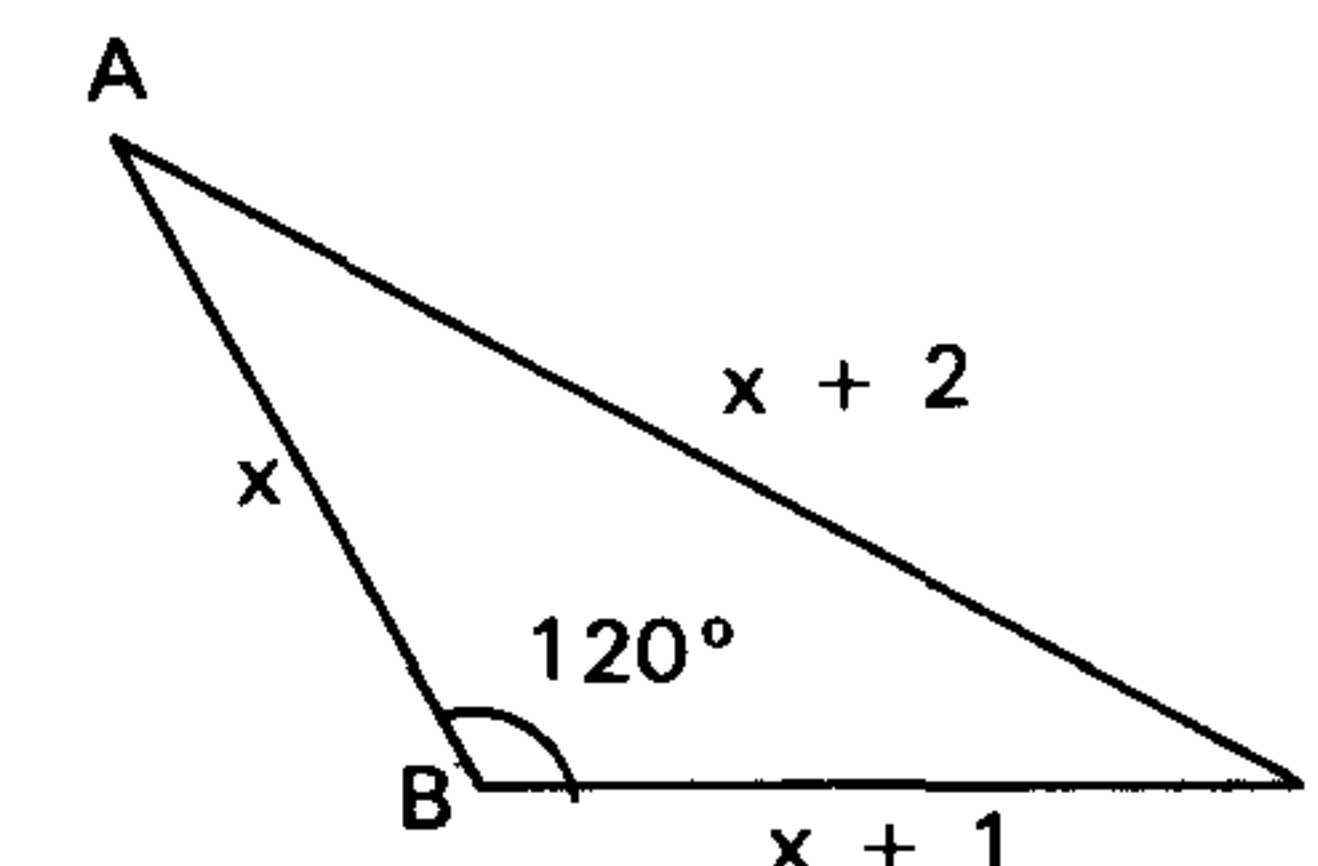
649. A base de um triângulo mede *10 cm*, e os outros dois lados *14 cm* e *8 cm*, respectivamente. Determine as projeções desses dois lados sobre a base do triângulo.

650. Determine a projeção do lado $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AC}$ de um triângulo ABC, em que $BC = 12$ *cm*, $AC = 16$ *cm* e $AB = 18$ *cm*.

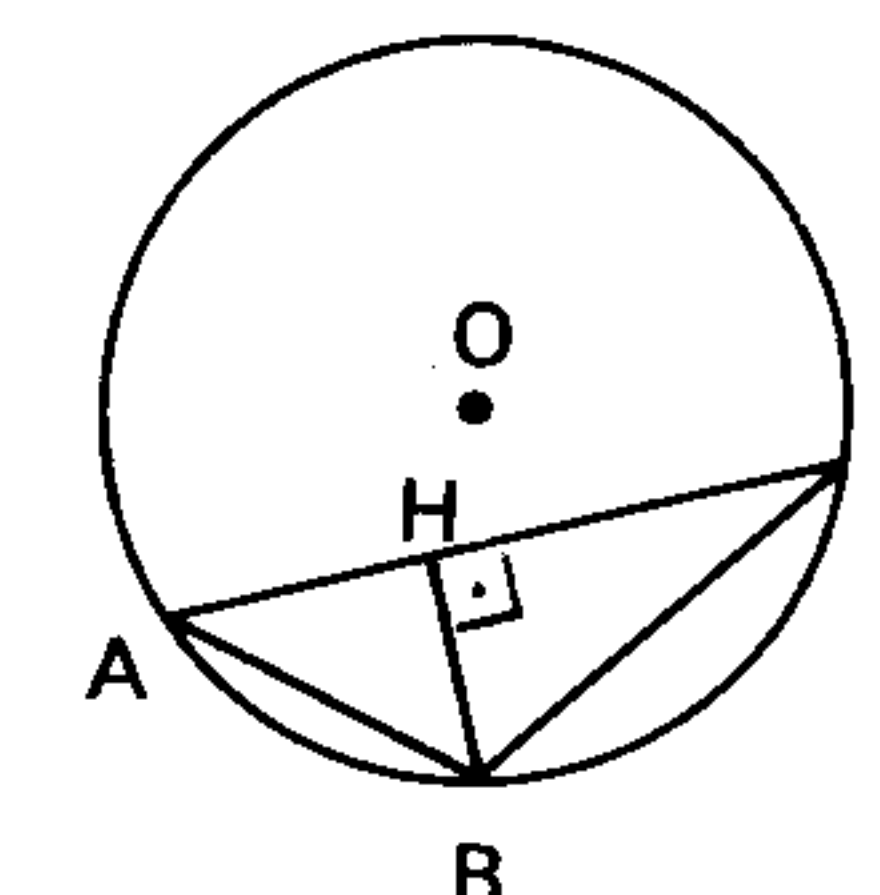
651. Em um triângulo ABC é possível ter simultaneamente:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$ e $c^2 = b^2 + a^2 + 2bn$

sendo m projeção de c sobre b e n, projeção de a sobre b? Justifique.

652. Na figura abaixo, calcule o valor de x.

653. No triângulo ABC da figura abaixo, o lado $\overline{AB}$ mede *12 cm*, o lado $\overline{BC}$ mede *9 cm* e o lado $\overline{AC}$ mede *6 cm*. Calcule o cosseno do ângulo α.

654. Calcule o perímetro do triângulo da figura abaixo.

655. Calcule o perímetro do triângulo ABC, da figura abaixo.

656. Determine o valor de x, sabendo que $x + 5{,}3 - x$ e $x + 7$ são as medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC cujo ângulo $\hat{B}$ vale $120°$.

657. Uma corda $\overline{AB}$ de medida ℓ determina sobre uma circunferência um arco de $120°$. Determine a distância do ponto B ao diâmetro $\overline{AC}$ desse círculo.

658. Na figura, $\overline{AB}$ é igual ao raio do círculo de centro O, $BC = 26$ e $\overline{BH}$ é perpendicular a $\overline{AC}$. Calcule $\overline{HC}$.

659. Determine a diagonal maior de um paralelogramo, em que dois de seus lados consecutivos formam um ângulo de $45°$ e medem respectivamente $5\sqrt{2}$ *cm* e 10 *cm*.

660. Sabendo que os lados consecutivos de um paralelogramo medem 4 *cm* e 5 *cm* e uma das diagonais mede 6 *cm*, determine a medida da outra diagonal.

661. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 *m* e 12 *m* e formam um ângulo de $60°$. Calcule as diagonais.

662. A mediana $\overline{AM}$ de um triângulo ABC mede 6 *cm*, divide o lado oposto em dois segmentos iguais a 12 *cm* e forma com esse lado dois ângulos que diferem de $60°$. Determine as medidas dos lados desse triângulo.

663. Existe o triângulo ABC tal que $BC = 10$ *cm*, $AC = 1$ *cm* e $\beta = 30°$, em que β é o ângulo oposto ao lado $\overline{AC}$?

664. Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas a e b e uma das diagonais tem por medida c. Determine a medida da outra diagonal.

665. Prove que: "Num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele".

666. Prove que: "Em um triângulo obtusângulo, o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros dois, mais duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele".

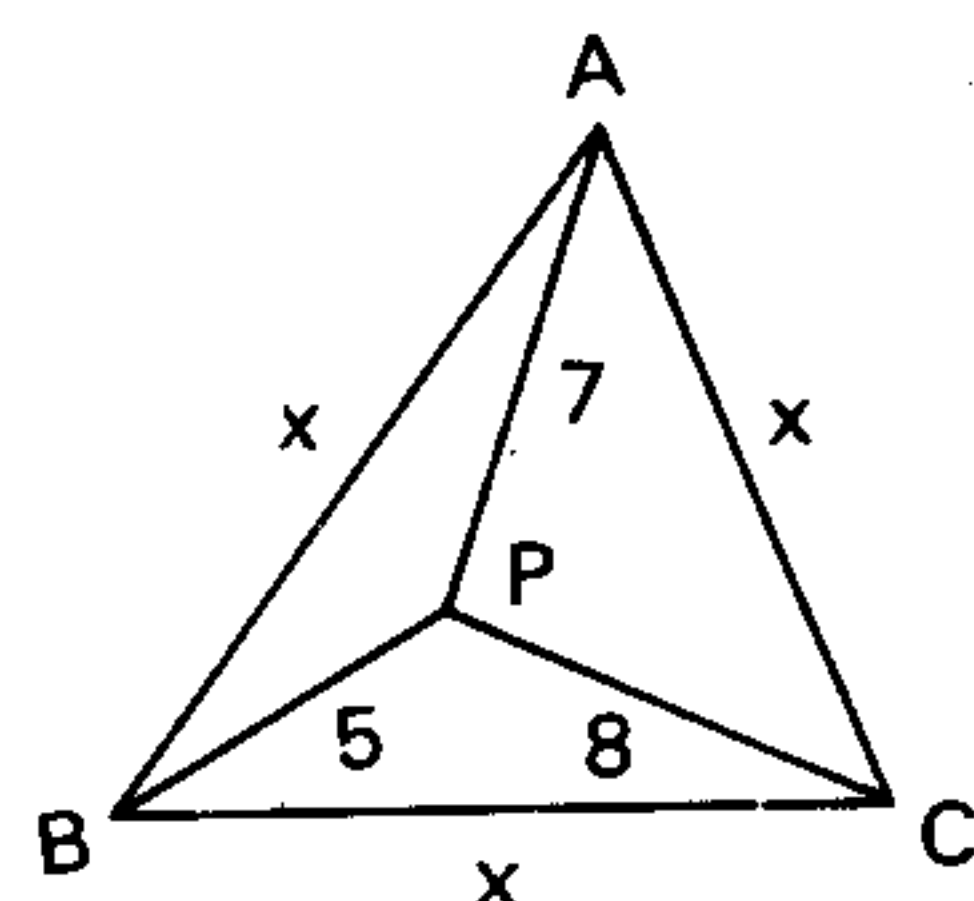
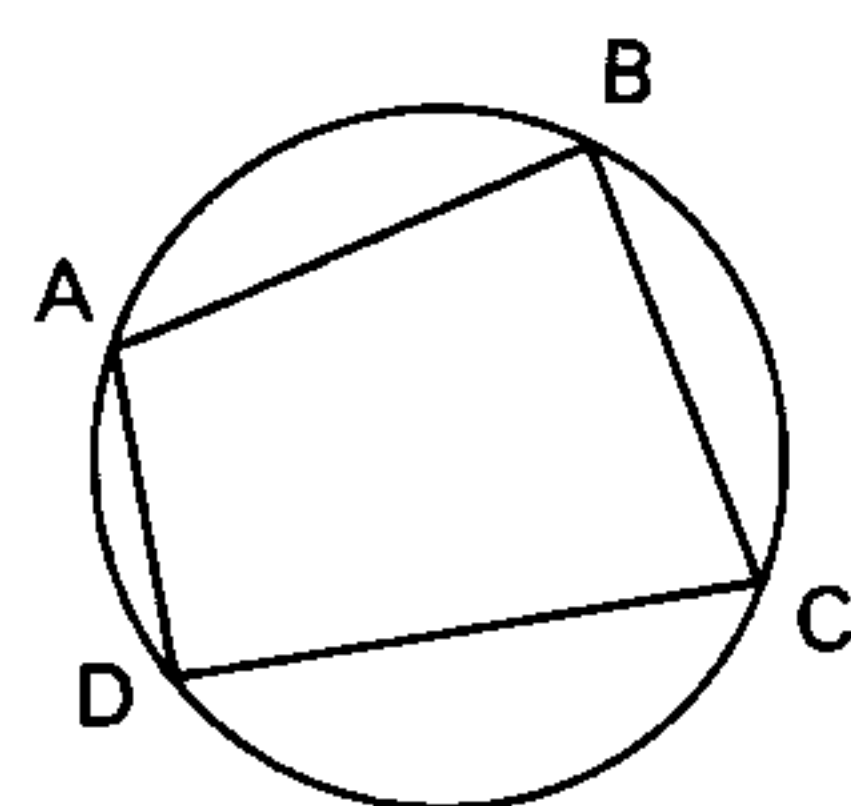
667. Se, em um triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o produto desses dois lados, calcule o ângulo interno que os mesmos dois lados formam.

668. Sobre os lados de um triângulo ABC retângulo de lados 6 *cm*, $6\sqrt{3}$ *cm* e 12 *cm* construímos três quadrados externos. Calcule a medida dos lados do triângulo determinado pelos centros desses quadrados.

669. As medidas dos lados do quadrilátero $ABCD$ são $AB = BC = 10$ *m*, $CD = 16$ *m* e $AD = 6$ *m*. Determine BD.

A B C D

670. Um ponto interno de um triângulo equilátero dista 5 *cm*, 7 *cm* e 8 *cm* dos vértices do triângulo. Determine o lado desse triângulo.

A x 7 x P B 5 8 C x

206. *Cálculo das medianas de um triângulo*

Sendo dados os lados a, b e c de um triângulo, calcular as três medianas: m_a, m_b e m_c:

$$\left.\begin{matrix}\Delta ADC \\ \hat{D} \text{ obtuso}\end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} x$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta ADB \\ \hat{D} \text{ agudo}\end{matrix}\right\} \Rightarrow c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} x$$

$$+ \quad b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\frac{a^2}{4}$$

A c b m_a B D C x a

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2(b^2 + c^2) = 4m_a^2 + a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$$

Analogamente:

$$\boxed{m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}} \qquad \boxed{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}$$

Se $\hat{D}$ for reto, é imediato. Basta aplicar a relação de Pitágoras.

Exemplo

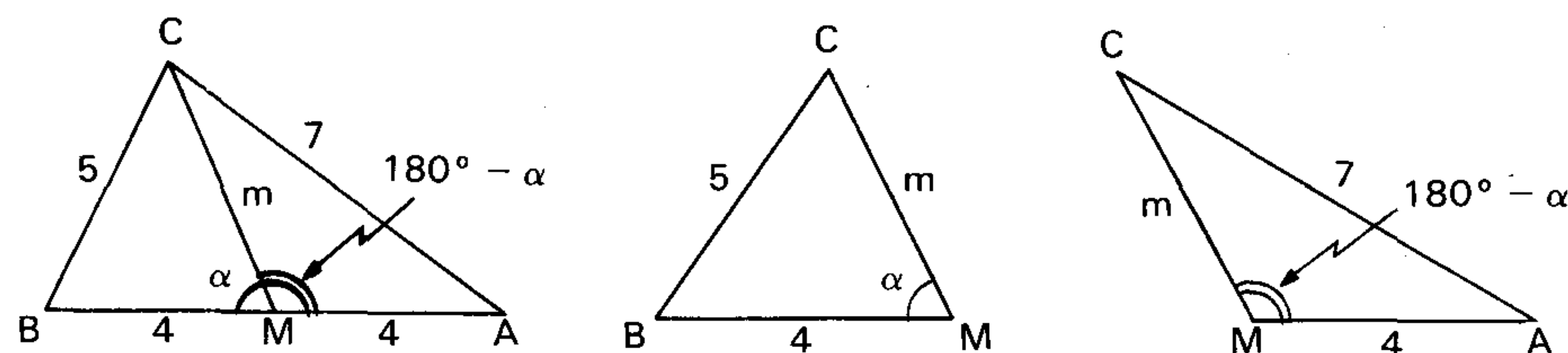
Dado um triângulo de lados $a = 5$, $b = 7$ e $c = 8$, calcular as três medianas: m_a, m_b e m_c:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(49 + 64) - 25} = \frac{1}{2}\sqrt{201}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(25 + 64) - 49} = \frac{1}{2}\sqrt{129}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(25 + 49) - 64} = \frac{1}{2}\sqrt{84} = \sqrt{21}$$

Nota

Poderíamos obter estas medianas sem usar as fórmulas, substituindo-as pelas relações usadas em suas deduções ou pela lei dos cossenos. No exemplo anterior, calculemos diretamente a mediana m_c.

No ΔCBM: $5^2 = m_c^2 + 4^2 - 2 \cdot m_c \cdot 4 \cdot \cos\alpha \Longrightarrow$

$\Longrightarrow m_c^2 - 8\, m_c \cdot \cos\alpha = 9 \quad (1)$

No ΔCAM: $7^2 = m_c^2 + 4^2 - 2 \cdot m_c \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \Longrightarrow$

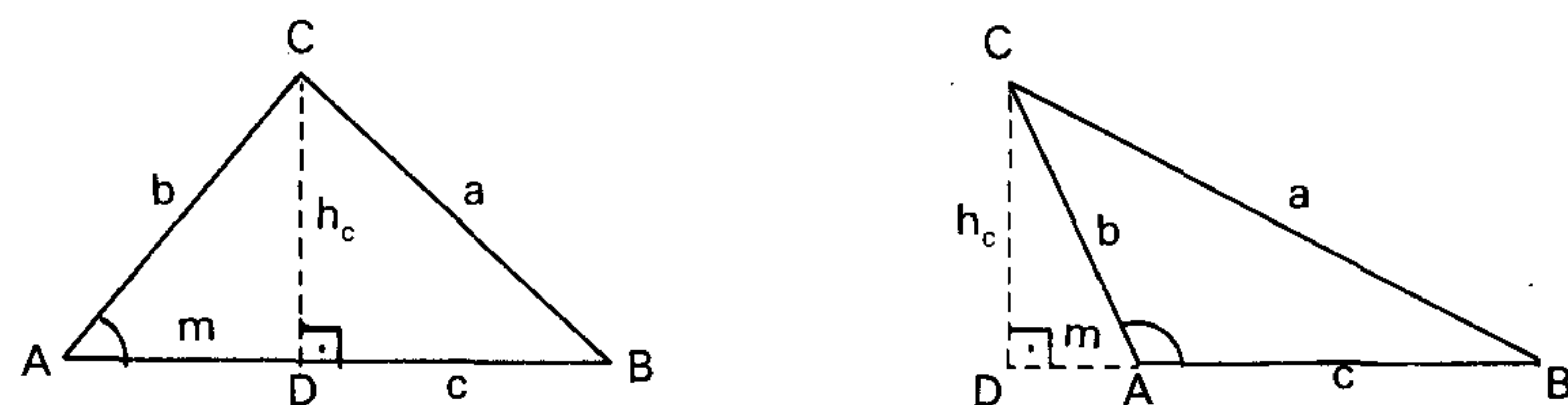
$\Longrightarrow 7^2 = m_c^2 + 4^2 - 2 \cdot m_c \cdot 4(-\cos\alpha) \Longrightarrow m_c^2 + 8 \cdot m_c \cdot \cos\alpha = 33 \quad (2)$

Fazendo (1) + (2):

$m_c^2 - 8 \cdot m_c \cdot \cos\alpha + m_c^2 + 8 \cdot m_c \cdot \cos\alpha = 9 + 33 \Longrightarrow 2 \cdot m_c^2 = 42 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow m_c = \sqrt{21}$

207. *Cálculo das alturas de um triângulo*

Num triângulo *ABC* conhecem-se as medidas dos lados *a*, *b* e *c*. Calcular as três alturas.

ΔADC: $h_c^2 = b^2 - m^2 \quad (1)$

Relação métrica $\Delta ABC \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \pm 2\,cm \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\pm 2c} \quad (2)$$

$$(2) \text{ em } (1): h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\pm 2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} =$$

$$= 4c^2h_c^2 = [2bc + b^2 + c^2 - a^2]\,[2bc - b^2 - c^2 + a^2] =$$

$$= [(b^2 + 2bc + c^2) - a^2] \cdot [a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)] =$$

$$= [(b + c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b - c)^2] =$$

$$= [(b + c + a)\,(b + c - a)]\,[(a + b - c)\,(a - b + c)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4c^2h_c^2 = (a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c) \quad (3)$$

Fazendo:

$a + b + c = 2p$ (notar que *p* é *semiperímetro* do triângulo)

temos:

$$-a + b + c = -a + b + c + a - a = \overbrace{a + b + c}^{2p} - 2a = 2(p - a)$$

$$a - b + c = a - b + c + b - b = a + b + c - 2b = 2(p - b)$$

$$a + b - c = a + b - c - c = a + b + c - 2c = 2(p - c)$$

Então, substituindo em (3):

$$4c^2h_c^2 = \underbrace{(a + b + c)}_{2p}\,\underbrace{(-a + b + c)}_{2(p - a)}\,\underbrace{(a - b + c)}_{2(p - b)}\,\underbrace{(a + b - c)}_{2(p - c)}$$

$$4c^2h_c^2 = 2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}}$$

Analogamente:

$$\boxed{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}} \qquad \boxed{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}}$$

Exemplo

Dado um triângulo de lados $a = 5$, $b = 7$ e $c = 8$, calcular as três alturas: h_a, h_b e h_c.

$$\begin{array}{lll} & p = 10 & \\ a = 5 & p - a = 5 & \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ b = 7 & p - b = 3 & = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = \\ c = 8 & p - c = 2 & = 10\sqrt{3} \\ \hline 2p = 20 & & \end{array}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{5} \cdot 10\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \implies h_a = 4\sqrt{3}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{7} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{7} \implies h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{8} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \implies h_c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Nota

Nem sempre as expressões acima trazem simplificações de cálculo. Às vezes é conveniente substituir essas fórmulas pelas relações usadas em suas deduções.

Exemplo

Os lados de um triângulo medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e 5. Qual o comprimento da altura relativa ao lado maior?

Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

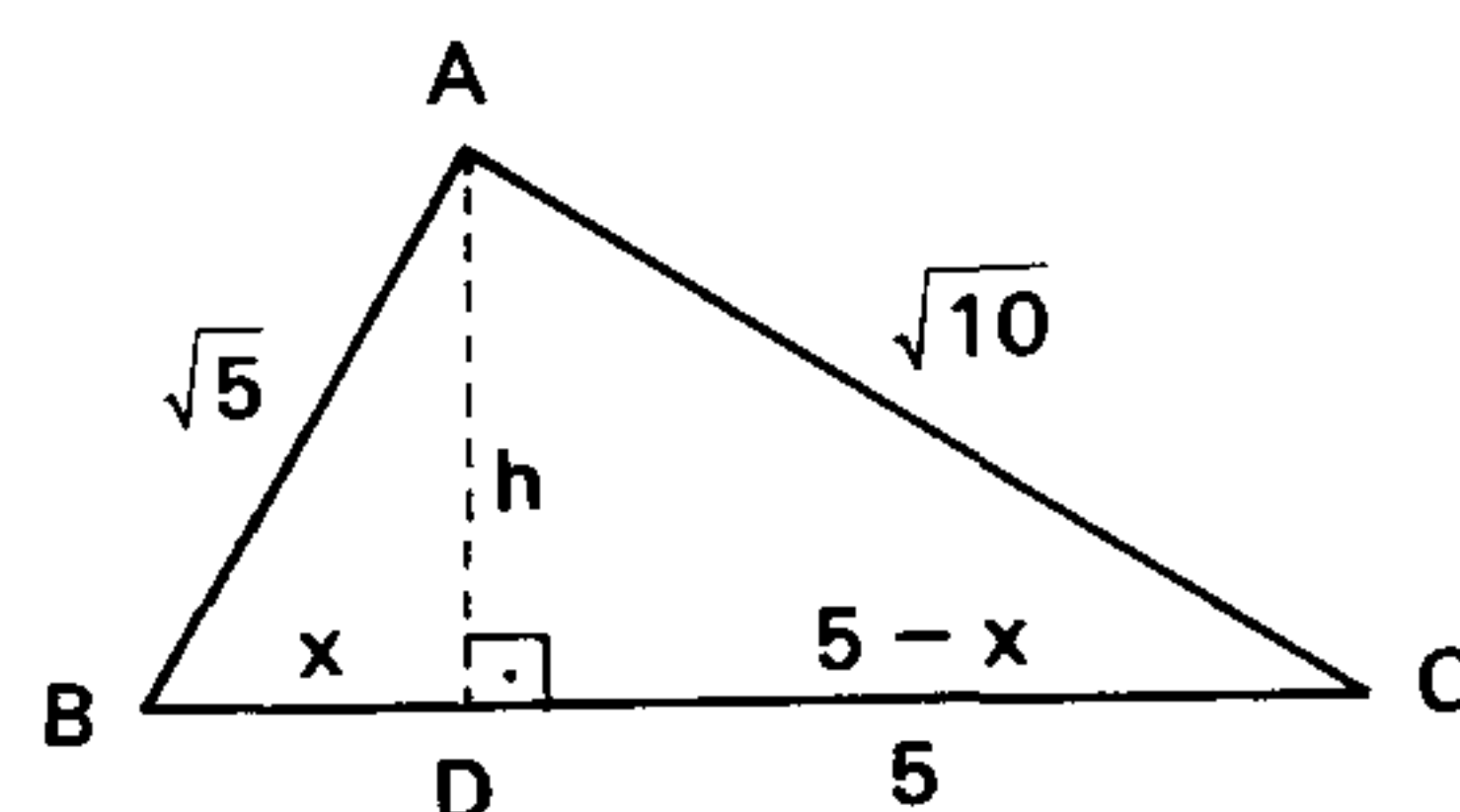
ΔADB: $h^2 + x^2 = (\sqrt{5})^2 \implies h^2 + x^2 = 5$ (1)

ΔADC: $h^2 + (5 - x)^2 = (\sqrt{10})^2 \implies$

$\implies h^2 - 10x + x^2 = -15$ (2)

(1) − (2): $10x = 20 \implies x = 2$

Substituindo $x = 2$ em (1):

$h^2 + 2^2 = 5 \implies h^2 = 1 \implies h = 1.$

208. *Relação de Stewart*

Dado um triângulo ABC e sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ (vide figura), vale a relação: $a^2y + b^2x - z^2c = cxy$.

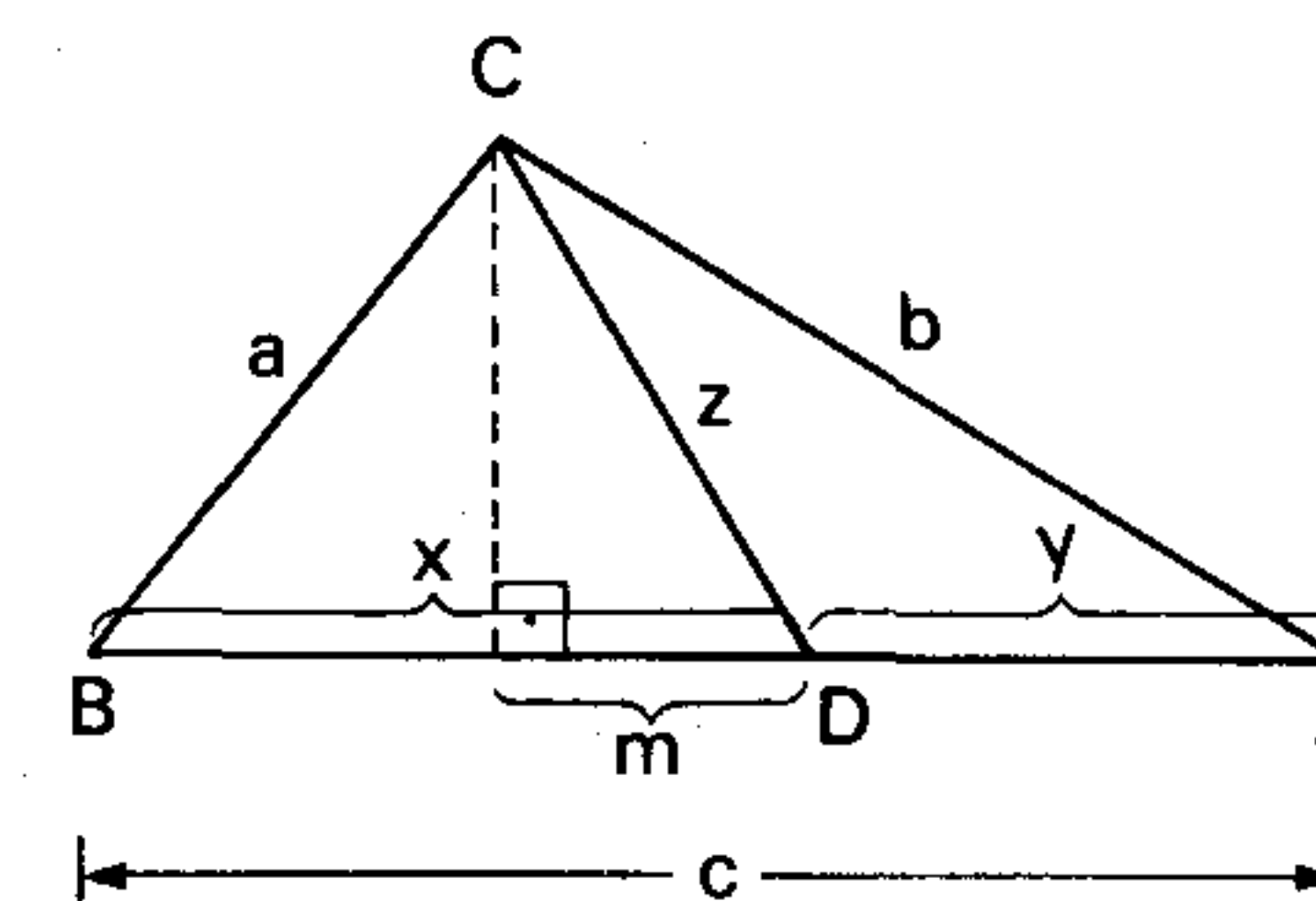
Demonstração

ΔBCD : $a^2 = x^2 + z^2 \mp 2xm$ (1)

ΔACD : $b^2 = y^2 + z^2 \mp 2ym$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} (1) \cdot y \implies a^2y = x^2y + z^2y \mp 2xym \\ (2) \cdot x \implies b^2x = xy^2 + z^2x \pm 2xym \end{array}\right\} +$$

$$a^2y + b^2x = xy(x + y) + z^2(x + y) \implies$$

$$\implies \boxed{a^2y + b^2x - z^2c = cxy}$$

Exemplo de aplicação

Calcular o raio x na figura ao lado.

Temos as circunferências $\lambda(O, 3)$, $\lambda_1(O_1, 2)$, $\lambda_2(O_2, 1)$ e $\lambda_3(O_3, x)$. No triângulo $O_1O_2O_3$, temos:

$\overline{O_1O_2} = 3$,

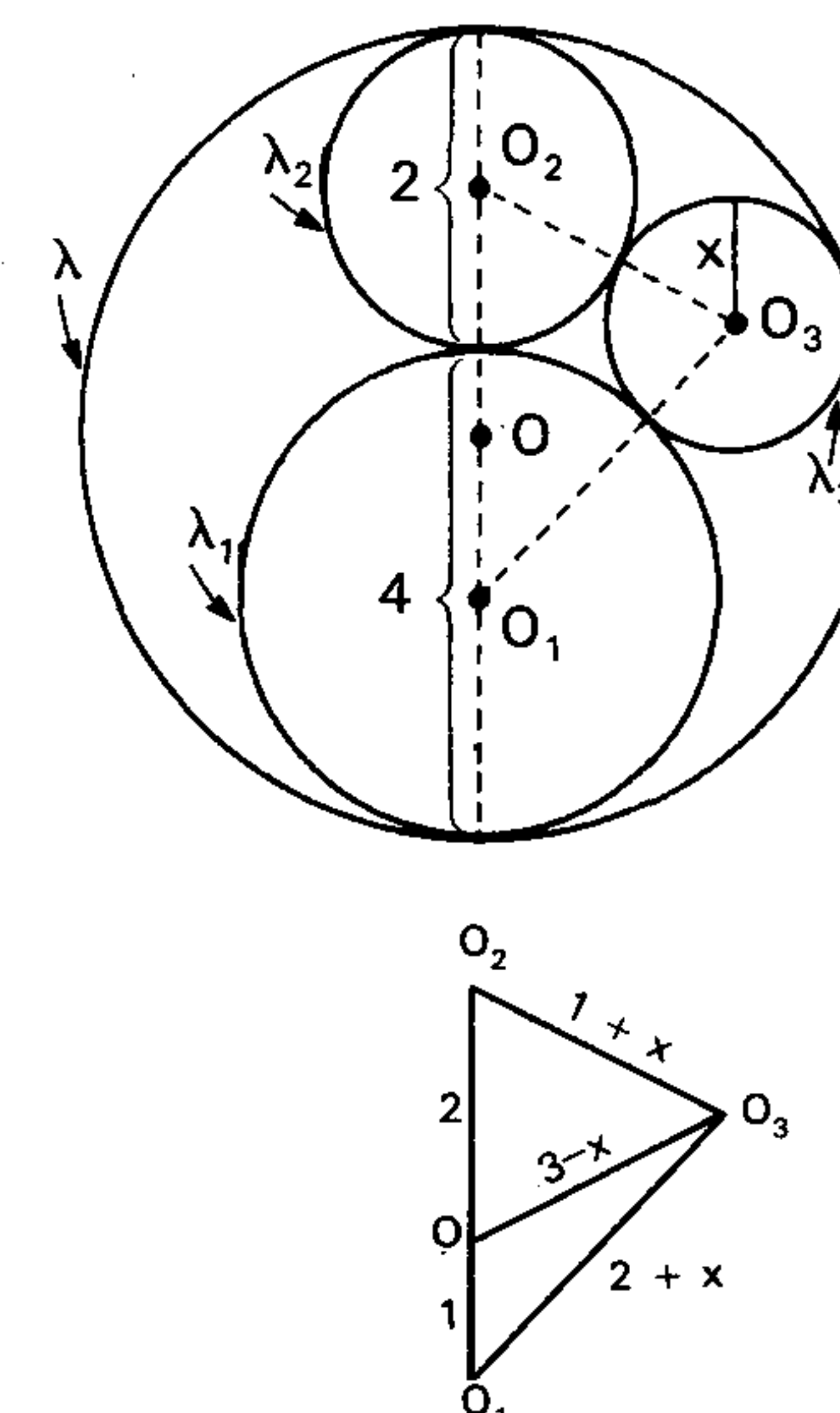
$\overline{O_1O_3} = 2 + x$,

$\overline{O_2O_3} = 1 + x$

e ainda

$\overline{OO_1} = 1$,

$\overline{OO_2} = 2$ e

$\overline{OO_3} = 3 - x$

Aplicando a relação de Stewart, vem:

$(1 + x)^2 \cdot 1 + (2 + x)^2 \cdot 2 - (3 - x)^2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \implies 28x = 24 \implies$

$\implies x = \dfrac{6}{7}$.

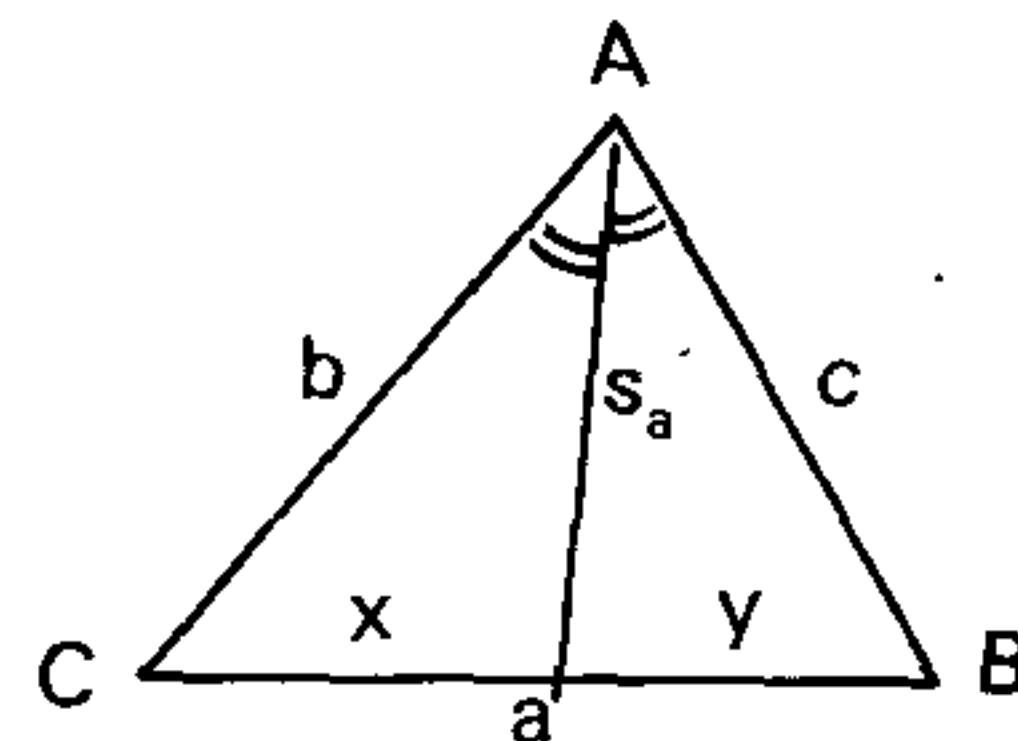
Nota

Podem-se calcular as medianas de um triângulo usando as relações de Stewart.

209. *Cálculo das bissetrizes internas de um triângulo*

No triângulo ABC conhecem-se as medidas dos lados a, b e c.

Determinemos as medidas das três bissetrizes internas s_a, s_b e s_c na figura ao lado.

Dados: a, b, c   incógnitas: x, y, s_a,

$$x + y = a$$

$$s_a \text{ bissetriz} \Longrightarrow \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Longrightarrow \frac{\overbrace{x+y}^{a}}{b+c} = \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ab}{b+c} \\ y = \dfrac{ac}{b+c} \end{cases}$$

Considerando a relação de Stewart no ΔABC

$$b^2y + c^2x - s_a^2 \cdot a = x \cdot y \cdot a$$

e substituindo x e y pelos valores calculados acima, vem:

$$b^2 \cdot \frac{\cancel{a}c}{b+c} + c^2 \cdot \frac{\cancel{a}b}{b+c} - s_a^2 \cdot \cancel{a} = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} \cdot \cancel{a} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b^2c(b+c) + bc^2(b+c) - bca^2 = s_a^2(b+c)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (b+c)^2s_a^2 = bc[b(b+c) + c(b+c) - a^2] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (b+c)^2s_a^2 = bc[(b+c)^2 - a^2] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (b+c)^2s_a^2 = bc\underbrace{(b+c+a)}_{2p}\underbrace{(b+c-a)}_{2(p-a)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}}$$

Analogamente:

$$\boxed{s_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}} \qquad \boxed{s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}}$$

Exemplo

Dado um triângulo de lados $a = 5$, $b = 7$ e $c = 8$, calcular as três bissetrizes internas: s_a, s_b e s_c.

$$2p = 20 \Longrightarrow p = 10;\ p - a = 5;\ p - b = 3 \text{ e } p - c = 2$$

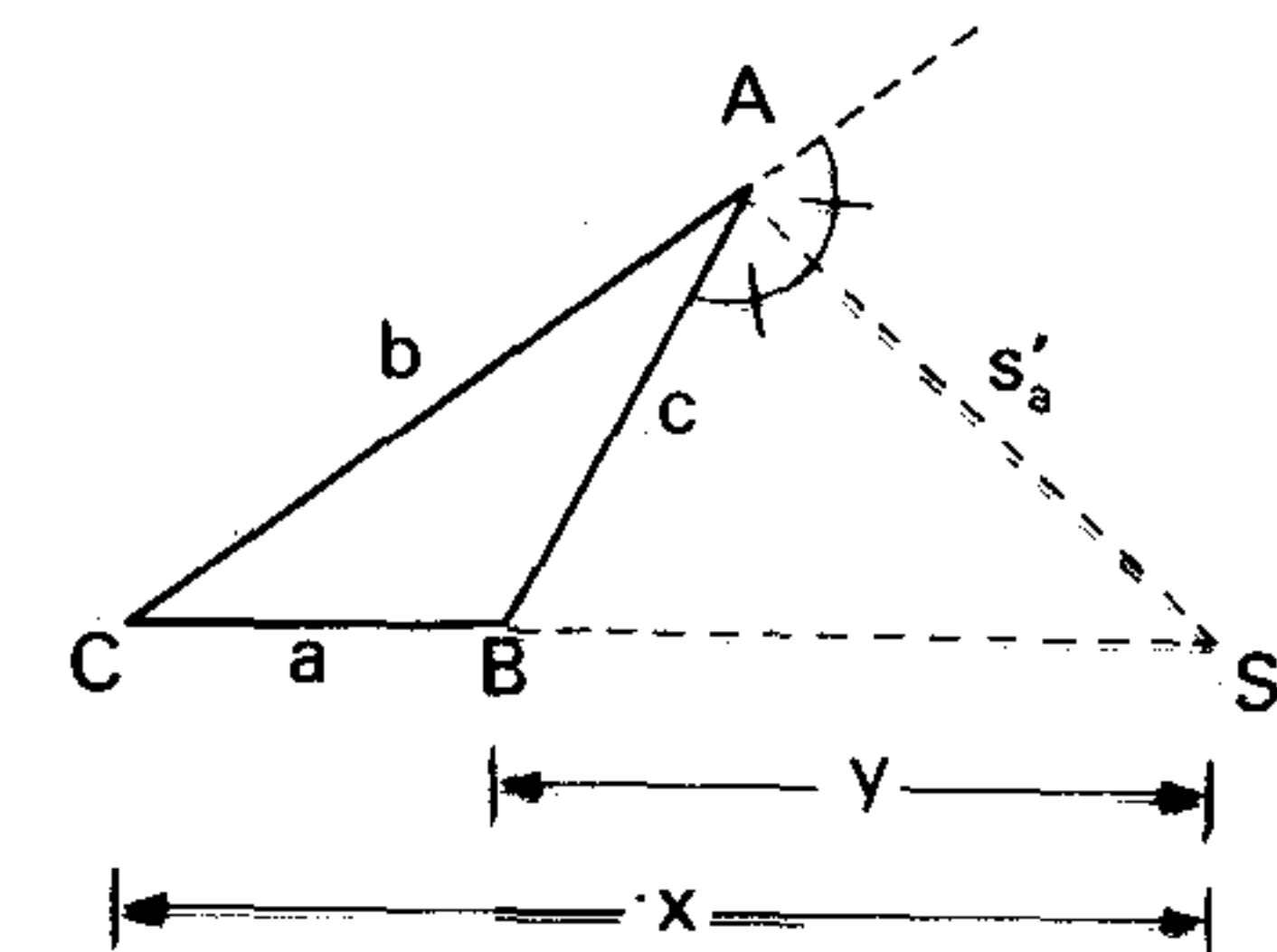
$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \frac{2}{15}\sqrt{7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5} = \frac{8\sqrt{7}}{3}$$

$$s_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)} = \frac{2}{13}\sqrt{5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 3} = \frac{40\sqrt{3}}{13}$$

$$s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)} = \frac{2}{12}\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

210. *Cálculo das bissetrizes externas de um triângulo*

Num triângulo ABC conhecem-se as medidas dos lados a, b e c. Determinar as medidas das três bissetrizes externas s'_a, s'_b e s'_c na figura ao lado.

Dados: a, b, c   incógnitas: x, y, s'_a

$$x - y = a$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Longrightarrow \frac{\overbrace{x-y}^{a}}{b-c} = \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ab}{b-c} \\ y = \dfrac{ac}{b-c} \end{cases}$$

Considerando a relação de Stewart no $\Delta AS'C$

$$b^2y + s_a'^2 \cdot a - c^2x = a \cdot y \cdot x$$

e substituindo x e y pelos valores calculados acima, vem:

$$b^2 \cdot \frac{\cancel{a}c}{b-c} + s_a'^2 \cdot \cancel{a} - c^2 \cdot \frac{\cancel{a}b}{b-c} = \cancel{a} \cdot \frac{ac}{b-c} \cdot \frac{ab}{b-c} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b^2c(b-c) + s_a'^2(b-c)^2 - bc^2(b-c) = bca^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (b-c)^2s_a'^2 = bc[a^2 - b(b-c) + c(b-c)] \Longrightarrow$$

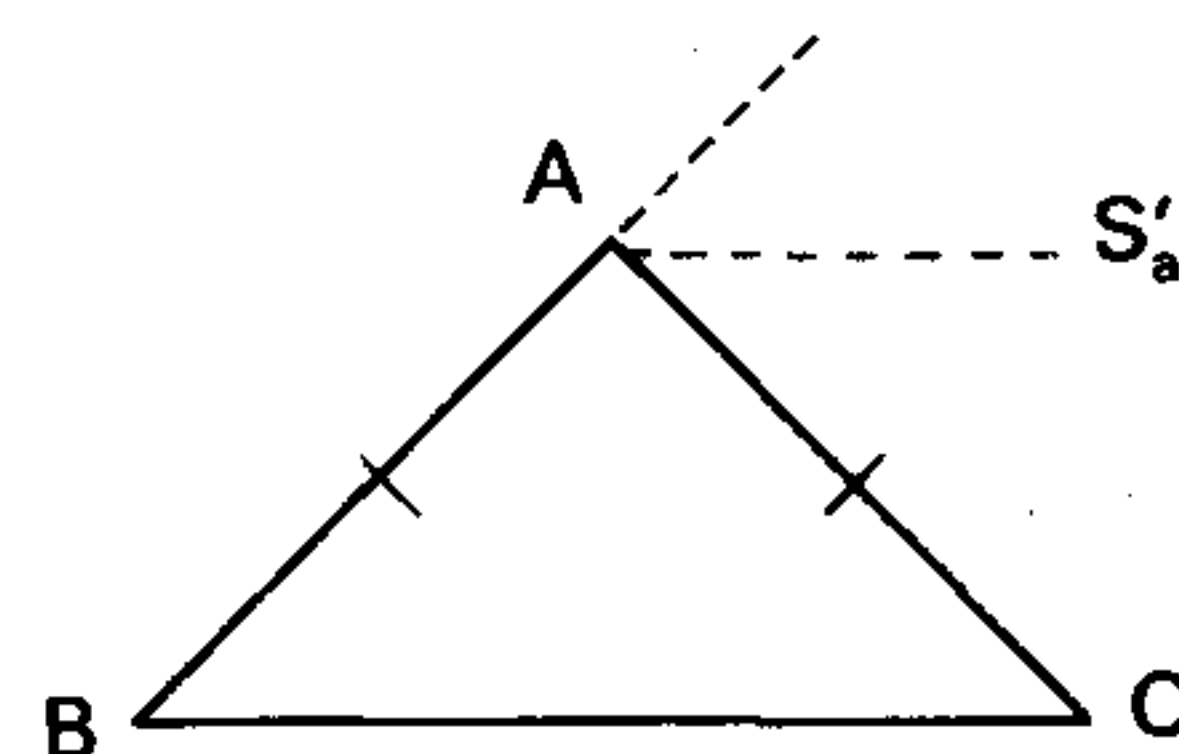
$$\Longrightarrow (b-c)^2s_a'^2 = bc[a^2 - (b-c)^2] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (b-c)^2s_a'^2 = bc\underbrace{(a+b-c)}_{2(p-c)}\underbrace{(a-b+c)}_{2(p-b)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow s'_a = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Observando que,
se $b > c$ toma-se $b - c$
se $b < c$ toma-se $c - b$,
a diferença $b - c$ deve ser tomada em módulo.

Se $b = c$, a expressão de s'_a não tem sentido, o que ocorre pelo fato de a bissetriz do ângulo externo do vértice de um triângulo isósceles ser paralela à base.

A
S'a
B
C

Conclusão:

$$s'_a = \frac{2}{|b - c|}\sqrt{bc(p - b)(p - c)}$$

Analogamente:

$$s'_b = \frac{2}{|a - c|}\sqrt{ac(p - a)(p - c)} \qquad s'_c = \frac{2}{|a - b|}\sqrt{ab(p - a)(p - b)}$$

Exemplo

Dado um triângulo de lados $a = 5$, $b = 7$ e $c = 8$, calcular as três bissetrizes externas: s'_a, s'_b e s'_c.

$$2p = 20 \implies p = 10; \quad p - a = 5; \quad p - b = 3 \quad e \quad p - c = 2$$

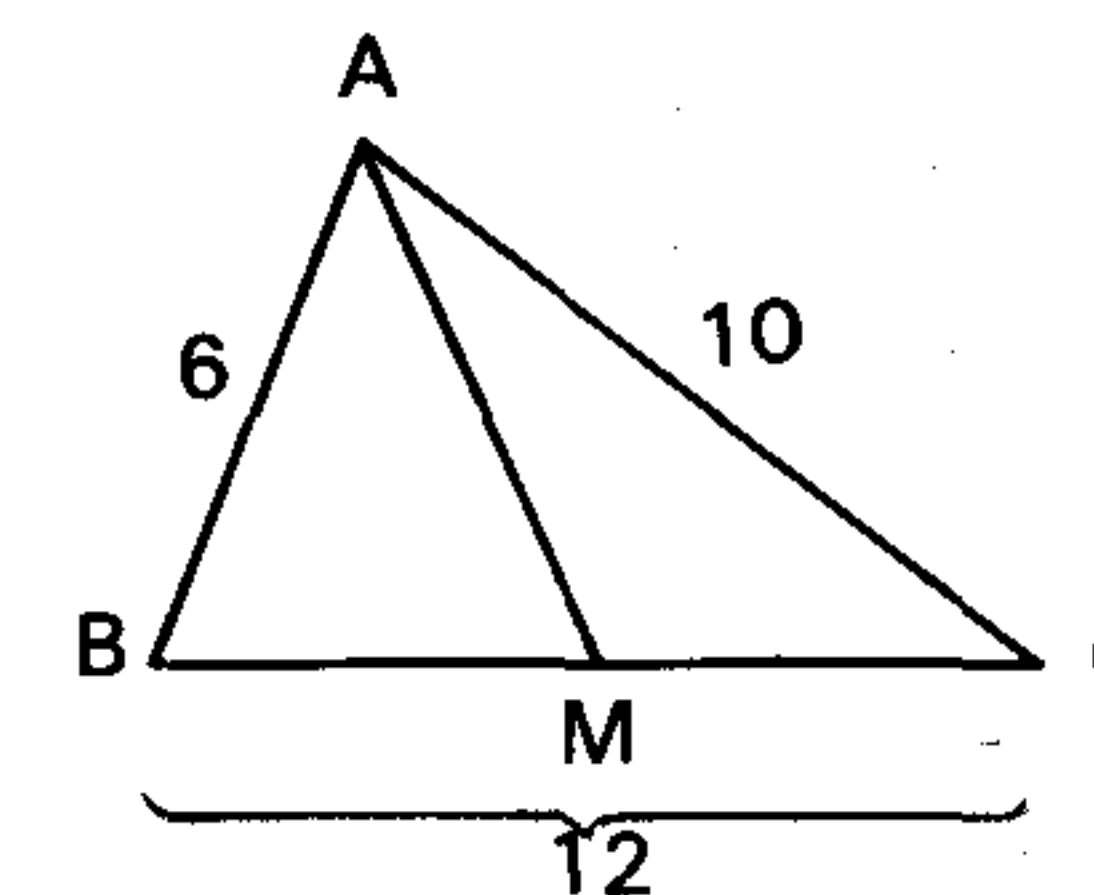
$$s'_a = \frac{2}{|b - c|}\sqrt{bc(p - b)(p - c)} = \frac{2}{1}\sqrt{7 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2} = 8\sqrt{21}$$

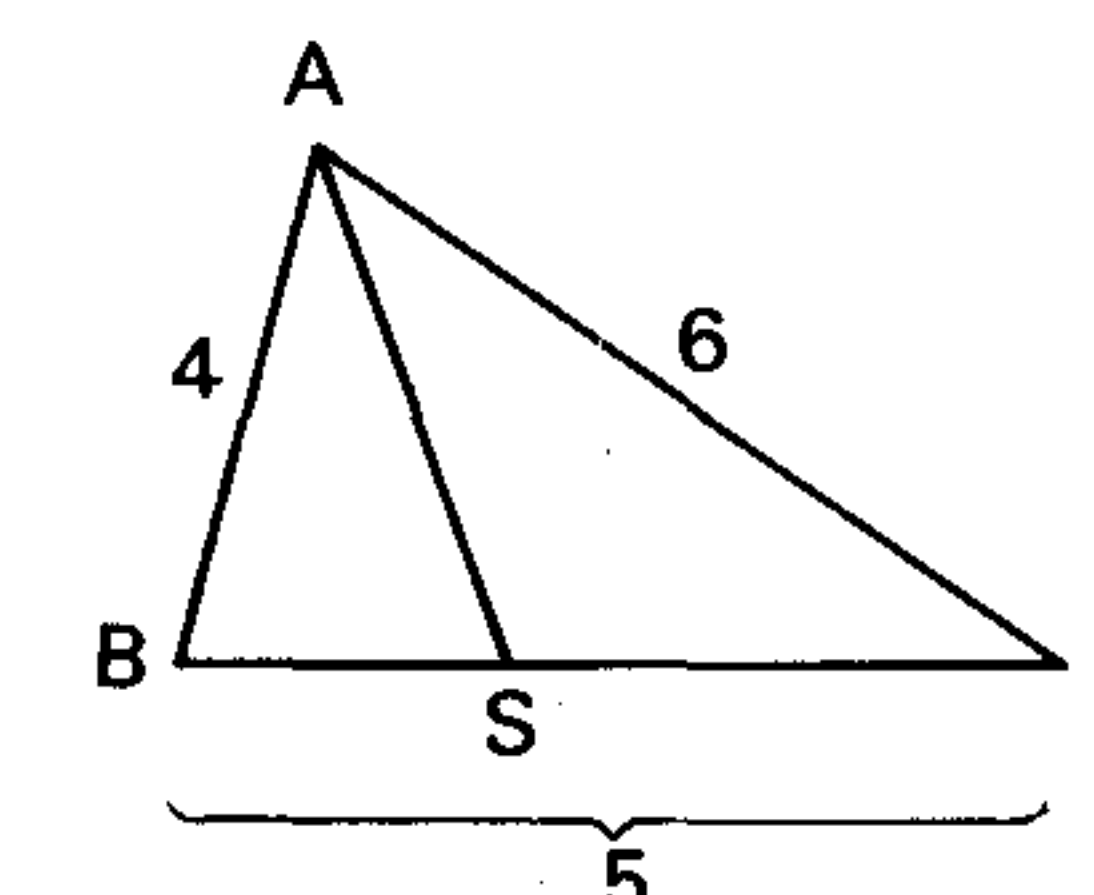
$$s'_b = \frac{2}{|a - c|}\sqrt{ac(p - a)(p - c)} = \frac{2}{3}\sqrt{5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{40}{3}$$

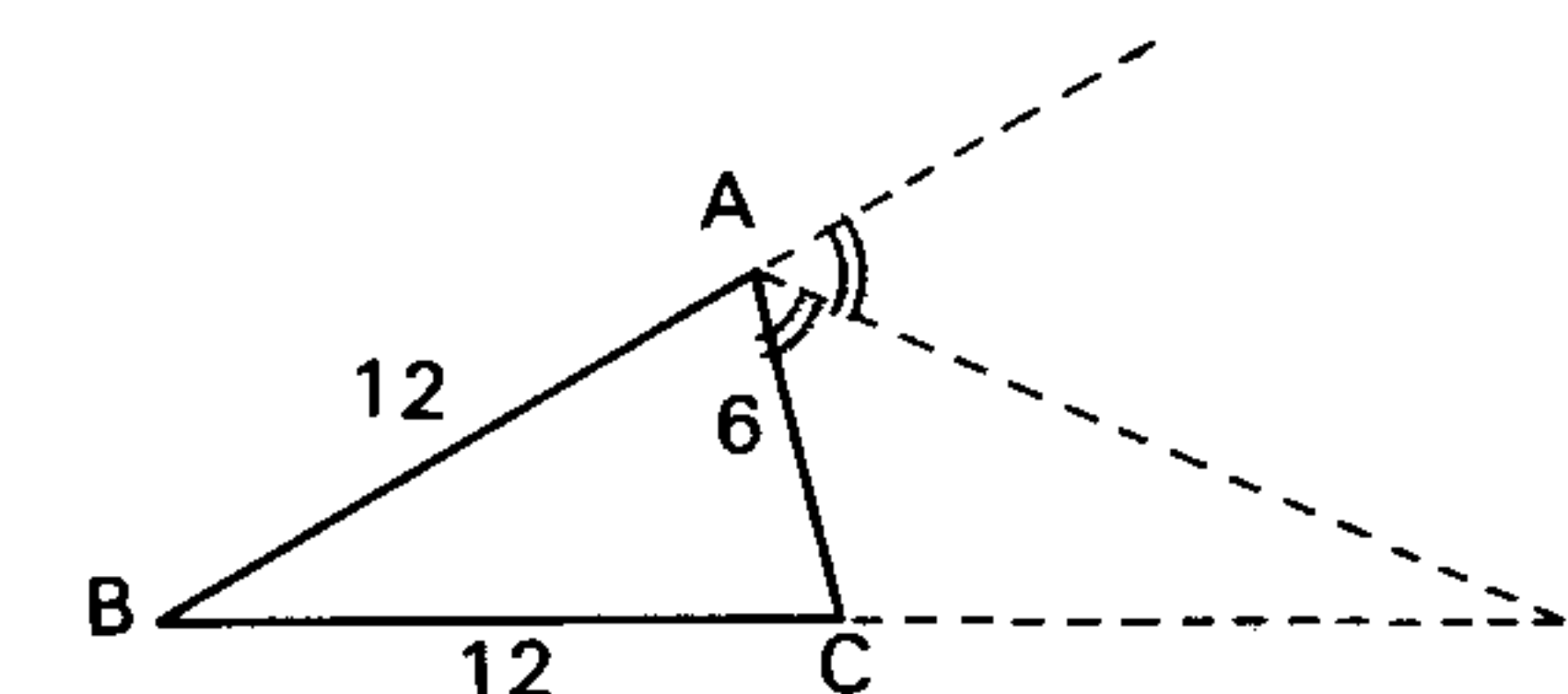
$$s'_c = \frac{2}{|a - b|}\sqrt{ab(p - a)(p - b)} = \frac{2}{2}\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = 5\sqrt{21}$$

EXERCÍCIOS

671. Determine a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC, aplicando a fórmula da mediana e depois calcule usando a relação de Stewart.

A
6
10
B
M
C
12

672. Determine a medida da bissetriz $\overline{AS}$, aplicando a fórmula da bissetriz interna e depois calcule usando o teorema da bissetriz e a relação de Stewart.

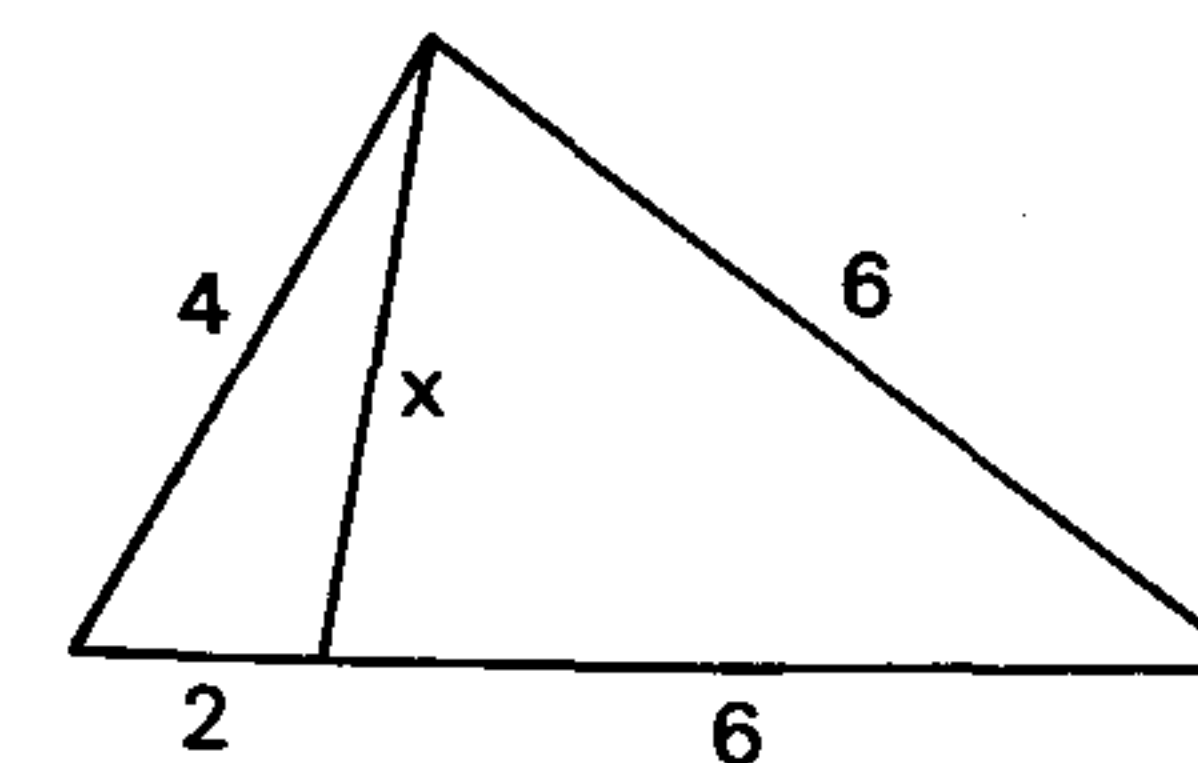
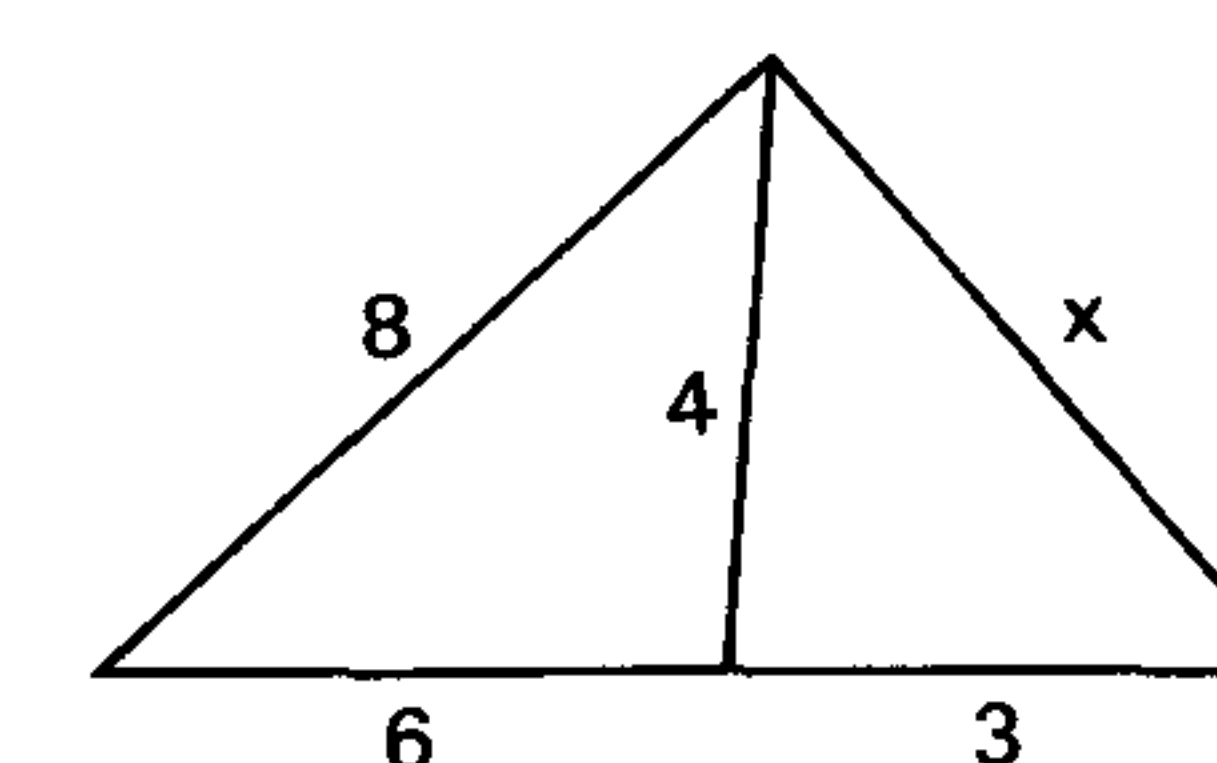
A
4
6
B
S
C
5

673. Determine a medida da bissetriz externa $\overline{AP}$ do ΔABC, aplicando a fórmula da bissetriz e depois calcule usando o teorema da bissetriz e a relação de Stewart.

A
12
6
B
12
C
P

674. Determine o valor de x nos casos:

a)

4
x
6
2
6

b)

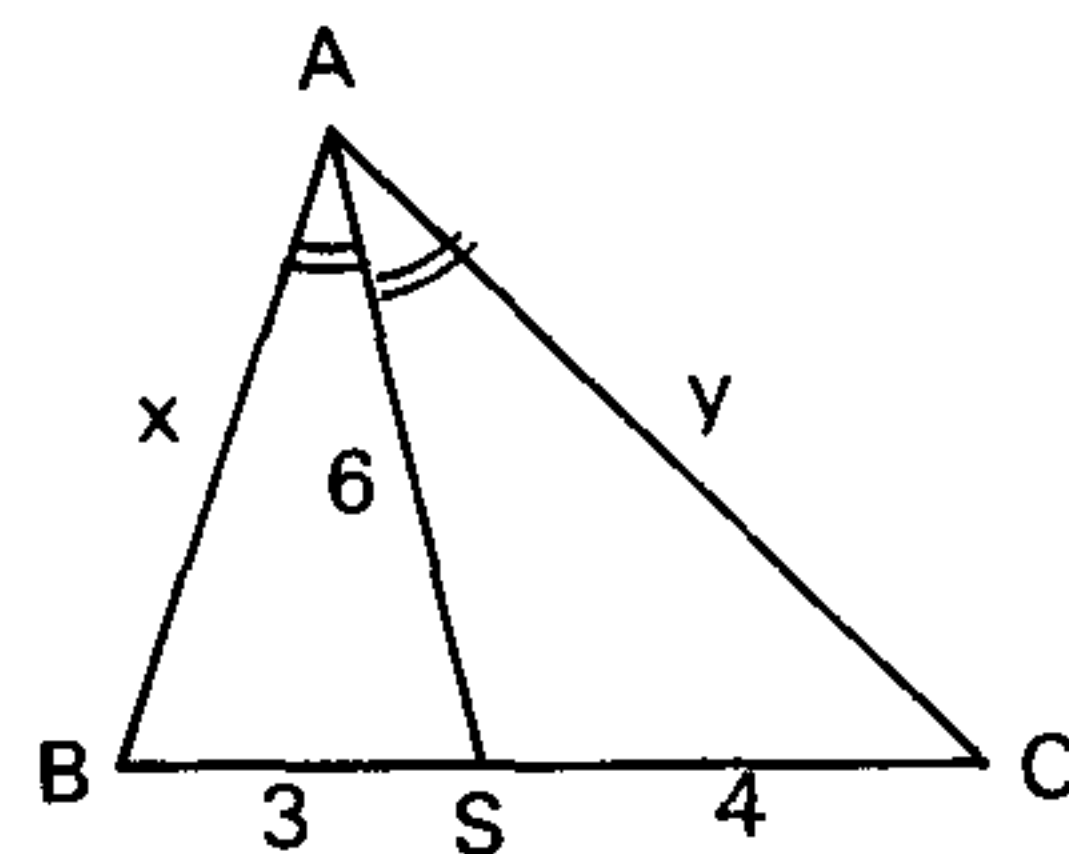
8
4
x
6
3

675. Determine a razão entre a soma dos quadrados das medianas de um triângulo e a soma dos quadrados dos lados desse triângulo.

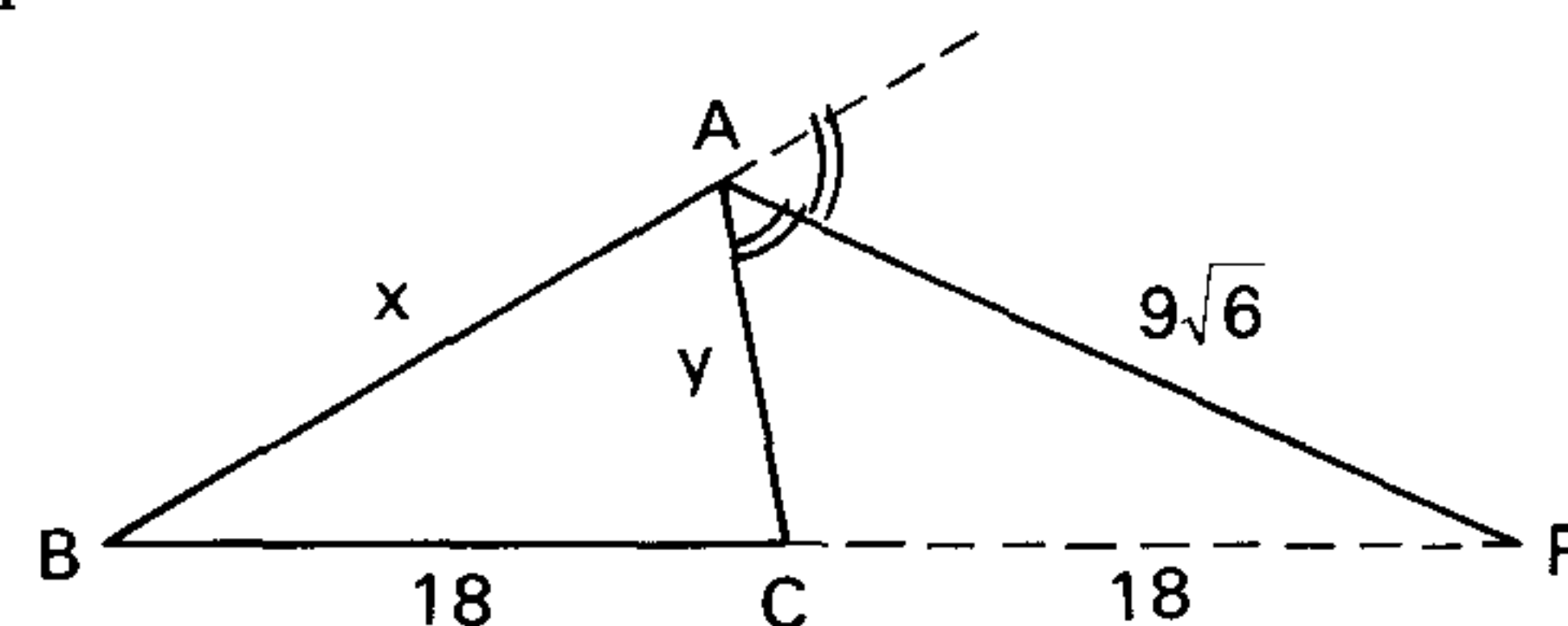
676. Calcule as alturas de um triângulo cujos lados medem *6 m, 10 m* e *12 m*.

677. Os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo ABC medem, respectivamente, *5 cm*, *6 cm* e *7 cm*. Determine a altura e a bissetriz interna relativa ao lado $\overline{AC}$ e a bissetriz externa relativa ao lado $\overline{AB}$.

678. Dados os lados a, b e c de um triângulo ABC, calcule a distância do vértice A ao ponto M que divide a base $\overline{BC}$ em segmentos iguais a m e n.

679. Se $\overline{AS}$ é bissetriz interna do triângulo ABC, determine x e y.

A
x
y
6
B
3
S
4
C

680. Se $\overline{AP}$ é bissetriz externa do triângulo ABC, determine x e y.

A
x
y
$9\sqrt{6}$
B
18
C
18
P

681. Deduza as fórmulas que dão as três medianas m_a, m_b, m_c de um triângulo, em função dos lados a, b e c.

682. Deduza as fórmulas que dão as três alturas h_a, h_b, h_c de um triângulo em função dos lados a, b e c.

683. Deduza as expressões que fornecem as bissetrizes internas s_a, s_b e s_c de um triângulo em função dos lados a, b e c.

684. Dados os três lados a, b e c de um triângulo, obtenha s'_a, s'_b, s'_c, deduzindo as fórmulas que fornecem as bissetrizes externas.

CAPÍTULO XVI

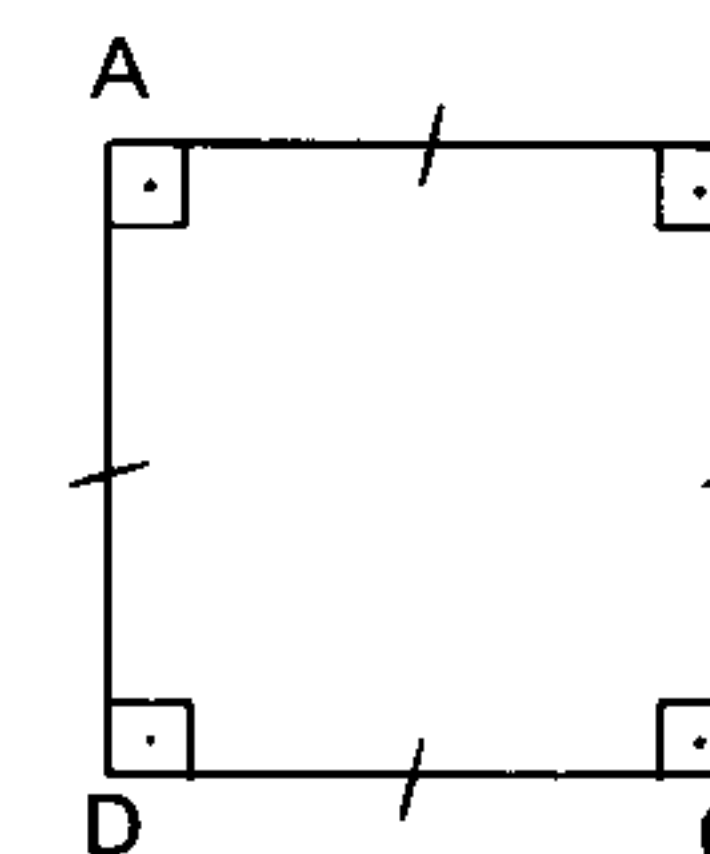
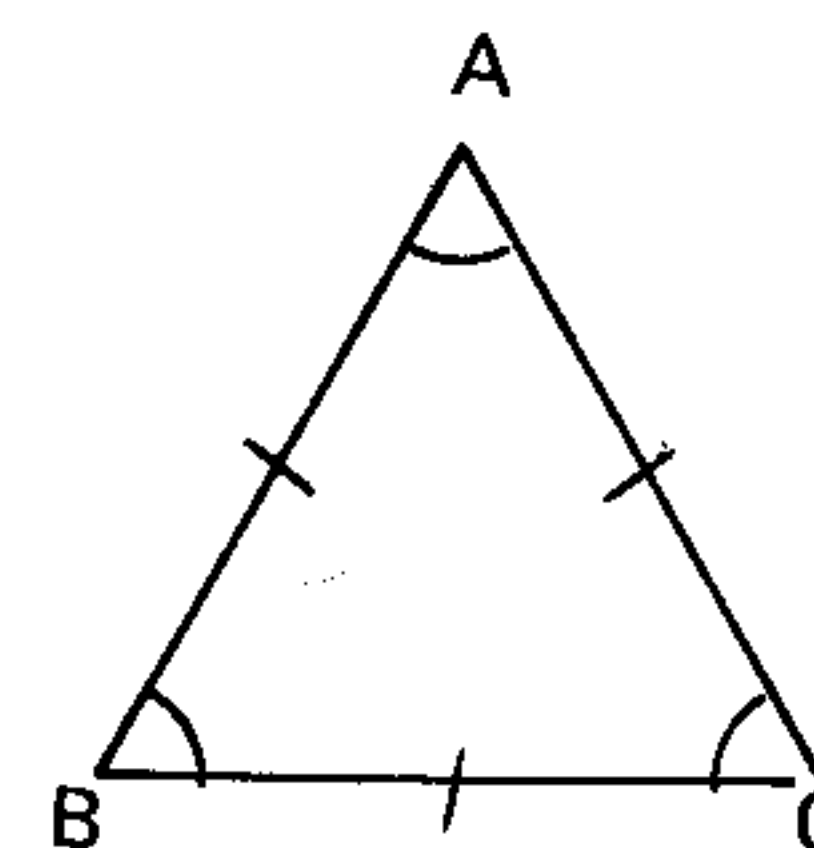
Polígonos Regulares

Conceitos e propriedades

211. *Definição*

Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.

A
B
C

A
B
D
C

Assim, o triângulo equilátero é o triângulo regular e o quadrado é o quadrilátero regular.

Um polígono regular é equilátero e equiângulo.

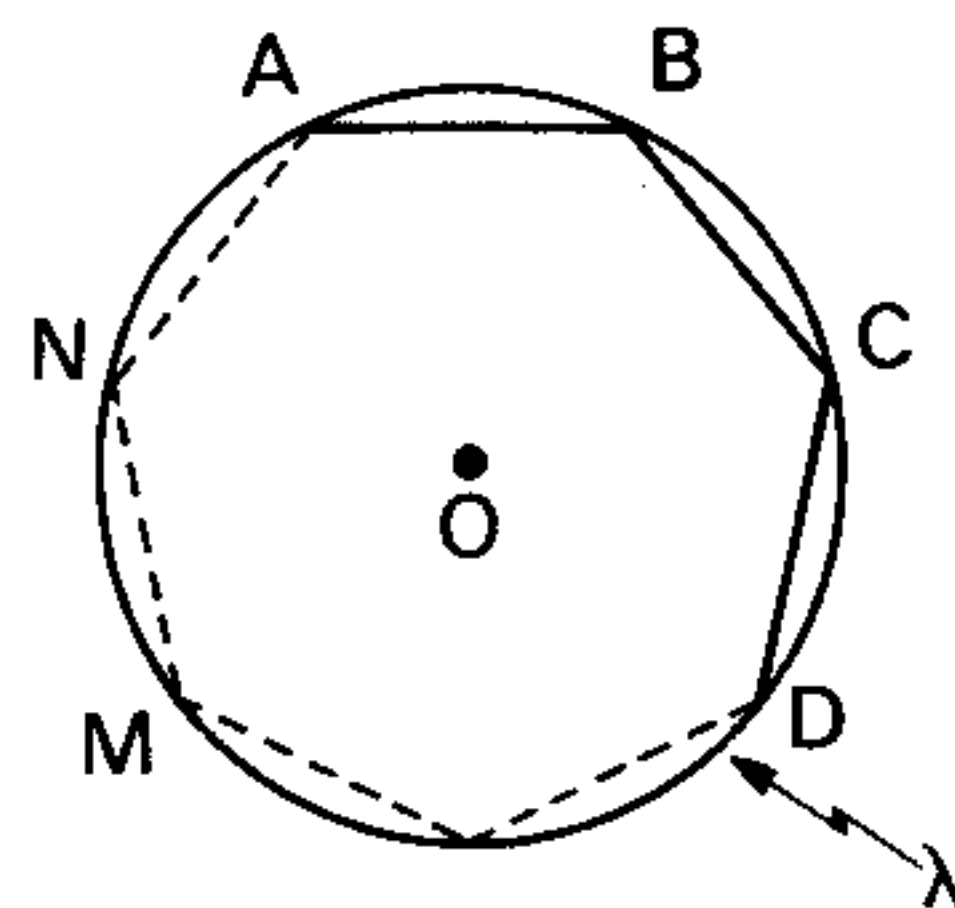
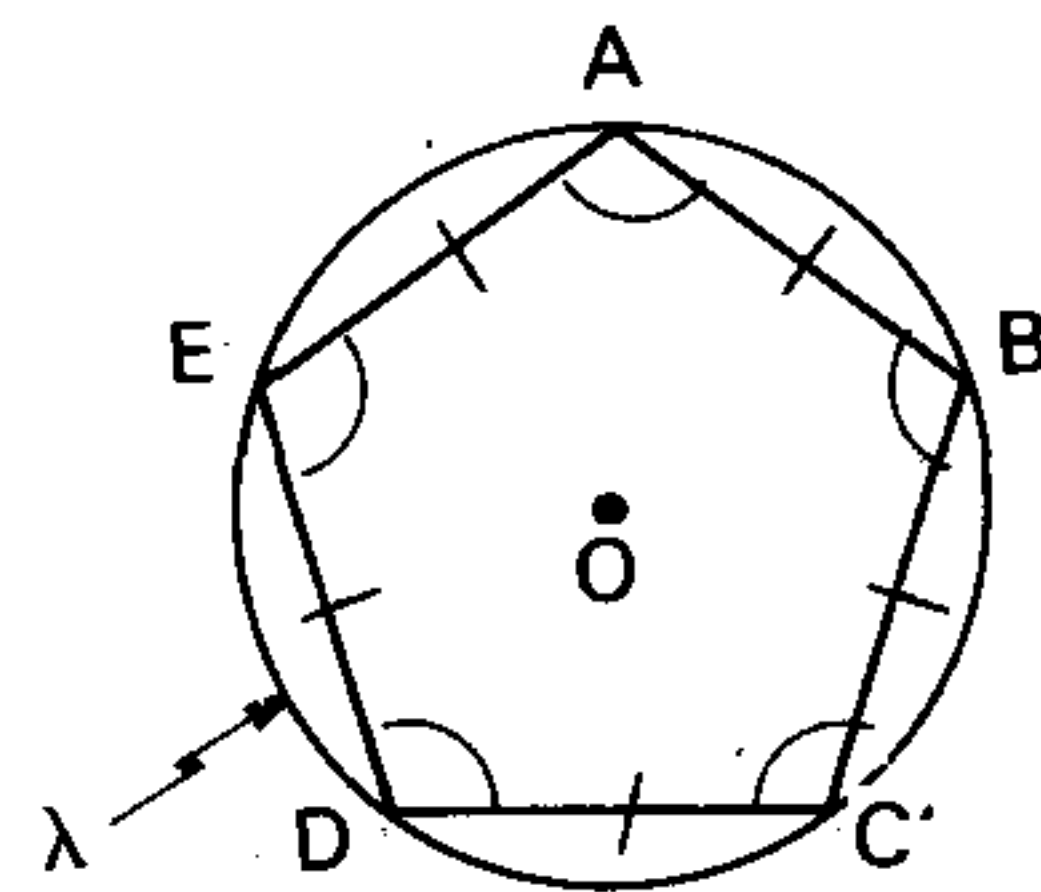
212. Propriedades

Dividindo-se uma circunferência em n ($n \geqslant 3$) arcos *congruentes*, temos:

a) todas as cordas determinadas por dois pontos de divisão consecutivos, reunidas, formam um polígono *regular* de n lados *inscrito* na circunferência;

b) as tangentes traçadas pelos pontos de divisão determinam um polígono *regular* de n lados *circunscrito* à circunferência.

Demonstração

1º) *Da parte a)*

Com n = 5

Sejam $A, B, C, D, \ldots, M$ e N os n pontos de divisão da circunferência λ. O polígono $ABCD \ldots MN$ é de n lados e é inscrito, pois todos os vértices pertencem à circunferência λ (tome o pentágono $ABCDE$ para fixar as idéias).

Sendo

$$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{DE} \equiv \ldots \equiv \overset{\frown}{MN} \equiv \overset{\frown}{NA}$$

então

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \ldots \equiv \overline{MN} \equiv \overline{NA} \qquad (1)$$

pois, numa mesma circunferência, arcos congruentes subentendem cordas congruentes.

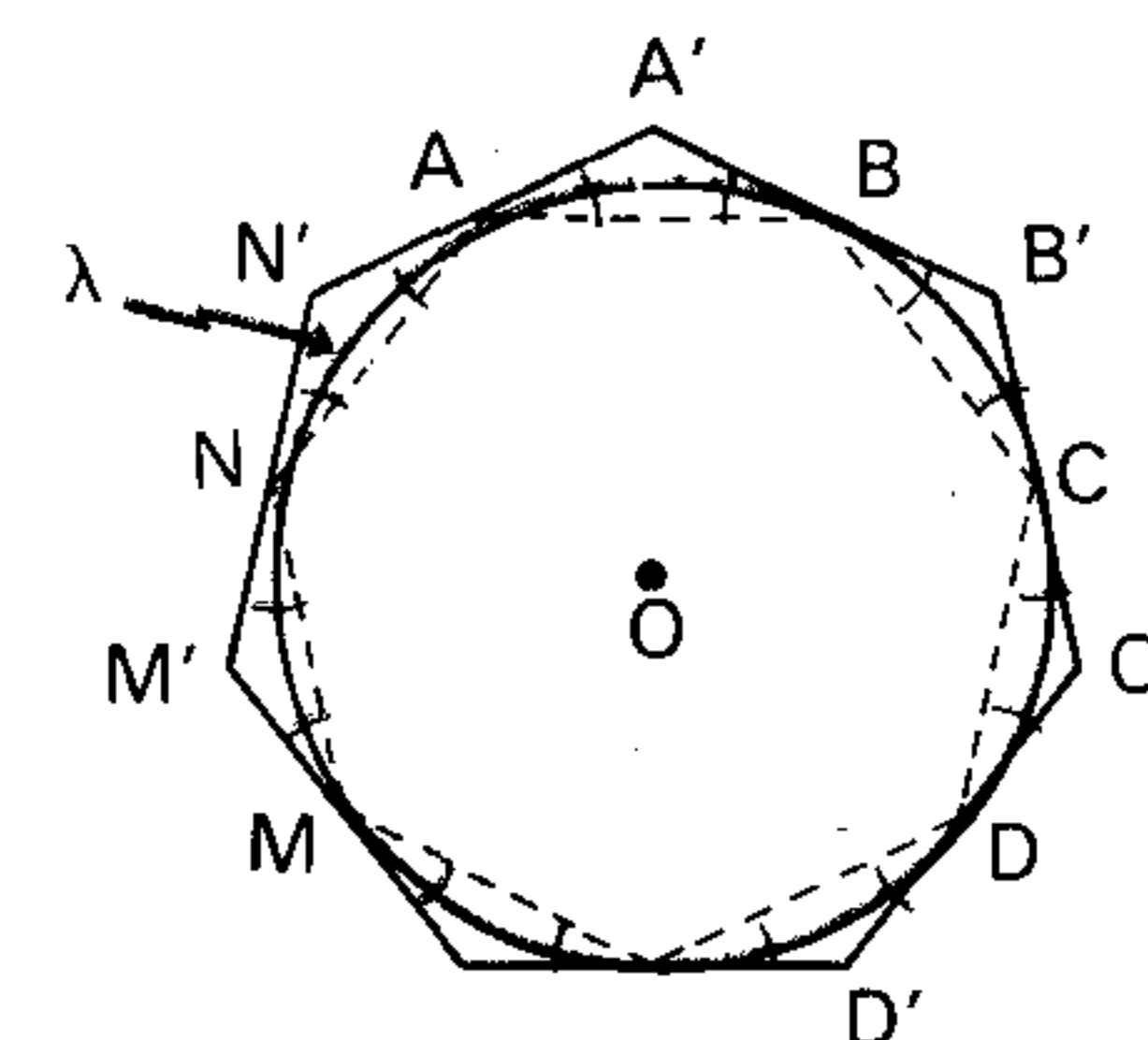
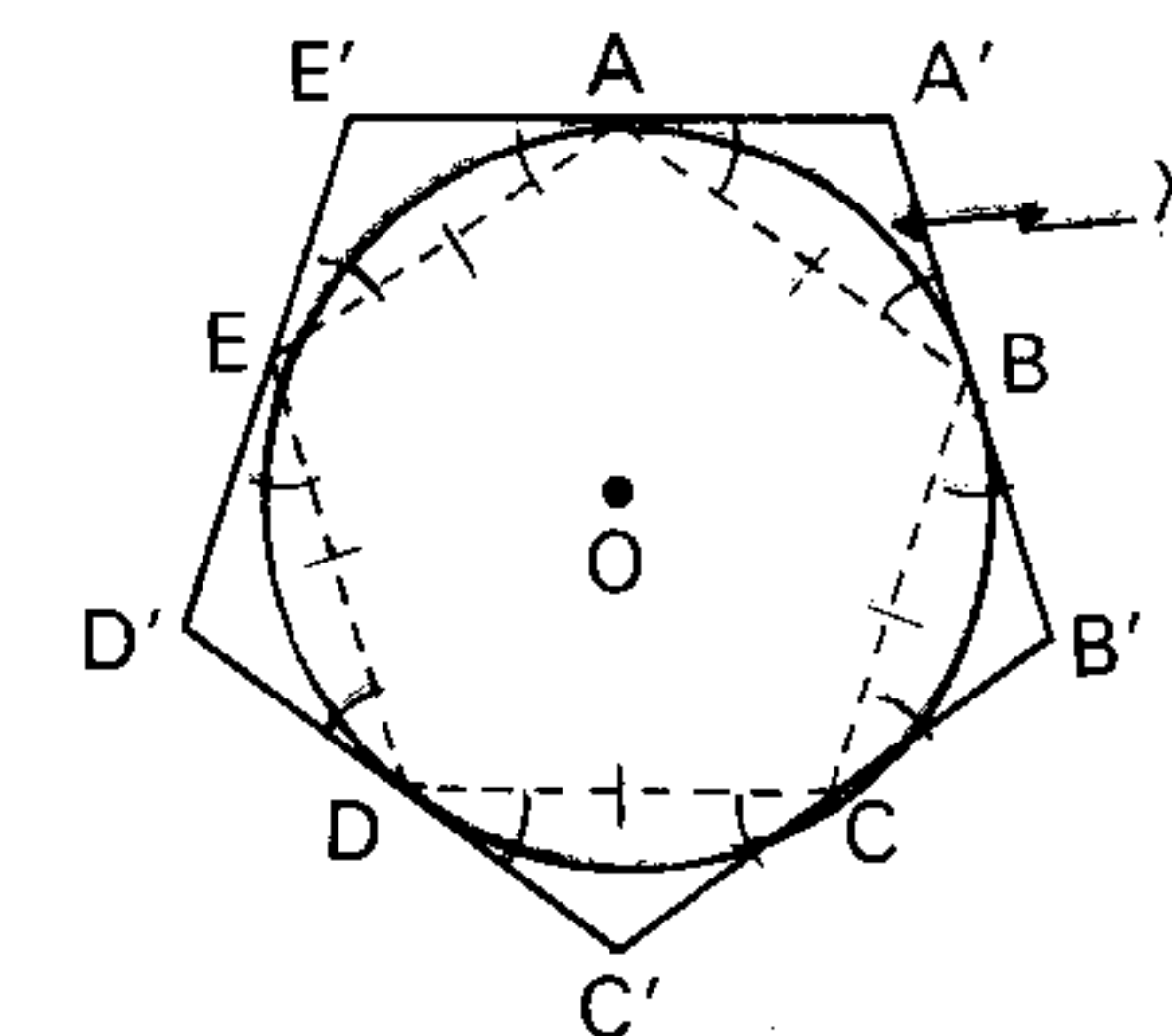
Os ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \ldots, \hat{M}$ e $\hat{N}$ são congruentes (2)
pois cada um deles é ângulo inscrito em λ e tem por medida metade da soma de $(n - 2)$ dos arcos congruentes em que λ ficou dividida.

De (1) e (2) concluímos que $ABCD \ldots MN$ é um polígono *regular* de n lados *inscrito* na circunferência λ.

No caso do pentágono, por exemplo, temos:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE}}{2}, \quad \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EA}}{2}, \quad \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EA} + \overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{EA} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{2} \quad e \quad \hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

2º) *Da parte b)*

com n = 5

Pelos pontos de divisão $A, B, C, D, \ldots, M$ e N conduzimos tangentes a λ e obtemos o polígono $A'B'C'D' \ldots M'N'$ *de* n lados e circunscrito a λ, pois todos os seus lados são tangentes à circunferência (tome o pentágono $A'B'C'D'E'$ para fixar as idéias).

Os triângulos $A'AB$, $B'BC$, $C'CD$, $D'DE$, ..., $M'MN$ e $N'NA$ são

— triângulos *isósceles*, pois cada um dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \ldots, \hat{M}$ e $\hat{N}$ *destes triângulos* tem medida igual à metade da medida de uma das partes congruentes $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DE}, \ldots, \overset{\frown}{MN}, \overset{\frown}{NA}$ em que foi dividida a circunferência (são ângulos de segmento ou semi-inscritos) e

— *congruentes* pelo caso *ALA*, visto que sendo $ABCD \ldots MN$ um polígono regular (parte *a*), e os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \ldots, \overline{MN}, \overline{NA}$ *destes triângulos* são congruentes.

Da congruência dos triângulos decorre que

$$\hat{A}' \equiv \hat{B}' \equiv \hat{C}' \equiv \hat{D}' \equiv \ldots \equiv \hat{M}' \equiv \hat{N}' \qquad (1)$$

e, por soma conveniente, temos:

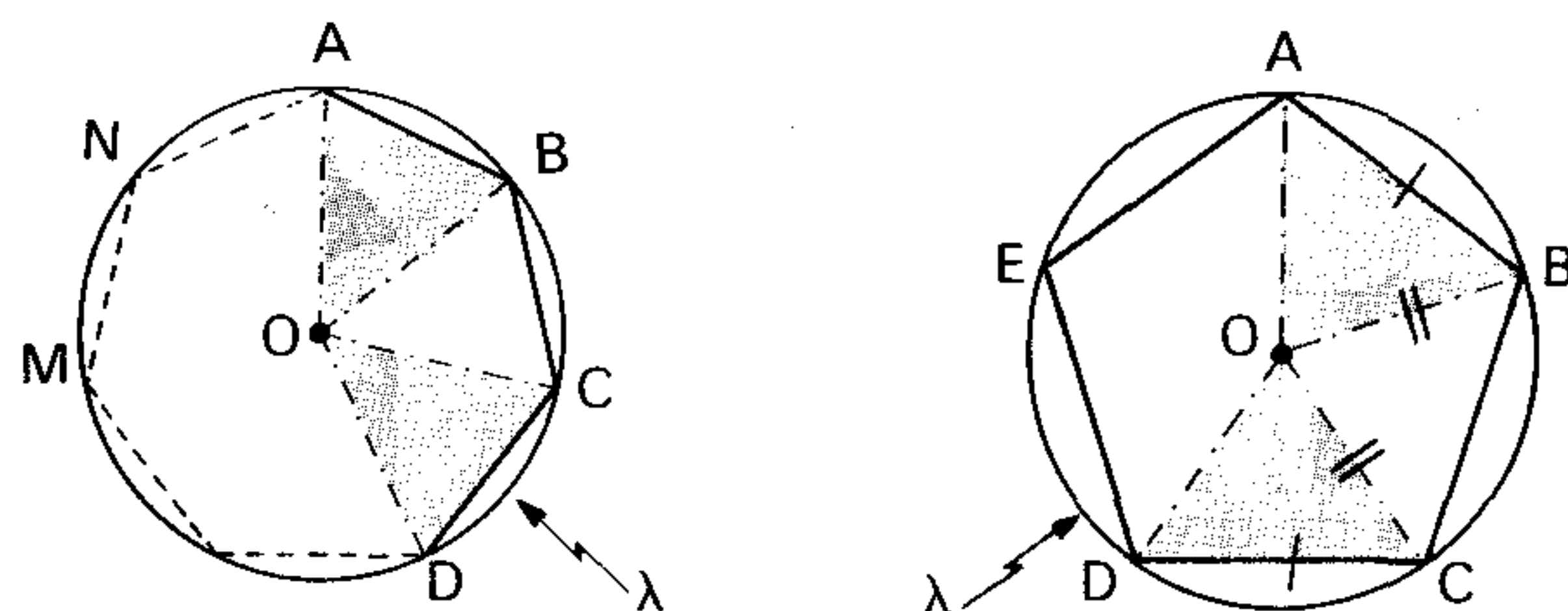
$$\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{C'D'} \equiv \ldots \equiv \overline{M'N'} \equiv \overline{N'A'} \qquad (2)$$

De (1) e (2) concluímos que $ABCD \ldots MN$ é um polígono *regular* de n lados *circunscrito* à circunferência λ.

213. *Polígono regular é inscritível*

> Todo polígono regular é inscritível numa circunferência.
>
> ou
>
> Dado um polígono regular, existe uma única circunferência que passa pelos seus vértices.

Demonstração

Seja $ABCD \dots MN$ o polígono regular (tome o pentágono $ABCDE$ para fixar as idéias).

Pelos pontos A, B e C tracemos a circunferência λ e seja O o seu centro. Provemos que λ passa pelos demais vértices $D, E, \dots, M$ e N do polígono.

Comecemos provando que $D \in \lambda$.

Consideremos os triângulos OBA e OCD. Estes triângulos são congruentes pelo caso LAL, pois

$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (lados do polígono regular), $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$ (raios da circunferência) e considerando o triângulo isósceles BOC (ângulos da base congruentes) e, ainda, que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do polígono são congruentes, por diferença decorre que $O\hat{B}A \equiv O\hat{C}D$.

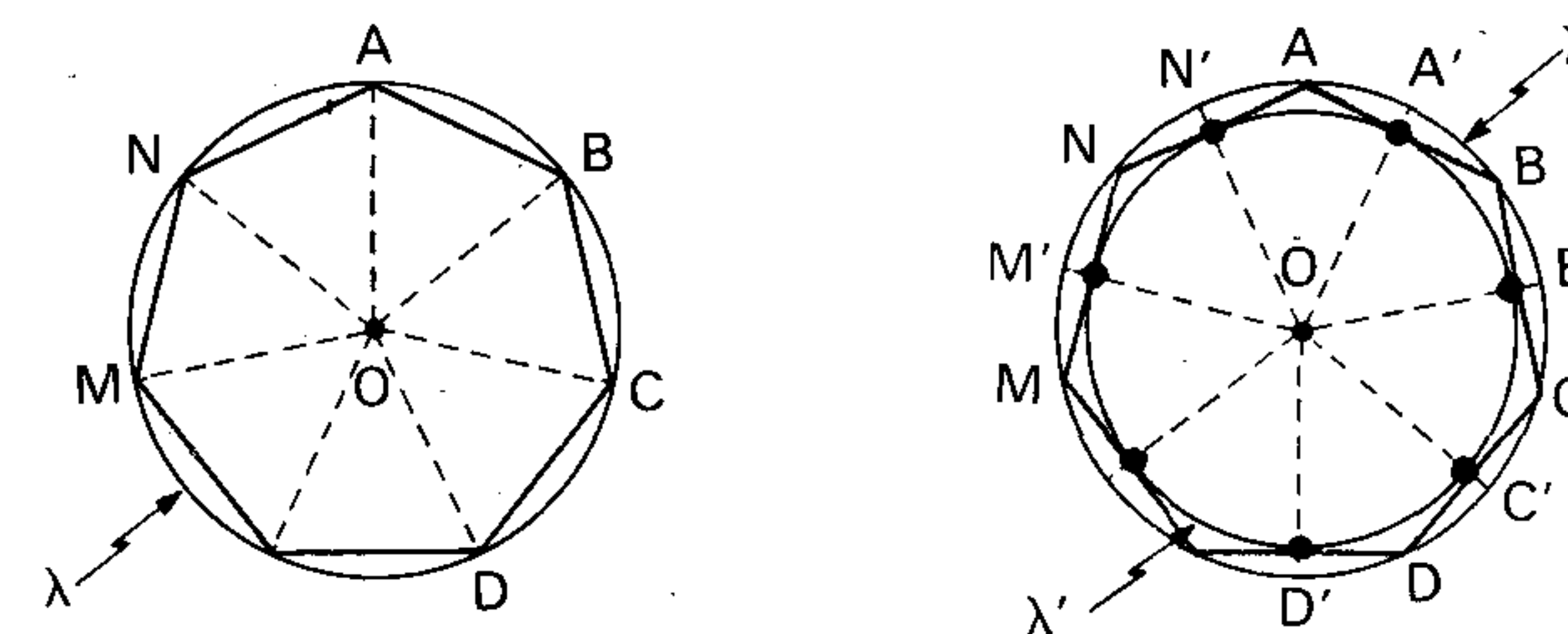
$$\Delta OBA \equiv \Delta OCD \implies \overline{OA} \equiv \overline{OD} \implies D \in \lambda.$$

De modo análogo temos que $E \in \lambda$ (basta considerar ΔOCB e ΔODE), $\dots M \in \lambda$ e $N \in \lambda$, e o polígono $ABCD \dots MN$ é inscrito na circunferência λ.

Da unicidade da circunferência que passa por A, B e C sai a unicidade de λ por $A, B, C, D, \dots, M, N$.

214. *Polígono regular é circunscritível*

> Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.
>
> ou
>
> Dado um polígono regular, existe uma única circunferência inscrita no polígono.

Demonstração

Seja $ABCD \dots MN$ o polígono regular. Em vista do teorema anterior, ele é inscrito numa circunferência λ. Seja O o centro dessa circunferência.

Os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \dots, \overline{MN}, \overline{NA}$ são cordas congruentes de λ, por isso distam igualmente do centro O.

Sendo $A', B', C', D', \dots, M', N'$ os respectivos pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \dots, \overline{MN}, \overline{NA}$, temos

$$\overline{OA'} \equiv \overline{OB'} \equiv \overline{OC'} \equiv \overline{OD'} \equiv \dots \equiv \overline{OM'} \equiv \overline{ON'}$$

(distância do centro a cordas congruentes)

donde se conclui que O é o centro de uma circunferência λ' que passa pelos pontos $A', B', C', D', \dots, M'$ e N'.

E ainda, sendo

$\overline{OA'} \perp \overline{AB}, \overline{OB'} \perp \overline{BC}, \overline{OC'} \perp \overline{CD}, \overline{OD'} \perp \overline{DE}, \dots, \overline{OM'} \perp \overline{MN}$ e $\overline{ON'} \perp \overline{NA}$, temos que $ABCD \dots MN$ tem lados tangentes a λ'.

Conclusão: o polígono regular $ABCD \dots MN$ é circunscrito à circunferência λ'.

Unicidade de λ': se existisse outra circunferência inscrita no polígono $ABCD \dots MN$, ela passaria pelos pontos $A', B', C', \dots$ e seria, então, coincidente com λ'.

215. Nota

As duas últimas propriedades (itens 213, 214) são recíprocas da primeira (item 212).

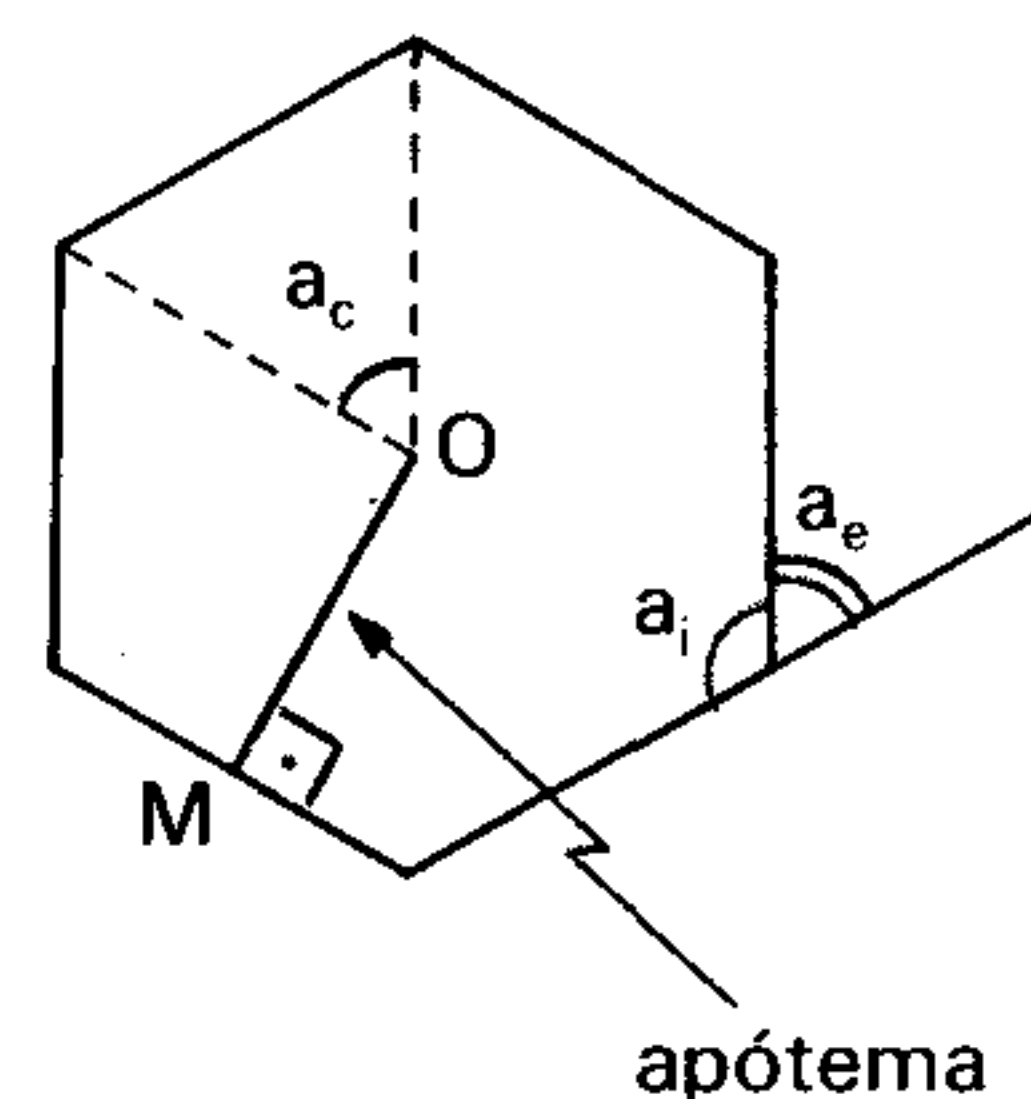
As circunferências inscrita e circunscrita a um polígono regular são concêntricas.

216. Elementos notáveis

Centro de um polígono regular é o centro comum das circunferências circunscrita e inscrita.

Apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado.

O apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.

a_c O a_e a_i M apótema

217. Expressão do ângulo cêntrico

Todos os ângulos cêntricos de um polígono regular (vértices no centro e lados passando por vértices consecutivos do polígono) são congruentes; então a medida de cada um deles é dada por:

$$a_c = \frac{360^\circ}{n} \quad \text{ou} \quad a_c = \frac{4 \text{ retos}}{n}$$

218. Diagonais pelo centro

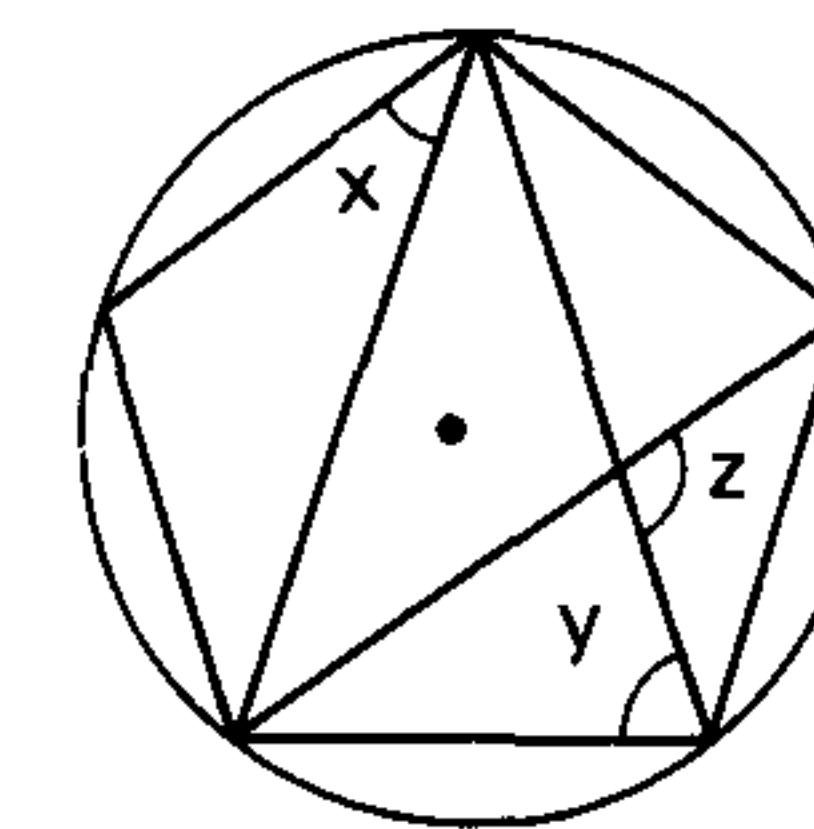
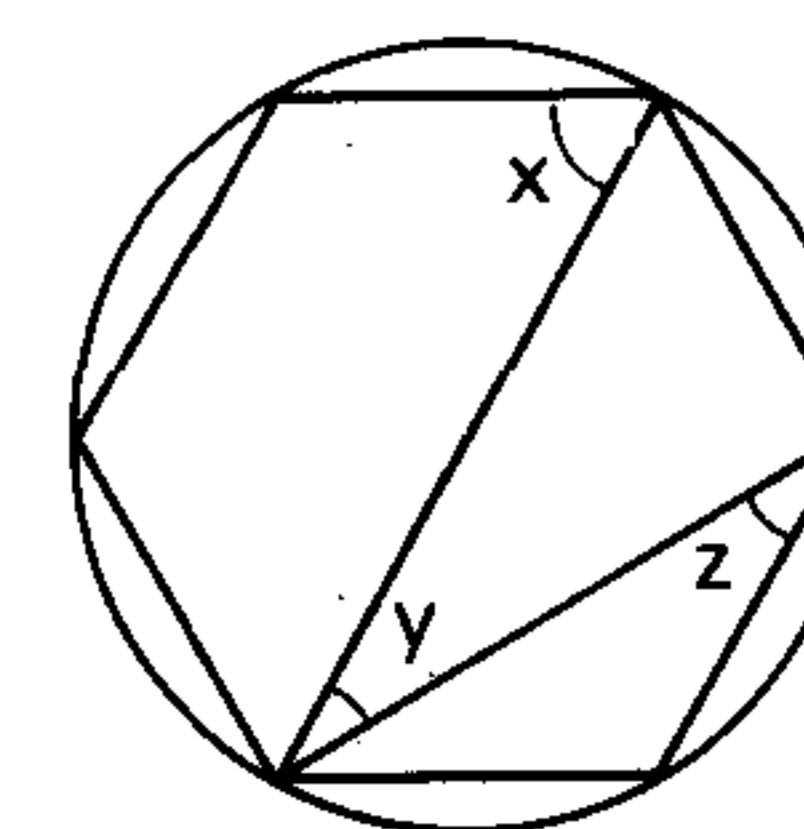
Se um polígono regular possui um número par de lados, ele possui diagonais passando pelo centro: são as que unem vértices opostos. Se ele possui um número ímpar de lados, não há diagonais passando pelo centro.

EXERCÍCIOS

685. Determine as medidas dos ângulos x, y e z nos casos:

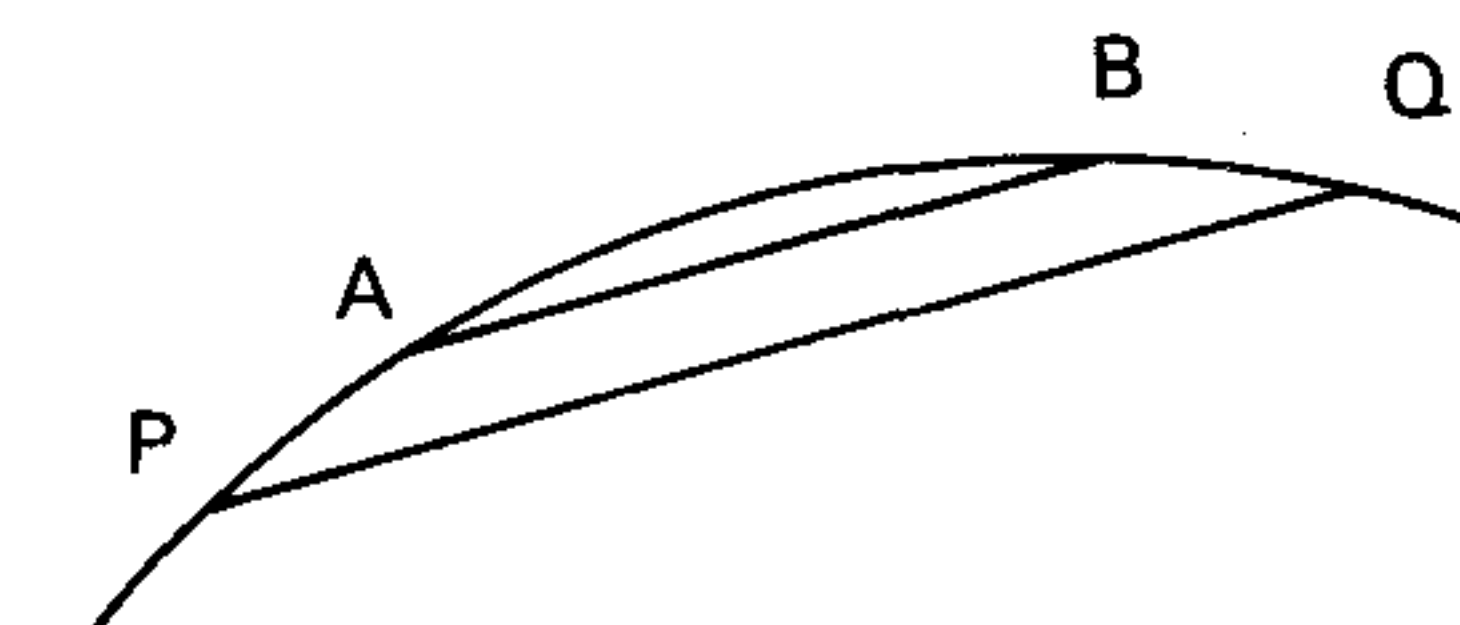
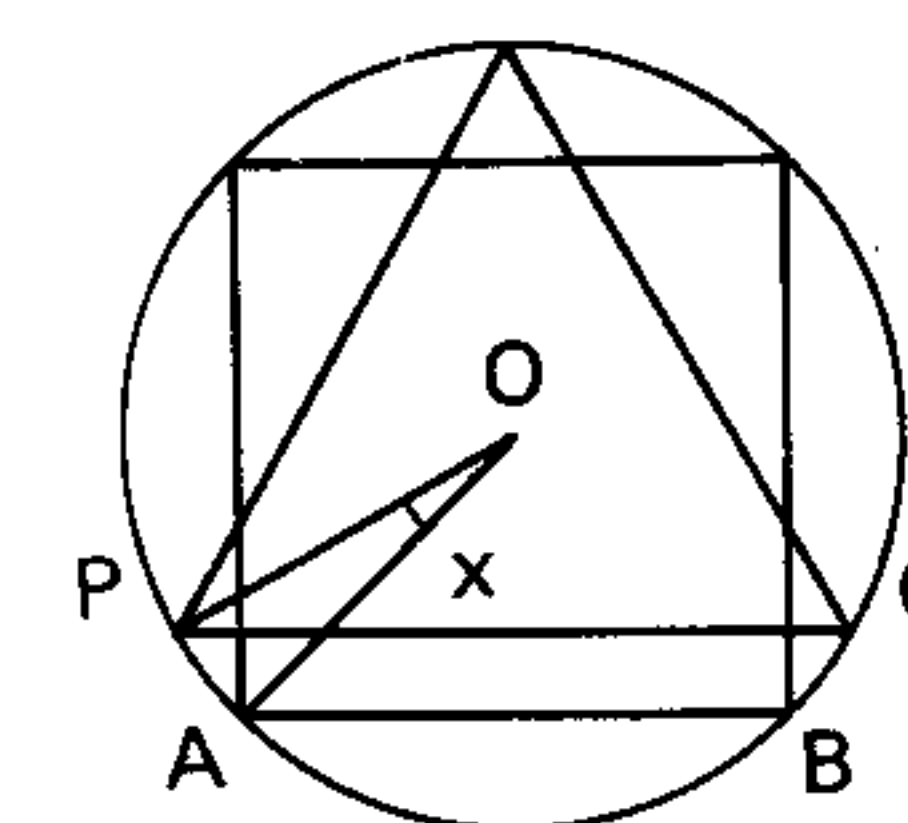
a) hexágono regular

b) pentágono regular

x y z x z y

686. Na figura temos um triângulo equilátero e um quadrado inscritos no mesmo círculo. Determine $A\hat{O}P$, sendo $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{PQ}$.

687. Na figura, $\overline{AB}$ é lado do pentadecágono regular e $\overline{PQ}$ o lado do hexágono regular, inscritos na mesma circunferência. Determine $A\hat{Q}P$, sendo $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$ paralelos.

O P x Q A B

B Q A P

688. Determine o número de lados de um polígono regular convexo, cujos ângulos internos medem *179°* cada.

689. Determine a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de um polígono *ABCDE* ... regular de *30* lados.

690. Dados dois polígonos regulares, com $(n + 1)$ lados e n lados, respectivamente, determine n, sabendo que o ângulo interno do primeiro polígono excede o ângulo interno do segundo em *5°*.

Solução

Se a diferença dos ângulos internos é de $5°$, a diferença entre o ângulo externo do 2º polígono e o ângulo externo do 1º também é de $5°$. Então:

$$\frac{360°}{n} - \frac{360°}{n+1} = 5° \implies 72(n+1) - 72n = n(n+1) \implies n^2 + n - 72 = 0 \implies$$

$\implies (n = -9 \text{ ou } n = 8)$

Resposta: $n = 8$.

691. Quantas medidas, duas a duas diferentes, obtemos quando medimos as diagonais de um:

a) hexágono regular;
b) octógono regular;
c) decágono regular;
d) dodecágono regular;
e) heptágono regular;
f) eneágono regular;
g) polígono de n lados, para n sendo par;
h) polígono de n lados, para n sendo ímpar.

692. Ao medir as diagonais de um polígono regular foram encontradas *6* medidas, duas a duas diferentes. Determine a soma dos ângulos internos desse polígono.

693. De um polígono regular *ABCDE* ... sabemos que o ângulo $A\hat{C}B$ mede *10°*. Quantas diagonais desse polígono não passam pelo centro?

694. O ângulo $A\hat{D}C$ de um polígono regular *ABCDEF* ... mede *30°*. Determine a soma dos ângulos internos desse polígono.

695. As mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um polígono regular *ABCDEF* ... formam um ângulo, que contém *B* e *C*, de *20°*. Quantas diagonais desse polígono passam pelo centro?

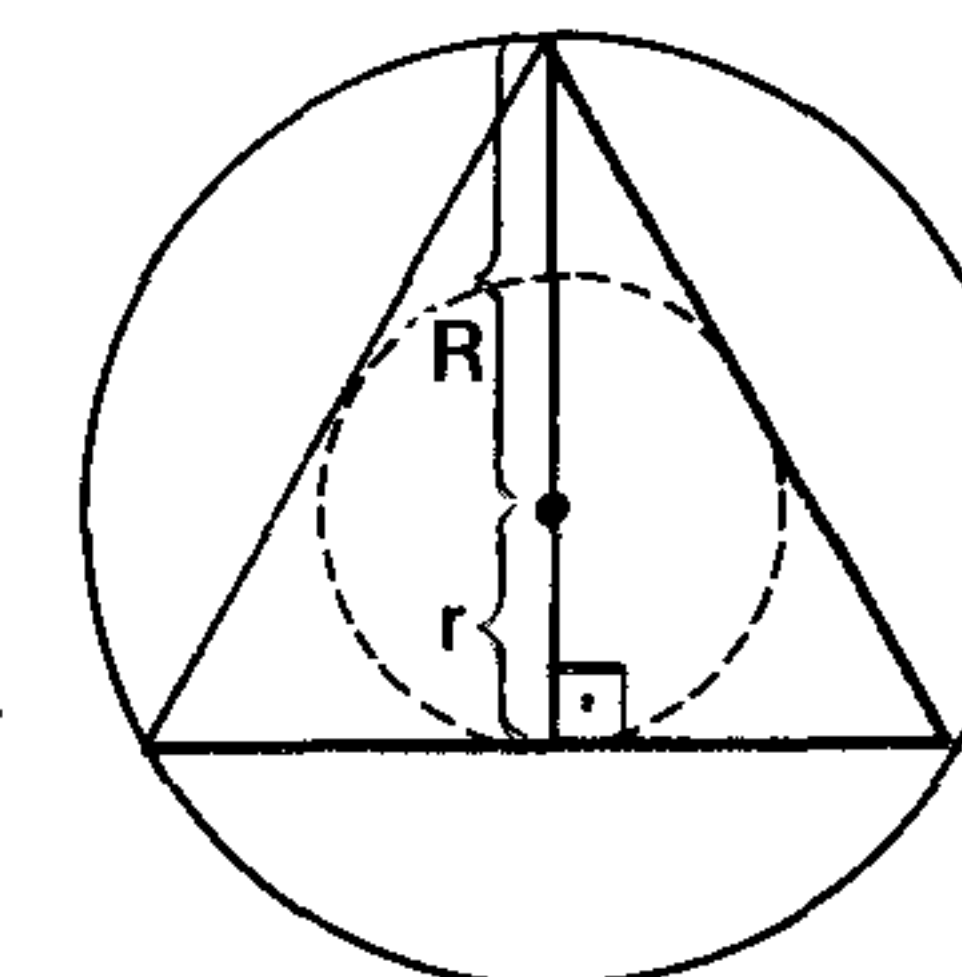
696. As bissetrizes dos ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ de um polígono regular *ABCDEFG* ... são perpendiculares. Qual a soma dos ângulos internos desse polígono?

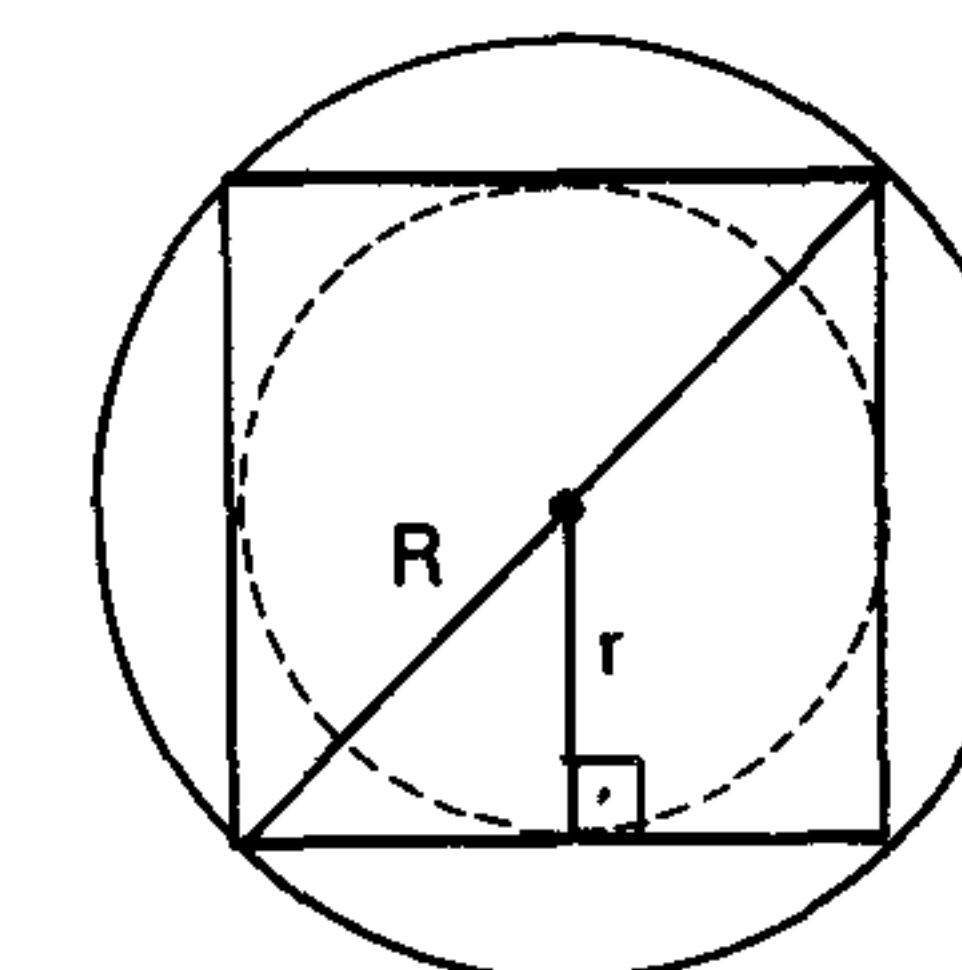
697. As mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ de um polígono regular *ABCDE* ... formam um ângulo, que contém *B*, *C* e *D* e excede o ângulo externo desse polígono em *20°*. Quantas medidas, duas a duas diferentes, obtemos ao medir as diagonais desse polígono?

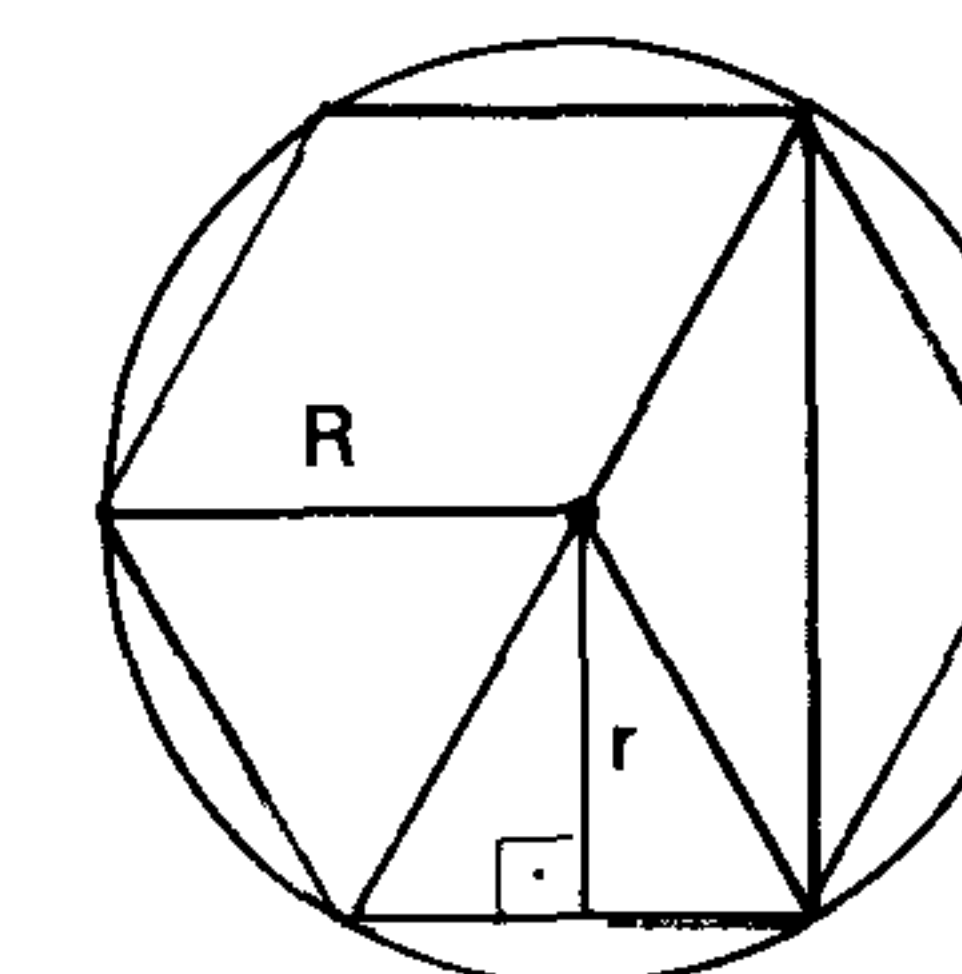
698. As retas que contêm os lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ de um polígono regular *ABCDEFG*... formam um ângulo, que contém *C* e *D* e é o dobro do ângulo externo do polígono. Quantas diagonais tem esse polígono?

699. A diferença entre o número de lados de dois polígonos regulares é *4* e a diferença entre os seus ângulos externos é *3°*. Determine o número de lados desses polígonos.

700. Lembrando que no triângulo equilátero o ortocentro, o baricentro, o incentro (centro da circunferência inscrita) e o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) são coincidentes e que o baricentro divide a mediana em duas partes que medem $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ desta, sendo *6 m* o lado do triângulo equilátero, determine:

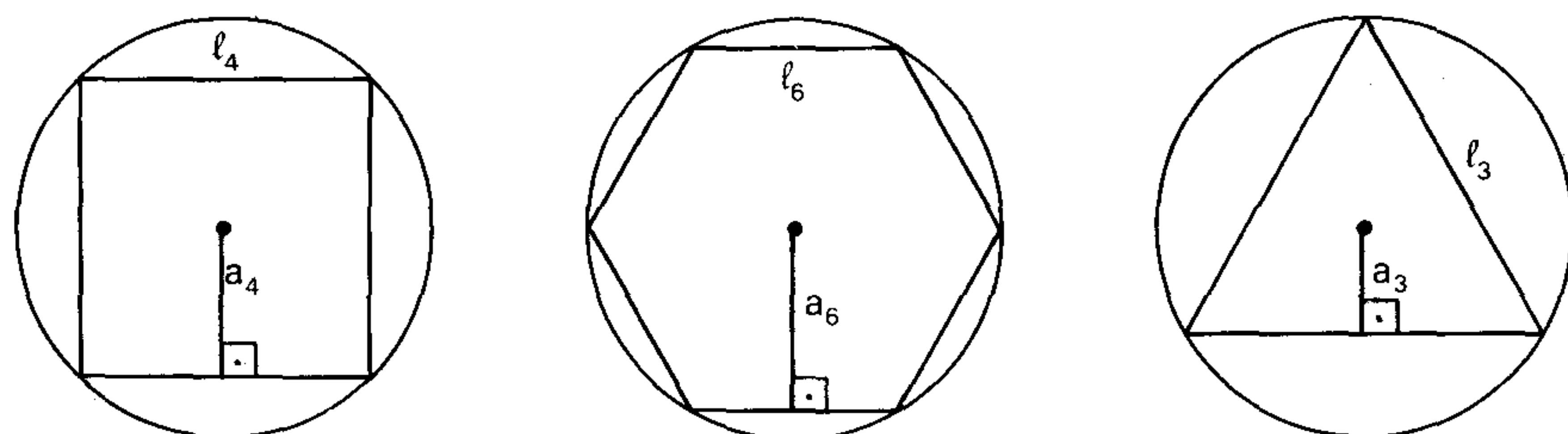
a) a altura do triângulo;
b) o raio *R* da circunscrita;
c) o raio *r* da inscrita;
d) o apótema do triângulo.

701. Lembrando que no quadrado a diagonal passa pelo centro, sendo *8 m* o lado do quadrado, determine:

a) a diagonal;
b) o raio *R* da circunscrita;
c) o raio *r* da inscrita;
d) o apótema do quadrado.

702. Lembrando que no hexágono regular as diagonais maiores passam pelo centro e determinam nele *6* triângulos equiláteros, sendo *6 m* o lado do hexágono, determine:

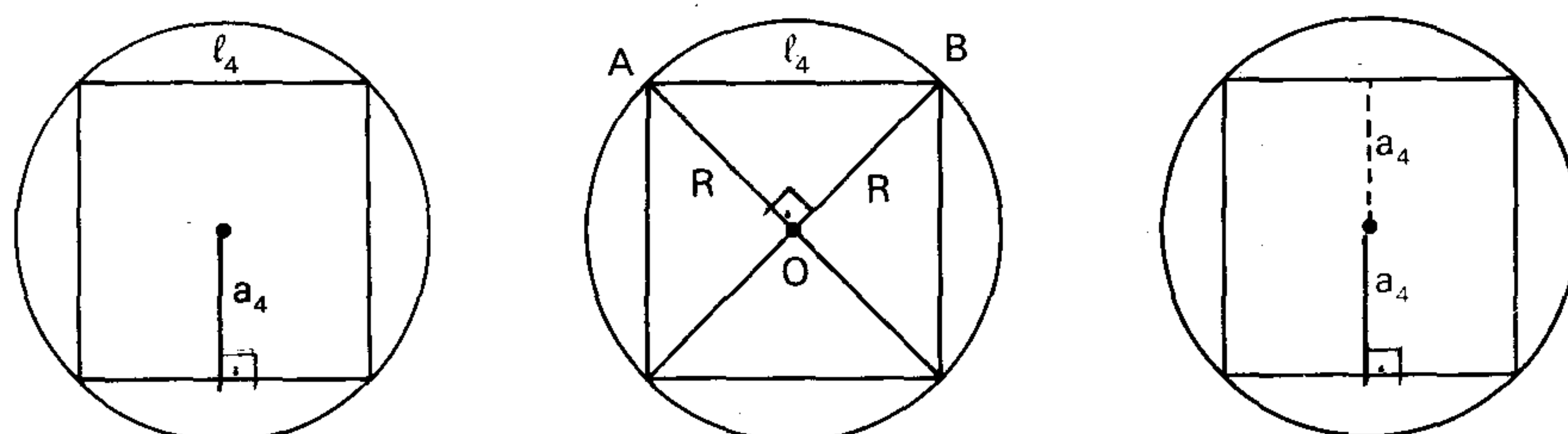
a) a diagonal maior;
b) o raio *R* da circunscrita;
c) o raio *r* da inscrita;
d) a diagonal menor;
e) o apótema do hexágono.

219. *Cálculo de lado e apótema dos polígonos regulares*

Indicaremos por ℓ_n a medida do lado do polígono regular de n lados e por a_n a medida do apótema do polígono regular de n lados.

Exemplo

ℓ_4 a_4 ℓ_6 a_6 ℓ_3 a_3

Problema 1. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado e o apótema do quadrado.

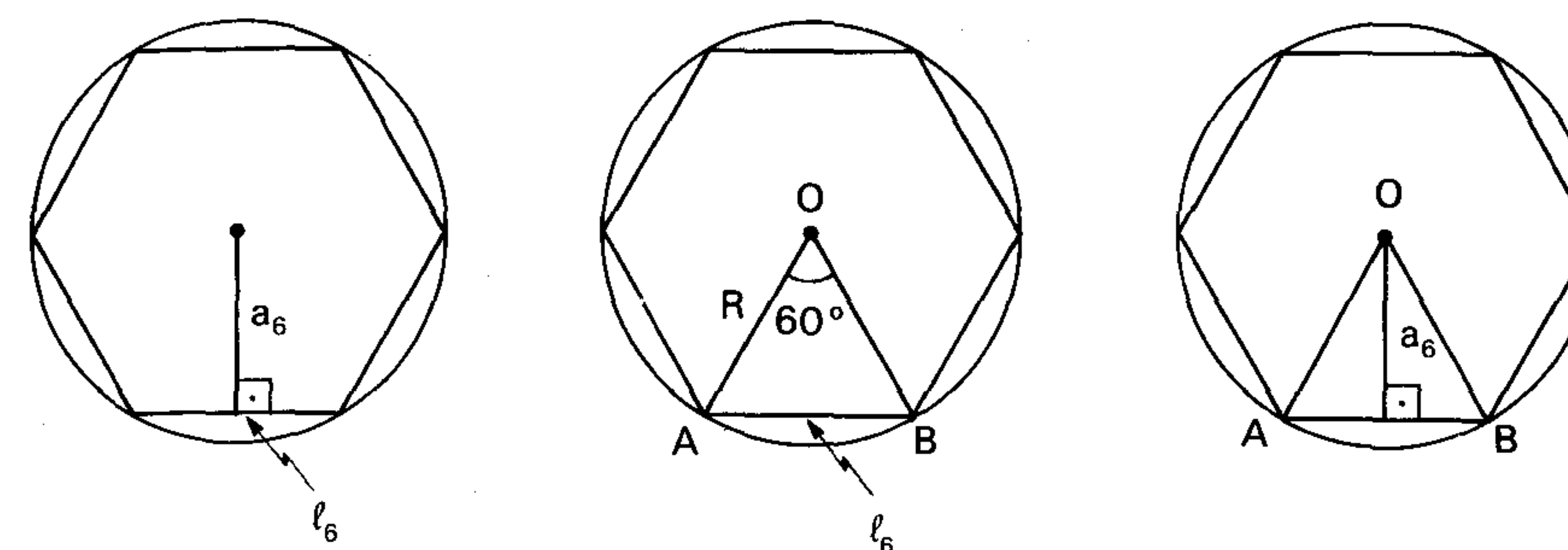
Na figura, dado o R, calcular o ℓ_4 e o a_4.

ℓ_4 a_4 A ℓ_4 B R R O a_4 a_4

$$\Delta AOB \xrightarrow{\text{T.P.}} \ell_4^2 = R^2 + R^2 \implies \boxed{\ell_4 = R\sqrt{2}}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\ell_4 \implies \boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

Problema 2. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado e o apótema do hexágono regular.

Na figura, dado o R, calcular o ℓ_6 e o a_6.

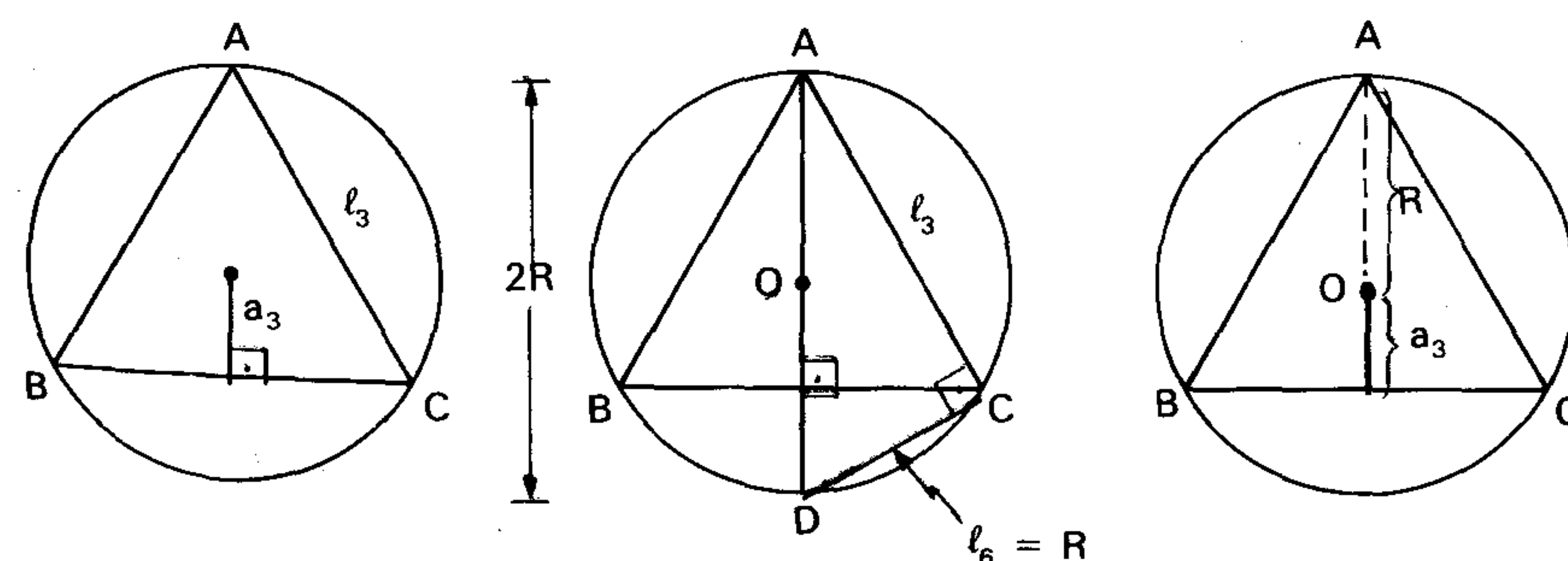
a_6 ℓ_6 O R 60° A B ℓ_6 O a_6 A B

$$\left.\begin{array}{l}\text{No } \Delta AOB\text{, temos: } A\hat{O}B = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ \\ \overline{OA} \equiv \overline{OB} \implies \hat{A} = \hat{B}\end{array}\right\} \implies \hat{O} = \hat{A} = \hat{B} = 60^\circ \implies$$

$$\implies \Delta AOB \text{ é equilátero} \implies \boxed{\ell_6 = R}$$

$$a_6 \text{ é a altura do triângulo equilátero de lado } R \implies \boxed{a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

Problema 3. Dado o raio do círculo, calcular o lado e o apótema do triângulo equilátero.

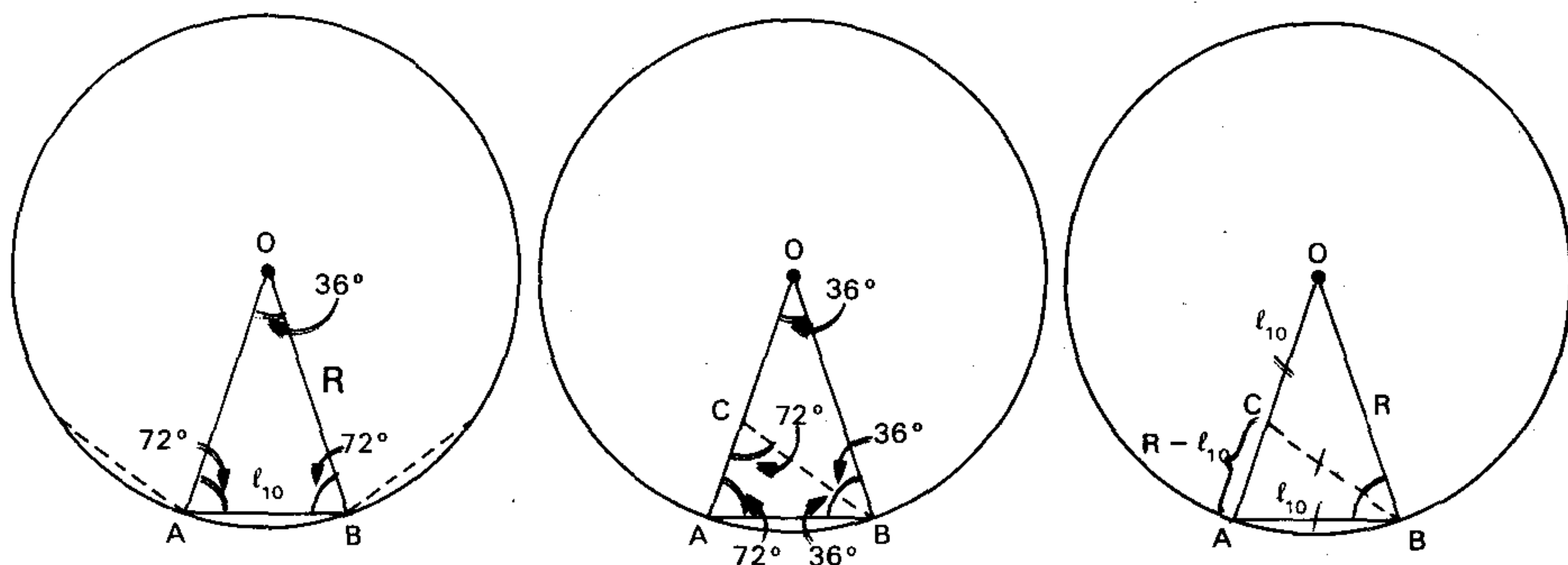
Na figura, dado R, calcular o ℓ_3 e o a_3.

A ℓ_3 a_3 B C 2R A ℓ_3 O B C D $\ell_6 = R$ A R O a_3 B C

Note que, sendo $\overline{BC} = \ell_3$, então $\overline{CD} = \ell_6 = R$ e $\overline{AD}$ é diâmetro.

ΔACD, retângulo em $C \overset{T.P.}{\Longrightarrow} \ell_3^2 = (2R)^2 - R^2 \Longrightarrow \boxed{\ell_3 = R\sqrt{3}}$

O é o baricentro do $\Delta ABC \Longrightarrow 2 \cdot a_3 = R \Longrightarrow \boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$

Problema 4. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado do decágono regular.

Na figura, dado o R, calcular o ℓ_{10}.

Sendo $\overline{AB} = \ell_{10}$, então $A\hat{O}B = \frac{1}{10} \cdot 360° = 36° \Longrightarrow \hat{A} = \hat{B} = 72°$.

Conduzindo $\overline{BC}$, bissetriz de $\hat{B}$, vem:

ΔBAC é isósceles $(\hat{A} = \hat{C} = 72°) \Longrightarrow \overline{BC} = \ell_{10}$
ΔCOB é isósceles $(\hat{O} = \hat{B} = 36°) \Longrightarrow \overline{OC} = \overline{BC} = \ell_{10}$

Então: $\overline{OC} = \ell_{10}$ e $\overline{CA} = R - \ell_{10}$

Aplicando o teorema da bissetriz interna ($\overline{BC}$ é bissetriz no ΔAOB), vem:

$$\frac{\ell_{10}}{R} = \frac{R - \ell_{10}}{\ell_{10}} \Longrightarrow \ell_{10}^2 = R(R - \ell_{10}) \Longrightarrow \ell_{10}^2 + R\ell_{10} - R^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ell_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

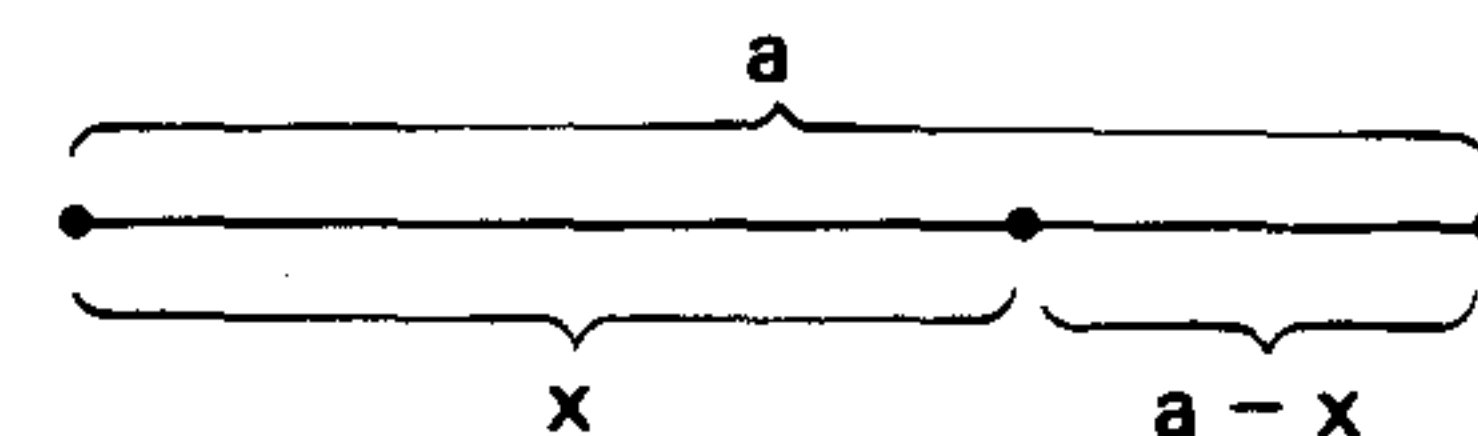
Desprezando a solução negativa que não convém, temos:

$$\boxed{\ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R}$$

220. *Nota: segmento áureo*

Definição

x é a medida do segmento áureo de um segmento de medida a se, e somente se,

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$

A razão $\frac{x}{a}$ é dita *áurea* e x é também a medida do segmento maior da secção áurea do segmento de medida a, ou apenas segmento áureo de a.

De $\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$, obtemos $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Resolvendo a equação, obtém-se $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a$.

Em vista da definição e da dedução do problema 4, em que se tem

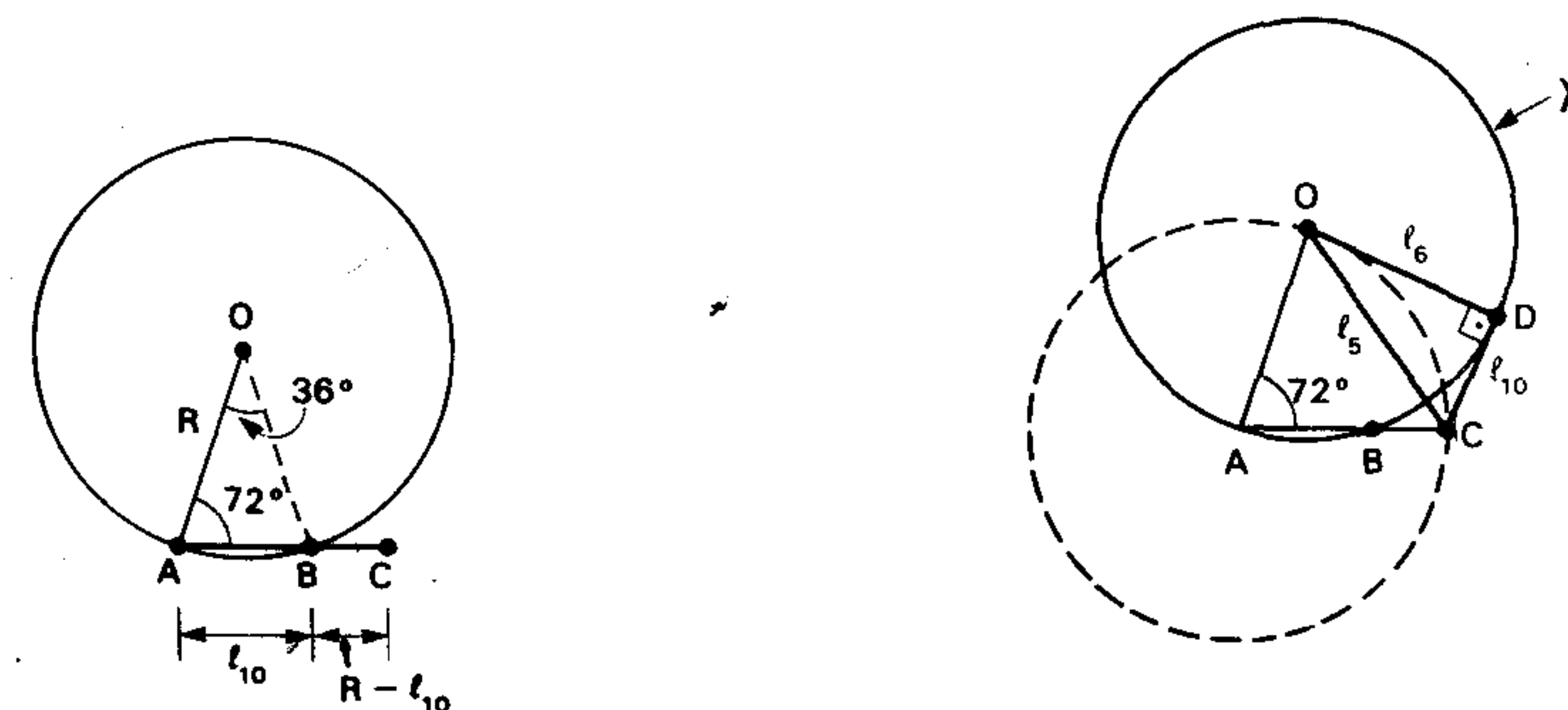
$$\frac{\ell_{10}}{R} = \frac{R - \ell_{10}}{\ell_{10}}$$

concluímos que o ℓ_{10} é o *segmento áureo do raio*.

Problema 5. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado do pentágono regular.

Dado R, calcular o ℓ_5.

Inicialmente provaremos a seguinte propriedade:

O ℓ_5 é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o ℓ_{10} e o ℓ_6 (ℓ_5, ℓ_6, ℓ_{10} relativos a um mesmo raio R).

Seja $\overline{AB} = \ell_{10}$ e na reta $\overleftrightarrow{AB}$ um ponto C tal que $\overline{AC} = R$.

Considerando a circunferência de centro A e raio R, o ângulo central $\hat{A} = 72°$ faz corresponder $\overline{OC} = \ell_5$ $\left(\text{basta notar que } 72° = \frac{1}{5} \cdot 360°\right)$.

Conduzindo por C a tangente $\overline{CD}$ à circunferência λ de centro O e raio R, temos:

Potência de C em relação a λ: $(CD)^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ R}}{(CA)} \times \underset{\substack{\uparrow \\ R - \ell_{10}}}{(CB)} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (CD)^2 = R(R - \ell_{10}) \xrightarrow[\text{anterior}]{\text{Problema}} \overline{CD} = \ell_{10}$$

Considerando o triângulo ODC, retângulo em D, temos:

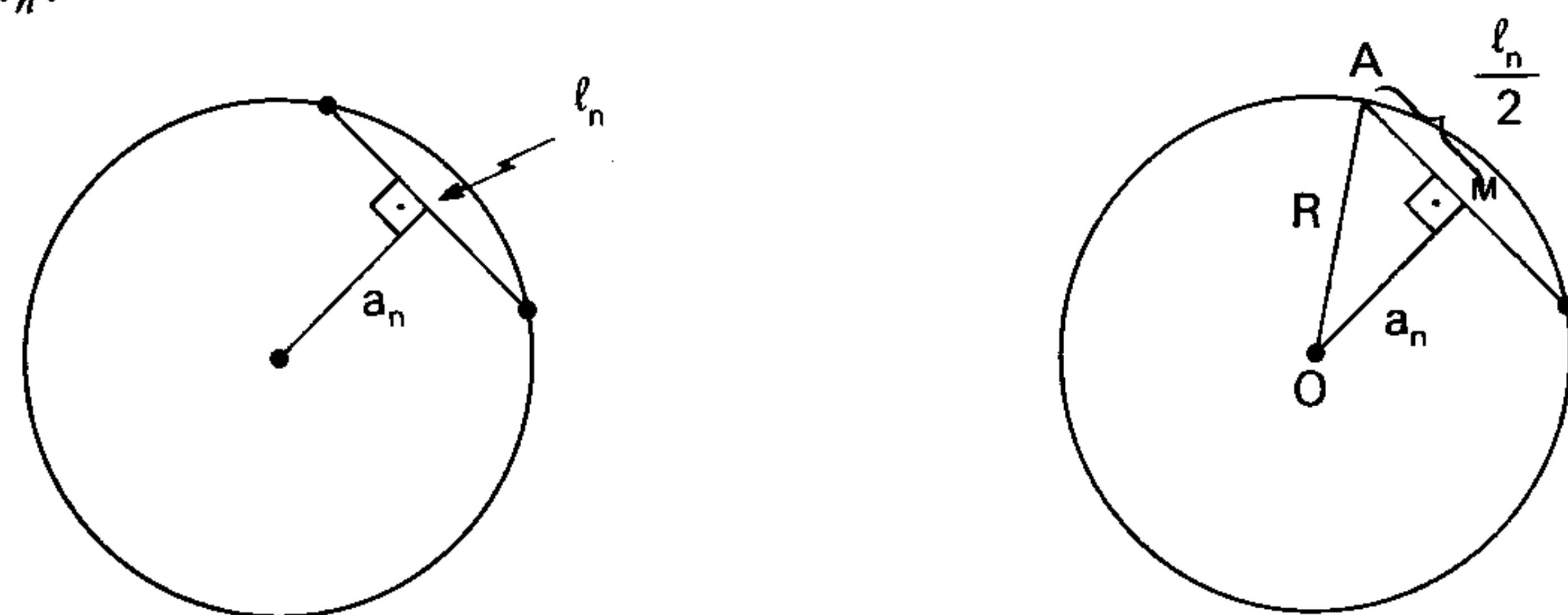
$\overline{OC} = \ell_5 =$ hipotenusa, $\overline{CD} = \ell_{10} =$ cateto e $\overline{OD} = R = \ell_6 =$ cateto

Cálculo do ℓ_5

Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$$\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2 \Longrightarrow \ell_5^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R\right)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ell_5^2 = \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) \Longrightarrow \boxed{\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Problema 6. Deduzir a fórmula geral do apótema. Isto é, dados R e ℓ_n, calcular a_n.

ΔAMO retângulo em $M \Longrightarrow a_n^2 = R^2 - \frac{\ell_n^2}{4} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$

Exemplo

Para calcular o a_{10} em função do raio R da circunferência circunscrita, basta substituir ℓ_n por ℓ_{10} $\left(\ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R\right)$.

E, assim procedendo, obtemos $\boxed{a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

Analogamente, substituindo o ℓ_n por ℓ_5 $\left(\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$ na expressão de a_n, obtemos:

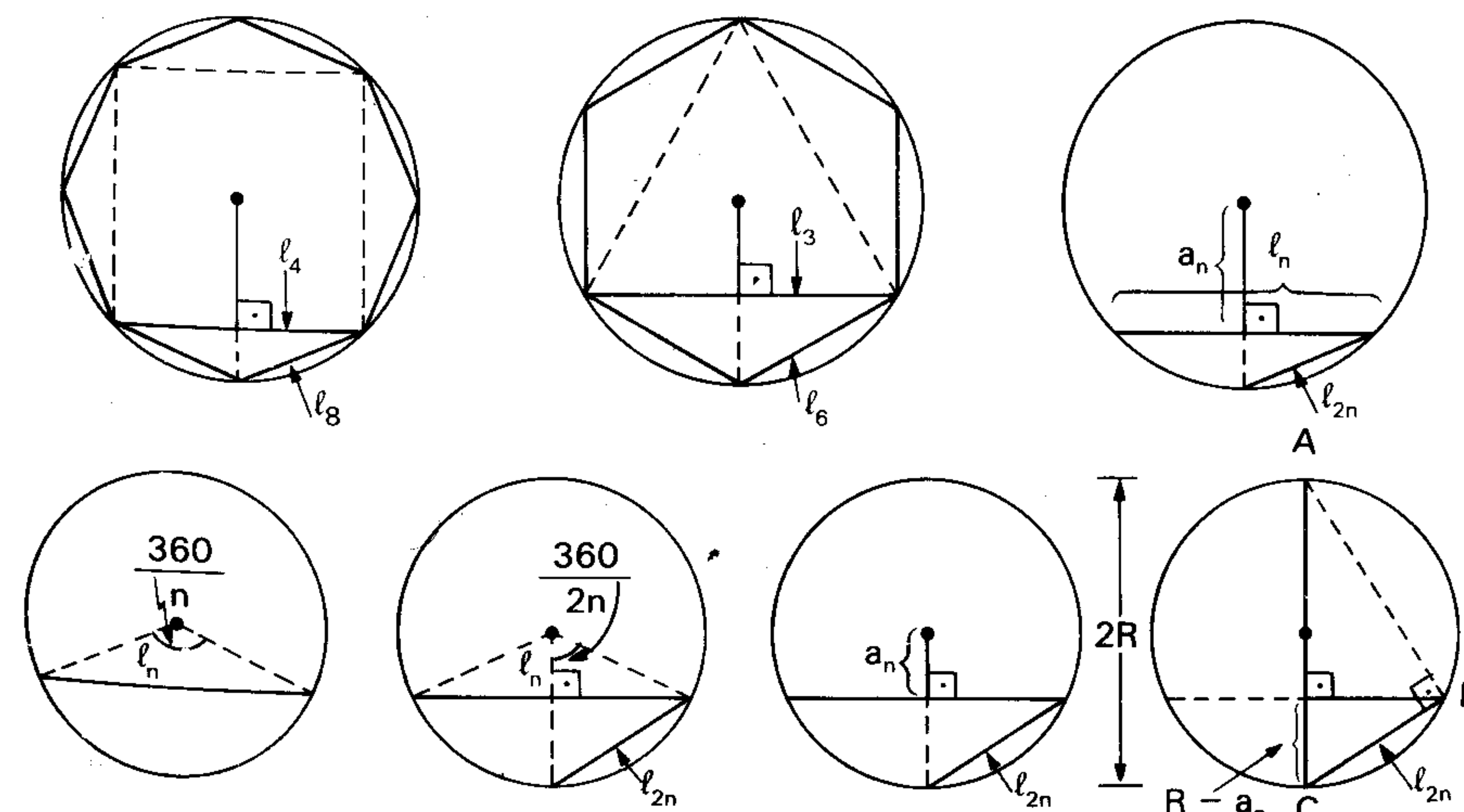
$$\boxed{a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)}$$

Problema 7. Deduzir uma expressão que dá o ℓ_{2n} em função de ℓ_n e de R (raio da circunferência circunscrita).

Usaremos o símbolo ℓ_{2n} para indicar o lado do polígono regular de $2n$ lados.

Se o ℓ_n é o ℓ_4, o ℓ_{2n} é o ℓ_8.

Se o ℓ_n é o ℓ_6, o ℓ_{2n} é o ℓ_{12}, e assim por diante.

Notemos que de um modo geral temos:

ΔABC, retângulo em B, relações métricas $\Longrightarrow \ell_{2n}^2 = 2R(R - a_n)$

Substituindo a_n por $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$ (problema 6), vem:

$$\ell_{2n}^2 = 2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right) \Longrightarrow \ell_{2n}^2 = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\ell_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2})}}$$

Observação

A expressão do ℓ_{2n} nos indica que, sabendo o valor, por exemplo, do ℓ_6, pode-se obter o de ℓ_{12}; com o de ℓ_{12} em lugar do ℓ_n, obtém-se o de ℓ_{24}; com o de ℓ_{24} em lugar do ℓ_n, obtém-se o de ℓ_{48} e assim por diante.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios a seguir, em geral não é necessário usar as fórmulas deduzidas neste capítulo e sim calcular os elementos pedidos com base num esboço de figura, diagonal de quadrado e altura de triângulo equilátero.

703. Determine o raio da circunferência circunscrita ao polígono regular de *12 m* de lado nos casos:

a) quadrado b) hexágono c) triângulo

704. Determine o lado do polígono regular inscrito em uma circunferência de raio *6 m*, nos casos:

a) quadrado b) hexágono c) triângulo

705. Determine o apótema (ou raio da circunferência inscrita) do polígono regular de lado *6 m*, nos casos:

a) quadrado b) hexágono c) triângulo

706. Determine o lado do polígono regular de *6 m* de apótema nos casos:

a) quadrado b) hexágono c) triângulo

707. Determine o raio da circunferência inscrita no polígono regular, sabendo que o raio da circunscrita é *12 m*, nos casos:

a) quadrado b) hexágono c) triângulo

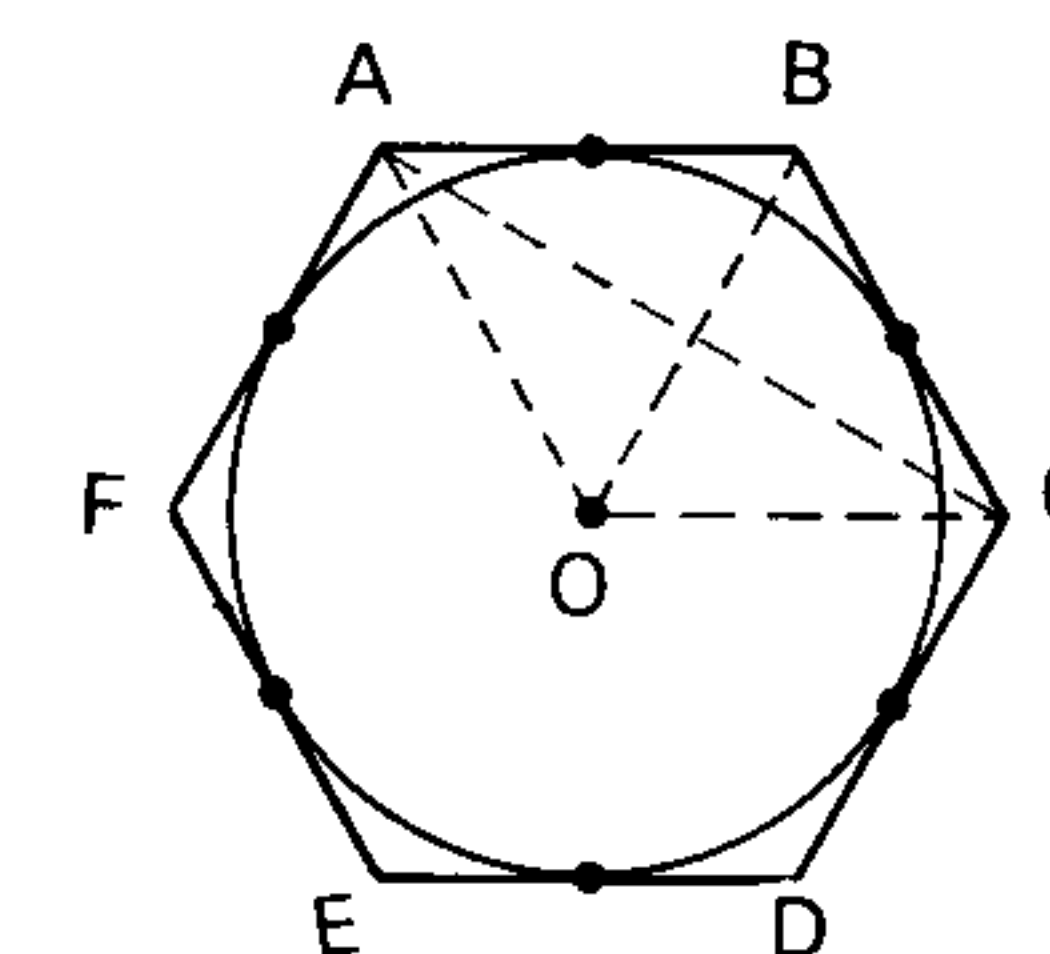
708. Determine o raio da circunferência circunscrita ao polígono regular, sabendo que o raio da circunferência inscrita é *6 m*, nos casos:

a) quadrado b) hexágono c) triângulo

709. Dado um triângulo equilátero de *6 cm* de altura, calcule:

a) o raio do círculo inscrito;
b) o lado;
c) o apótema;
d) o raio do círculo circunscrito.

710. No hexágono regular *ABCDEF* da figura o lado mede *5 cm*. Calcule:

a) o apótema;
b) o raio do círculo inscrito;
c) a diagonal $\overline{AC}$.

711. Determine a razão entre o perímetro do quadrado inscrito em um círculo de raio *R* e o perímetro do quadrado circunscrito a esse mesmo círculo.

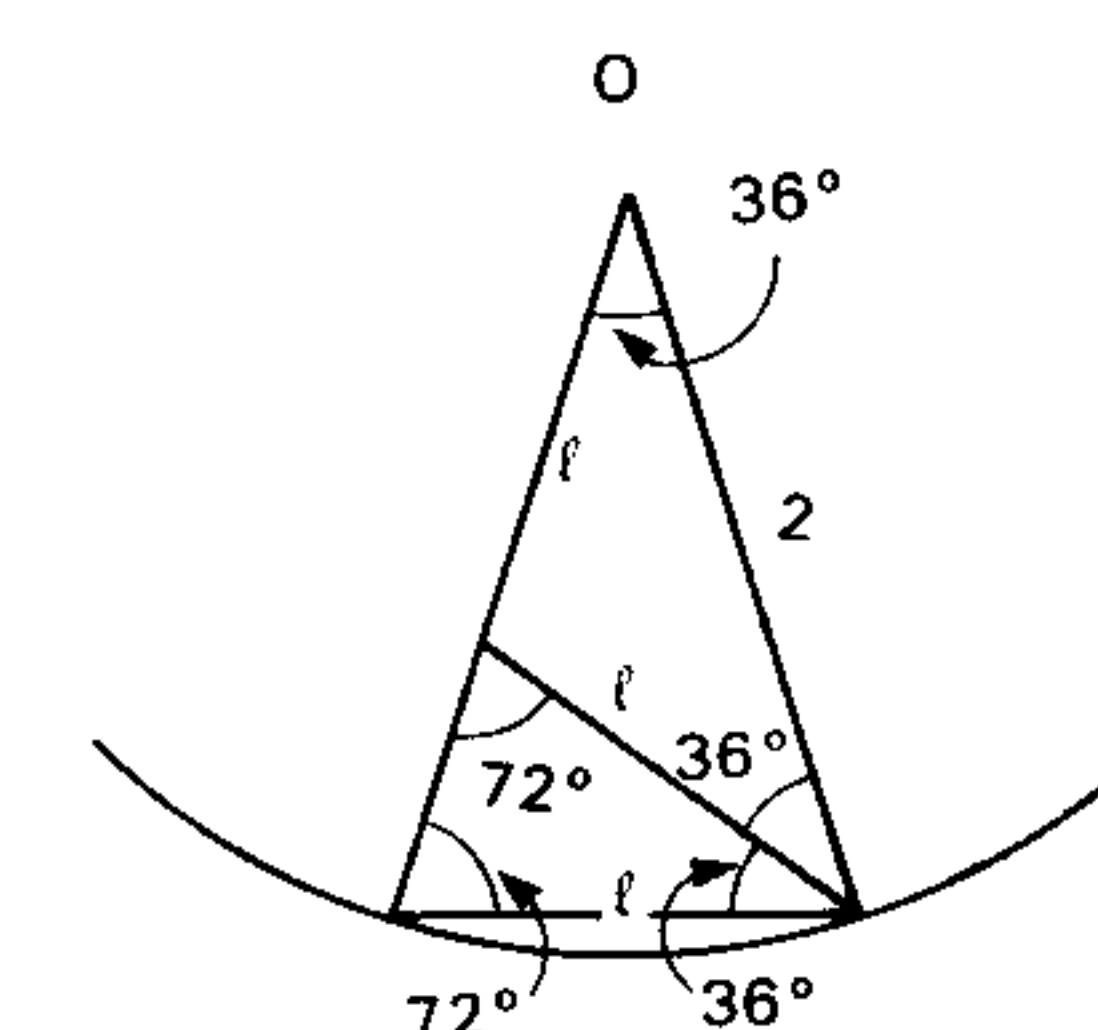
712. Determine a relação entre os raios de dois círculos, sabendo que no primeiro está inscrito um triângulo equilátero e no segundo está inscrito um quadrado, e que os perímetros do triângulo e do quadrado são iguais.

713. Determine a razão entre o apótema do quadrado e o apótema de um hexágono regular, inscritos em um círculo de raio *R*.

714. Dado o raio *R* de uma circunferência, calcule o lado e o apótema do octógono regular inscrito.

715. Qual é a razão entre o perímetro de um triângulo equilátero com altura igual ao raio de um círculo para o perímetro do triângulo equilátero inscrito nesse círculo?

716. Calcule a medida do segmento $\overline{AV}$ do triângulo isósceles *BCA*, circunscrito a uma circunferência de raio unitário, sabendo que o diâmetro da circunferência é igual ao segmento maior da secção áurea da altura do triângulo *BCA*, sendo *V* o ponto médio da altura $\overline{AM}$ relativa à base.

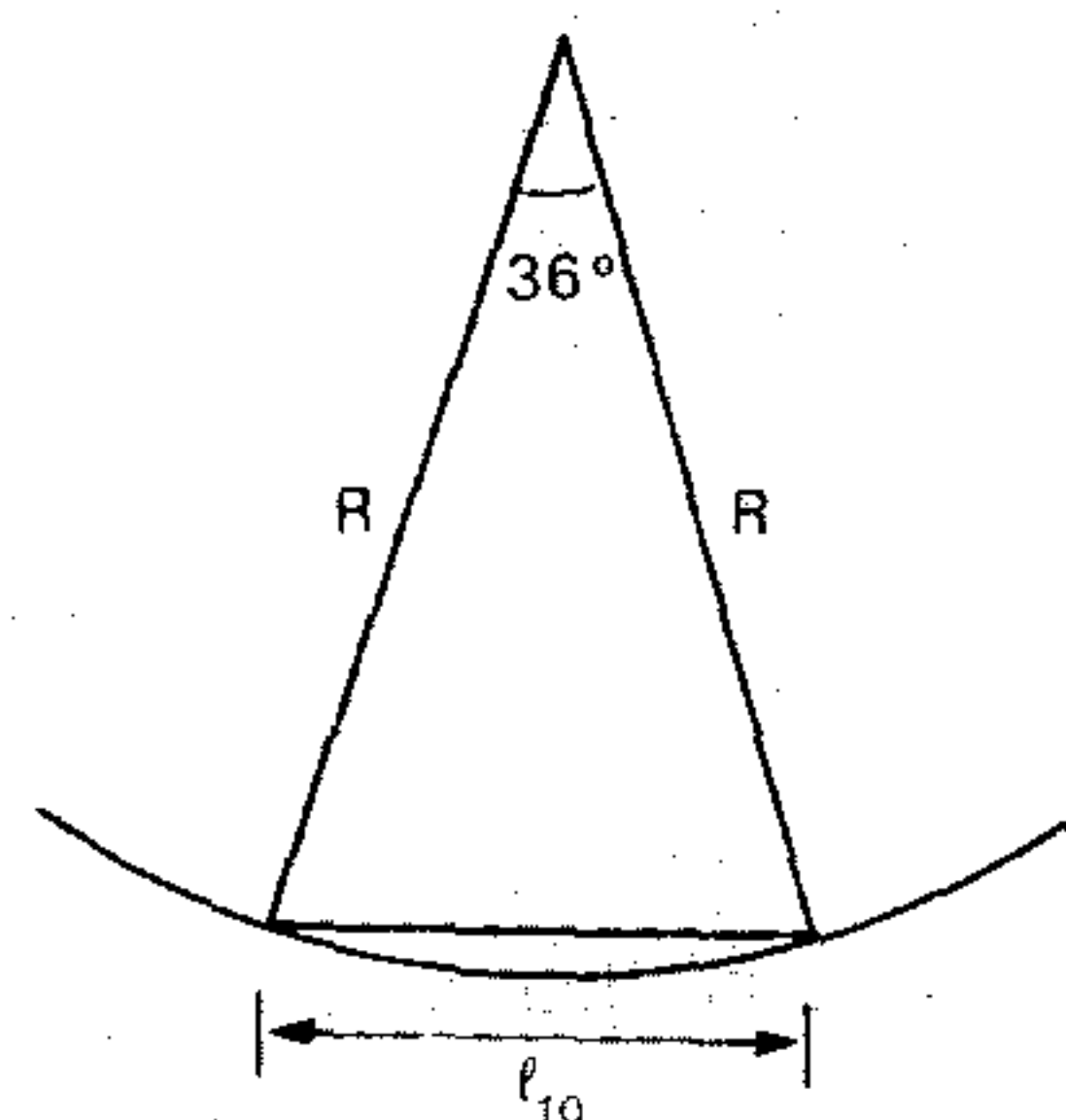
717. Se o raio de uma circunferência mede *2 m*, determine o lado ℓ do decágono regular inscrito nela. (Use os triângulos isósceles da figura e o teorema da bissetriz interna.)

718. Deduza a fórmula que dá o lado do decágono regular inscrito em um círculo de raio R.

719. Usando o resultado do problema anterior, determine *sen 18°*.

720. Sabendo que o lado do pentágono regular inscrito em um círculo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são os lados do hexágono regular e do decágono regular inscritos no mesmo círculo, determine o lado do pentágono regular inscrito em um círculo de raio R.

721. Usando o resultado do problema anterior, determine *sen 36°*.

722. Determine *cos 36°*.

Solução

Considere um decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R. Note que o ângulo central ao qual está oposto o ℓ_{10} mede *36°*.

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\ell_{10}^2 = R^2 + R^2 - 2RR\cos 36°$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 36°$$

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{4}R^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 36°$$

$$6 - 2\sqrt{5} = 8 - 8\cos 36°$$

$$4\cos 36° = \sqrt{5} + 1$$

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

723. Sabendo que *sen (90° − α) = cos α*, determine:

a) cos 72° b) cos 54° c) sen 54°

724. Determine:

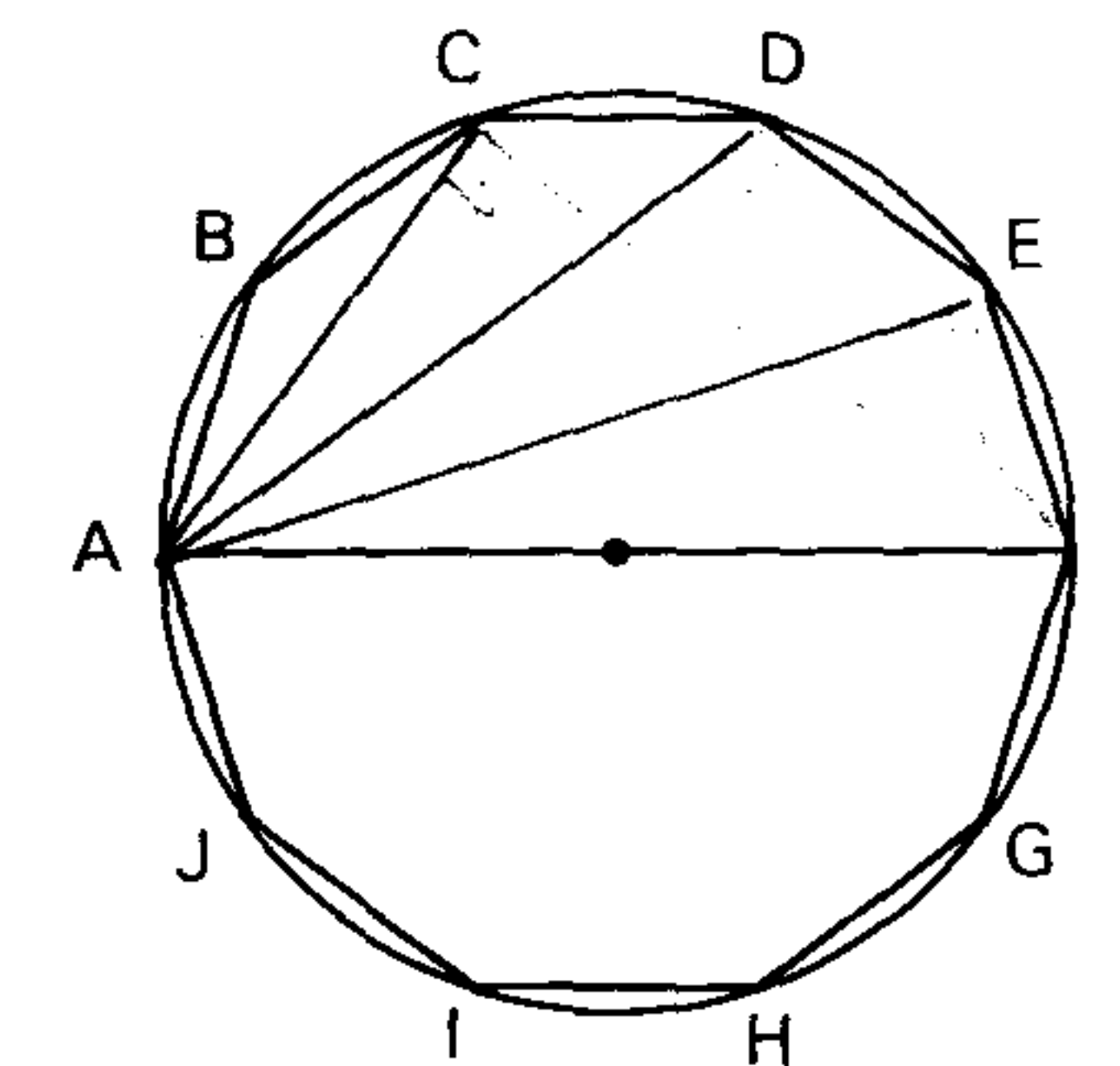
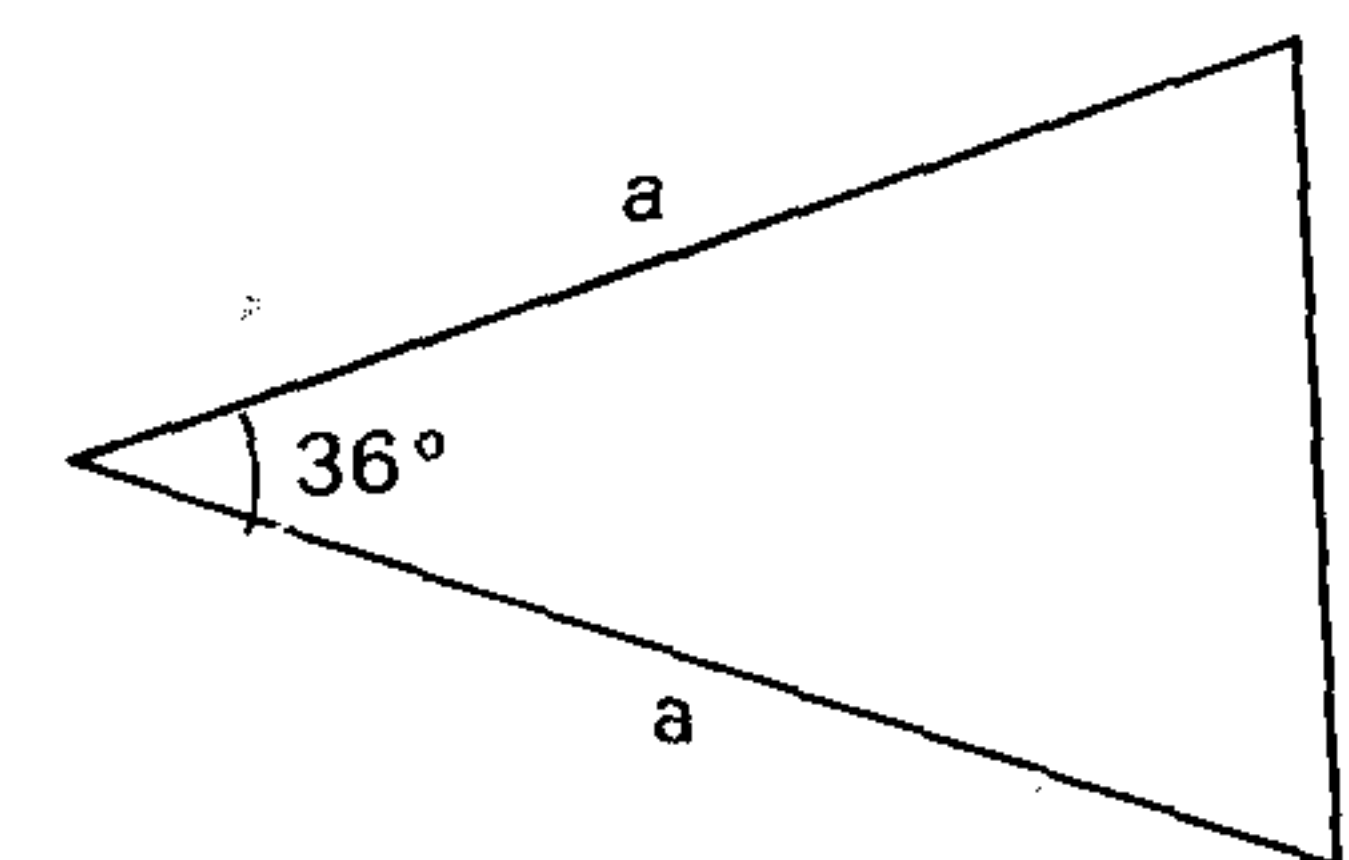
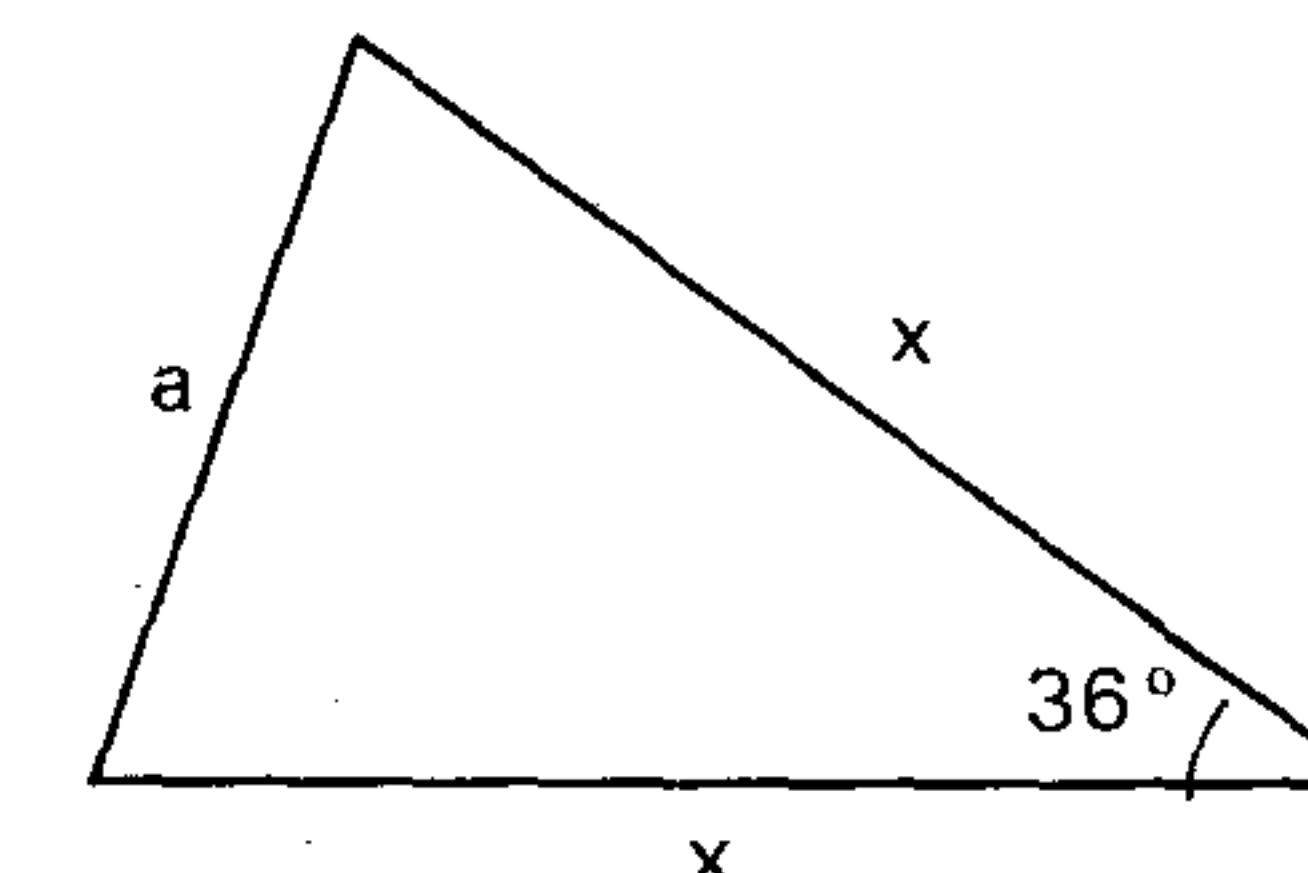
a) sen 72° b) cos 18°

725. Usando a lei dos cossenos, determine o lado do octógno regular inscrito em um círculo de raio R.

726. Use a resposta do problema anterior e determine o raio do círculo circunscrito a um octógono regular de lado ℓ.

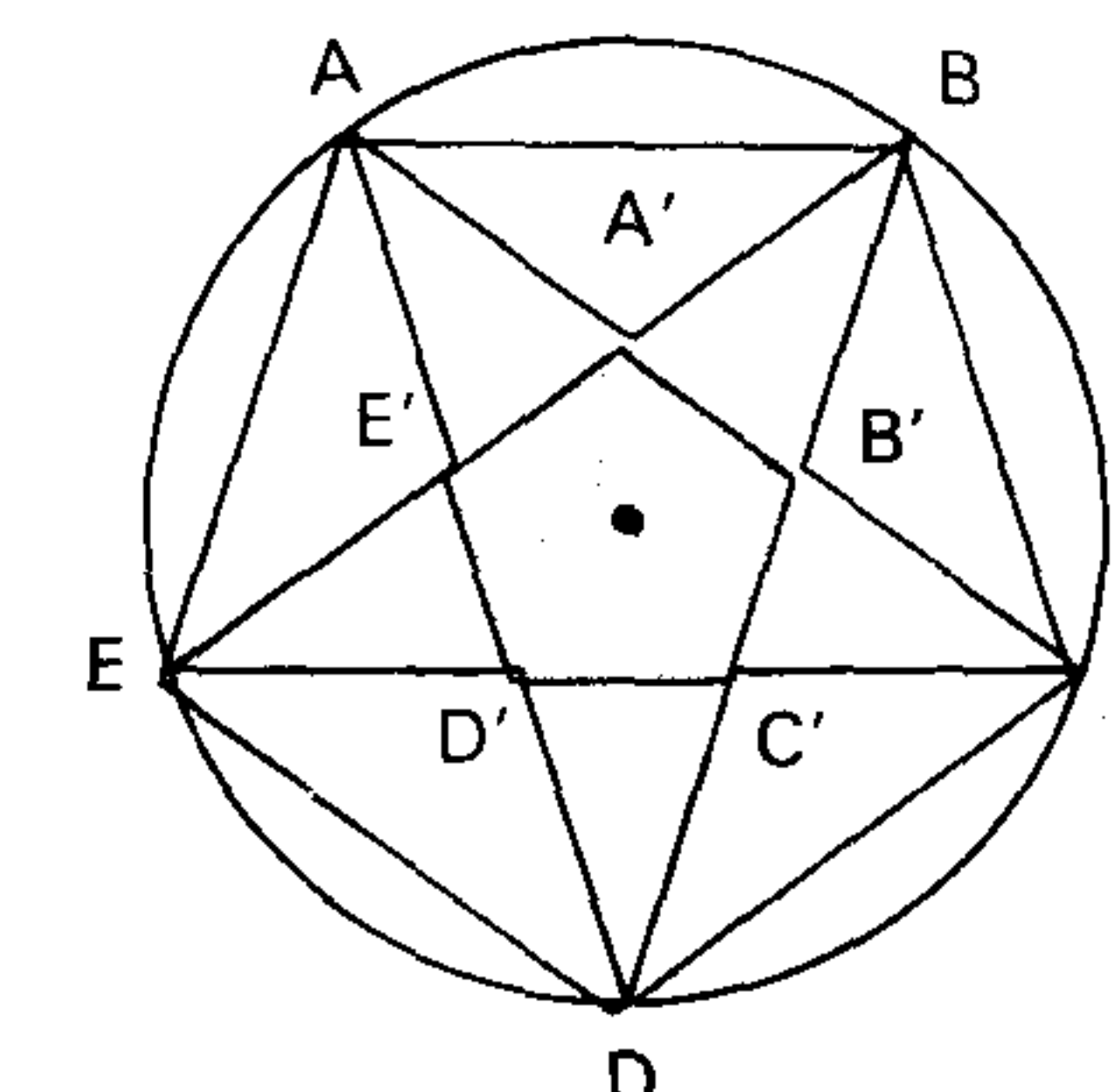
727. Determine as medidas das diagonais de um octógono regular de lado ℓ.

728. Na figura, temos um decágono regular de lado ℓ. Determine:

a) o raio da circunferência circunscrita;
b) a diagonal $\overline{AE}$;
c) a diagonal $\overline{AC}$;
d) a diagonal $\overline{AD}$.

729. No triângulo da figura, determine x em função de a.

730. No triângulo da figura, determine x em função de a.

731. Determine a diagonal de um pentágono regular de lado ℓ.

732. Na figura temos um pentágono regular de lado ℓ.

a) Mostre que o pentágono sombreado é regular.
b) Determine o lado do pentágono sombreado.

LEITURA

Hilbert e a Formalização da Geometria

Hygino H. Domingues

Somente na segunda metade do século XIX, portanto mais de dois milênios após a publicação dos *Elementos*, começam a surgir tentativas sérias de aprimorar, sob o ponto de vista de estruturação lógica, a geometria elementar de Euclides. Dois motivos principalmente atraíram a atenção de vários matemáticos nesse sentido: de um lado a preocupação generalizada com o rigor lógico que animou a matemática no século passado; de outro a descoberta das geometrias não euclidianas mostrando que Euclides, afinal, não era necessariamente o dono da verdade.

O primeiro grande passo nesse sentido foi dado por Moritz Pasch (1843-1930) em suas *Lições de Geometria*, de 1882. Pasch observou que definições como a de *ponto* dada por Euclides ("Ponto é aquilo que não tem partes") não encerram a questão. O que vêm a ser "partes"? E, para evitar a possibilidade de ocorrência de círculos viciosos ou do chamado *regressus in infinitum*, admitiu como primitivos (sem definição) os conceitos de *ponto, reta* e *plano* — além do de *congruência de segmentos*, na primeira edição de seu livro. A caracterização desses conceitos era feita por meio de axiomas em cuja formulação Pasch admitia que a experiência tinha algum papel. Nas deduções subseqüentes, porém, de maneira nenhuma a intuição poderia intervir.

David Hilbert (1862-1943).

A despeito do trabalho notável de Pasch, a fundamentação mais feliz e de maior influência da geometria euclidiana é devida a David Hilbert (1862-1943). Hilbert nasceu na Prússia, perto de Königsberg, em cuja universidade ingressou em 1880, obtendo seu doutoramento cinco anos depois, sob a orientação de F. Lindemann (1852-1939). Poucos anos depois, em 1893, em carreira rápida e brilhante, sucedia seu ex-orientador como professor titular em Königsberg. Convidado por F. Klein (1849-1925), em 1895 transferiu-se para Göttingen, onde ficou até encerrar sua vida acadêmica em 1930.

No inverno de 1898-1899, Hilbert proferiu uma série de conferências que marcariam sua abordagem axiomática da geometria euclidiana. O material dessas conferências seria publicado ainda em 1899 num pequeno texto (*Fundamentos da Geometria*) que, em edições posteriores, além de atualizações, recebeu vários apêndices. Na linha de Pasch, Hilbert toma como primitivos os conceitos de ponto, reta e plano, os quais considera interligados por três relações não definidas: "estar em", "entre" e "congruência". E os axiomas que embasam sua geometria são 21, divididos em cinco grupos: incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade. Desde as primeiras linhas, Hilbert busca salientar o caráter formal de sua geometria, procurando despojar de qualquer conteúdo material os entes com que lida.

Com seu grande prestígio, a ênfase de Hilbert no método axiomático abstrato fez dele o principal representante do *formalismo*, corrente que procura afastar a matemática de qualquer conotação intuitiva, concebendo-a tão-somente como a ciência das deduções formais. Nessas condições, para Hilbert e seus seguidores, torna-se vital a demonstração da consistência (ausência de contradições) das axiomáticas formalizadas — como a da sua geometria, por exemplo.

Em 1904, por intermédio da geometria analítica, Hilbert provou que a geometria é consistente se a ciência da aritmética é consistente. Na década de 20 criou a *metamatemática*, um método que pretendia estabelecer a consistência de qualquer sistema formal, baseado numa lógica supostamente acima de qualquer objeção.

Em 1931, porém, o jovem lógico-matemático Kurt Gödel (1906-1978) provou que a consistência da aritmética não pode ser estabelecida no âmbito da matemática. Esse resultado sem dúvida abalou fortemente o formalismo. Mas de maneira nenhuma tirou Hilbert do pedestal dos grandes matemáticos de todos os tempos.

CAPÍTULO XVII

Comprimento da Circunferência

Conceitos e propriedades

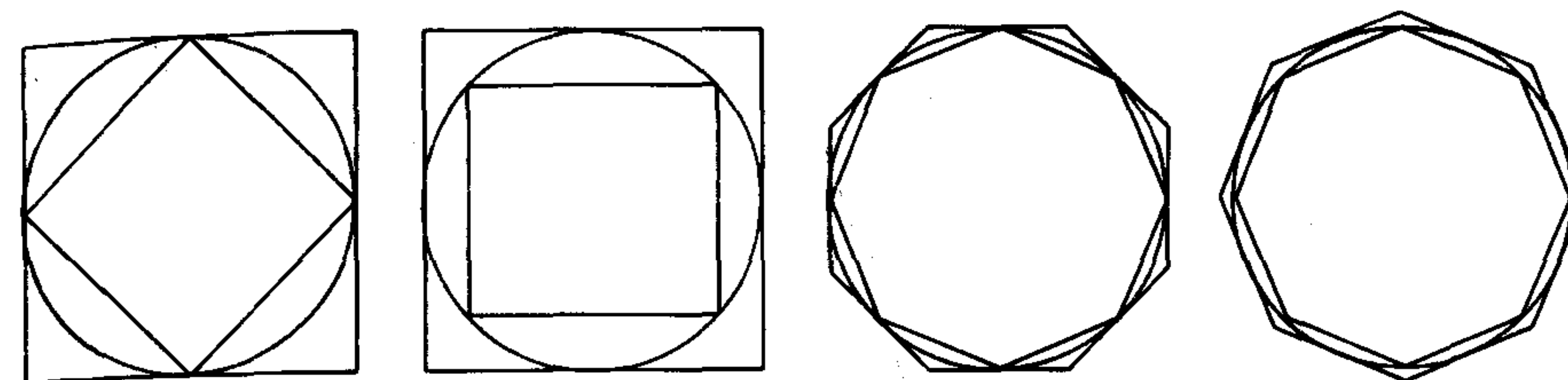
Neste capítulo daremos uma noção sobre o cálculo do *perímetro do círculo* e do *comprimento da circunferência*.

Serão citadas três propriedades que nos conduzirão ao resultado visado. Não serão feitas demonstrações rigorosas de tais propriedades, porém ficará clara a percepção das conclusões, além da seqüência lógica que se deve seguir.

221. *Propriedade 1*

"Dada uma circunferência qualquer, o perímetro de qualquer polígono convexo nela inscrito é menor que o perímetro de qualquer polígono a ela circunscrito."

Esta propriedade é geral, mas é suficiente trabalhar com polígonos regulares para percebê-la.

Seja uma circunferência de raio R. Consideremos um quadrado inscrito e o quadrado circunscrito correspondente.

Note que $R\sqrt{2}$ e $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ são lado e apótema do quadrado inscrito, enquanto $2R$ e R são, respectivamente, lado e apótema do quadrado circunscrito.

Sendo p_4 e P_4 os respectivos perímetros, temos $p_4 < P_4$.

Dobrando-se o número de lados (e isso é possível, vide fórmula do ℓ_{2n}), temos:

$$p_4 < p_8 \quad \text{e} \quad P_8 < P_4 \quad \text{e ainda} \quad p_4 < p_8 < P_8 < P_4$$

Repetindo-se a operação acima, e ela pode ser repetida indefinidamente, temos:

$$p_4 < p_8 < p_{16} < p_{32} < \ldots < P_{32} < P_{16} < P_8 < P_4$$

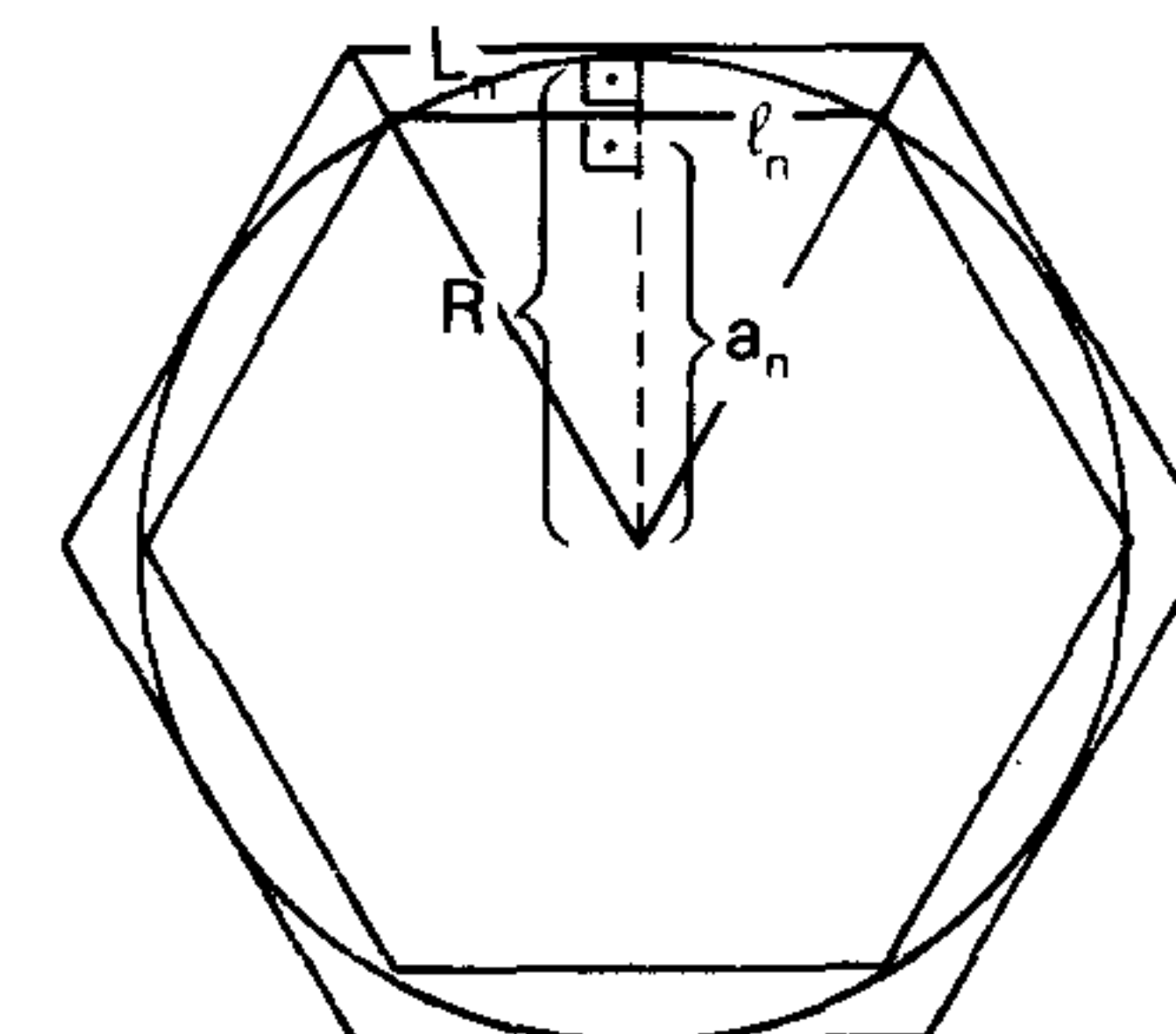
O resultado acima foi obtido iniciando-se com o quadrado. Trabalhando com polígono regular de n lados, temos resultado análogo, sendo bom notar que:

P_n e R perímetro e apótema do polígono circunscrito, e

p_n e a_n perímetro e apótema do polígono inscrito

são relacionados por semelhança entre triângulos, como segue:

$$\frac{L_n}{\ell_n} = \frac{R}{a_n} \implies \frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{a_n}$$

(Notemos que, conhecendo p_n, a_n e R, calculamos P_n.)

Assim temos também:

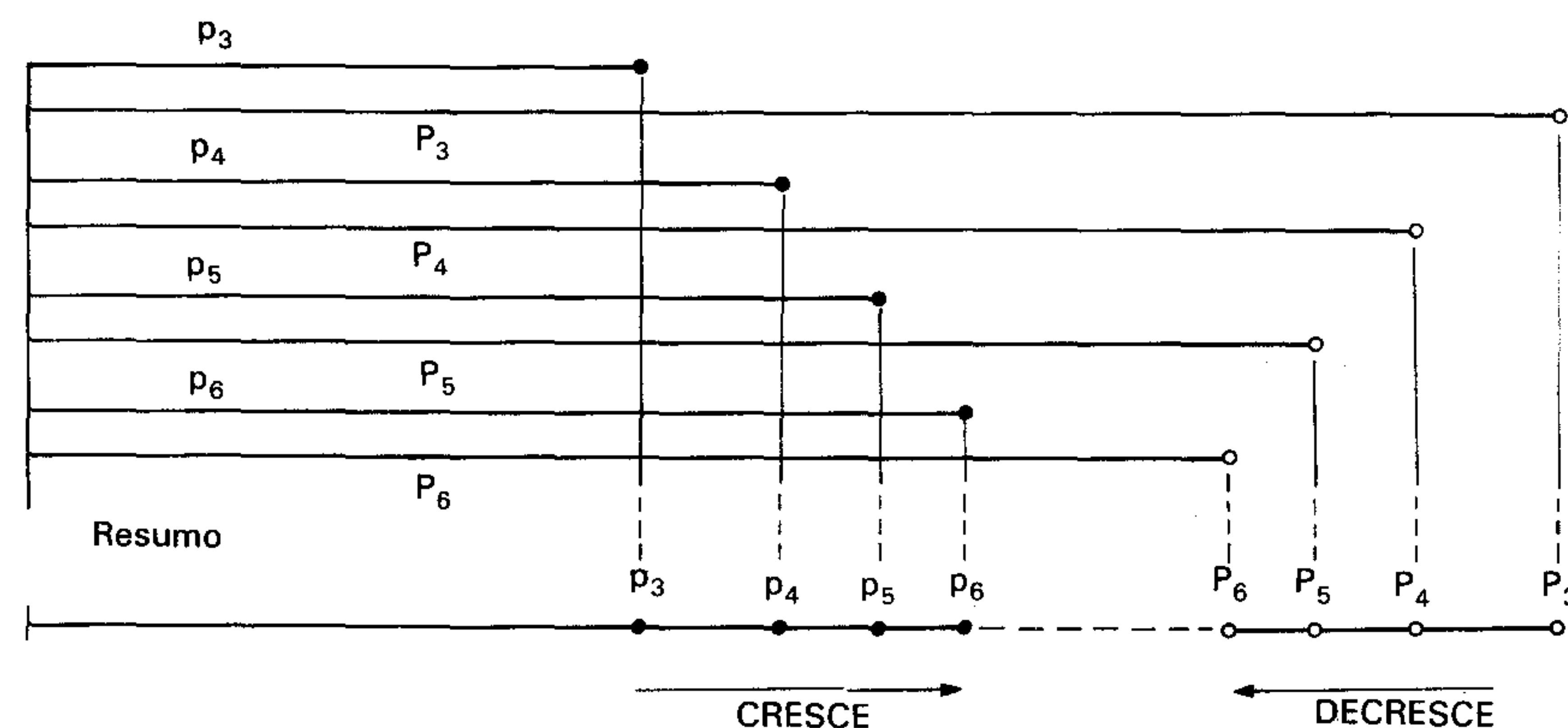
$$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < \ldots < P_{48} < P_{24} < P_{12} < P_6$$

De um modo geral, mantendo constante a circunferência, aumentando-se o número de lados, o perímetro dos polígonos regulares inscritos (p_n) *cresce* enquanto o perímetro dos polígonos regulares circunscritos (P_n) *decresce*, permanecendo sempre $p_n < P_n$. A figura a seguir ilustra esse fato.

p3 P3 p4 P4 p5 P5 p6 P6

Resumo

p3 p4 p5 p6 P6 P5 P4 P3

CRESCE DECRESCE

222. Propriedade 2

> "Dada uma circunferência qualquer e fixado um segmento k, arbitrário, podem-se construir dois polígonos, um inscrito e outro circunscrito à circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros seja menor que o segmento k fixado."

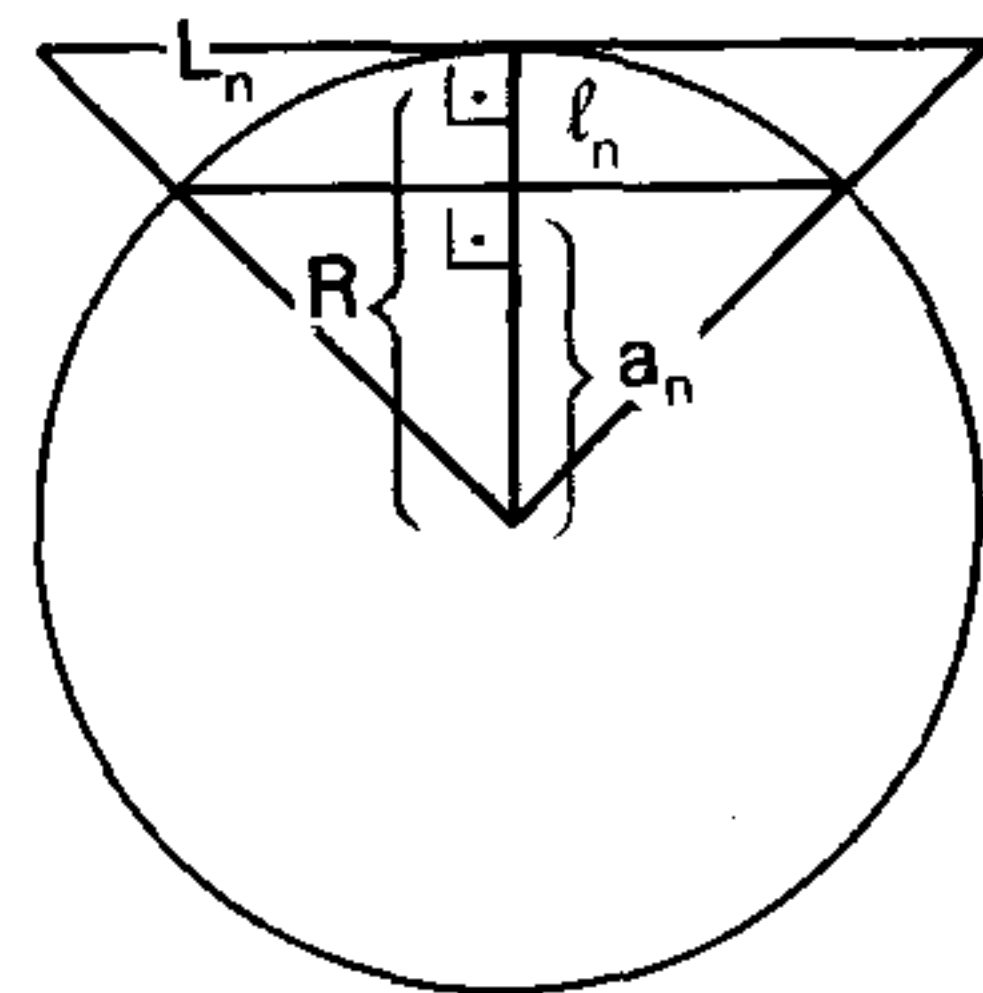
Esta propriedade é geral mas pode ser "percebida" através de polígonos regulares, com mais de quatro lados, como segue:

Sejam:

p_n e a_n, perímetro e apótema do inscrito

P_n e R, perímetro e apótema do circunscrito

Conforme já vimos, pela semelhança sai:

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{a_n}$$

Com propriedades de proporções, vem:

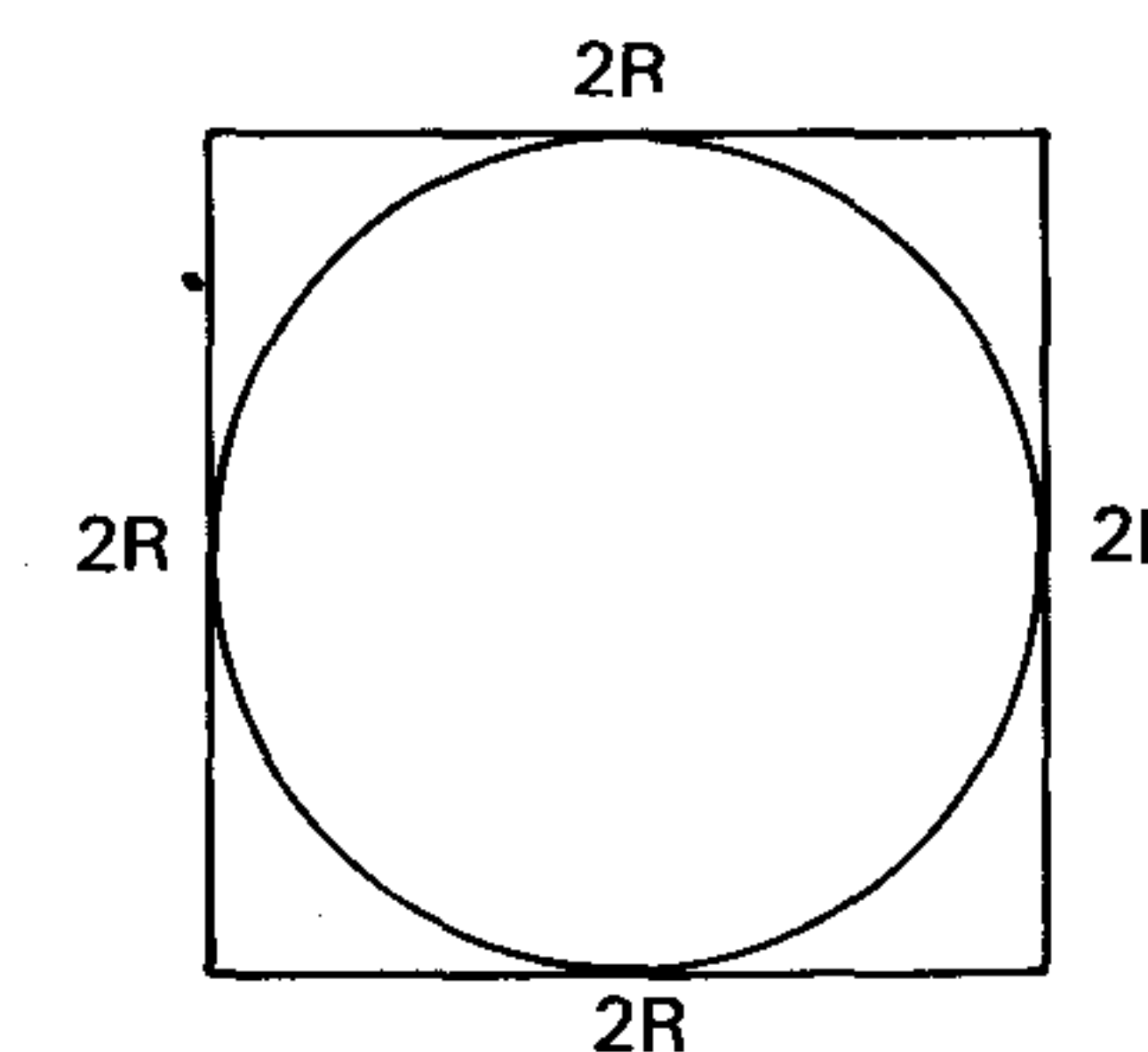
$$\frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{R - a_n}{R} \implies P_n - p_n = \frac{P_n}{R}(R - a_n)$$

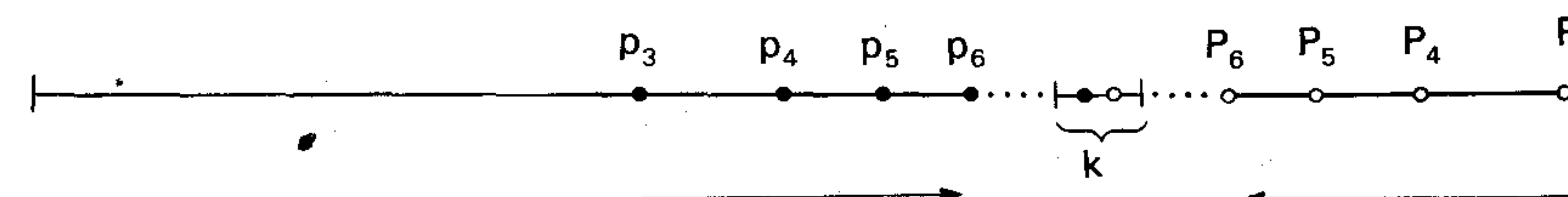
Mas, para todo n maior que 4, temos:

$$P_n < P_4, \text{ portanto, } P_n < 8R$$

e, daí, vem:

$$P_n - p_n < \frac{8R}{R}(R - a_n) \implies$$

$$\implies P_n - p_n < 8(R - a_n)$$

Aumentando-se indefinidamente o número de lados (dobrando-se, por exemplo), a diferença $R - a_n$ tende para o segmento nulo. Então,

$$P_n - p_n < k, \quad \text{sendo } k \text{ fixado.}$$

223. Nota

As duas propriedades vistas, aliadas ao postulado da continuidade, traduzem o enunciado:

> "Dada uma circunferência qualquer, existe *um único segmento* que é maior que o perímetro de qualquer dos polígonos convexos inscritos e menor que o perímetro de qualquer dos polígonos circunscritos a essa circunferência".

224. Definições

a) Dada uma circunferência, o segmento maior que os perímetros de todos os polígonos convexos inscritos e menor que os perímetros de todos os polígonos circunscritos é chamado *segmento retificante* da circunferência, ou *circunferência retificada* ou ainda *perímetro do círculo* definido pela circunferência.

b) O comprimento do segmento retificante da circunferência, ou circunferência retificada ou perímetro do círculo, é chamado *comprimento da circunferência.*

225. *Propriedade 3*

"A razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro é um número constante representado por π."

Sejam duas circunferências de comprimento C e C' e raios R e R', respectivamente, e consideremos polígonos regulares de mesmo número de lados inscritos e circunscritos nessas circunferências.

Com a nomenclatura usada até aqui e graças à semelhança entre os polígonos, vem:

$$\frac{p_n}{p'_n} = \frac{R}{R'} \quad e \quad \frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}$$

Devido às propriedades anteriores, vem:

$$p_n < C < P_n \quad e \quad p'_n < C' < P'_n$$

Donde:

$$\frac{p_n}{2R} < \frac{C}{2R} < \frac{P_n}{2R} \quad e \quad \frac{p'_n}{2R'} < \frac{C'}{2R'} < \frac{P'_n}{2R'}$$

Logo:

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$$

Chamando essa razão de π, vem:

$$\frac{C}{2R} = \pi \implies \boxed{C = 2\pi R}$$

226. *Observação*

Para se ter uma noção do número π é só analisar a tabela abaixo.

n	$\frac{p_i}{2R}$	$\frac{P_c}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188

n — número de lados de um polígono regular
P_c — perímetro dos circunscritos
p_i — perímetro dos inscritos
R — raio da circunferência

Observe, pela tabela, como vai "nascendo" o número π.

Pela tabela chegamos até $\boxed{3,141}\,45 < \pi < \boxed{3,141}\,88$

Pode-se pensar que a tabela acima foi obtida usando o fato de que, sabendo o ℓ_6 pela fórmula do ℓ_{2n}, sabe-se o ℓ_{12}; sabendo-se o ℓ_{12}, sabe-se o ℓ_{24}, e assim sucessivamente.

Note que conforme se aumenta o número de lados obtêm-se valores aproximados de π com maior precisão (vão surgindo os algarismos do número π). Com um polígono de *192* lados, chegamos a *4* algarismos do número π.

Por ser útil, temos:

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots \qquad \frac{1}{\pi} = 0{,}3183098861\ldots$$

227. *Comprimento de um arco de circunferência*

"O comprimento de um arco de circunferência (ℓ) é proporcional à sua medida (α)."

Para α em graus

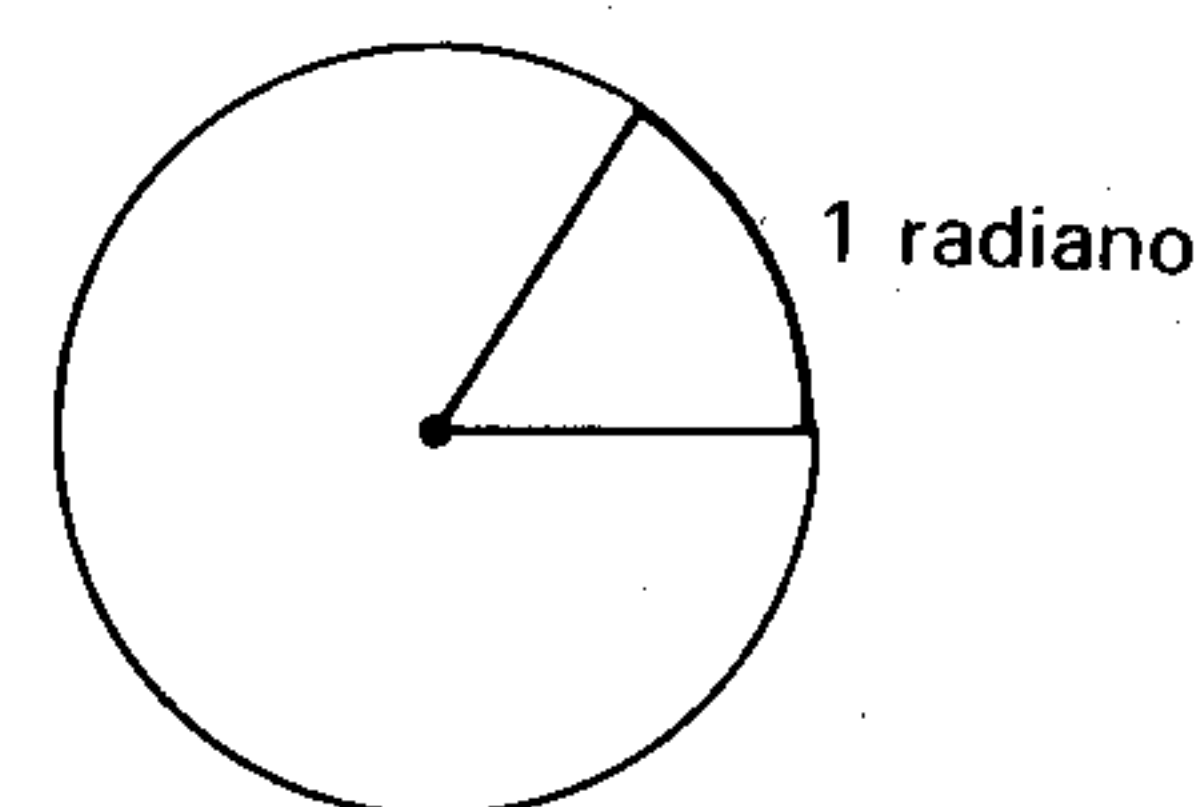
$$\left.\begin{matrix} 360^\circ \text{ ——— } 2\pi R \\ \alpha^\circ \text{ ——— } \ell \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \boxed{\ell = \frac{\pi R \alpha}{180}}$$

Para α em radianos

$$\left.\begin{matrix} 2\pi \text{ rad ——— } 2\pi R \\ \alpha \text{ rad ——— } \ell \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \boxed{\ell = R\alpha}$$

Em particular, numa circunferência de raio unitário, o comprimento de um arco é numericamente igual à sua medida em radianos.

228. *Observação*

Chama-se radiano (rad) todo arco de circunferência cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.

Numa circunferência (comprimento = $2\pi R$) há 2π radianos e por conseguinte:

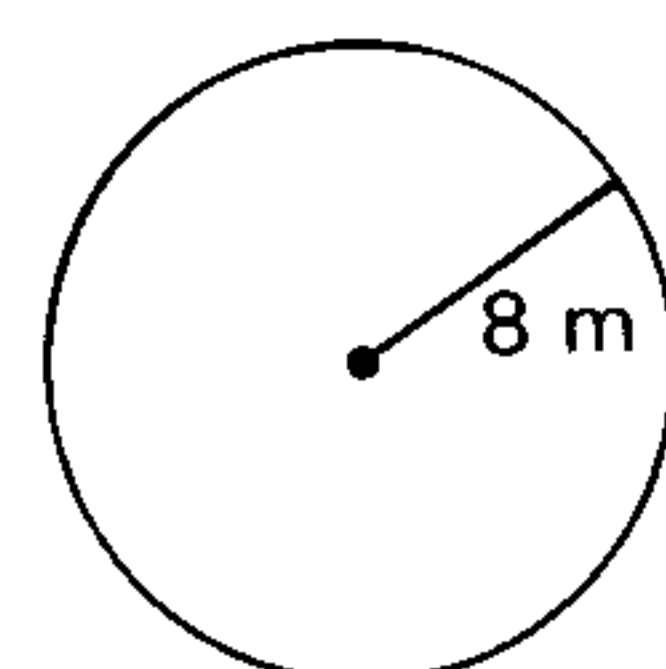
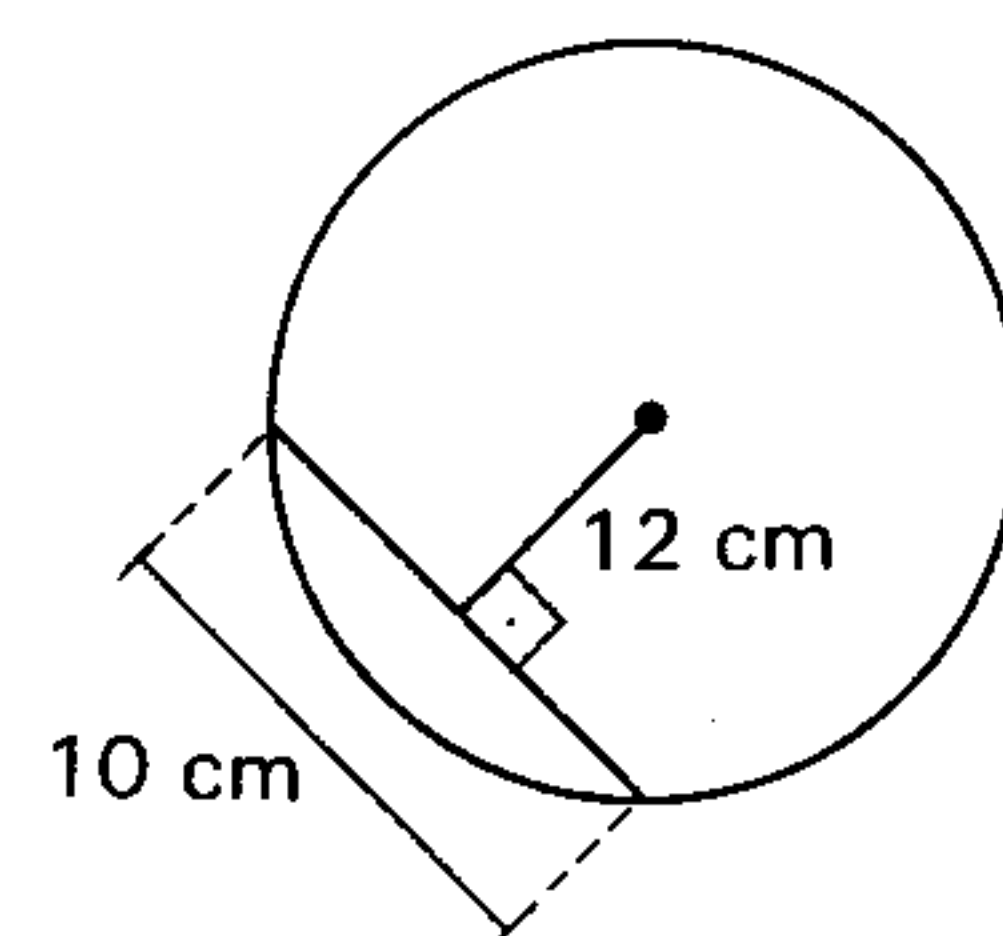
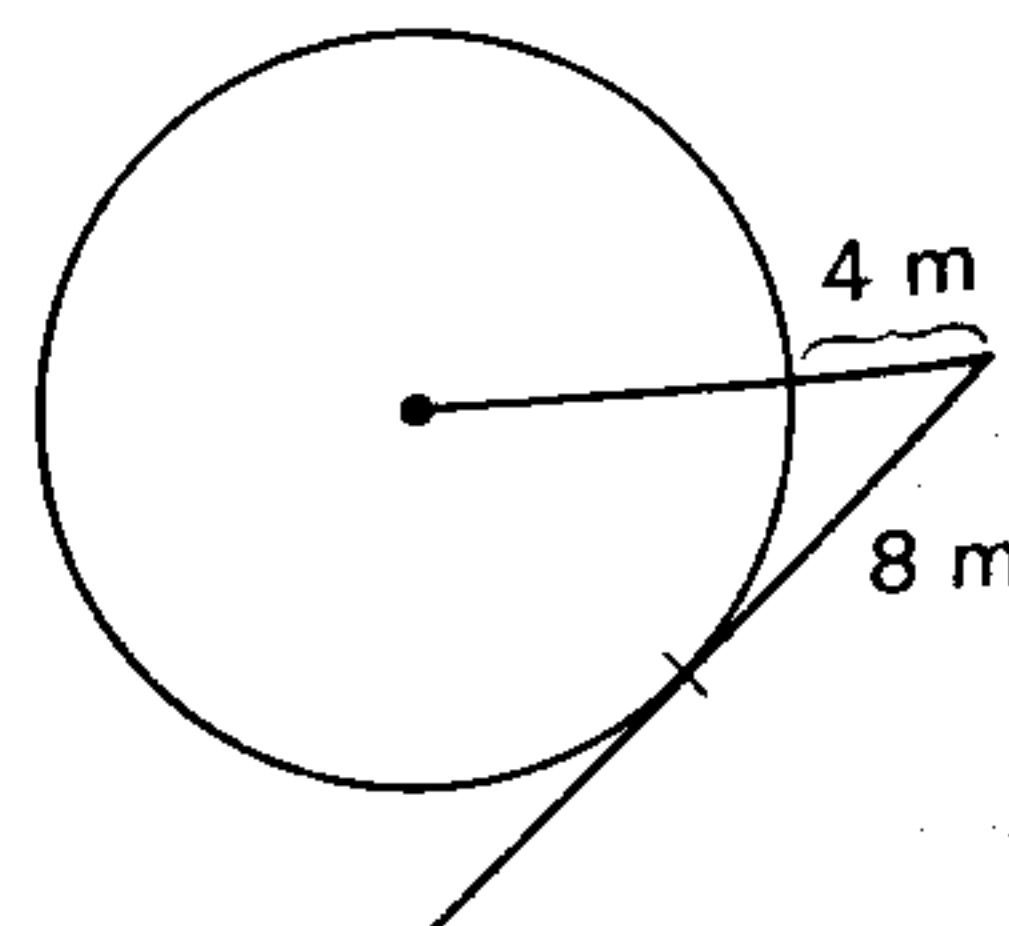
$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 180^\circ \times \frac{1}{\pi} = 180^\circ \times 0{,}31831 = 57^\circ 17' 38{,}4...''$$

EXERCÍCIOS

733. Determine o comprimento da circunferência nos casos:

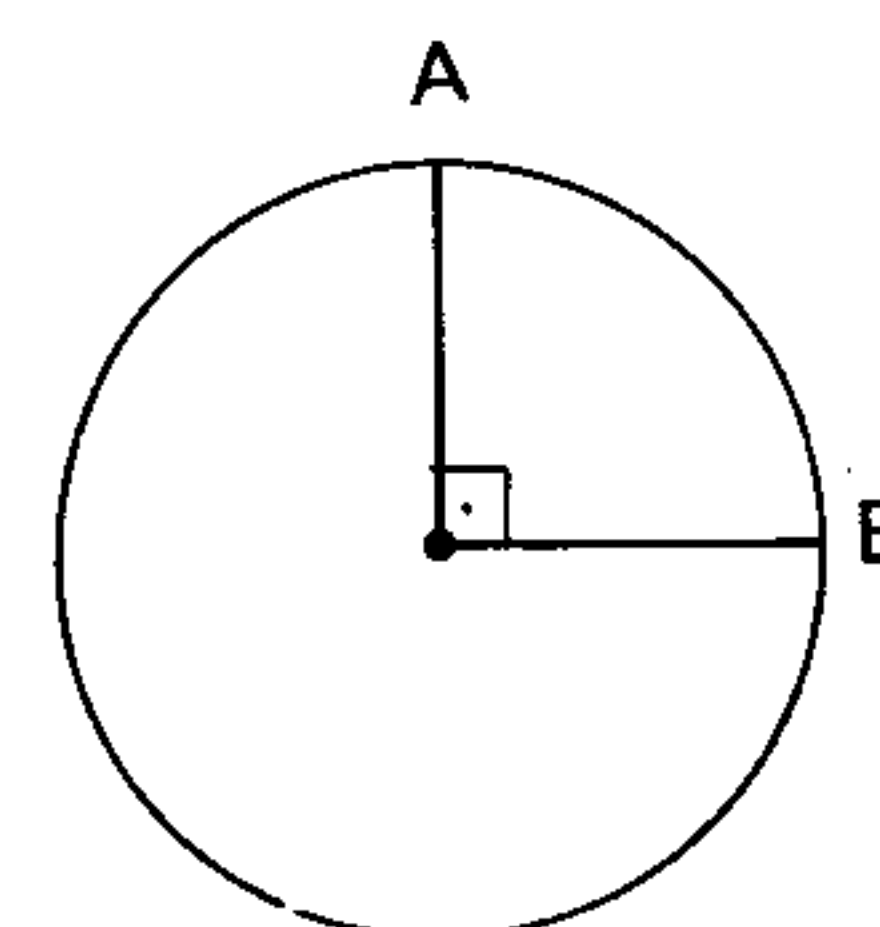
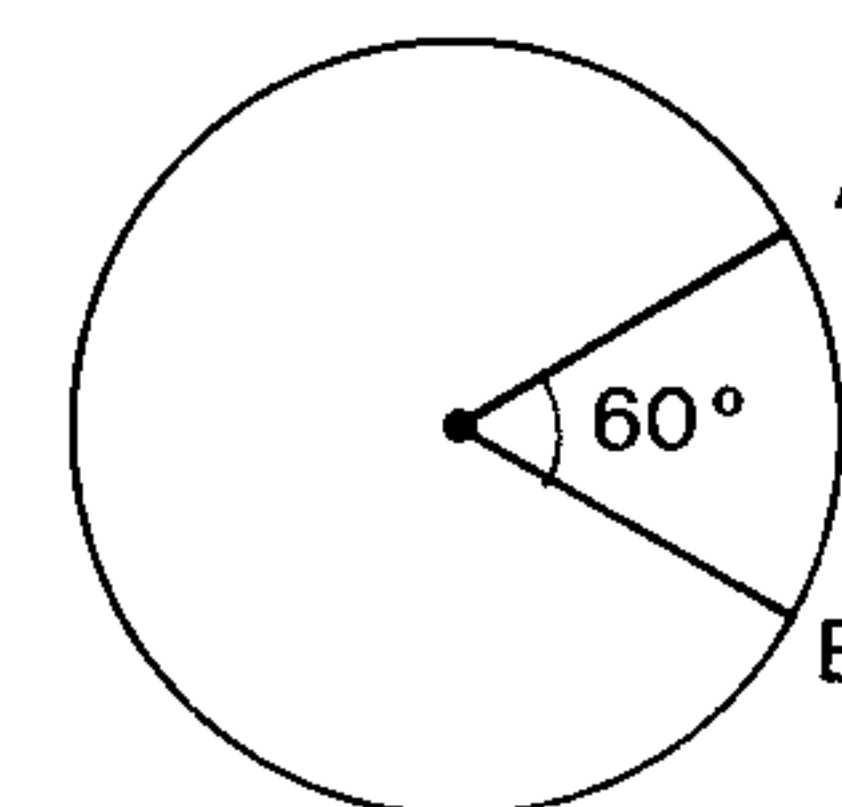
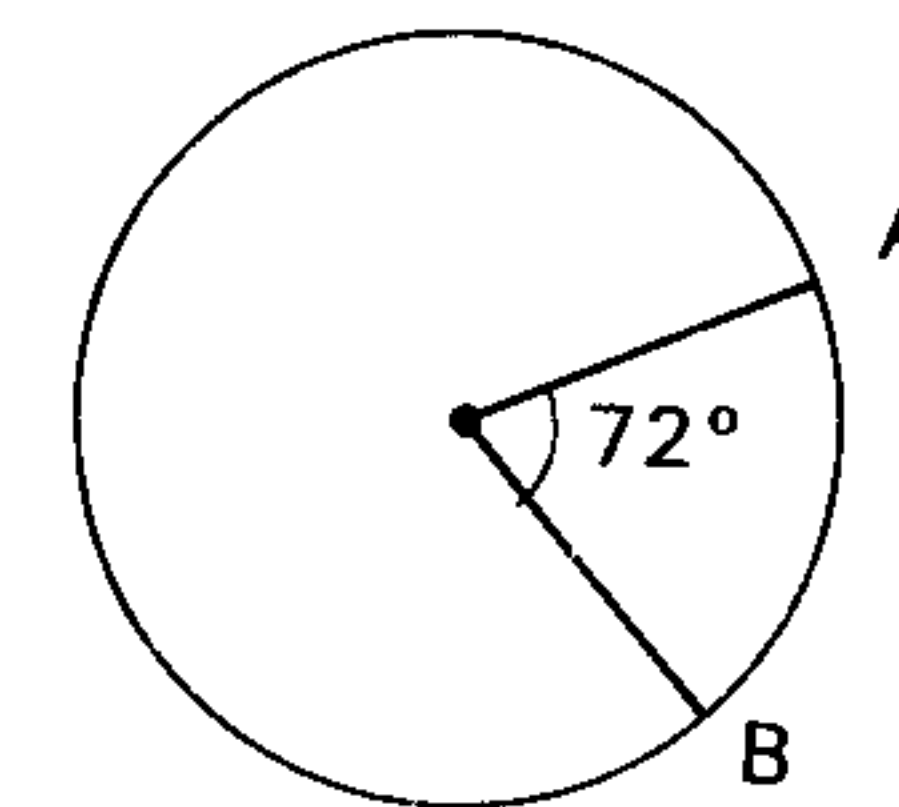
a) 8 m

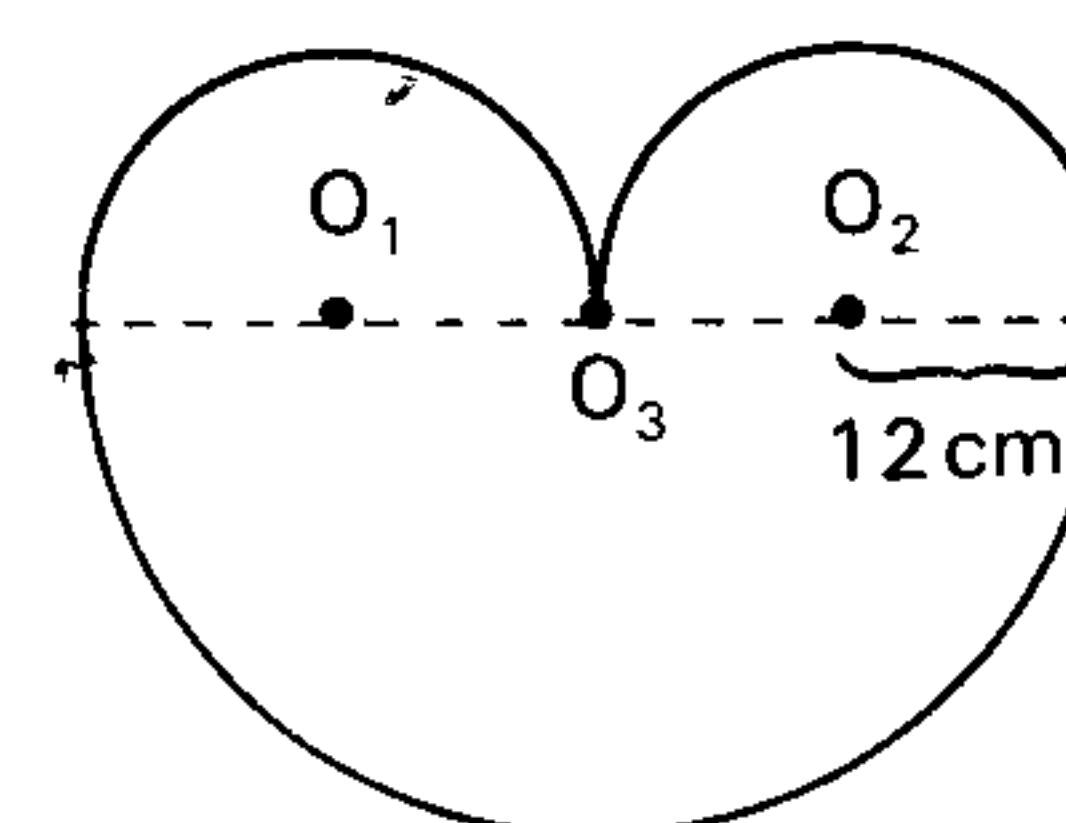
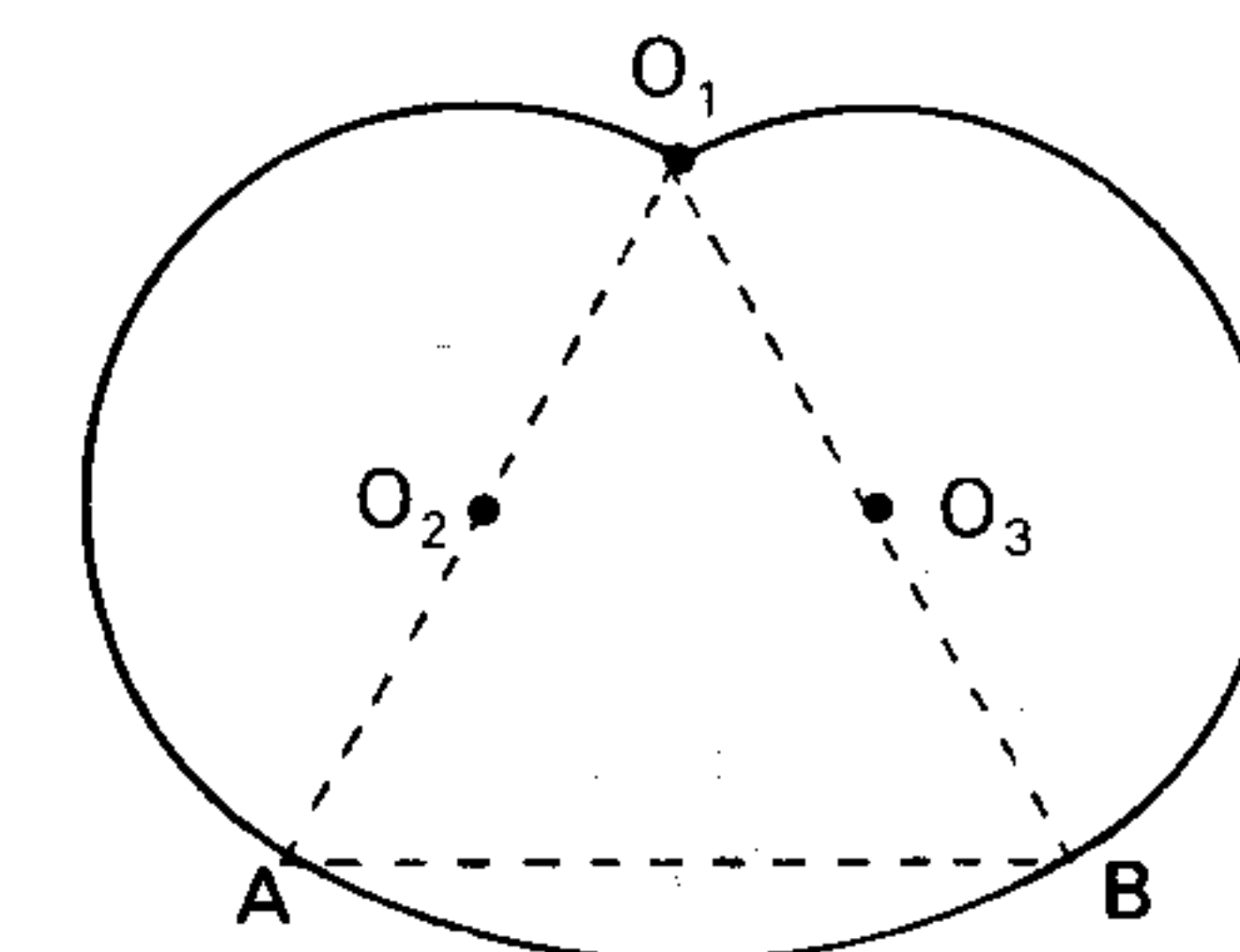
b) 12 cm; 10 cm

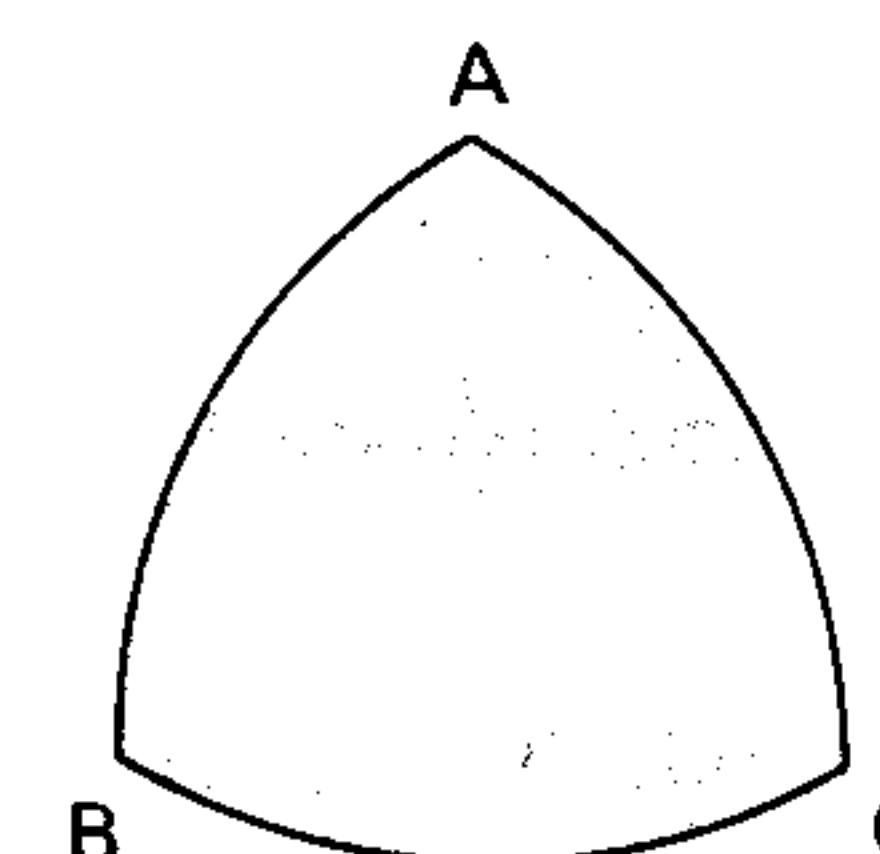
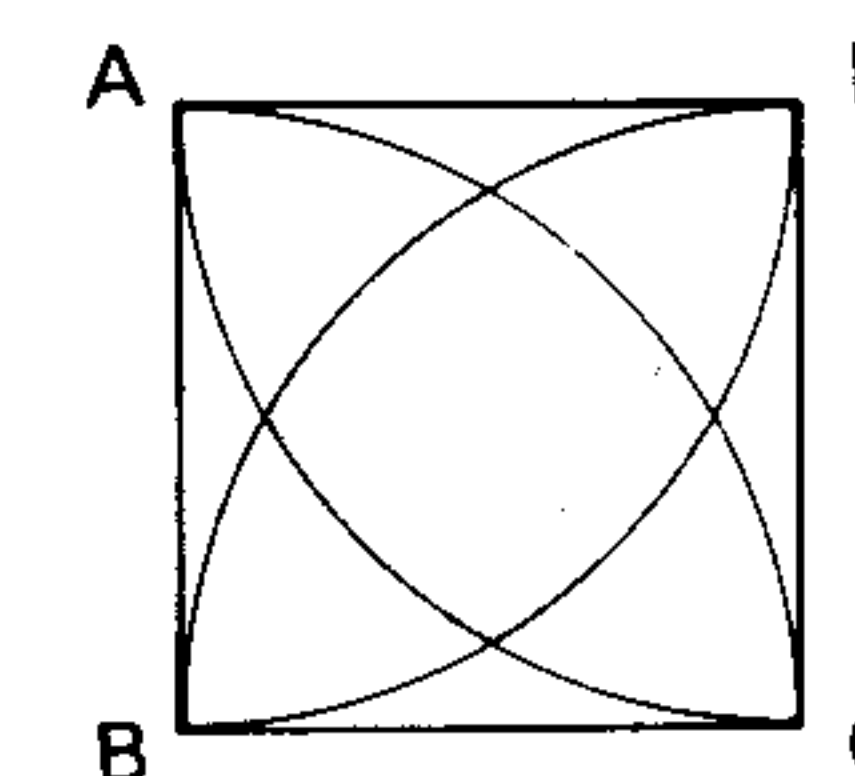
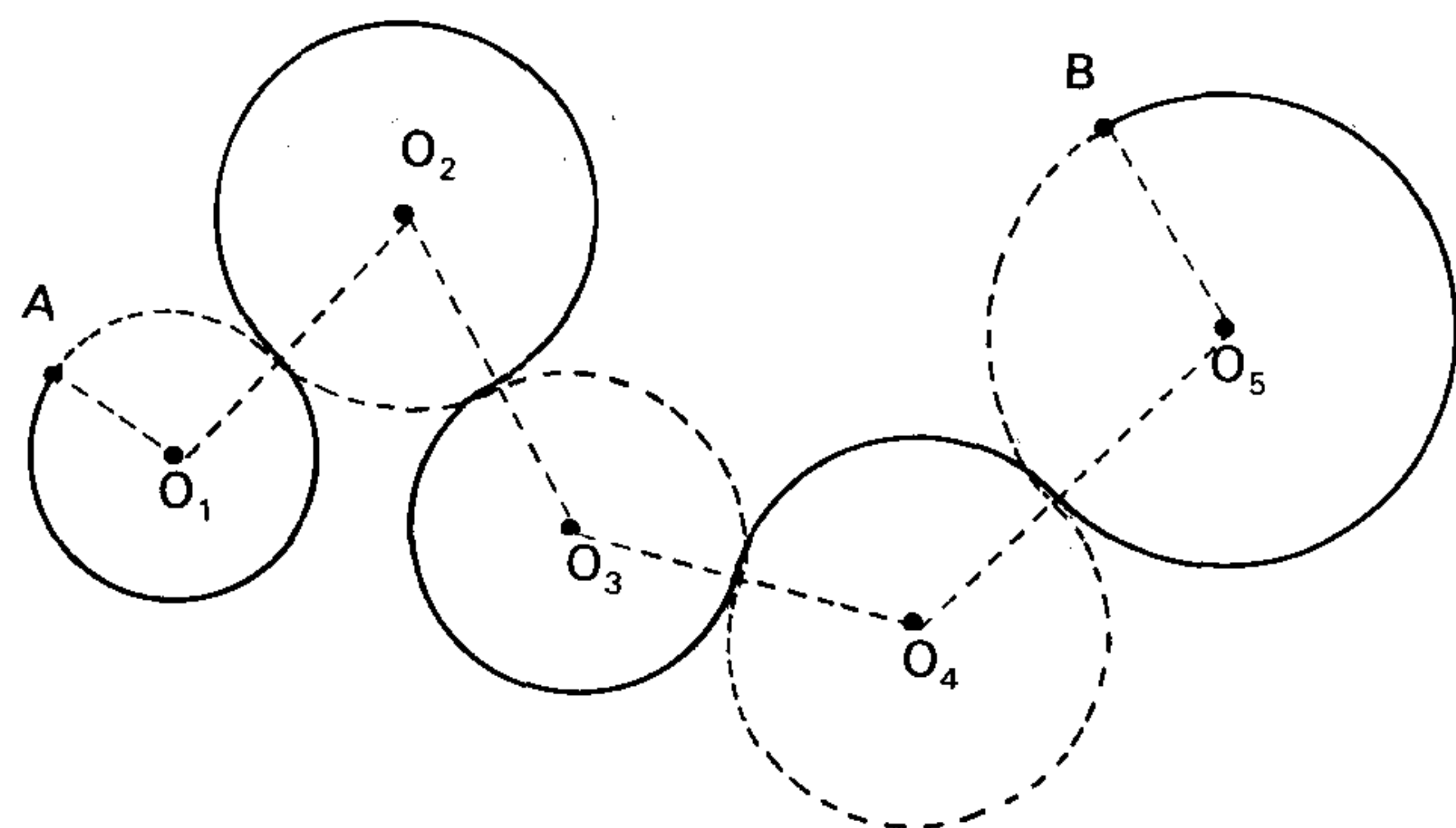
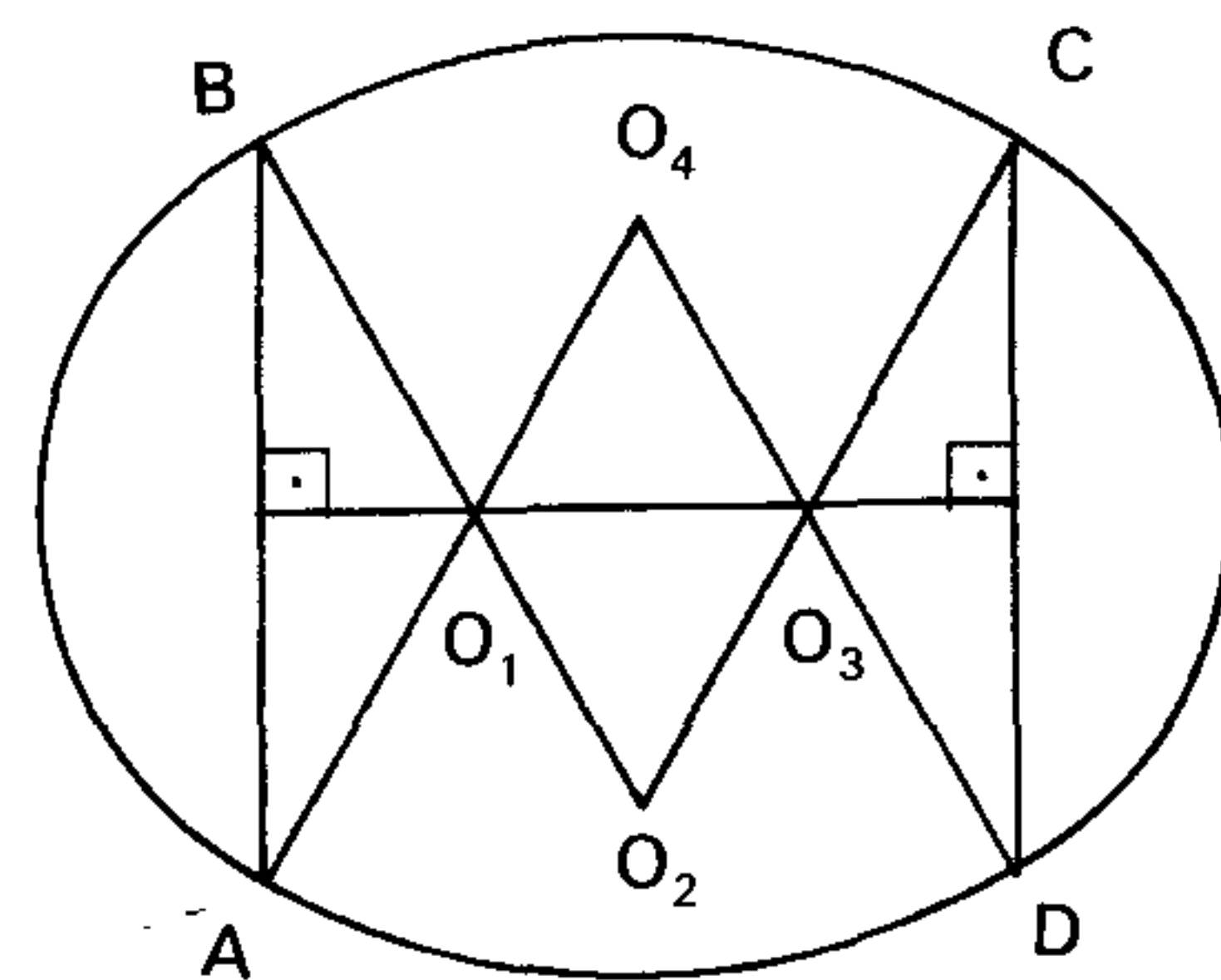
c) 4 m; 8 m

734. Determine o comprimento do arco menor $\widehat{AB}$, dado o raio de *90 cm* e o ângulo central correspondente, nos casos:

a) (ângulo reto)

b) 60°

c) 72°

735. Determine o comprimento da linha cheia nos casos (os arcos são centrados em O_1, O_2 e O_3):

a) 12 cm

b) AO_1B é triângulo equilátero de *12 cm* de lado

736. Determine o perímetro da figura sombreada nos casos:

a) Os arcos têm raios de *12 m* e são centrados em *A*, *B* e *C*.

b) *ABCD* é um quadrado de *48 m* de lado e os arcos são centrados em *A*, *B*, *C* e *D*.

737. Se os ângulos de vértices O_1, O_2, O_3, O_4 e O_5 medem, respectivamente, *90°, 72°, 135°, 120°* e *105°* e os raios das circunferências de centros nestes vértices medem, respectivamente, *18 cm, 35 cm, 24 cm, 36 cm* e *48 cm*, determine o comprimento da linha cheia AB.

738. O traçado de uma pista representada na figura ao lado é composto dos arcos de circunferências AB, BC, CD e DA, centrados respectivamente em O_1, O_2, O_3 e O_4. Se os triângulos $O_1O_2O_3$ e $O_1O_3O_4$ são equiláteros de $60\ m$ de lado e $AB = 120\sqrt{3}\ m$, determine o comprimento da pista.

739. Um círculo tem *4* cm de raio. Calcule o comprimento de sua circunferência.

740. Dê o raio de uma circunferência cujo comprimento é igual ao de uma semicircunferência de *5 cm* de raio.

741. O comprimento de uma circunferência é de *12,56 cm* aproximadamente. Calcule o raio. Adote π com duas casas decimais.

742. O comprimento de uma circunferência é de $12\pi\ cm$. Determine o raio de outra circunferência cujo comprimento é a quarta parte da primeira.

743. Dada uma circunferência de diâmetro d, calcule o comprimento de um arco cujo ângulo central correspondente é:

a) 30° c) 60° e) 120° g) 150°

b) 45° d) 90° f) 135°

744. Se o raio de uma circunferência aumenta *1 m*, quanto aumenta o comprimento?

745. Aumentando em *2 m* o raio de uma circunferência, em quanto aumentará o seu comprimento? O que ocorre com o comprimento se o raio for aumentado em *3 m*? E se o raio for aumentado a metros?

746. A circunferência C_1, de raio R_1 e perímetro $p_1 = 10^3$, é concêntrica à circunferência C_2, de raio R_2 e perímetro $p_2 = 1 + 10^3$. Calcule $R_2 - R_1$.

747. Duplicando o raio de uma circunferência, o que ocorre com seu comprimento?

748. Um arco de comprimento $2\pi R$ de uma circunferência de raio $2R$ subentende um arco de quantos graus?

749. Quanto aumenta o raio de uma circunferência quando seu comprimento aumenta *5 metros*?

750. Em quanto aumenta o comprimento de uma circunferência cujo raio sofreu um aumento de *50%*?

751. Determine o ângulo que subentende um arco de *2 cm* de comprimento numa circunferência de *1 cm* de raio.

752. Se o raio de um círculo aumenta em k unidades, o que ocorre com o comprimento da circunferência?

753. Um arco de circunferência de comprimento $2\pi R$, de uma circunferência de raio G, que ângulo central subentende?

754. As rodas de um automóvel têm *32 cm* de raio. Que distância percorreu o automóvel depois que cada roda deu *8 000* voltas?

Solução

$c = 2\pi R \implies c = 2\pi \cdot 32 = 64\pi$

$d = 8\,000\ c \implies d = 8\,000 \times 64\pi \implies d = 512\,000\pi$

Resposta: $512\,000\ \pi$ cm $\cong$ 16 085 m.

755. Uma pista circular foi construída por duas circunferências concêntricas, cujos comprimentos são de *1 500 m* e *1 200 m* aproximadamente. Quanto mede sua largura?

756. Um ciclista percorreu *26 km* em *1 h* e *50 minutos*. Se as rodas da bicicleta têm *40 cm* de raio, quantas voltas aproximadamente deu cada roda e quantas por minuto?

757. As rodas dianteiras de um carro têm *1 m* de raio e dão *25* voltas ao mesmo tempo em que as traseiras dão *20* voltas. Calcule o raio das rodas traseiras e quanto percorreu o carro depois que as rodas dianteiras deram *100* voltas cada uma.

758. Os ponteiros de um relógio medem *1 cm* e *1,5 cm*, respectivamente. A circunferência descrita pelo ponteiro maior tem comprimento maior que a circunferência descrita pelo ponteiro menor. Determine essa diferença.

759. Um menino brinca com um aro de *1 m* de diâmetro. Que distância percorreu o menino ao dar *100* voltas com o aro?

760. Um carpinteiro vai construir uma mesa redonda para acomodar *6* pessoas sentadas ao seu redor. Determine o diâmetro dessa mesa para que cada pessoa possa dispor de um arco de *50 cm* na mesa.

761. As rodas dianteiras de um caminhão têm *50 cm* de raio e dão *25* voltas no mesmo tempo em que as rodas traseiras dão *20* voltas. Determine o diâmetro das rodas traseiras.

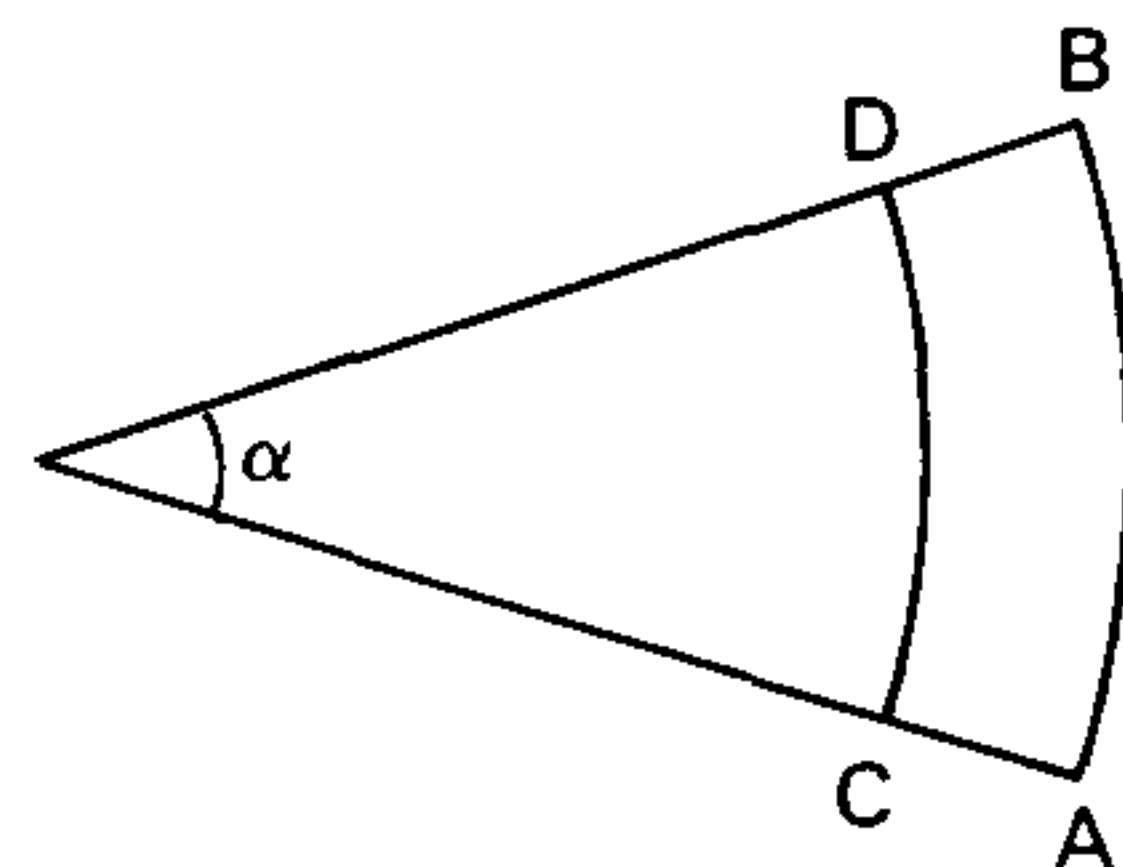
762. Uma pista circular está limitada por duas circunferências concêntricas cujos comprimentos valem, respectivamente, *3 000 m* e *2 400 m*. Determine a largura da pista.

763. Para ir de um ponto A a um ponto B posso percorrer a semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e centro O. Se percorrer as duas semicircunferências de diâmetros $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$, terei percorrido um caminho maior ou menor?

764. Quantas voltas dá uma das rodas de um carro num percurso de *60 km*, sabendo que o diâmetro dessa roda é igual a *1,20 m*?

765. Uma corda determina em um círculo um arco que mede $80°$. Sendo *20 cm* o comprimento desse arco, determine a medida do raio desse círculo.

766. O comprimento de um arco $\widehat{AB}$ é *1 cm*, o ângulo central do setor circular delimitado por esse arco mede $60°$. Determine o raio do círculo ao qual pertence esse setor.

767. Na figura ao lado, calcule a medida do ângulo central α, sabendo que os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ medem respectivamente *100 cm* e *80 cm*, e que $CA = DB = 25$ *cm*. Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ são centrados em O.

768. Num círculo uma corda de *3 cm* dista *2 cm* do centro. Calcule o comprimento da circunferência.

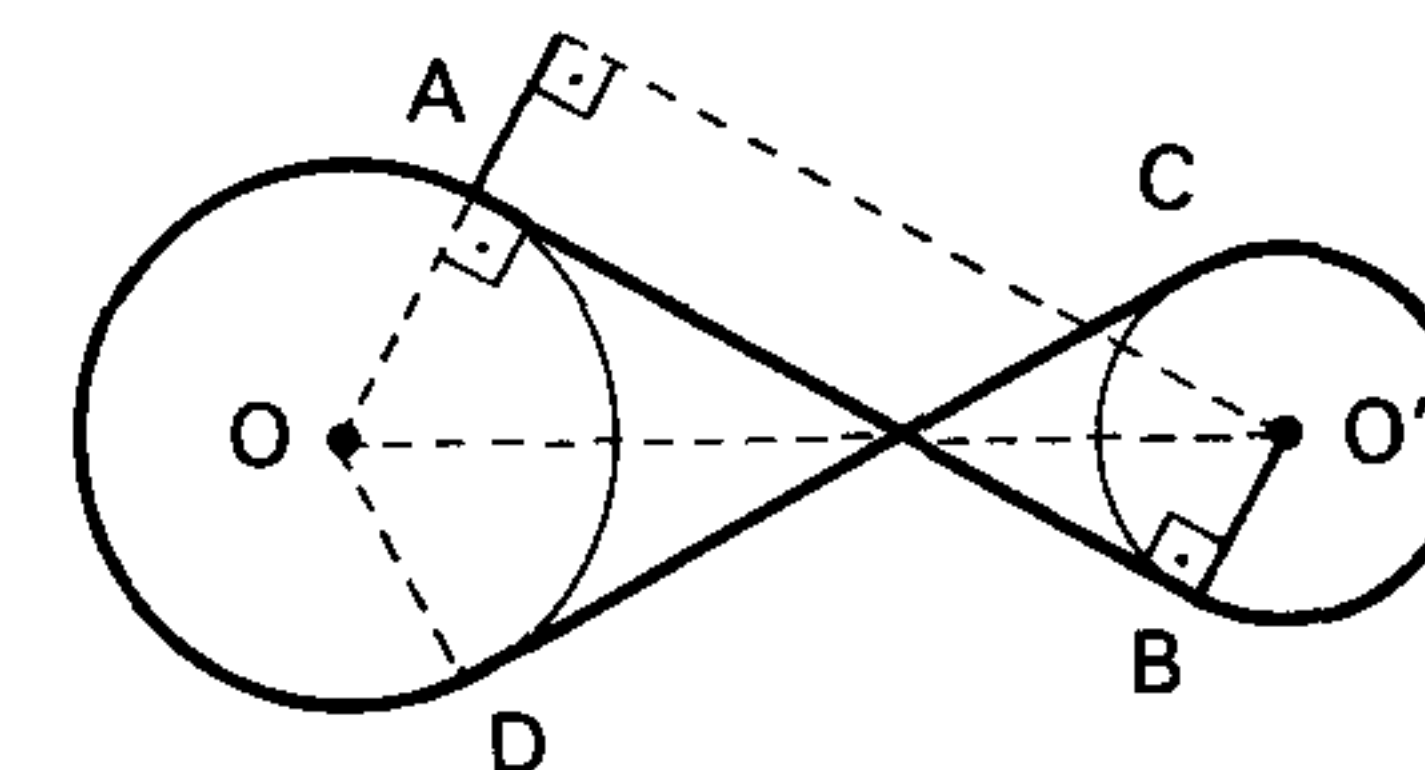
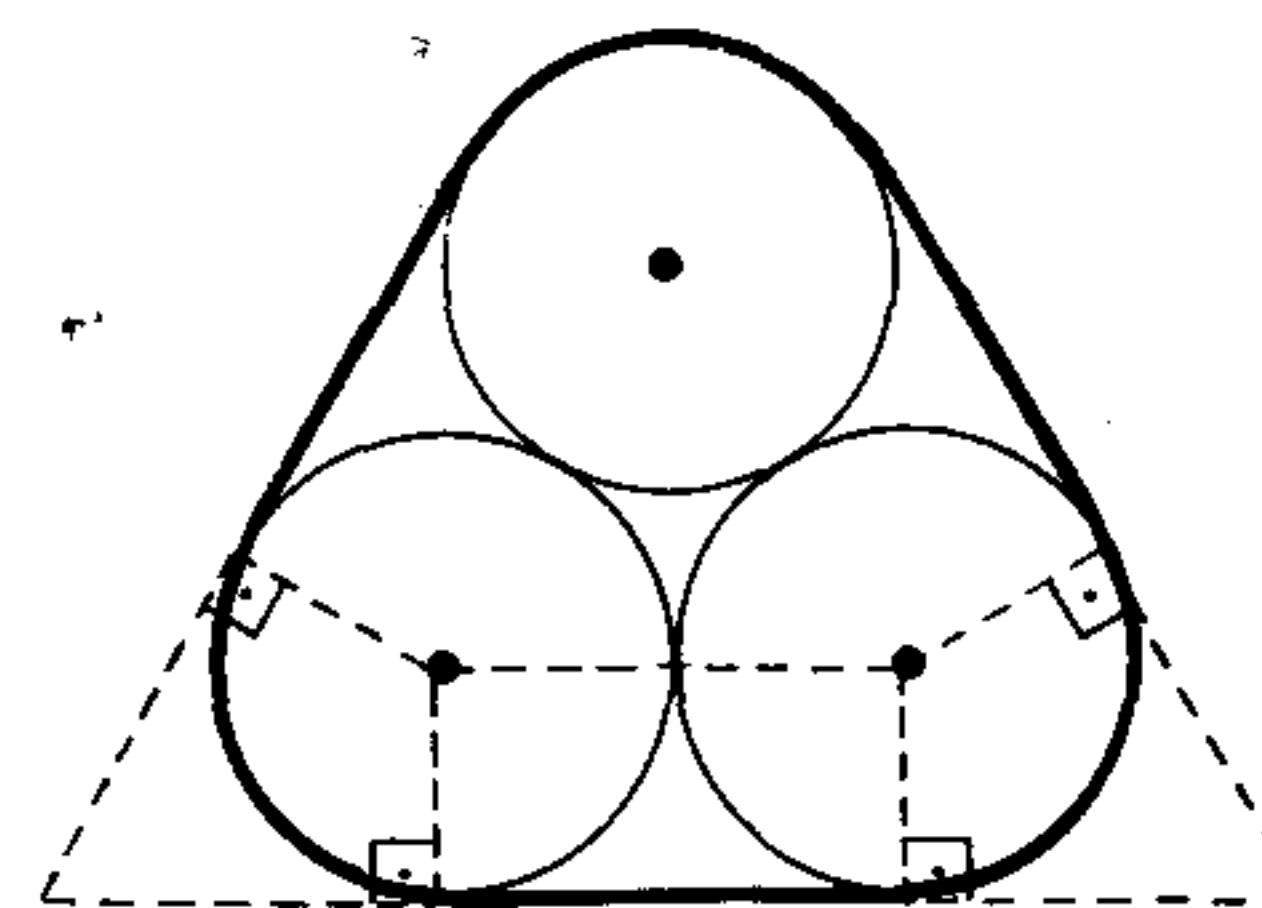
769. Determine o comprimento de uma circunferência circunscrita a um quadrado de *4 cm* de lado.

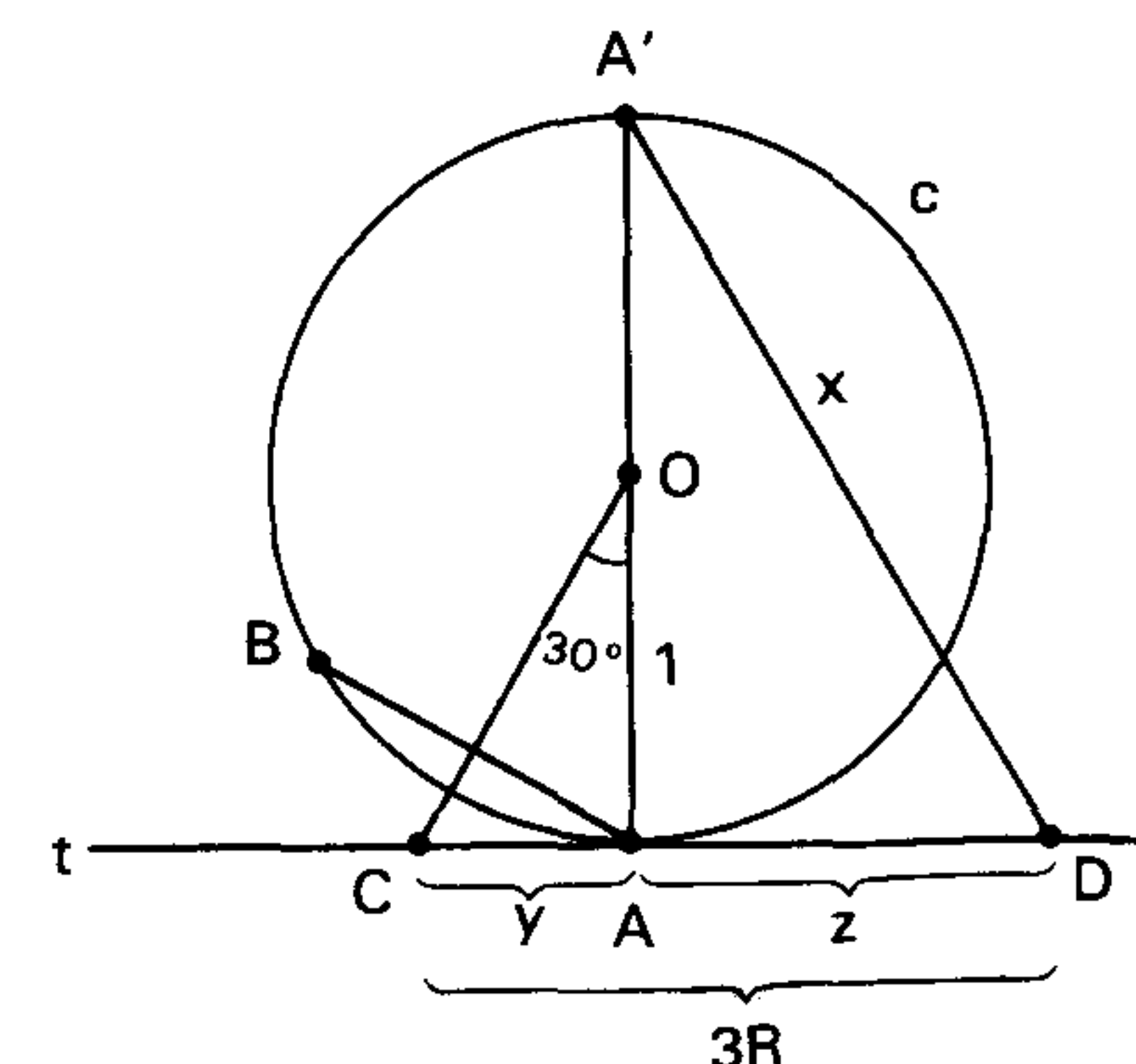
770. Uma corda $\overline{AB}$, distando *3 cm* do centro de um círculo de diâmetro *12 cm*, determina nesse círculo dois arcos. Determine a razão entre a medida do maior e a do menor arco desse círculo.

771. Calcule o comprimento de uma circunferência inscrita em um quadrado de *10 cm* de diagonal.

772. O comprimento de uma circunferência é de 8π *cm*. Determine o raio da circunferência e o perímetro do quadrado inscrito.

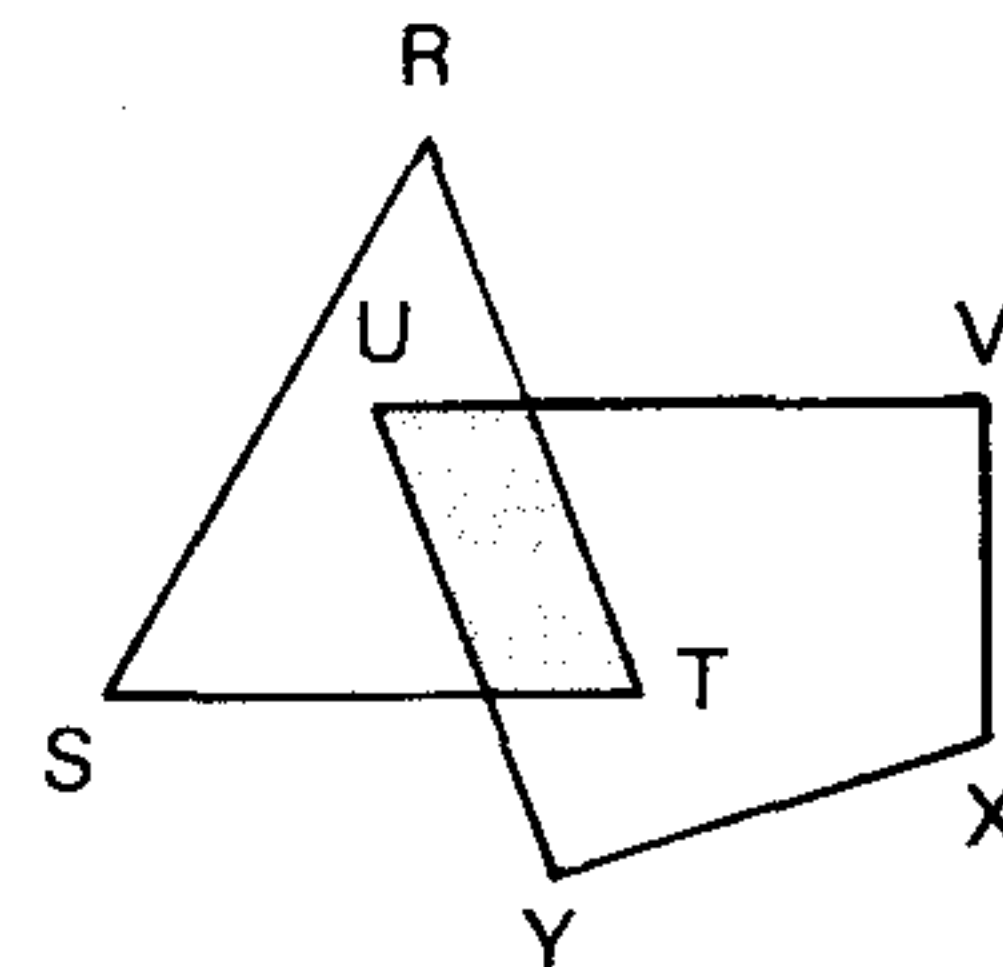
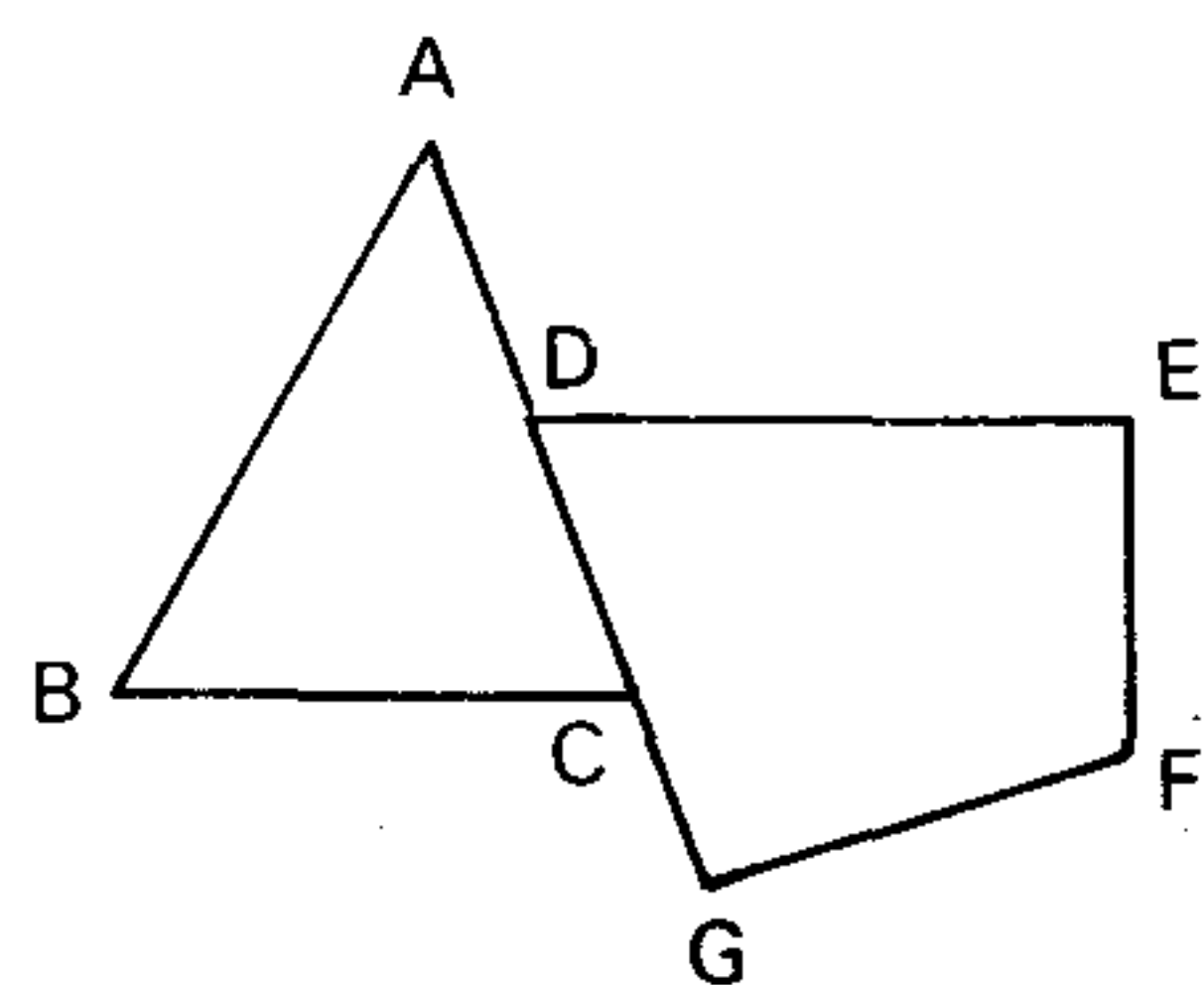
773. Na figura abaixo, os três círculos têm mesmo raio r igual a *10 cm*. Determine o comprimento da correia que envolve os três círculos.

774. Na figura ao lado, determine o comprimento da corrente que envolve as duas rodas, sabendo que o raio da roda menor mede *2 cm* e o raio da roda maior *4 cm* e a distância entre os centros das duas rodas mede *12 cm*.

775. Sejam um círculo c de centro O, de raio $R = 1$, diâmetro $\overline{AA'}$ e a tangente t em A ao círculo c. $\overline{AB}$ sendo um lado do hexágono regular inscrito em c, a mediatriz de $\overline{AB}$ corta a reta t em C. Construamos sobre t o segmento $\overline{CD} = 3R$. Mostre que o comprimento $\overline{A'D}$ é um valor aproximado de π.

CAPÍTULO XVIII

Equivalência Plana

I. Definições

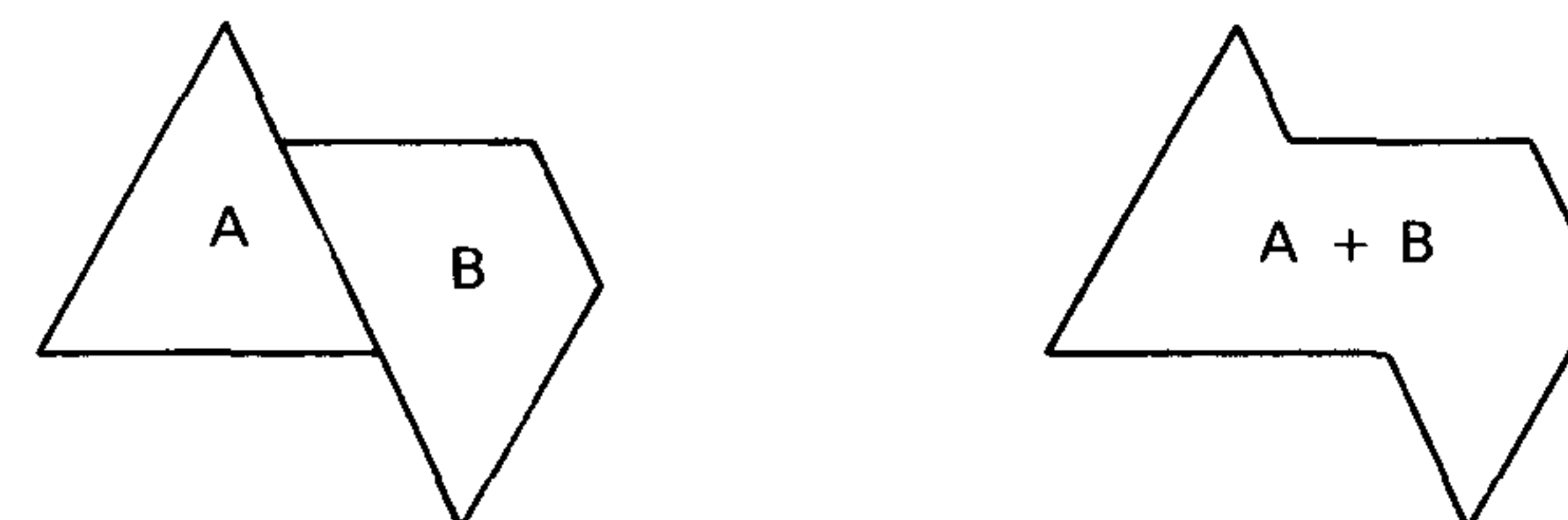
229. *Polígonos contíguos ou adjacentes*

Dois polígonos são chamados *contíguos* ou *adjacentes* quando têm em comum somente pontos de seus contornos.

ABC e *DEFG* são contíguos. *RST* e *UVXY* não são contíguos.

Neste capítulo estamos considerando como *polígono* toda a região do plano também chamada de *região poligonal.*

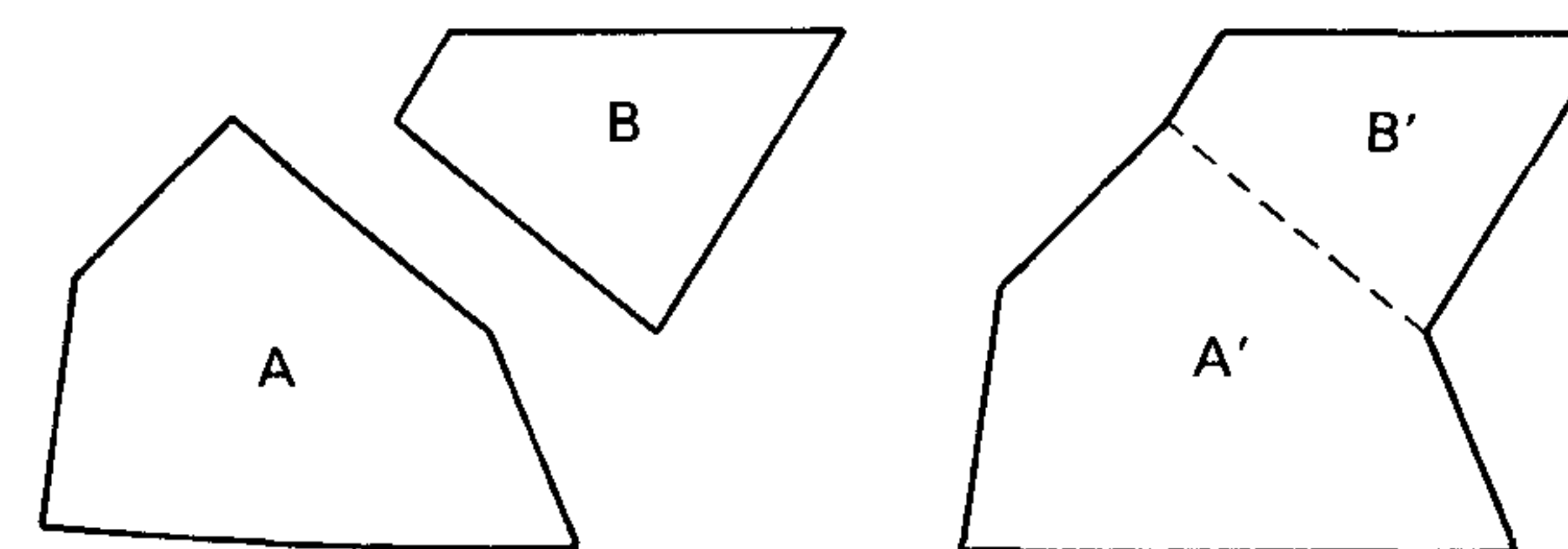
230. *Soma de polígonos*

1. Soma de polígonos contíguos

Chama-se *soma* de dois polígonos *contíguos* a superfície constituída pelos pontos desses polígonos comuns e os não comuns a eles.

Temos, então: *A* e *B* contíguos.

$x \in (A + B) \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$, ou ainda, $A + B = A \cup B$

2. Soma de dois polígonos quaisquer

Soma de dois polígonos *quaisquer*, *A* e *B*, é definida como sendo a soma dos polígonos contíguos *A'* e *B'* em que *A'* é congruente a *A* e *B'* é congruente a *B*.

$A' \equiv A$
$B' \equiv B$
$(A + B) = (A' + B')$
$\equiv$: congruente

231. *Equivalência entre polígonos*

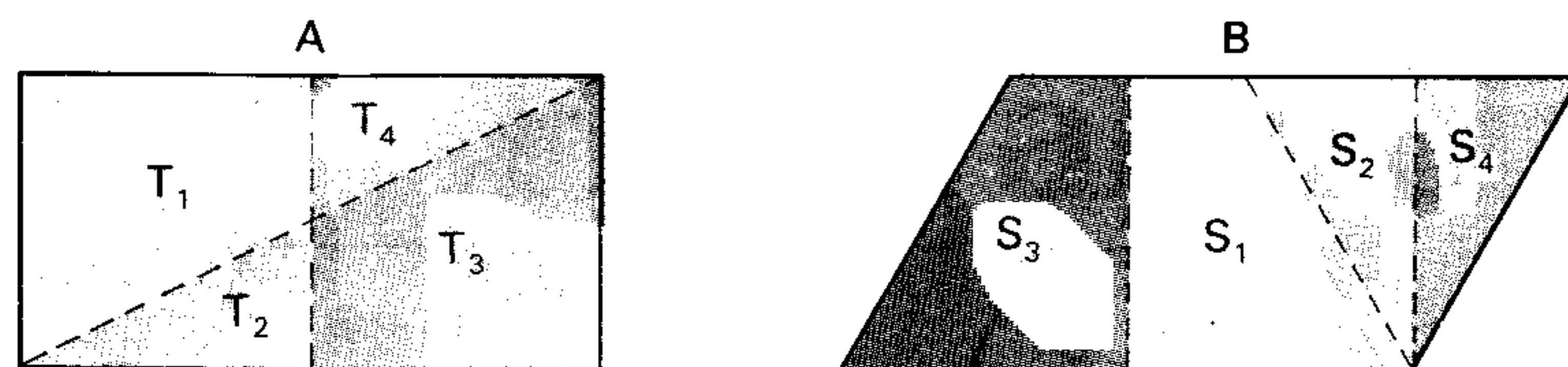
Dois polígonos são chamados *equivalentes* ou *equicompostos* se, e somente se, forem somas de *igual número* de polígonos *dois a dois congruentes* entre si.

Em símbolos:

$$\left(T_i \equiv S_i,\ A = \sum_{i=1}^{n} T_i,\ B = \sum_{i=1}^{n} S_i\right) \iff A \approx B$$

Notemos que A e B são somas de n polígonos e que cada polígono-parcela T_i de A é congruente a um polígono-parcela S_i de B e reciprocamente.

O símbolo $\approx$ está sendo usado para a equivalência.

A T₁ T₂ T₃ T₄ — B S₁ S₂ S₃ S₄

$$\begin{pmatrix} T_1 \equiv S_1,\ T_2 \equiv S_2,\ T_3 \equiv S_3,\ T_4 \equiv S_4 \\ A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ B = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \approx B$$

Por extensão, dois polígonos congruentes são equivalentes.

232. Propriedades

1) *Reflexiva*: $A \approx A$

2) *Simétrica*: $A \approx B \iff B \approx A$

3) *Transitiva*: $\left.\begin{matrix} A \approx B \\ B \approx C \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A \approx C$

4) *Uniforme*:

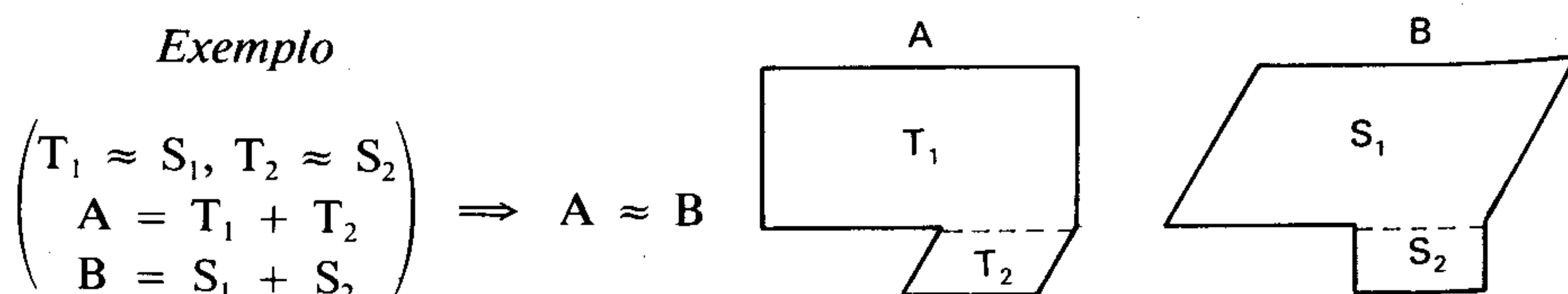
"Somas de polígonos dois a dois equivalentes entre si são superfícies equivalentes entre si."

Em símbolos:

$$\left(T_i \approx S_i,\ A = \sum_{i=1}^{n} T_i,\ B = \sum_{i=1}^{n} S_i\right) \Longrightarrow A \approx B$$

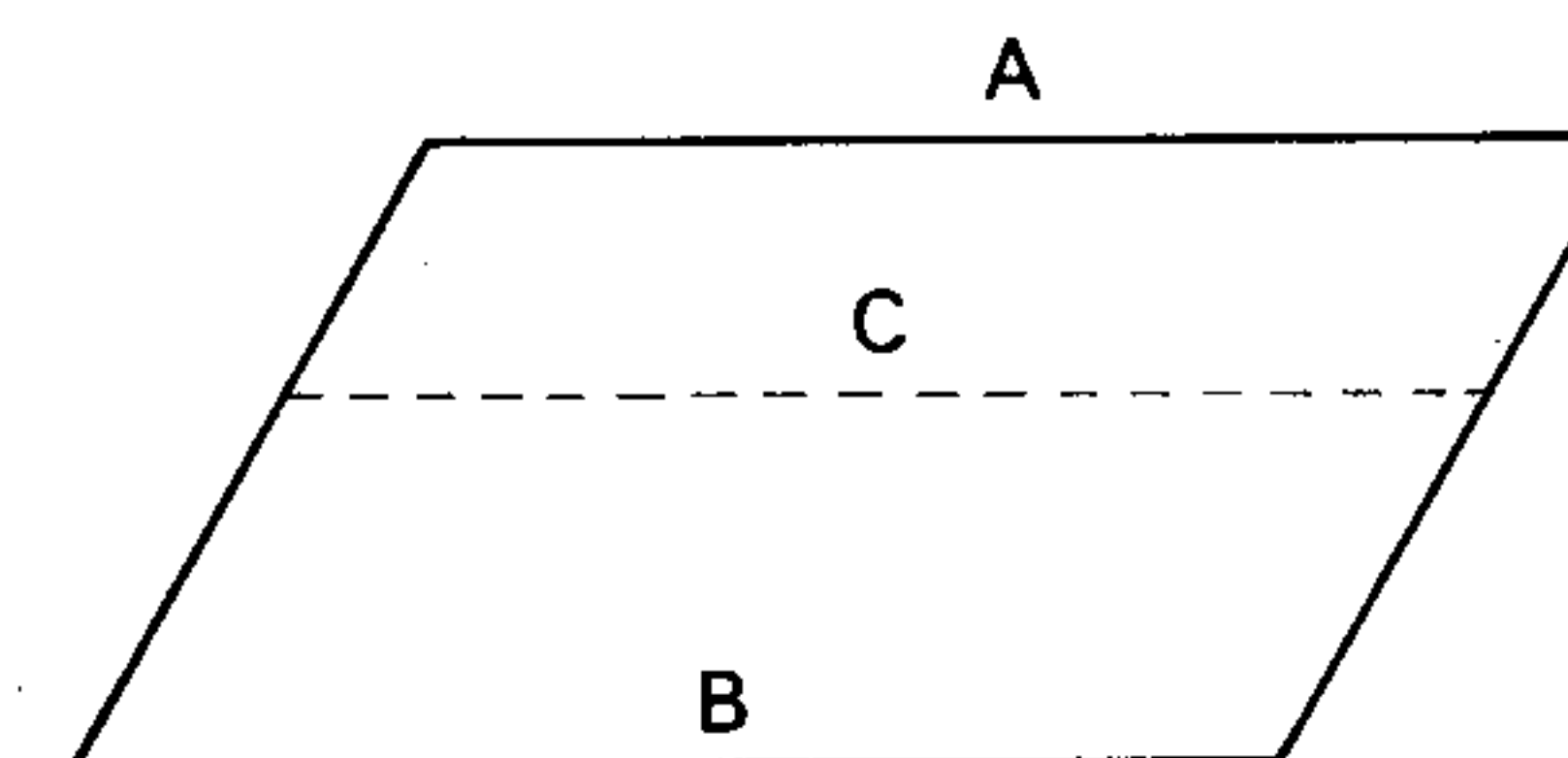
Exemplo

$$\begin{pmatrix} T_1 \approx S_1,\ T_2 \approx S_2 \\ A = T_1 + T_2 \\ B = S_1 + S_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \approx B$$

A T₁ T₂ — B S₁ S₂

5) *Disjuntiva — postulado de De Zolt*

"Um polígono, que é soma de dois ou mais outros, não é equivalente a nenhuma das parcelas."

Exemplo

A C B

$$A = B + C \Longrightarrow A \not\approx B \text{ e } A \not\approx C$$

233. Notas

1ª) As propriedades *1, 2, 3* e *4* são de demonstrações imediatas em vista da definição de equivalência.

2ª) A propriedade *5* não tem demonstração (é postulado) e também pode ser colocada como segue:

Dados dois polígonos P e Q quaisquer, de três possibilidades ocorre uma (e uma só):

ou P é equivalente a Q: $P \approx Q$;

ou Q é equivalente a uma parte de P:

$$P = P_1 + P_2 \text{ e } P_1 \approx Q;$$

ou P é equivalente a uma parte de Q:

$$Q = Q_1 + Q_2 \text{ e } Q_1 \approx P$$

II. Redução de polígonos por equivalência

234. Teorema

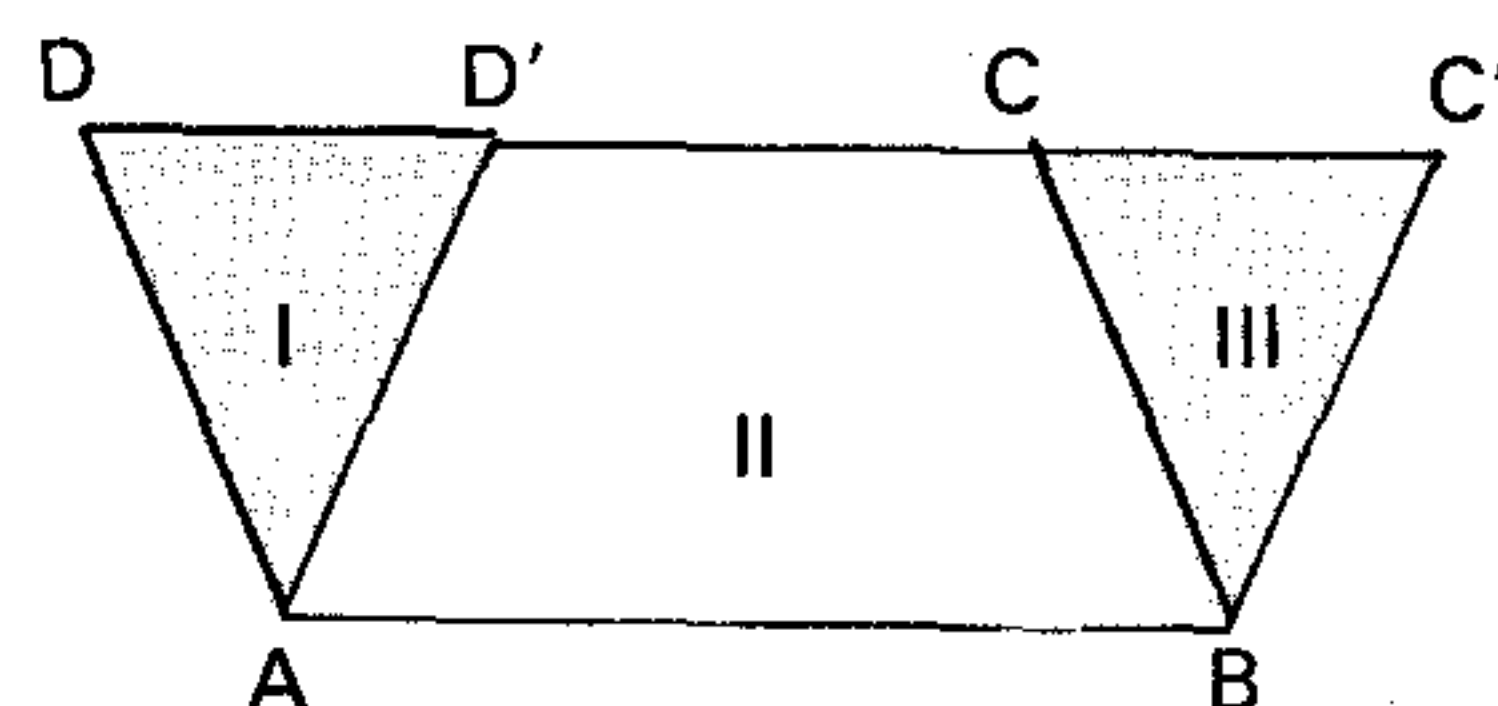
"Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes."

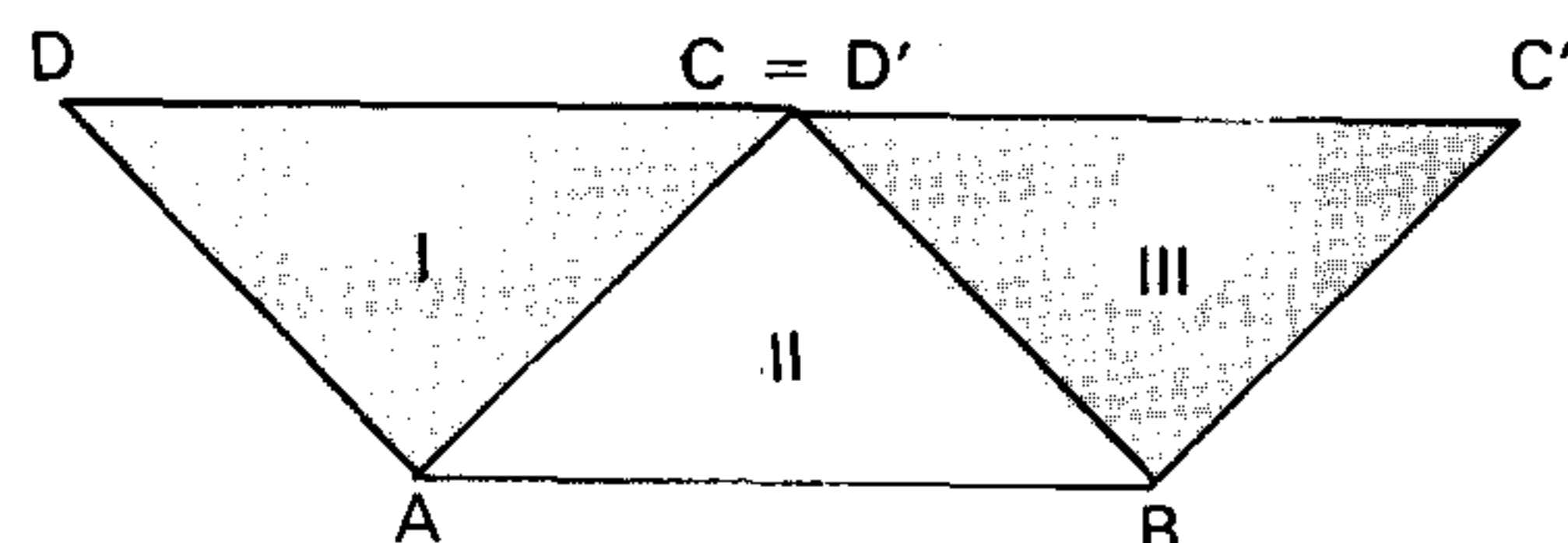
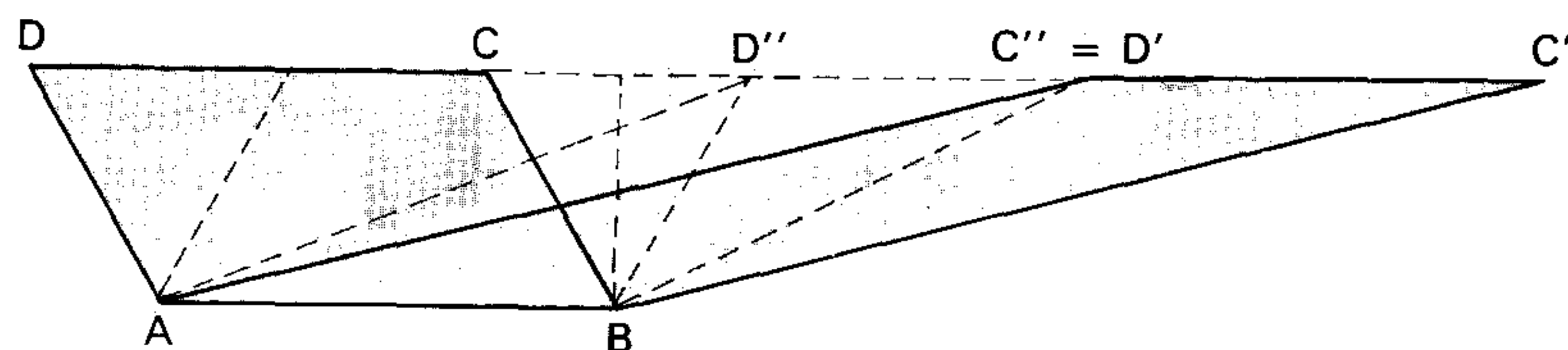
Demonstração

Sem perda de generalidade, consideremos os paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ com base $\overline{AB}$ e com alturas congruentes.

Podem-se apresentar três casos:

1º caso: $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ têm um segmento comum

$$\frac{\left.\begin{array}{l} I \equiv III \\ II \equiv II \end{array}\right\} +}{(I + II) \approx (II + III)}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$ABCD \approx ABC'D'$$

2º caso: $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ têm só um ponto comum

$$\frac{\left.\begin{array}{l} I \equiv III \\ II \equiv II \end{array}\right\} +}{(I + II) \approx (II + III)}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$ABCD \approx ABC'D'$$

3º caso: $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ não têm ponto comum

Por aplicação dos casos anteriores, da propriedade transitiva e do postulado de Arquimedes:

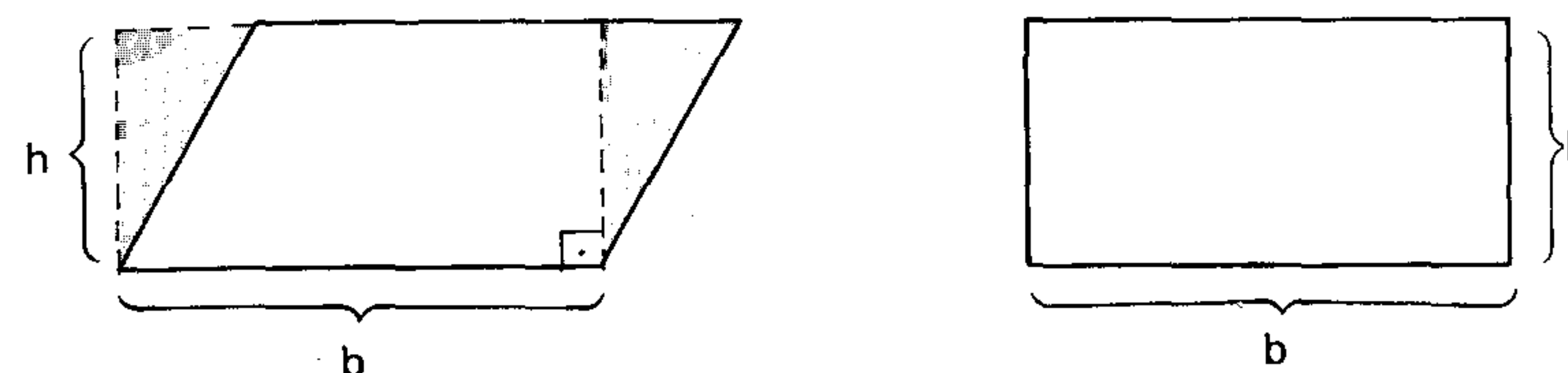
"dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro".

temos:

$$ABC'D' \approx ABC''D'' \approx \ldots \approx ABCD \Longrightarrow ABCD \approx ABC'D'$$

235. *Nota*

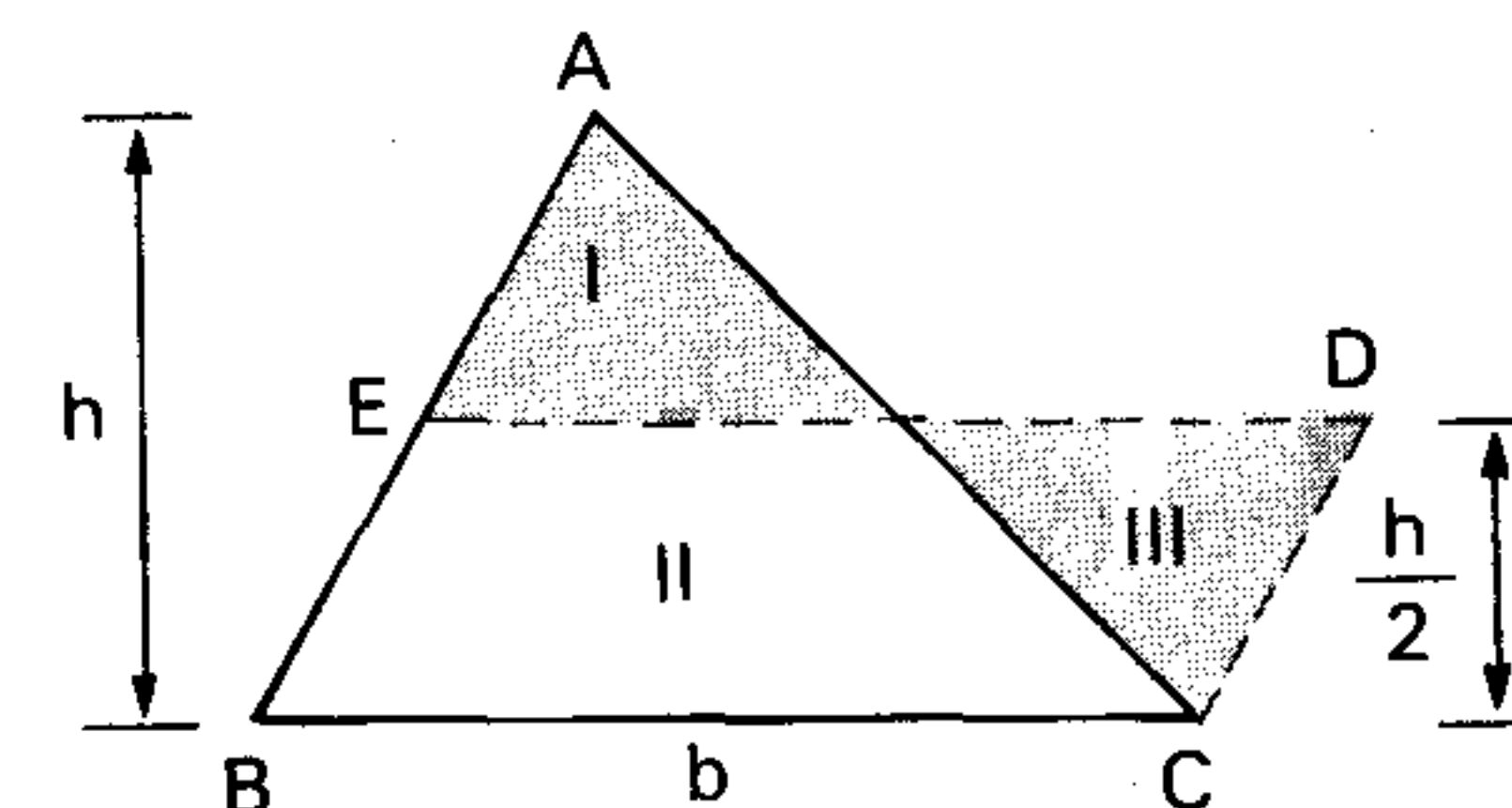
Devido ao teorema acima, temos em particular que:

"Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo".

236. *Teorema*

"Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo."

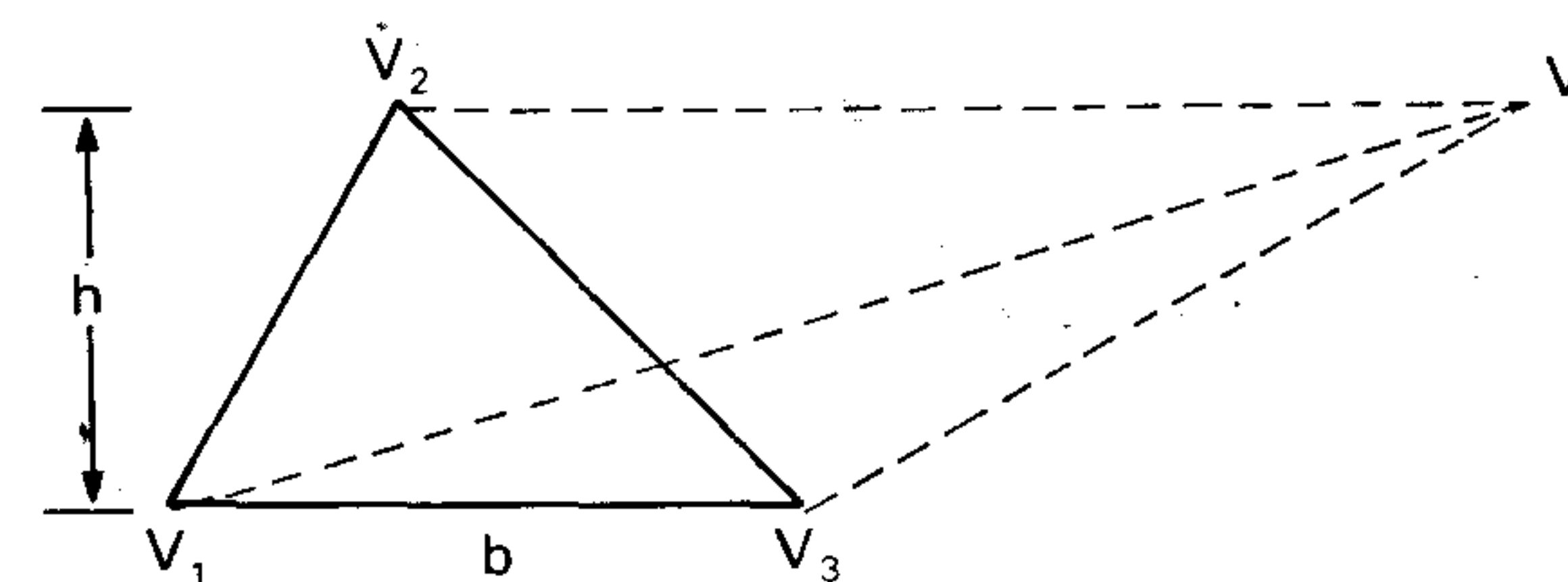
Demonstração

Pelo ponto médio E de $\overline{AB}$ conduzimos $\overline{ED}$ paralela a $\overline{BC}$ e completamos o paralelogramo $BCDE$.

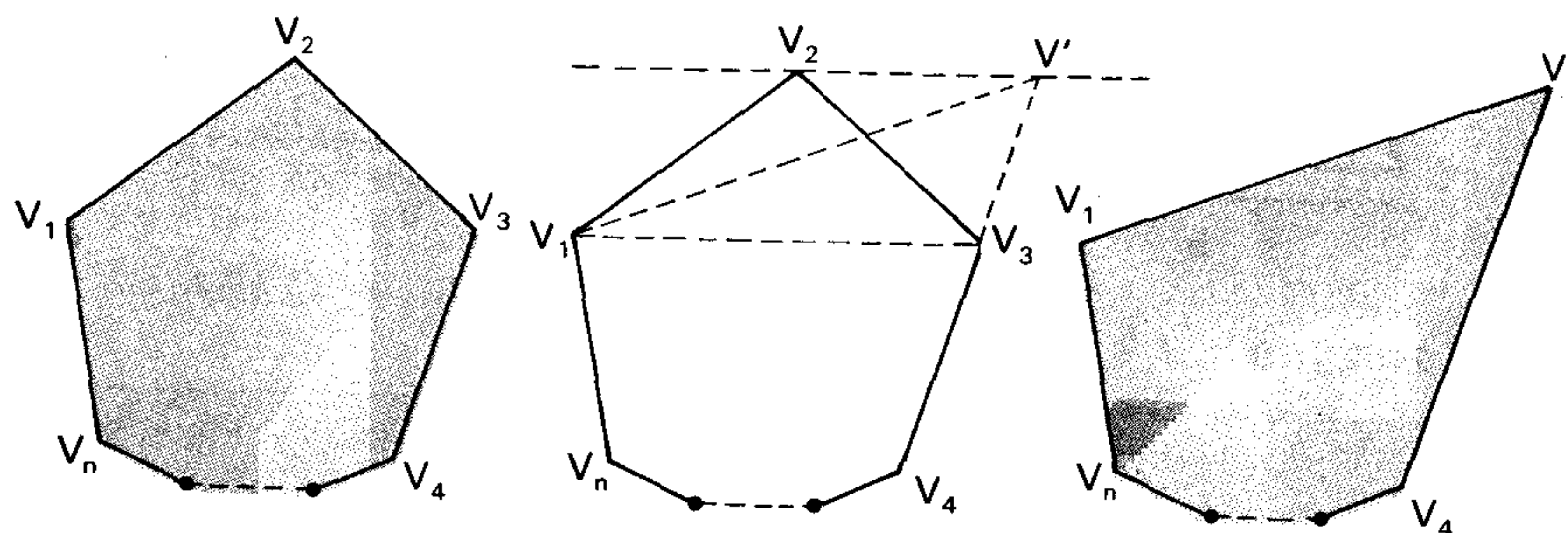
$$\frac{\left.\begin{array}{l} I \equiv III \\ II \equiv II \end{array}\right\} +}{(I + II) \approx (II + III)} \Longrightarrow ABC \approx BCDE$$

237. *Nota*

Em vista do resultado acima e do anterior temos em particular que:

"Dois triângulos de bases e alturas ordenadamente congruentes são equivalentes".

$$\Delta V_1V_2V_3 \approx \Delta V_1V'V_3$$

238. Teorema

"Dado um polígono convexo com n lados (n > 3), existe um polígono convexo com $(n - 1)$ lados que lhe é equivalente.

Seja dado o polígono Pol $(V_1V_2V_3V_4 \dots V_n)$ e seja V' a interseção da reta $\overline{V_3V_4}$ com a reta paralela a $\overline{V_1V_3}$ por V_2.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pol}(V_1V_2V_3V_4 \dots V_n) = \Delta V_1V_2V_3 + \text{Pol}(V_1V_3V_4 \dots V_n) \\ \text{Pol}(V_1V'V_4 \dots V_n) \quad = \Delta V_1V'V_3 + \text{Pol}(V_1V_3V_4 \dots V_n) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Pol}(V_1V_2V_3V_4 \dots V_n) \approx \text{Pol}(V_1V'V_4 \dots V_n)$$

n lados — (n − 1) lados

239. Nota

Em vista dos itens 234, 236 e 238, podemos reduzir por equivalência um *polígono* de n lados (n > 3) a um *triângulo* equivalente, este a um *paralelogramo* equivalente e este a um *retângulo* equivalente. Então, vale:

"*Todo polígono é equivalente a um retângulo*".

240. Relação de Pitágoras por equivalência

Consideremos um triângulo retângulo ABC de hipotenusa a e catetos b e c.

O quadrado $BCDE$ de lado a é o quadrado construído sobre a hipotenusa (ou o quadrado da hipotenusa) e os quadrados $ABRS$ de lado c e $ACVU$ de lado b são os quadrados construídos sobre os catetos (ou os quadrados dos catetos) (figura 1).

figura 1

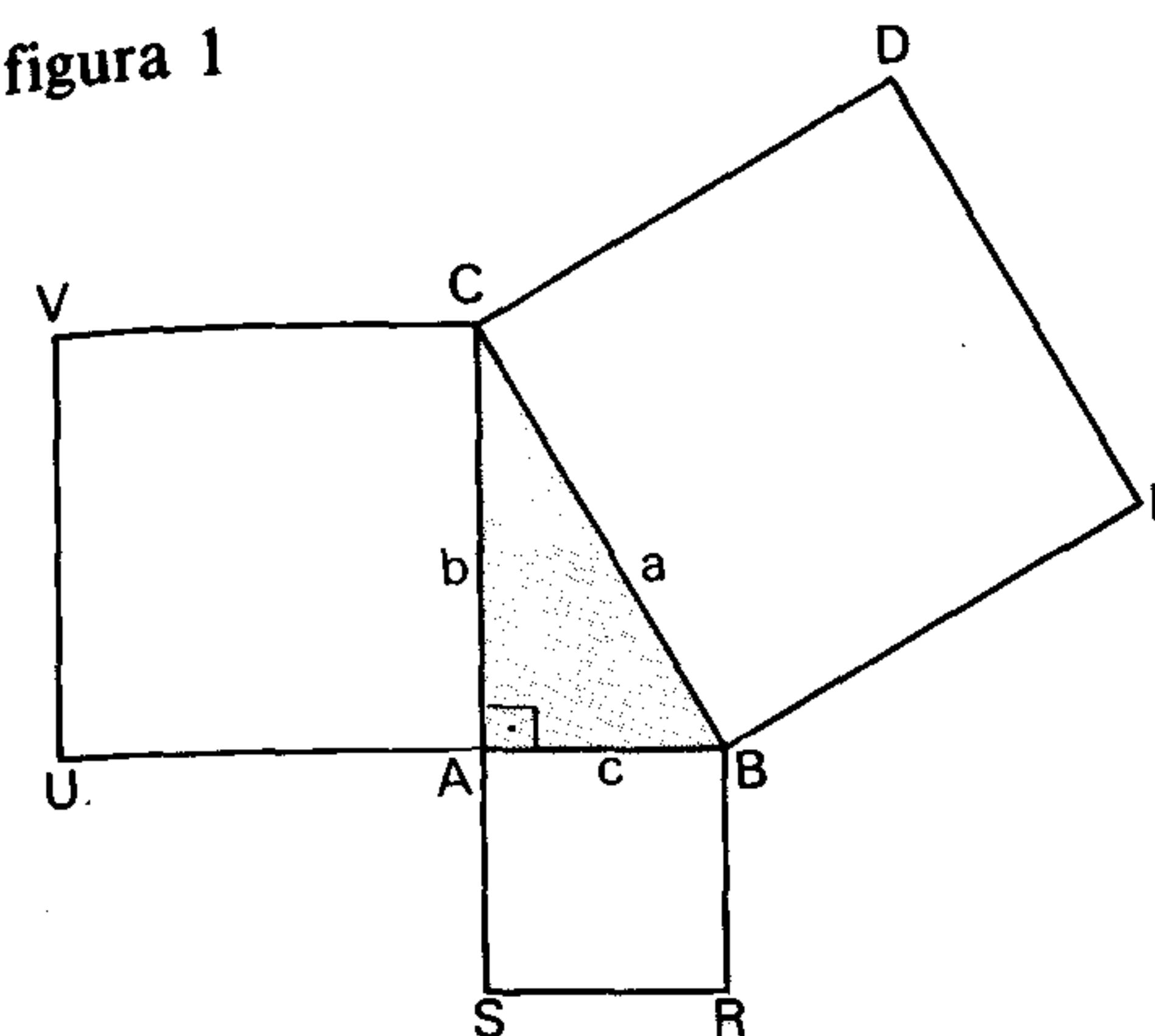
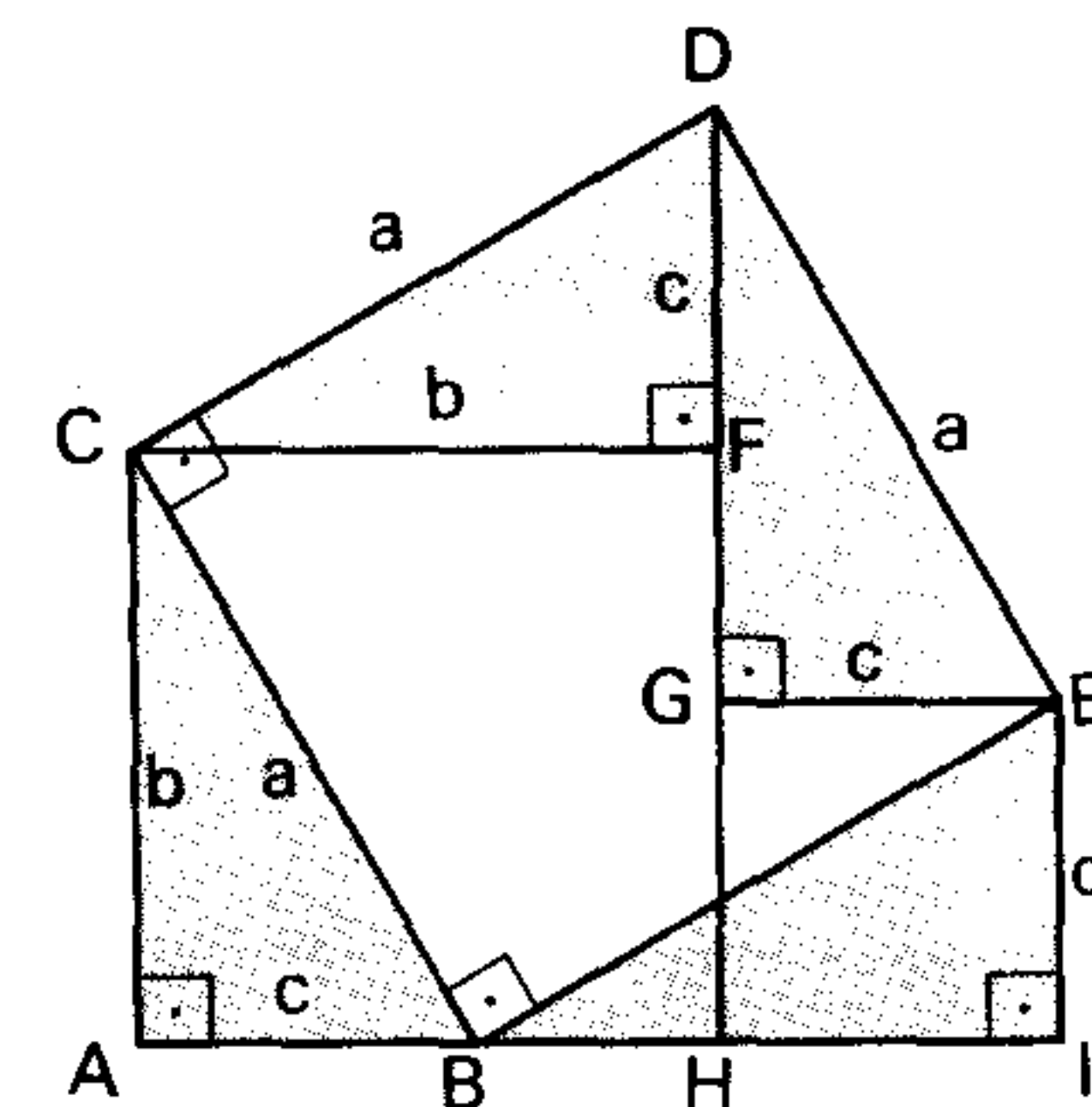



figura 2

Agora consideremos as construções auxiliares da figura 2. Devemos notar que:

$BCDE$ é o quadrado de lado a.

ΔABC, ΔFCD, ΔGED e ΔIBE são triângulos congruentes entre si que vamos chamar de **T**.

$ACFH$ é um quadrado de lado b congruente ao quadrado $ACVU$.

$EIHG$ é um quadrado de lado c congruente ao quadrado $ABRS$.

$BCFGE$ é um polígono que vamos chamar de **P**.

Analisando o quadrado $BCDE$ (figura 3) e a reunião dos quadrados $ACFH$ e $HGEI$ (figura 4), temos:

figura 3

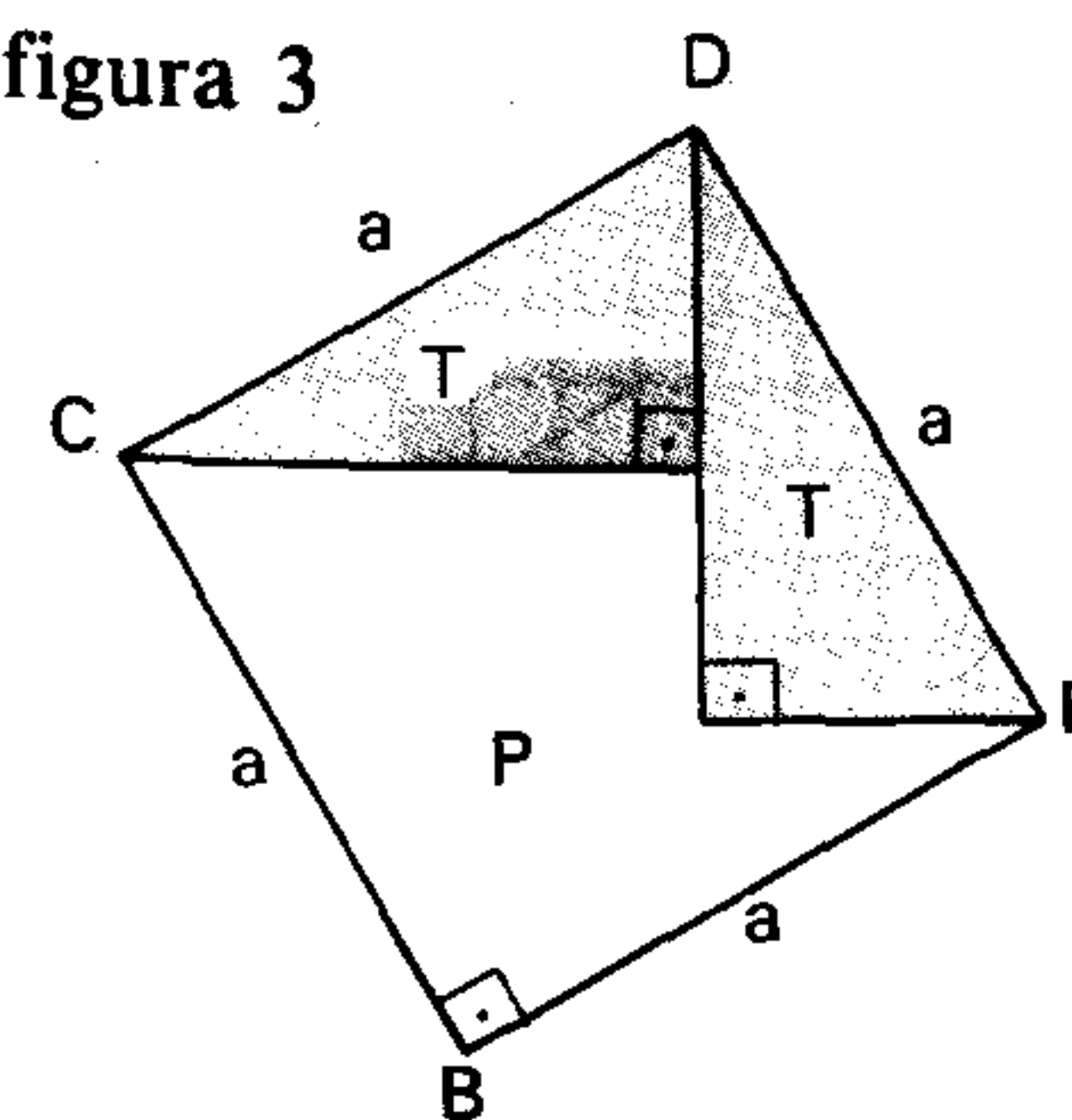
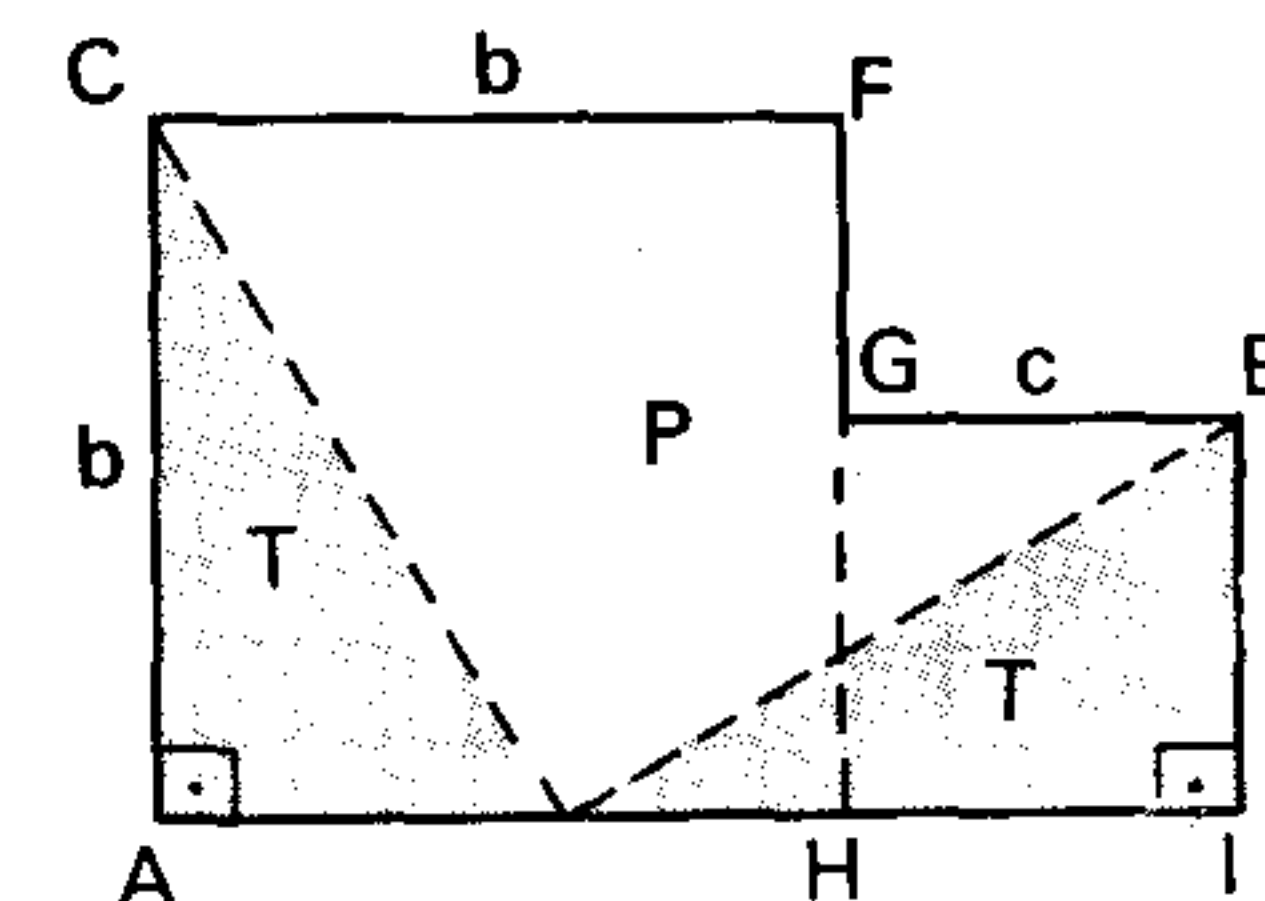



figura 4

$$\left.\begin{array}{r} BCDE = P + 2T \\ ACFH + EIHG = P + 2T \end{array}\right\} \Rightarrow BCDE \approx ACFH + EIHG$$

Dada a congruência dos quadrados, temos, então:

$$BCDE \approx ACVU + ABRS$$

Ou seja:

"O quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos."

Ou ainda:

"O quadrado da hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados dos catetos".

EXERCÍCIOS

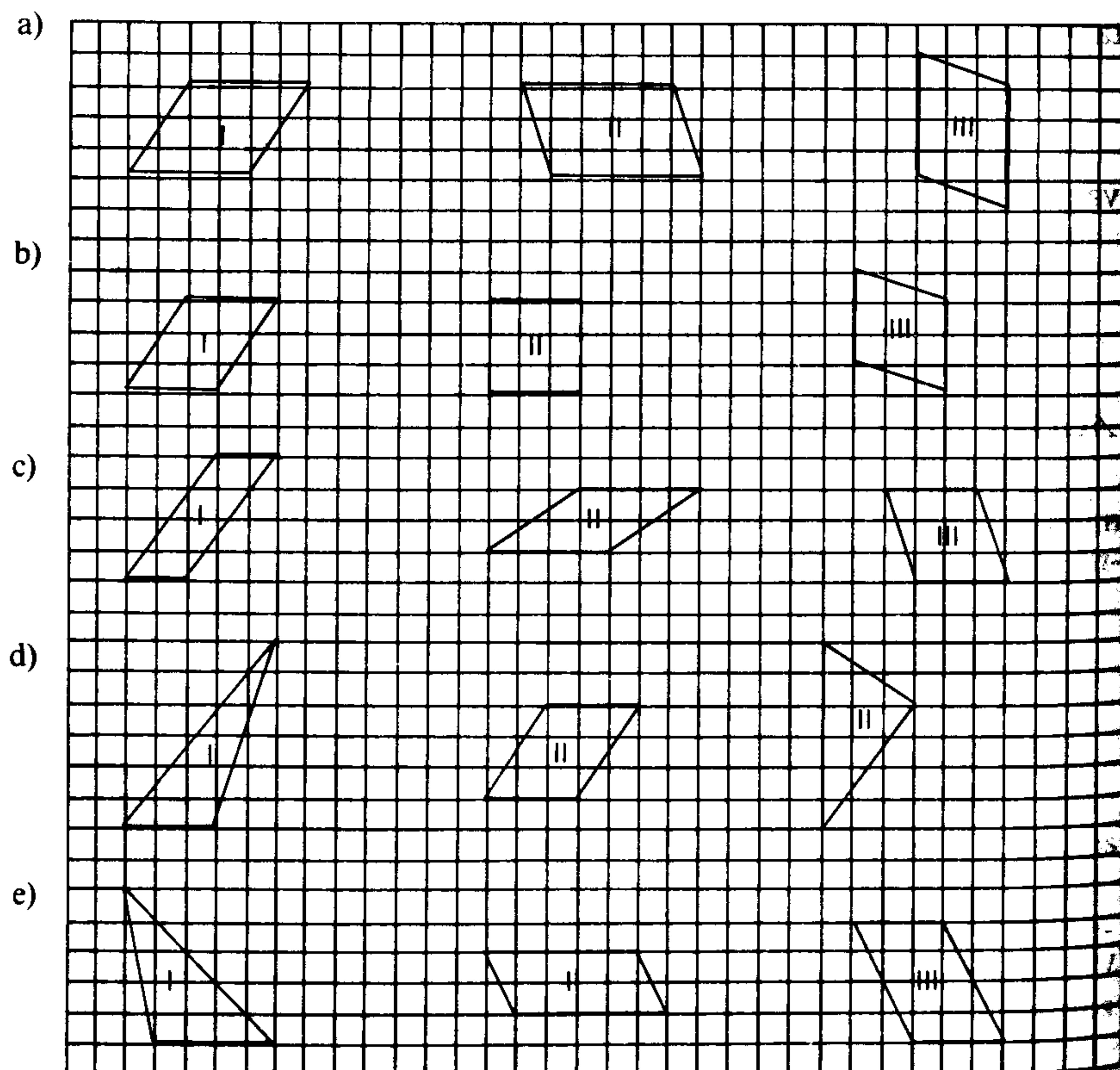
776. Determine em cada caso quais figuras são equivalentes:

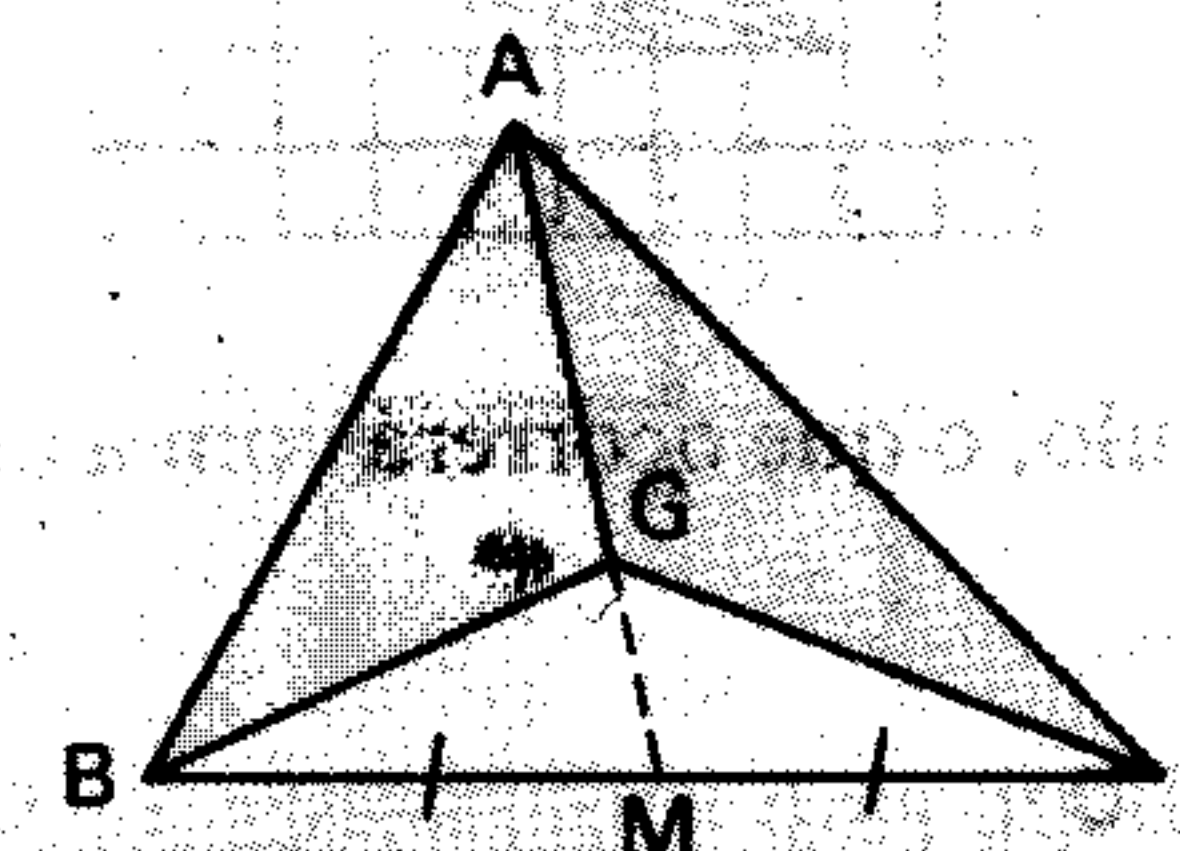
a) I, II, III

b) I, II, III

c) I, II, III

d) I, II

e) I, II, III

777. Se G é o baricentro de um triângulo ABC, então os triângulos GAB, GAC e GBC são equivalentes.

Solução

Consideremos a mediana $\overline{AM}$. Por terem bases congruentes e mesma altura, são equivalentes os triângulos ABM e ACM e pelo mesmo motivo também o são os triângulos GBM e GCM.

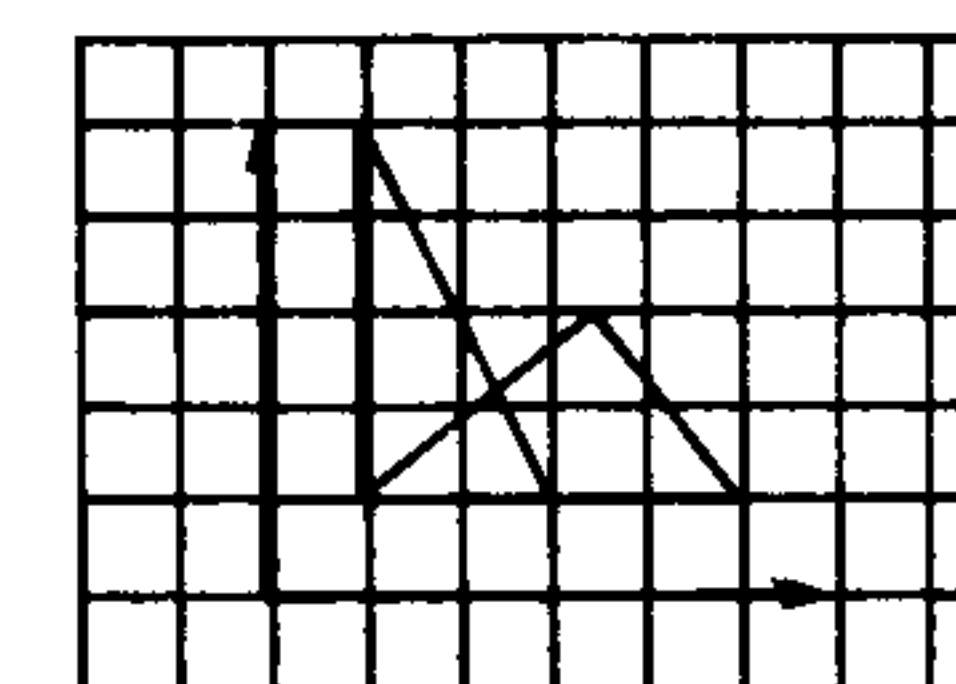
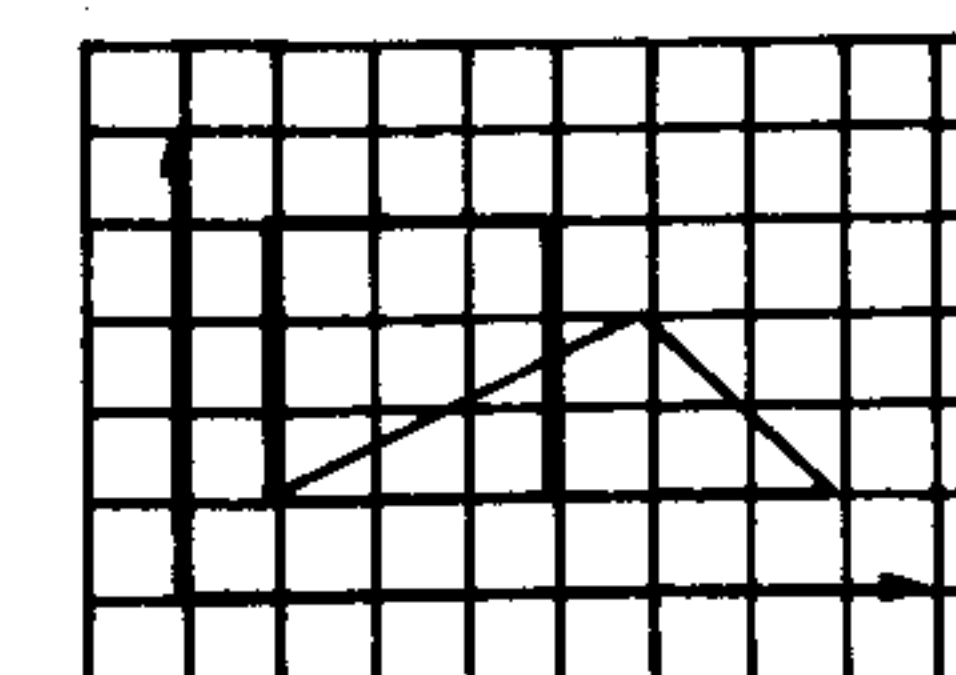
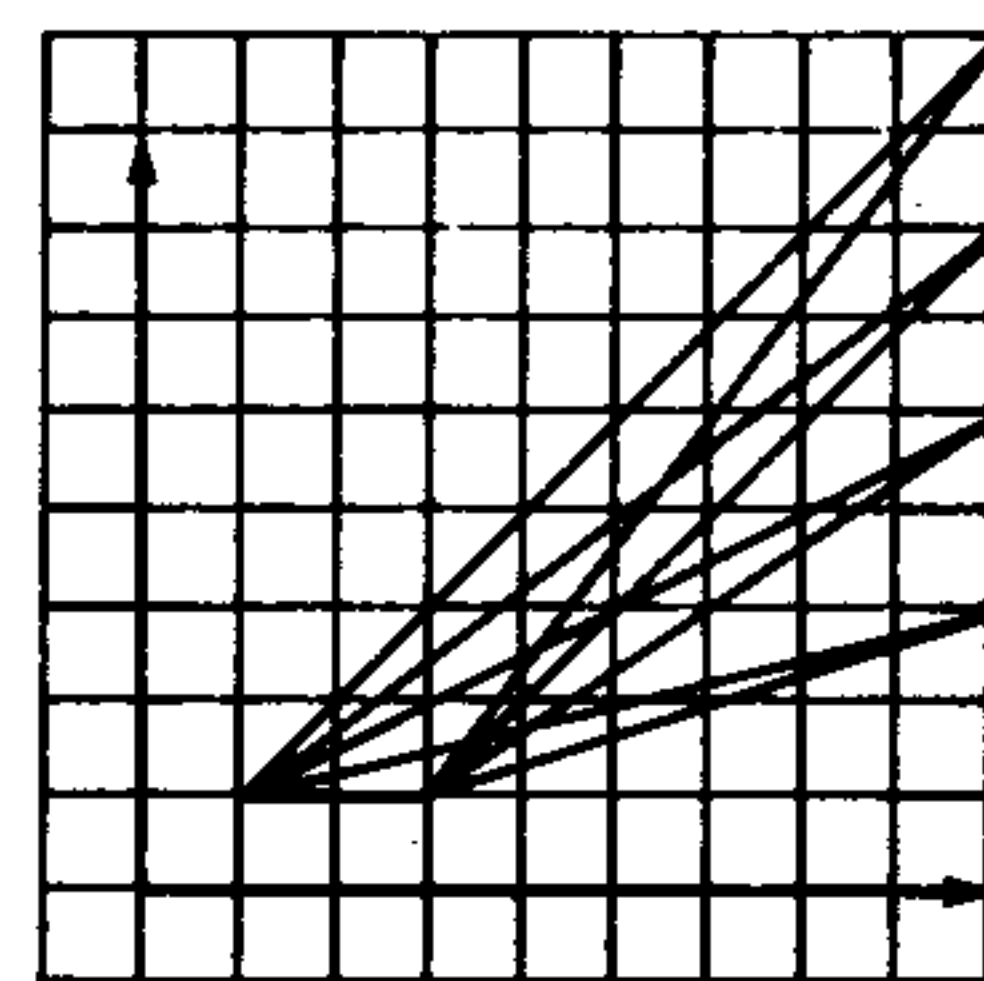
$\Delta ABM \approx \Delta ACM \Longrightarrow \Delta GAB + \Delta GBM \approx \Delta GAC + \Delta GCM \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \Delta GAB \approx \Delta GAC$

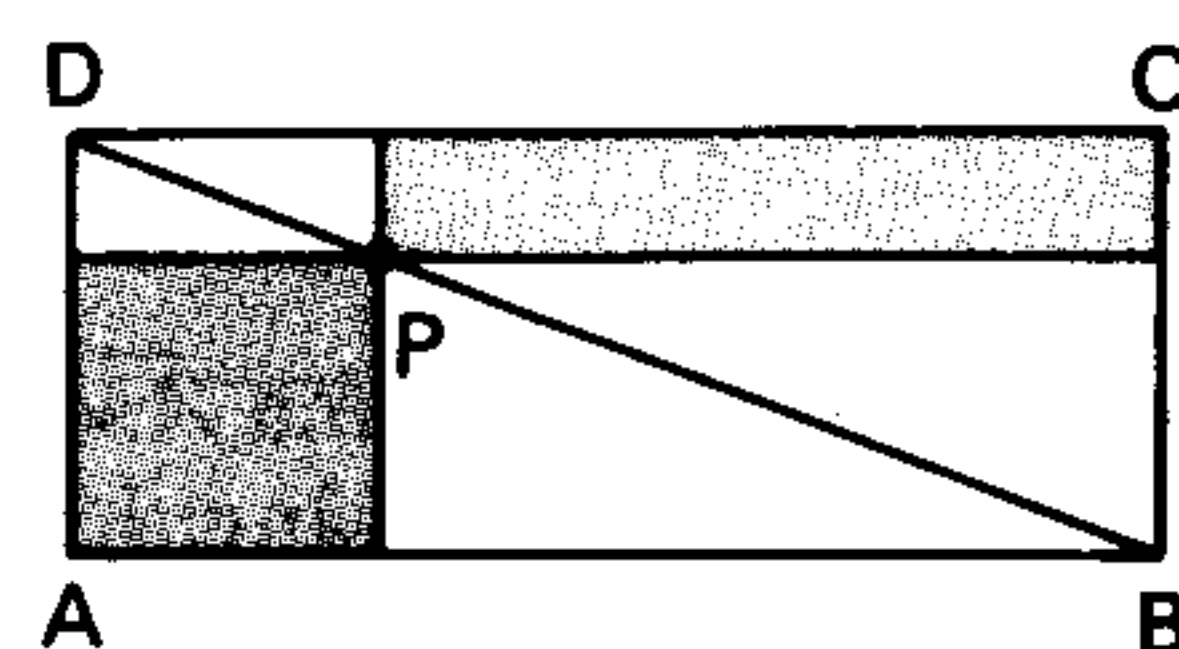
Analogamente sai $\Delta GAB \approx \Delta GBC$.

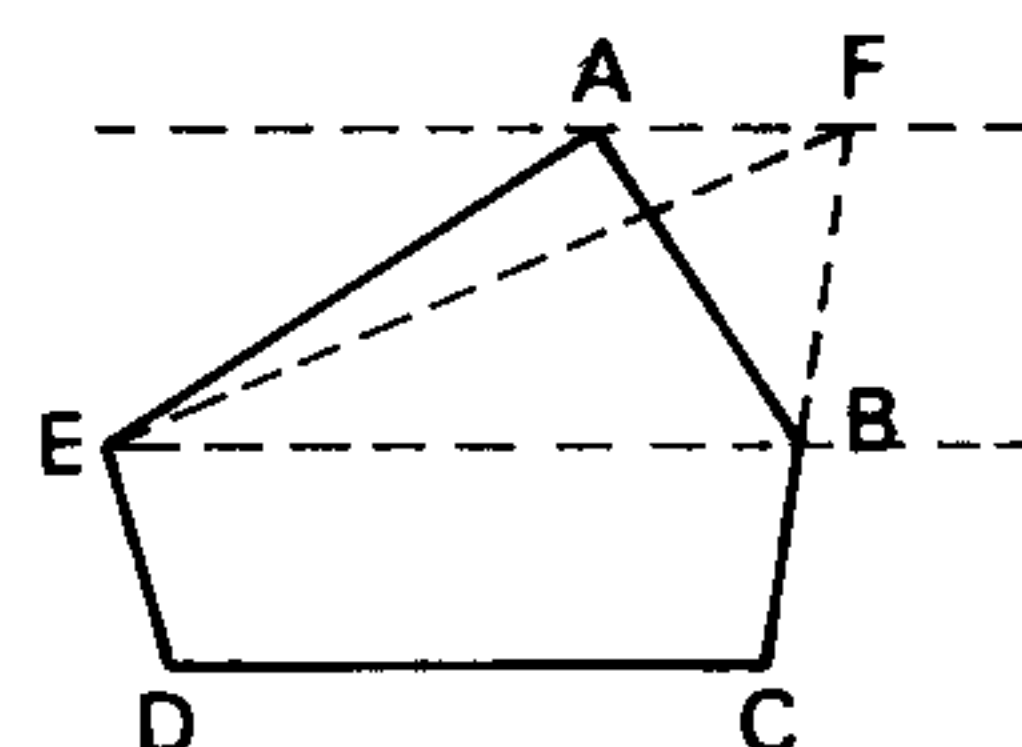
Daí vem $\Delta GAB \approx \Delta GAC \approx \Delta GBC$.

778. Por que são equivalentes os três triângulos da figura abaixo?

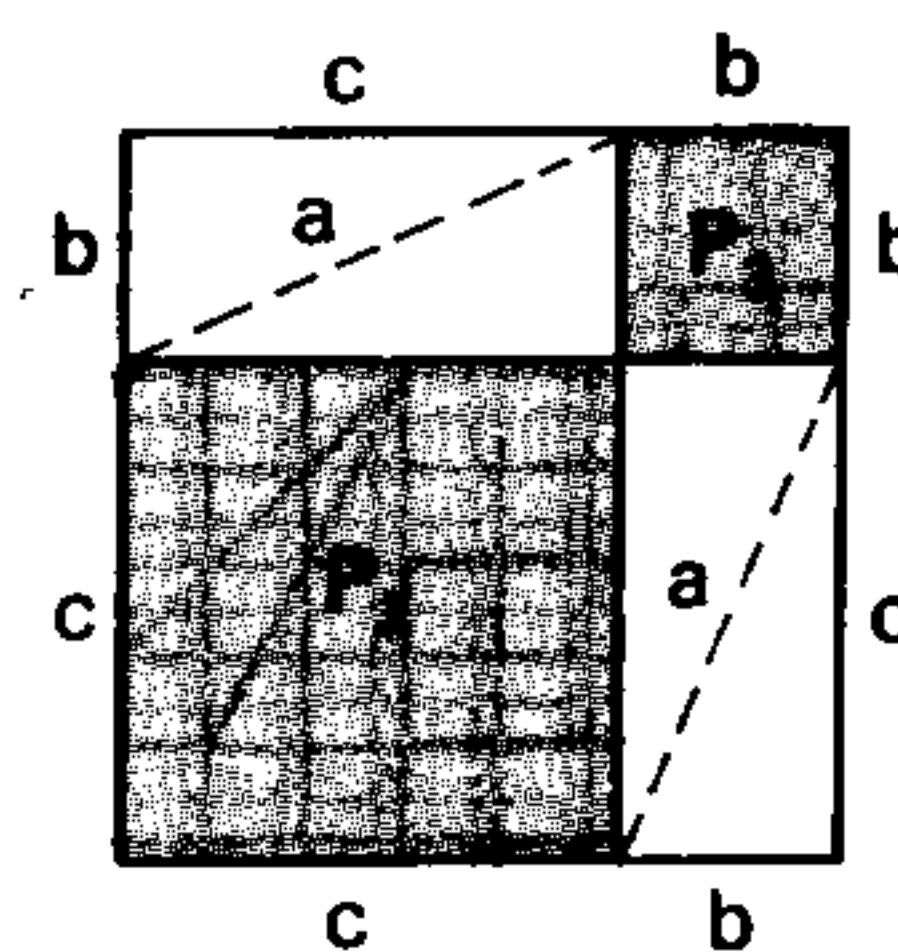
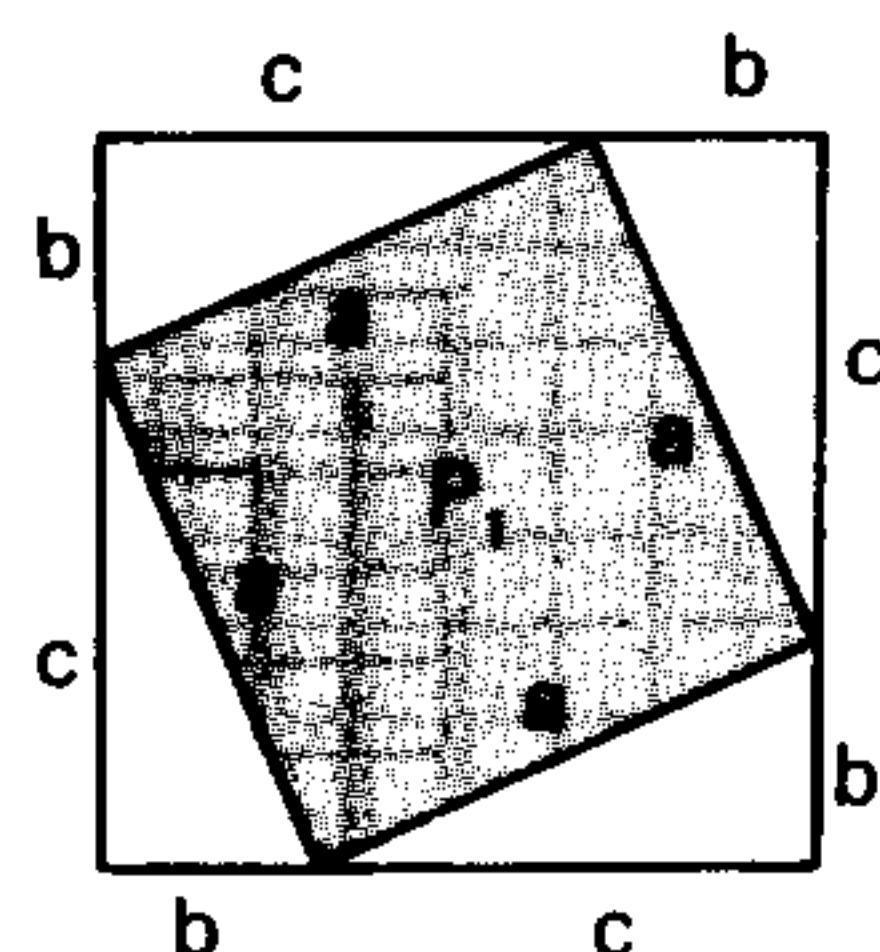
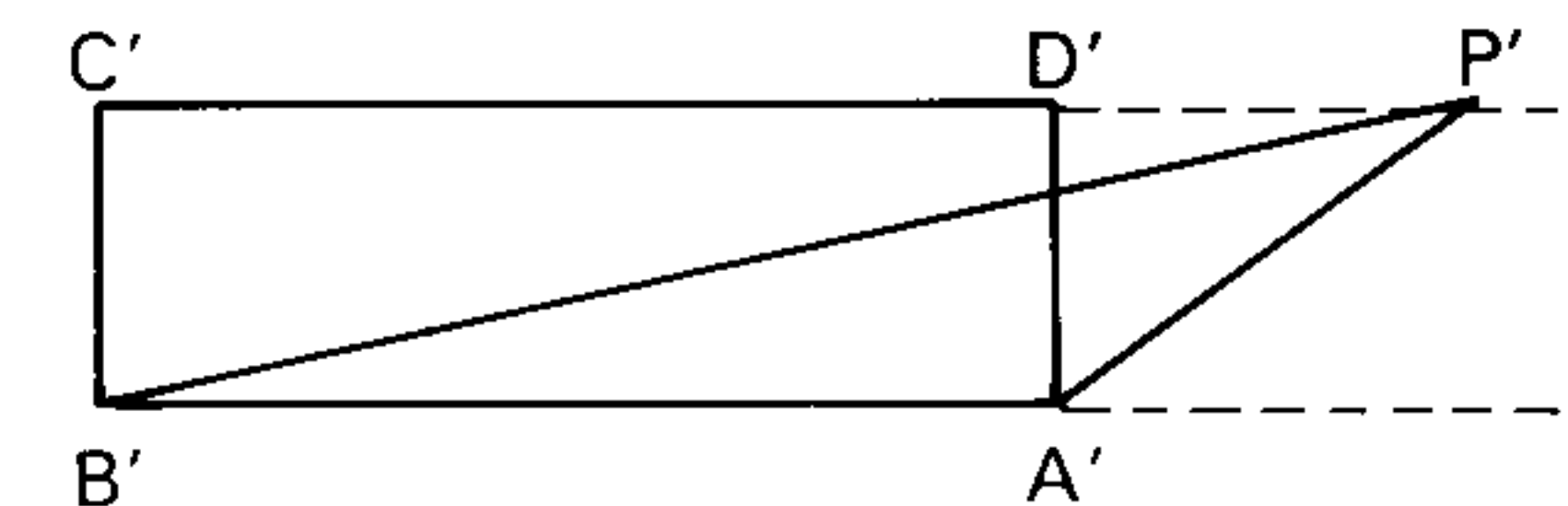
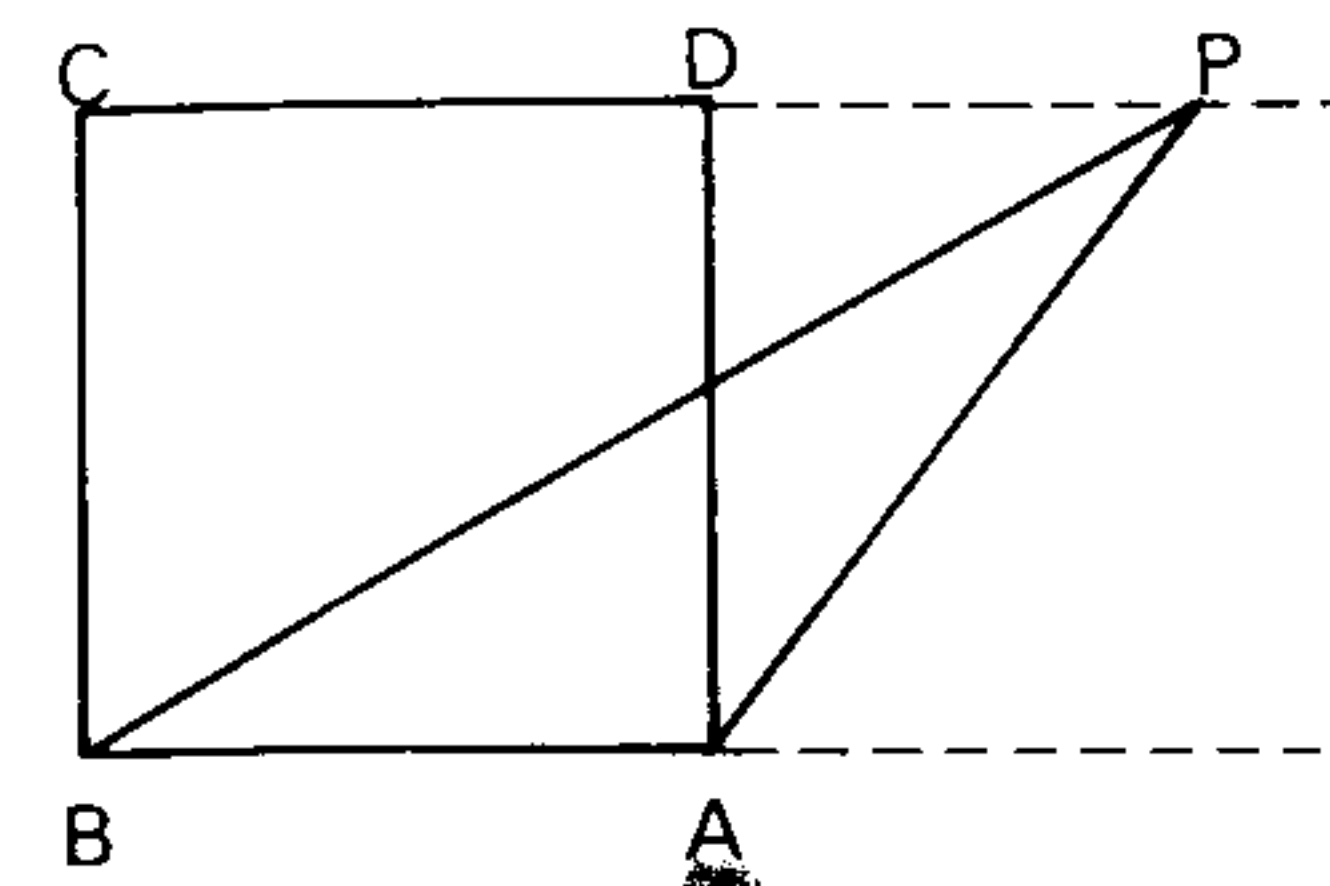
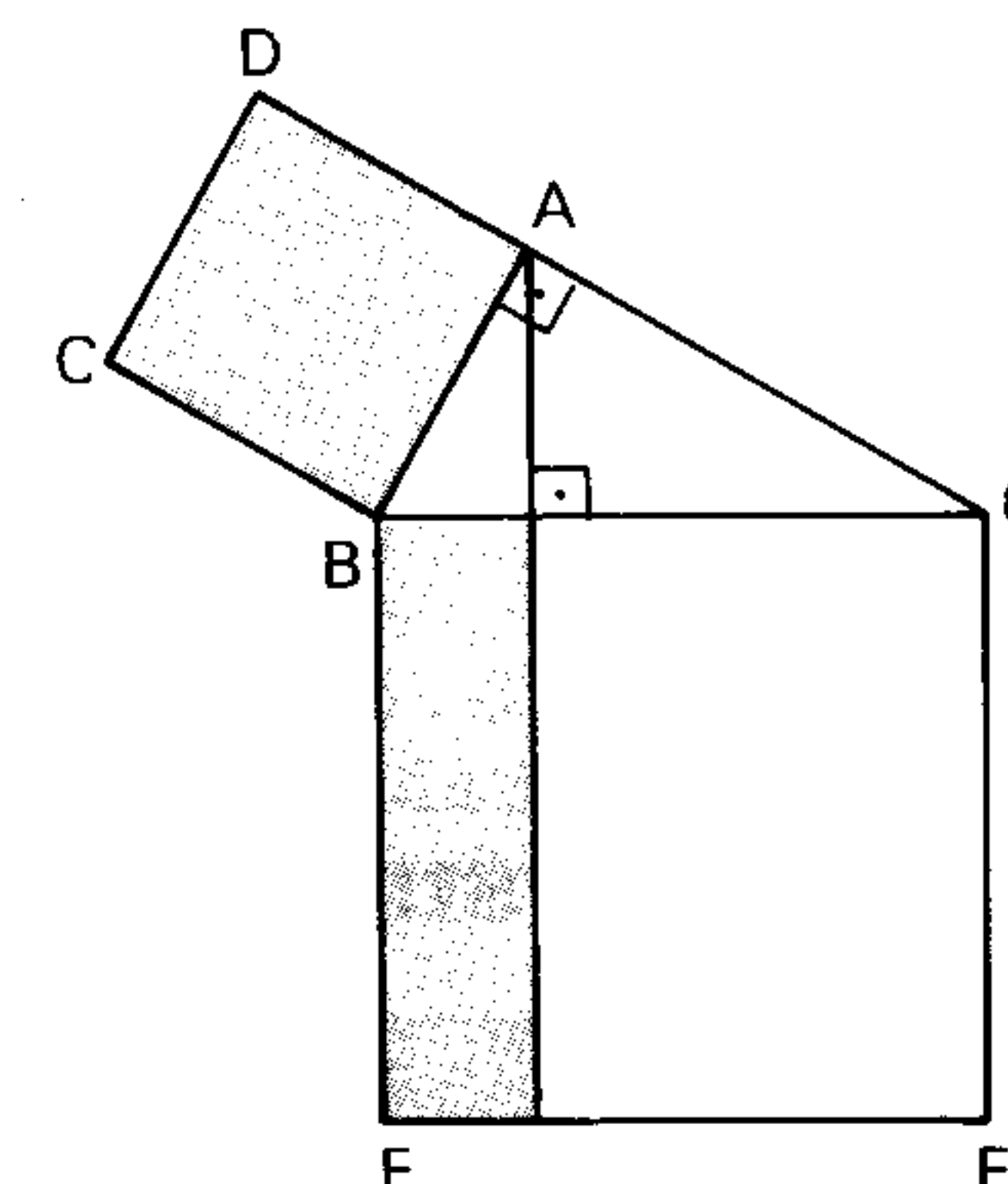
779 Os dois triângulos da figura abaixo são equivalentes? Em caso afirmativo, por quê?

780. Na figura abaixo, o triângulo é equivalente ao retângulo? Em caso afirmativo, por quê?

781. O quadrado e o triângulo da figura abaixo são equivalentes? Por quê?

782. Os quatro triângulos da figura ao lado são equivalentes? Por quê?

783. Se reduzirmos à metade a base de um triângulo, o que ocorrerá com a altura para que tenhamos triângulos equivalentes?

784. Qual a relação entre os retângulos hachurados da figura ao lado, se por um ponto P sobre a diagonal traçamos segmentos paralelos aos lados do retângulo $ABCD$?

785. Por um ponto de uma diagonal de um paralelogramo traçam-se paralelas aos lados. Prove que dois dos paralelogramos que se obtêm são equivalentes.

786. O pentágono $ABCDE$ e o quadrilátero $FEDC$ da figura ao lado são equivalentes? Por quê?

787. Como deveríamos proceder para transformar um polígono convexo de *100* lados em um triângulo equivalente?

788. Construa um polígono convexo de $(n - 1)$ lados, equivalente a um polígono convexo de n lados $(n > 3)$.

789. Diga que relação há entre P_1, P_2 e P_3.

790. Os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são retângulos. Mostre que, se os triângulos PAB e $P'A'B'$ são equivalentes, então os retângulos também são equivalentes.

791. Foram construídos dois quadrados, um sobre a hipotenusa e outro sobre um cateto de um triângulo retângulo, como mostra a figura. Prove que o quadrado e o retângulo sombreados são equivalentes.

792. Usando o exercício anterior, prove que "o quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos" (relação de Pitágoras).

CAPÍTULO XIX

Áreas de Superfícies Planas

I. Áreas de superfícies planas

241. *Definição*

Área de uma superfície limitada é um *número* real positivo associado à superfície de forma tal que:

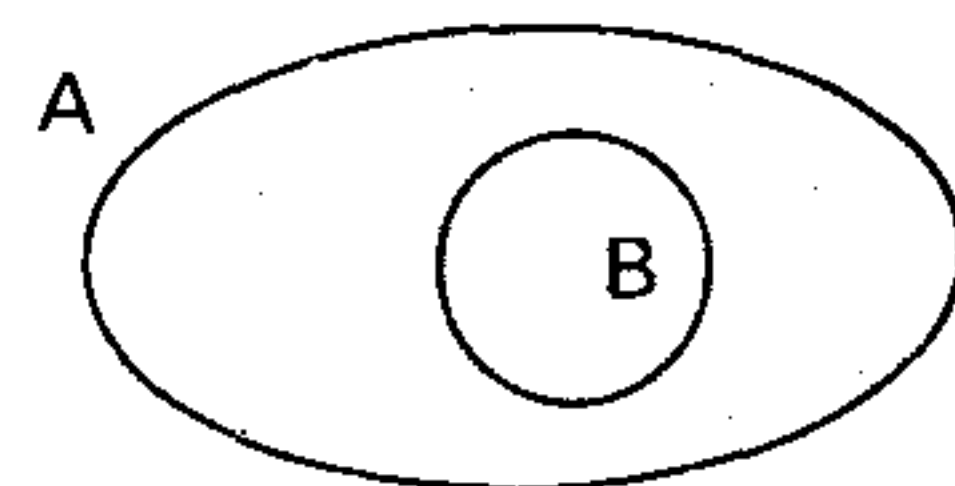
1º) Às superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais (números iguais) e reciprocamente.

$$A \approx B \Leftrightarrow (\text{Área de } A = \text{Área de } B)$$

2º) A uma soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.

$$(C = A + B) \implies (\text{Área de } C = \text{Área de } A + \text{Área de } B)$$

3º) Se uma superfície *está contida* em outra, então sua área é *menor* (ou igual) que a área da outra.

A
B

$$B \subset A \implies \text{Área de } B \leqslant \text{Área de } A$$

242. *Razão entre retângulos*

a) *Teorema*

> "A razão entre dois retângulos de bases congruentes (ou alturas congruentes) é igual à razão entre suas alturas (ou bases)."

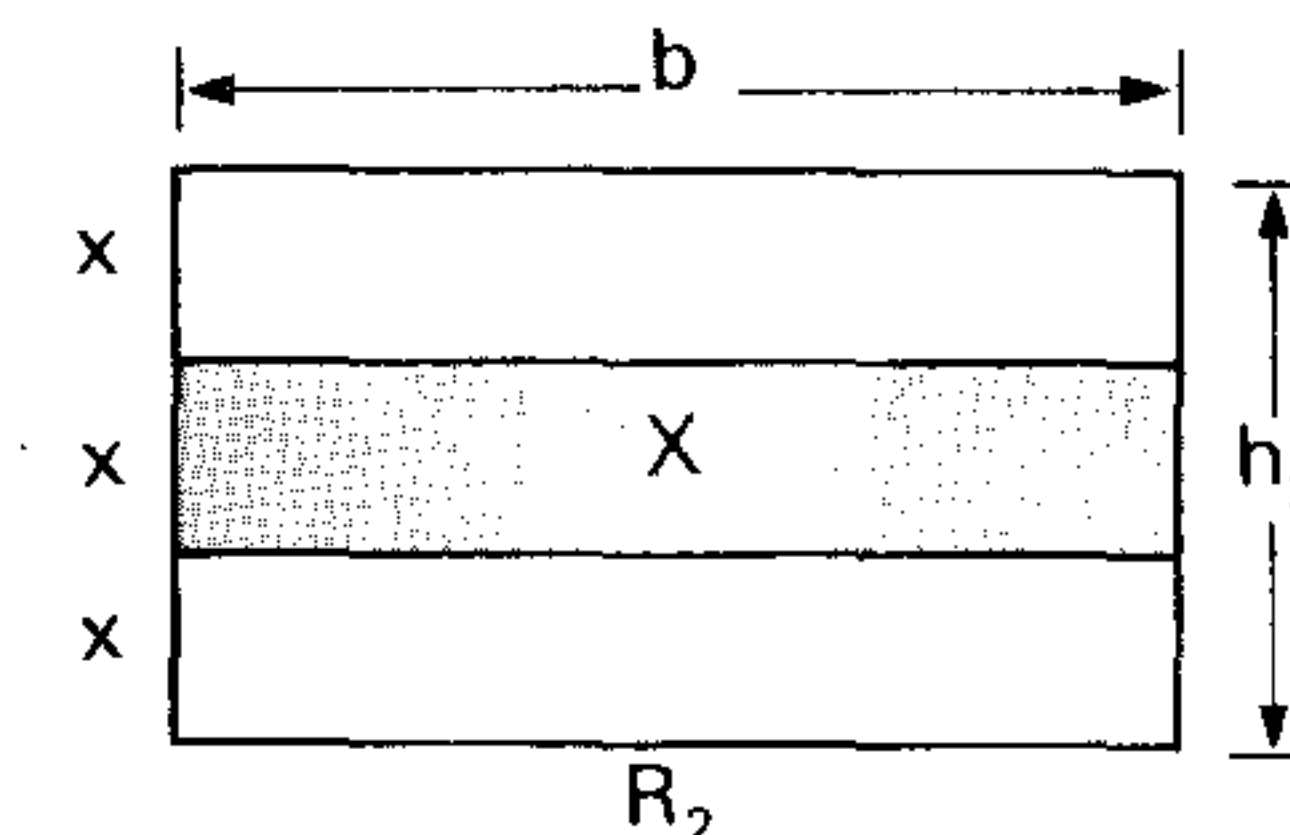
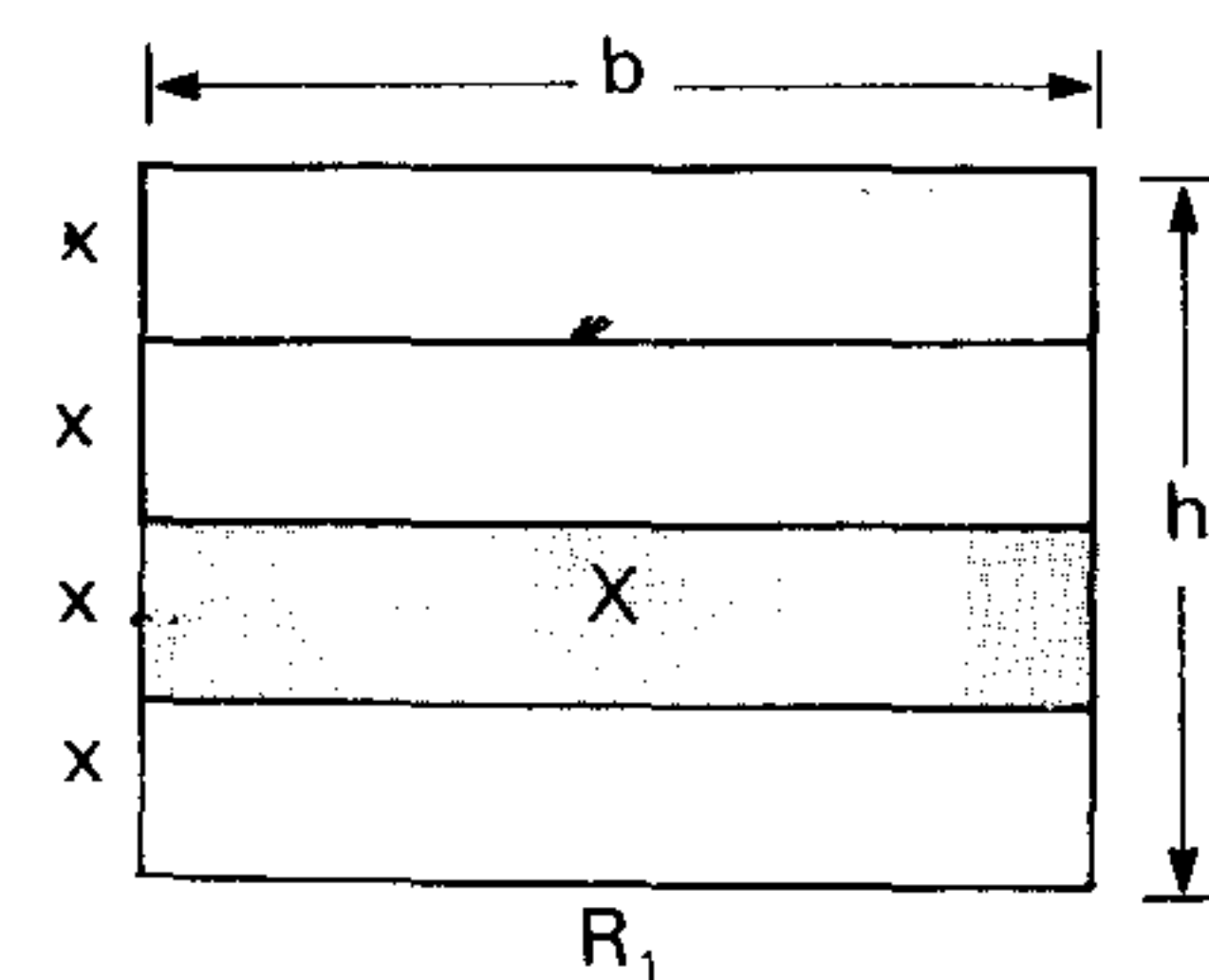
Hipótese | *Tese*

$$\begin{cases} R_1\ (b, h_1) \\ R_2\ (b, h_2) \end{cases} \implies \frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Demonstração

1º caso: h_1 e h_2 são *comensuráveis*

b, x, x, x, x, X, h_1, R_1

b, x, x, x, X, h_2, R_2

Então, existe um submúltiplo de h_1 e de h_2.

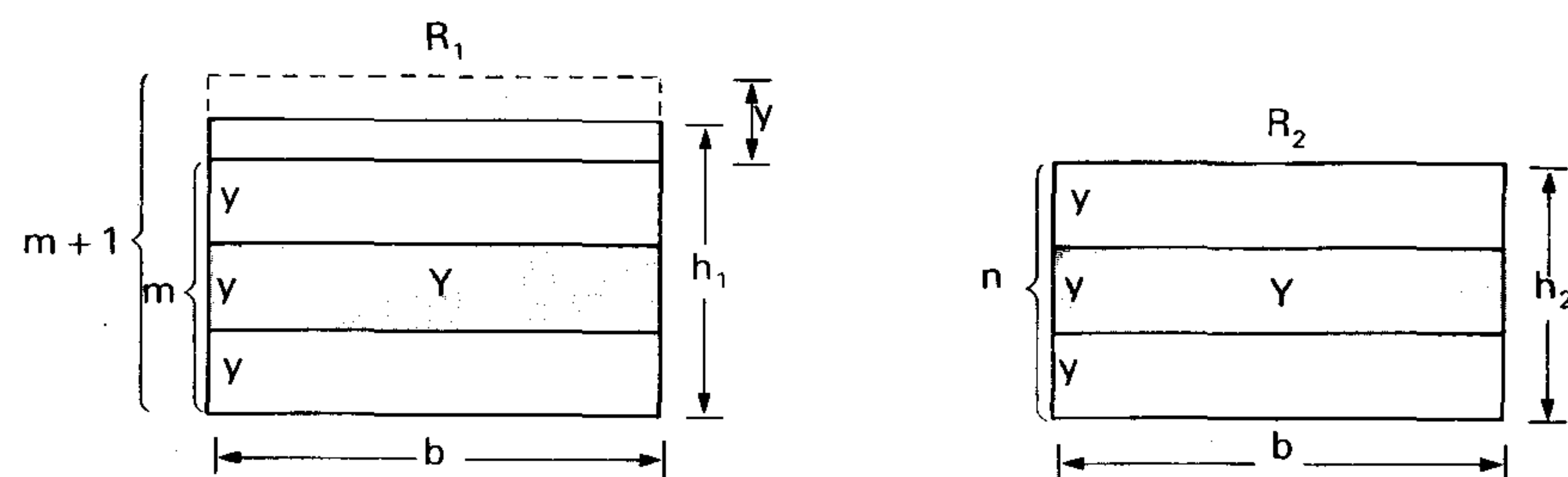
$$\begin{rcases} h_1 = p \cdot x \\ h_2 = q \cdot x \end{rcases} \overset{\div}{\implies} \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

Construindo os retângulos $X(b, x)$, temos:

$$\begin{rcases} R_1 = p \cdot X \\ R_2 = q \cdot X \end{rcases} \overset{\div}{\implies} \frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

De (1) e (2) vem:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}}$$

2º caso: h_1 e h_2 são *incomensuráveis*

Então, não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2.

Tomemos um segmento y submúltiplo de h_2 (y "cabe" um certo número inteiro n de vezes em h_2, isto é, $h_2 = ny$).

Por serem h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente y em h_1, temos que, para um certo número inteiro m de vezes:

$$my < h_1 < (m + 1)y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot y < h_1 < (m + 1) \cdot y \\ n \cdot y = h_2 = n \cdot y \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n} \qquad (3)$$

Construindo os retângulos $Y(b, y)$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot Y < R_1 < (m + 1) \cdot Y \\ n \cdot Y = R_2 = n \cdot Y \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{m}{n} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{m+1}{n} \qquad (4)$$

Ora, sendo y submúltiplo de h_2, pode variar; dividindo y aumentamos n e nestas condições,

$$\frac{m}{n} \text{ e } \frac{m+1}{n}$$

formam um *par de classes contíguas* que definem *um único* número real, que é

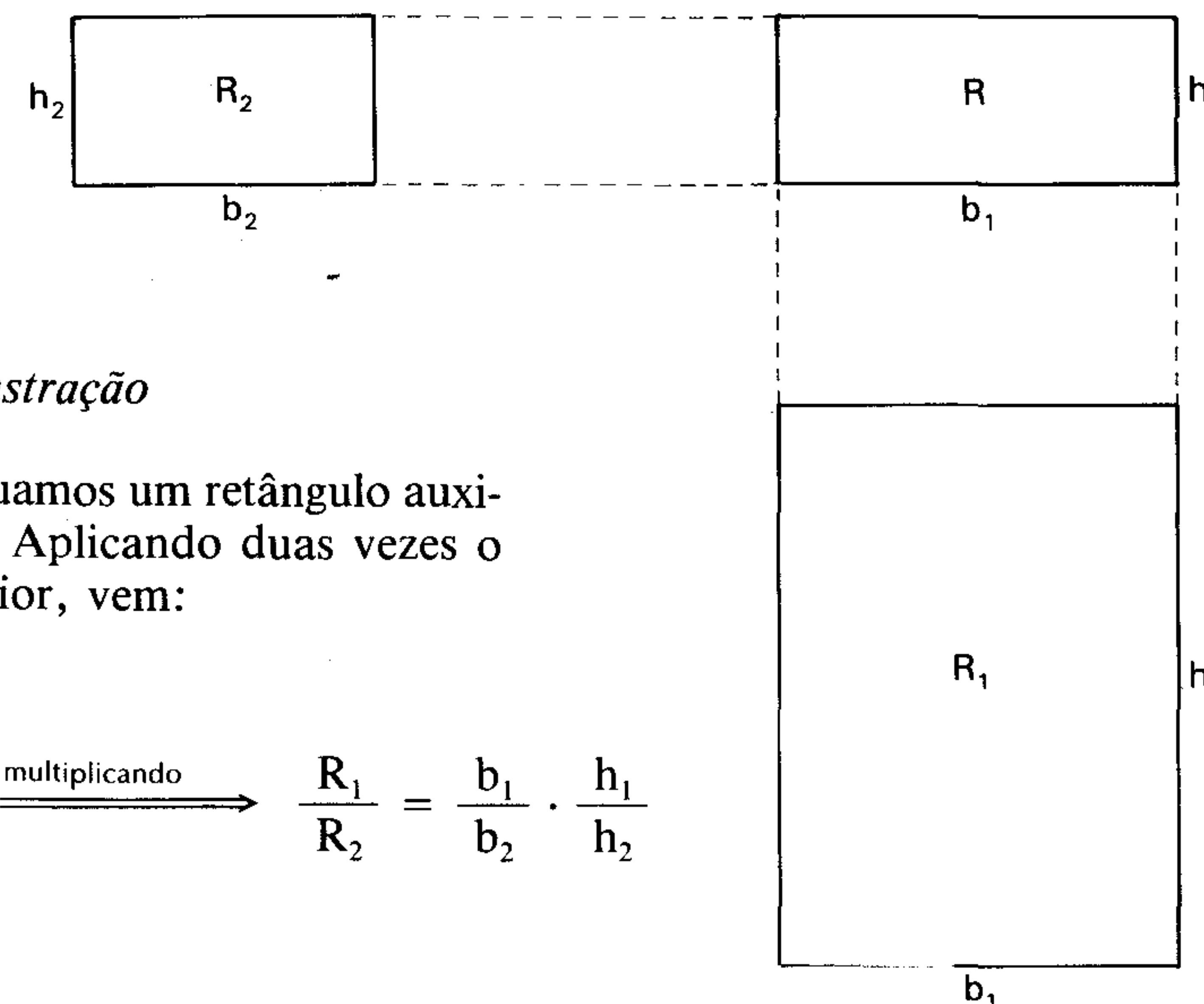
$\frac{h_1}{h_2}$ pela expressão (3) e é $\frac{R_1}{R_2}$ pela expressão (4).

Como esse número é *único*, então:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}}$$

b) *Teorema*

"A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas."

Hipótese		*Tese*
$\left.\begin{array}{l} R_1\ (b_1, h_1) \\ R_2\ (b_2, h_2) \end{array}\right\}$	$\Longrightarrow$	$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$

Demonstração

Construamos um retângulo auxiliar $R(b_1, h_2)$. Aplicando duas vezes o teorema anterior, vem:

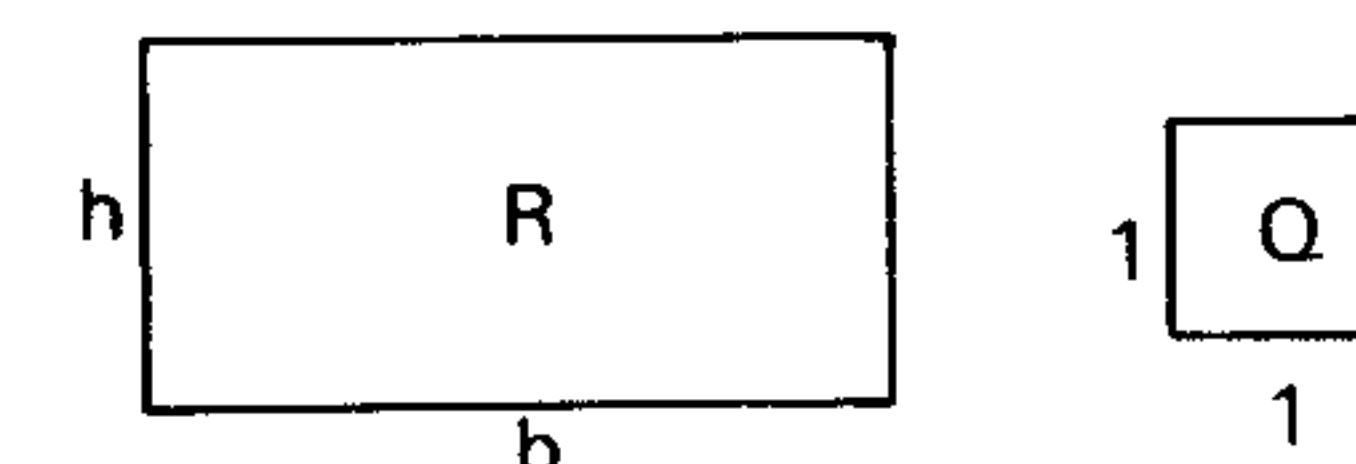
$$\left.\begin{array}{l} \frac{R_1}{R} = \frac{h_1}{h_2} \\ \frac{R}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{multiplicando}} \frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

II. Áreas de polígonos

243. *Retângulo*

Dado o retângulo $R(b, h)$ e fixado o quadrado $Q(1, 1)$ como unitário, temos:

Área do retângulo $R(b, h) =$

$$= A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)}$$

Em vista do item 242, vem

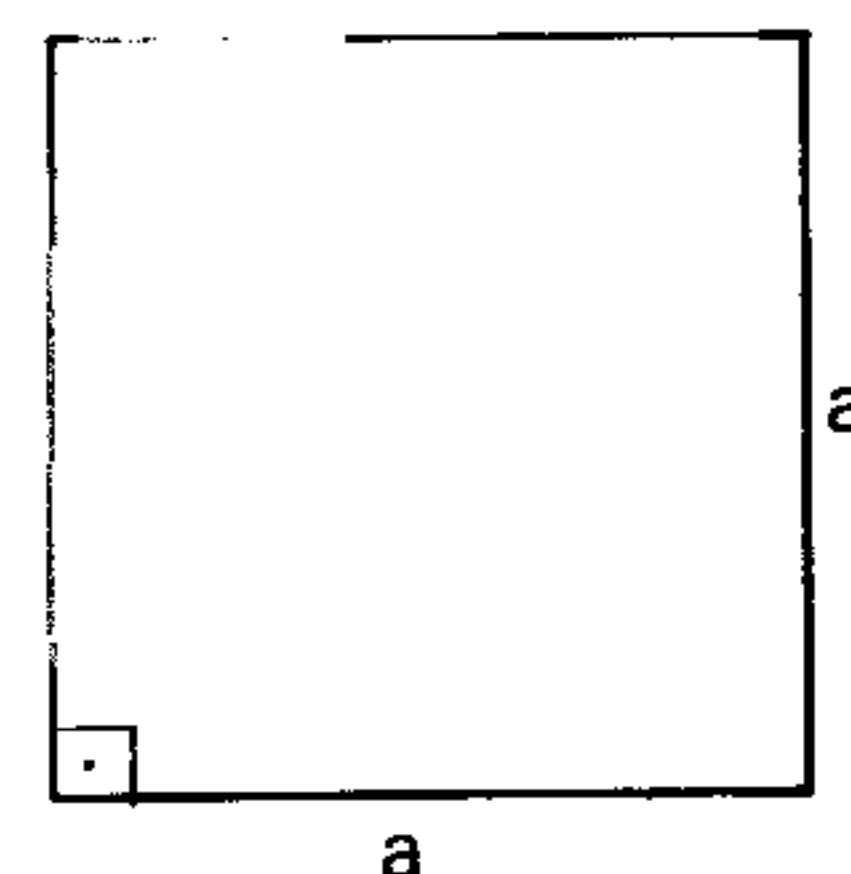
$$A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} \implies A_R = \text{(medida de b)} \cdot \text{(medida de h)}$$

que será representada simplesmente por:

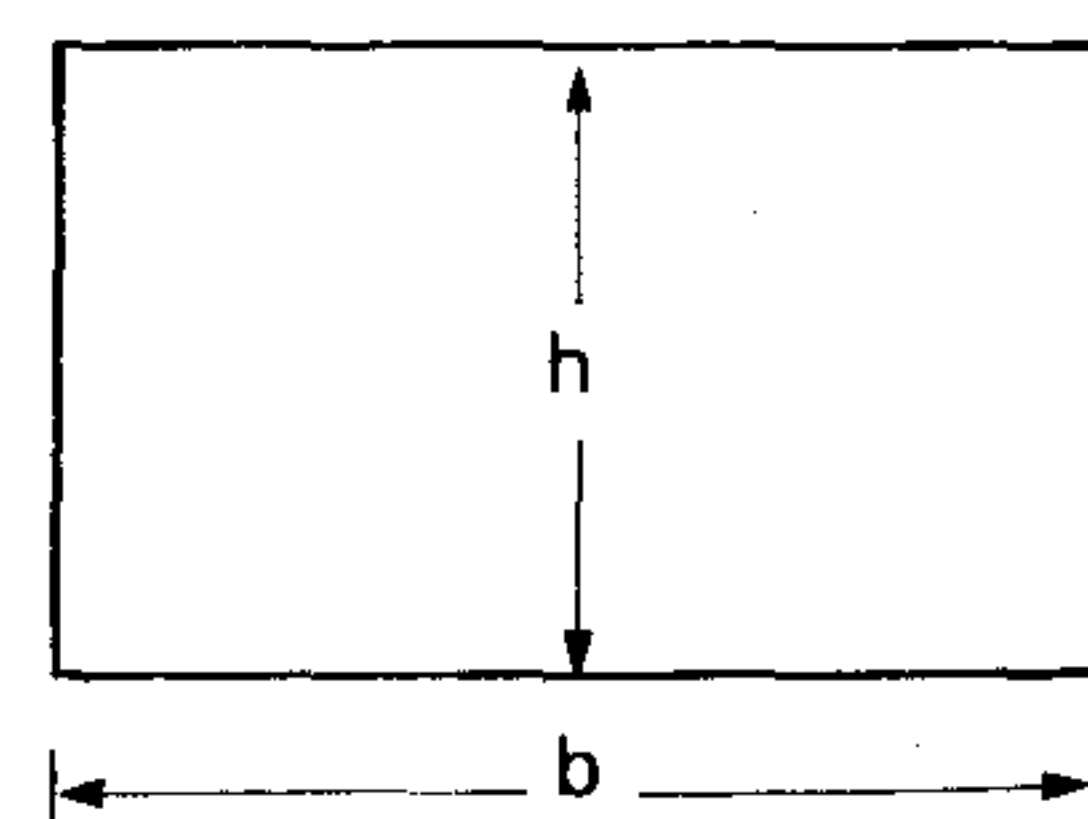
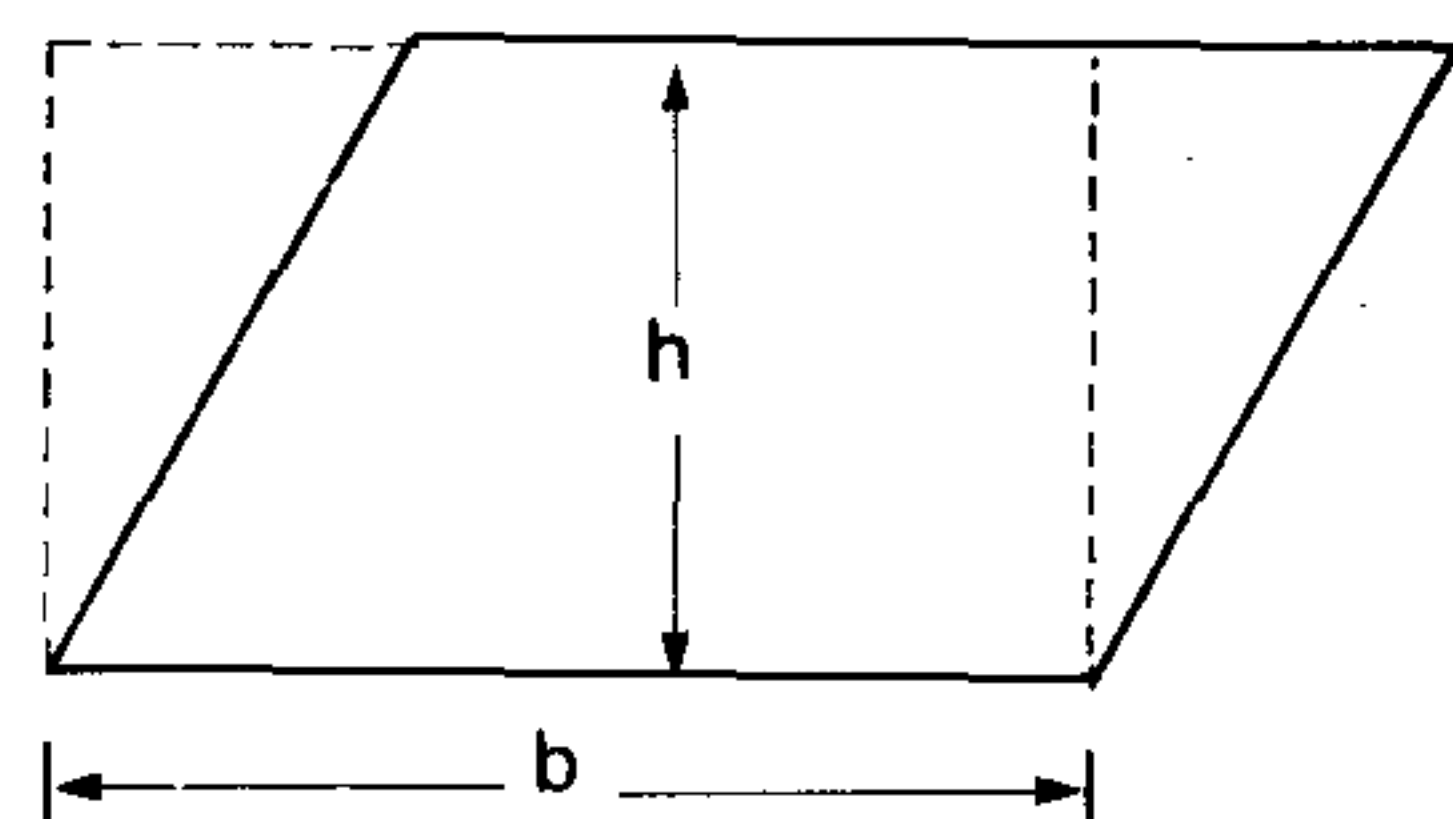
$$\boxed{A_R = b \cdot h}$$

244. *Quadrado*

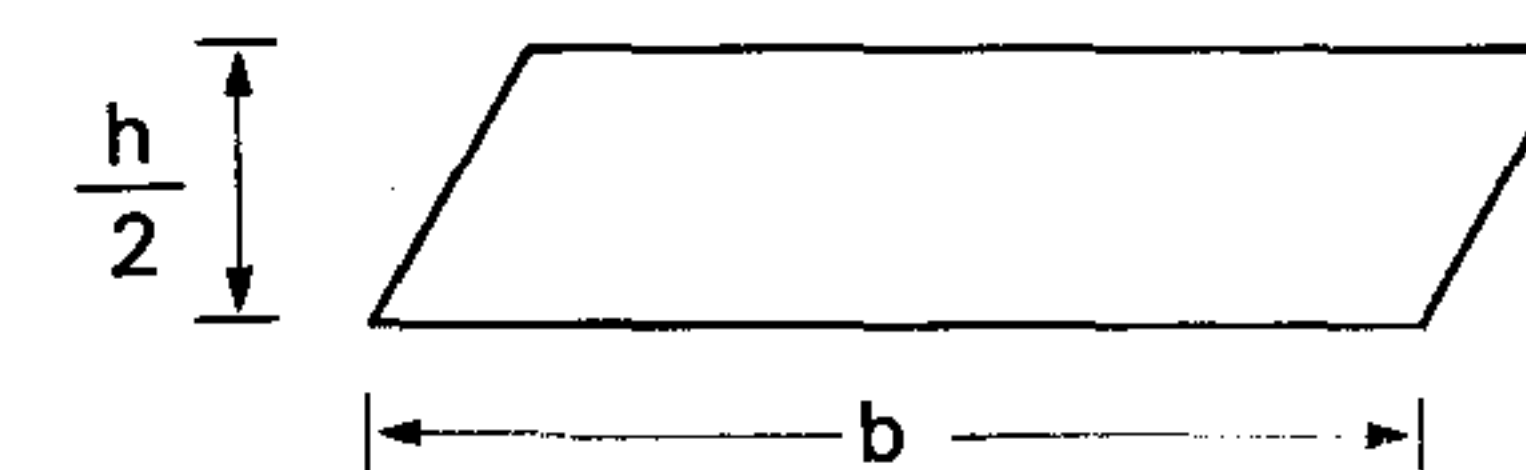
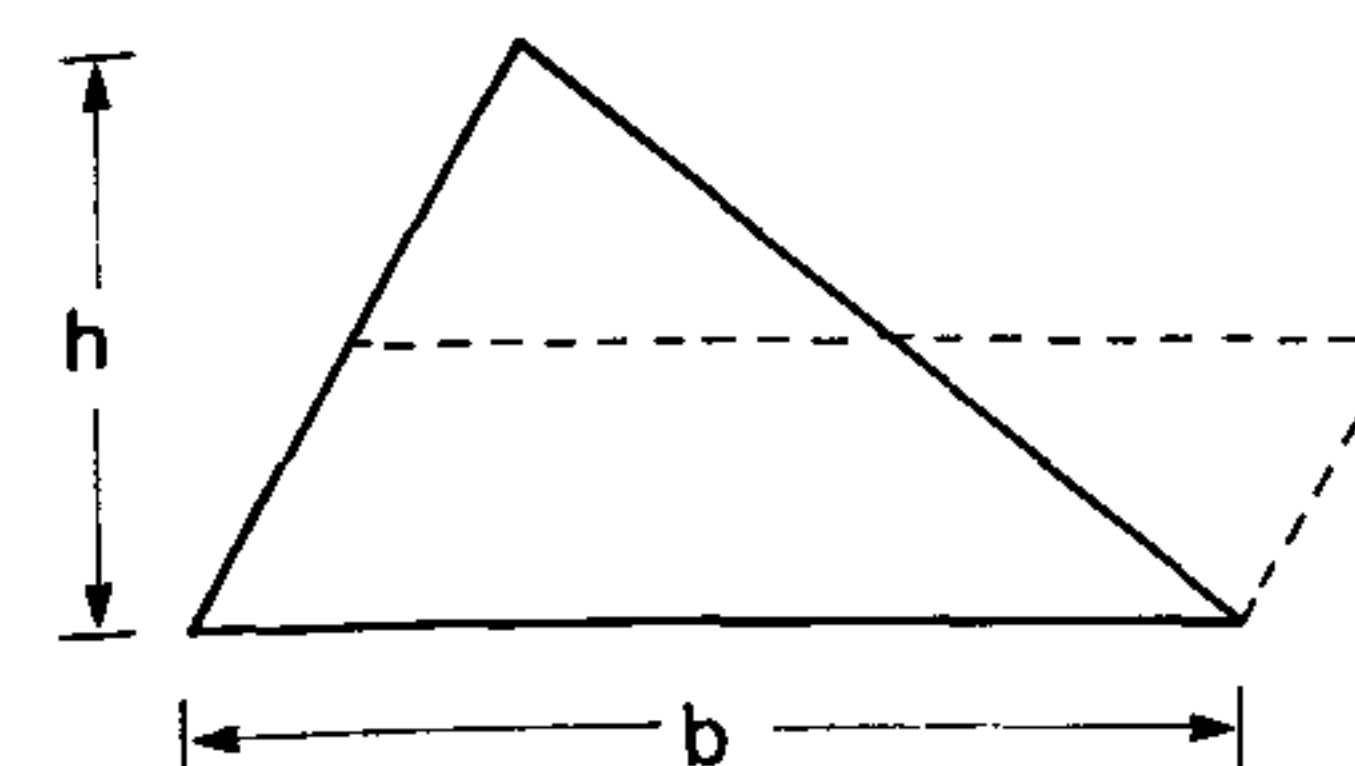
Dado um quadrado de lado a, $Q(a, a)$, temos:

$$A_Q = a \cdot a \implies \boxed{A_Q = a^2}$$

pois o quadrado é um retângulo particular.

245. *Paralelogramo*

Dado o paralelogramo $P(b, h)$, conforme vimos no item 235, ele é equivalente a um retângulo cuja base mede b e altura mede h. Logo:

$$A_P = A_R \implies \boxed{A_P = b \cdot h}$$

246. *Triângulo*

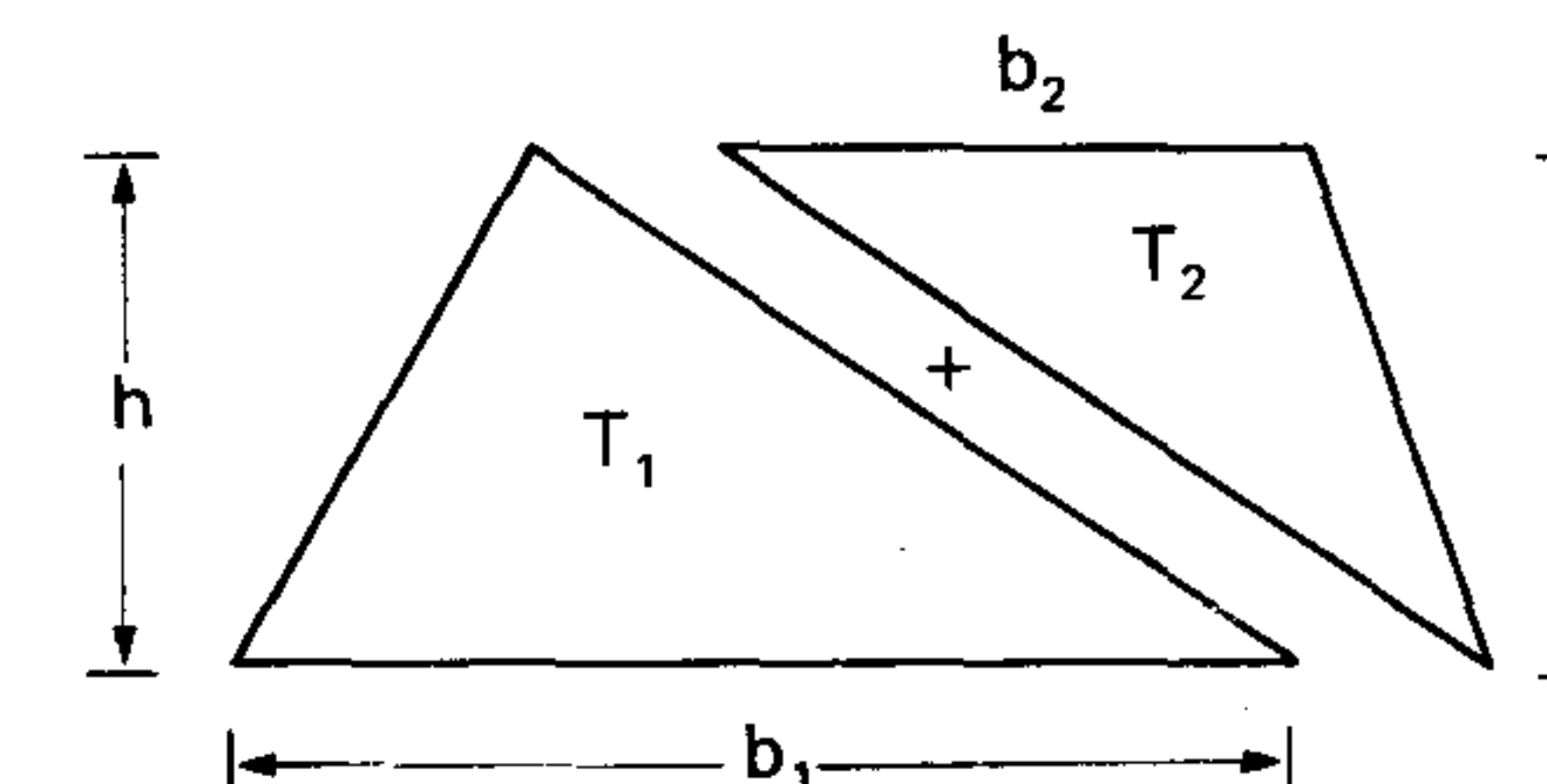
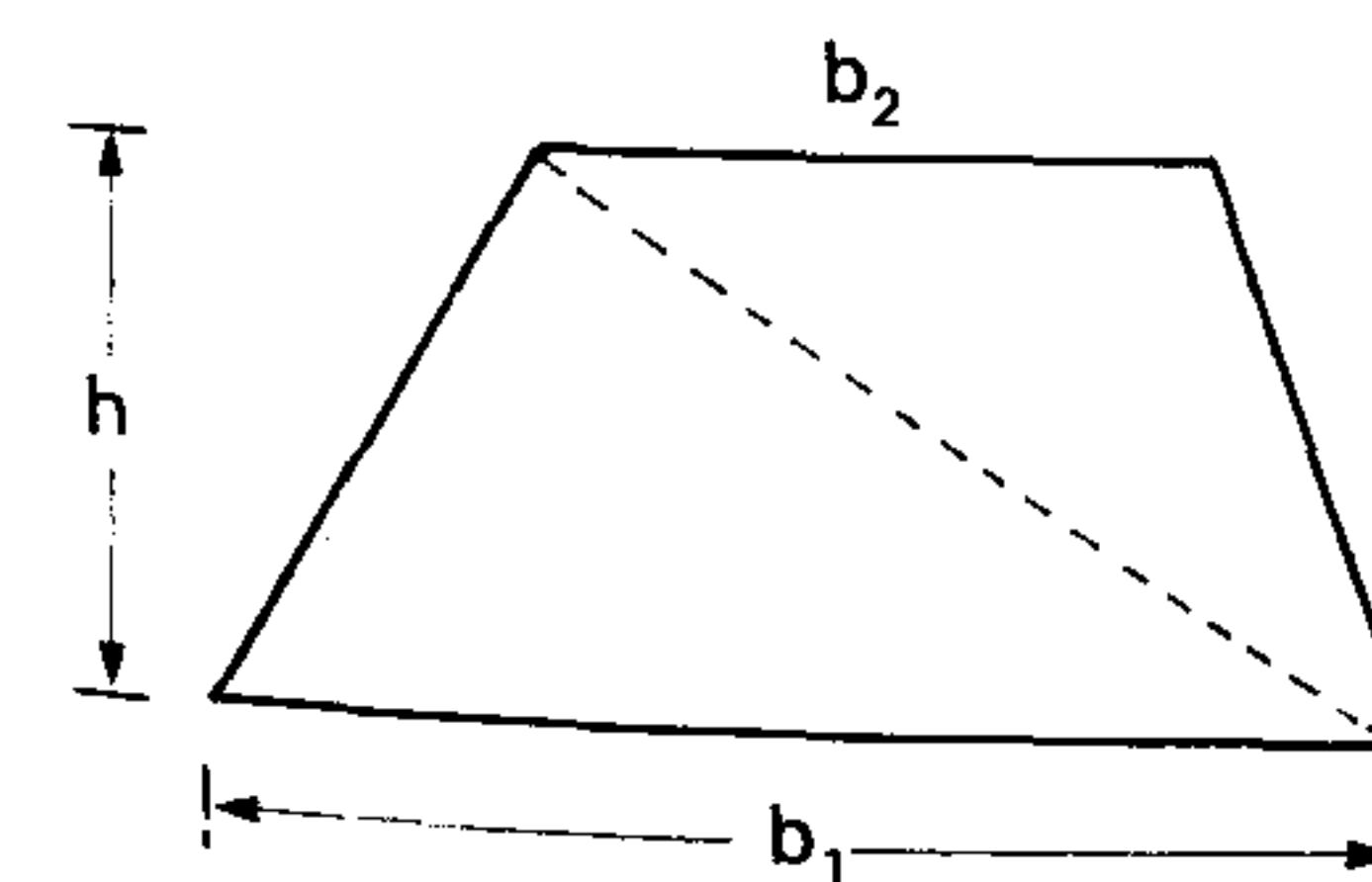
Dado o triângulo $T(b, h)$, conforme vimos no item 235, ele é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b e altura mede $\frac{h}{2}$. Logo:

$$A_T = A_{paralelogramo} \implies A_T = b \cdot \frac{h}{2} \implies \boxed{A_T = \frac{b \cdot h}{2}}$$

Nota

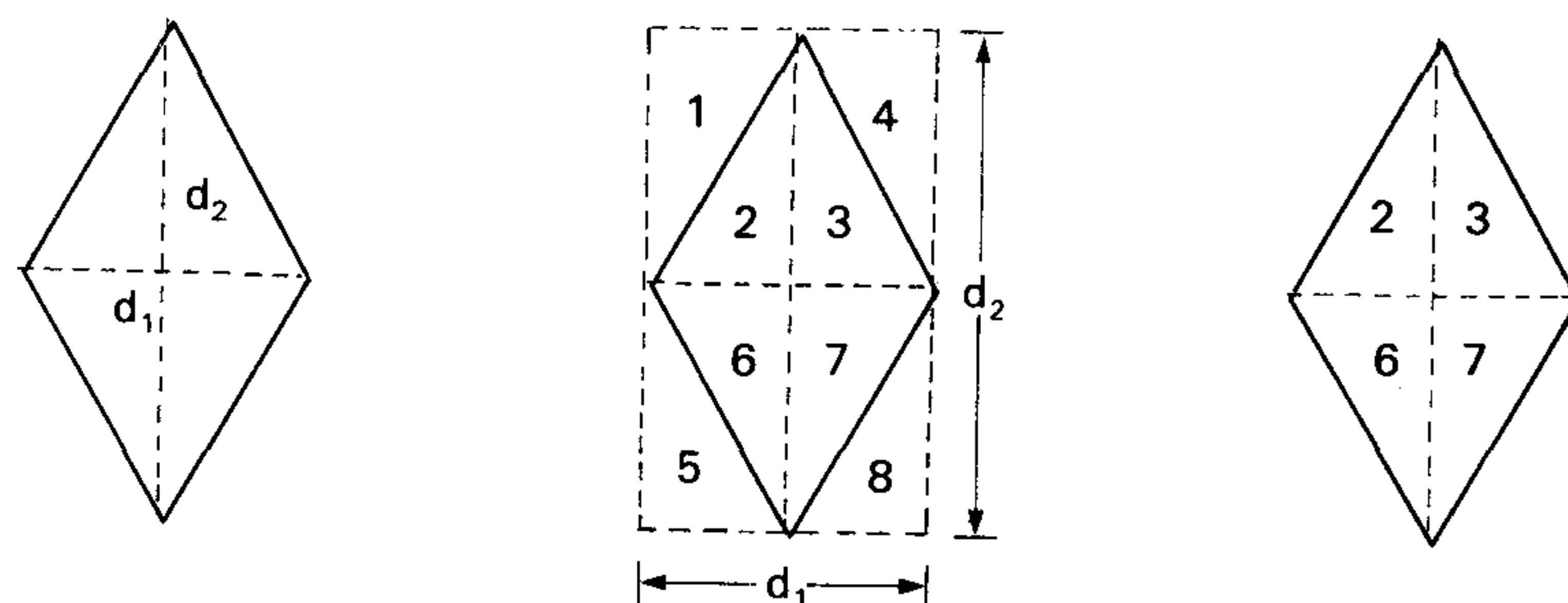
Área do triângulo equilátero de lado a. Um triângulo equilátero de lado a tem altura $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e sua área S é então:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \implies \boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

247. *Trapézio*

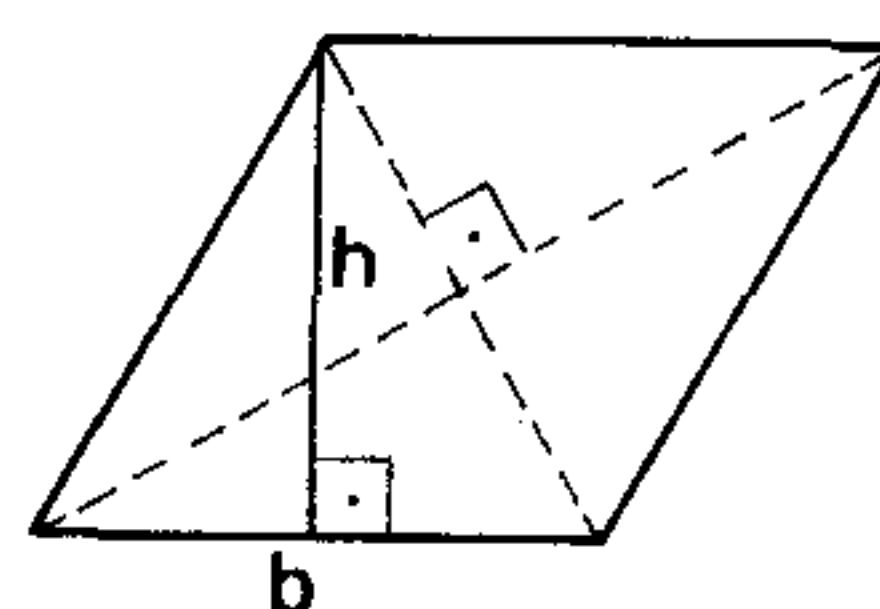
Dado o trapézio T_{ra} (b_1, b_2, h), ele é a soma de dois triângulos T_1 (b_1, h) e T_2 (b_2, h)

$$A_{T_{ra}} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \implies \boxed{A_{T_{ra}} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}}$$

248. Losango

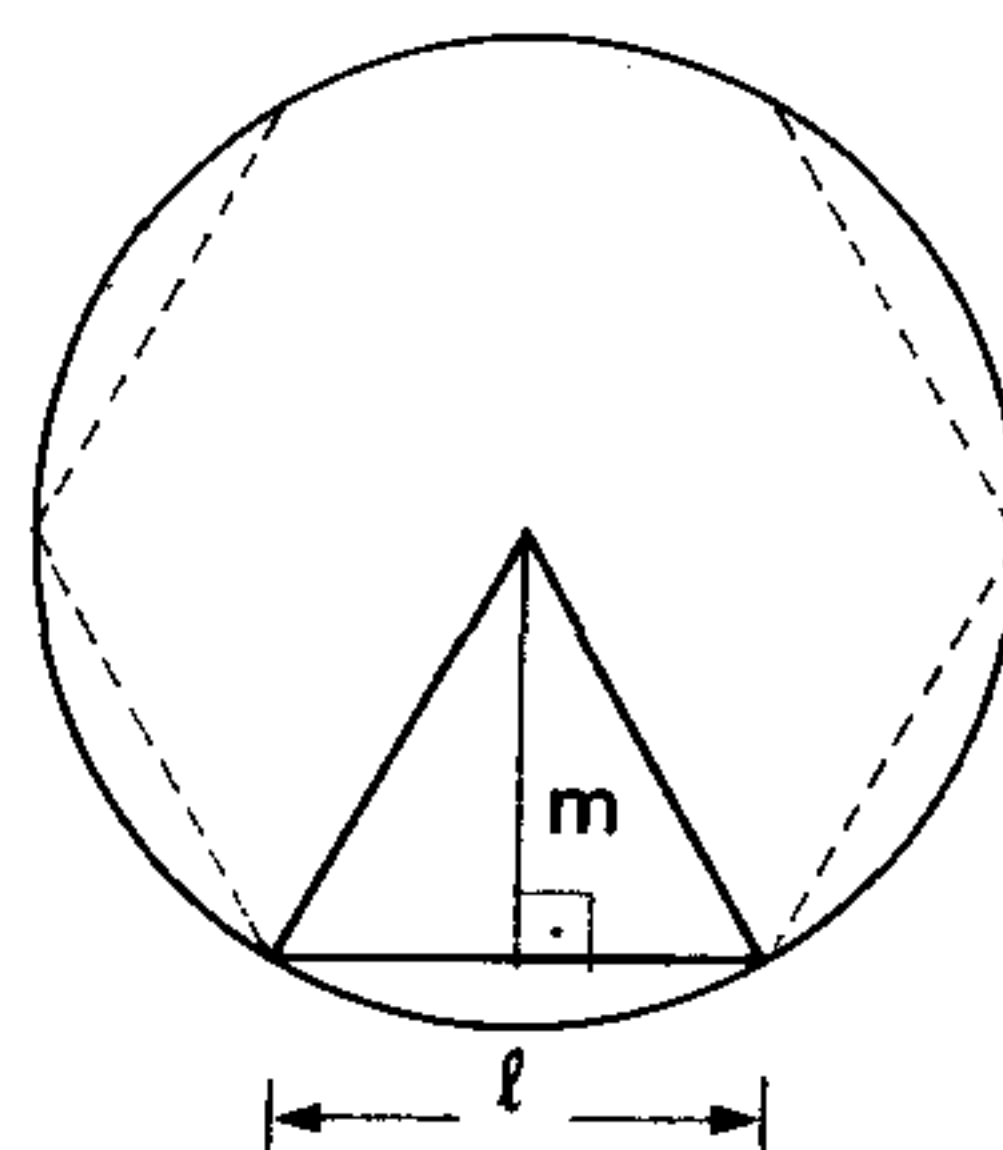
Dado o losango $L(d_1, d_2)$, conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas às diagonais.

$$A_L = A_{(4 \text{ triângulos})} = \frac{A_{(8 \text{ triângulos})}}{2} \Longrightarrow \boxed{A_L = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$$

Nota

O losango é paralelogramo e portanto sua área também é dada por:

$$\boxed{A_L = b \cdot h}$$

249. Polígono regular

Sendo:

n = número de lados
m = medida do apótema
ℓ = medida do lado
p = semiperímetro

Seja um polígono regular de n lados de medidas iguais a ℓ e de apótema de medida m.

Podemos decompor esse polígono em n triângulos de base ℓ e altura m. Então:

$$\left.\begin{aligned} A_{pol} &= n \cdot A_T \\ A_T &= \frac{\ell \cdot m}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A_{pol} = \frac{\overbrace{n \cdot \ell}^{2p} \cdot m}{2}$$

Sendo $n \cdot \ell = 2p$ (perímetro), vem:

$$A_{pol} = \frac{2 \cdot p \cdot m}{2} \Longrightarrow \boxed{A_{pol} = p \cdot m}$$

Nota

Área de um hexágono regular de lado a.

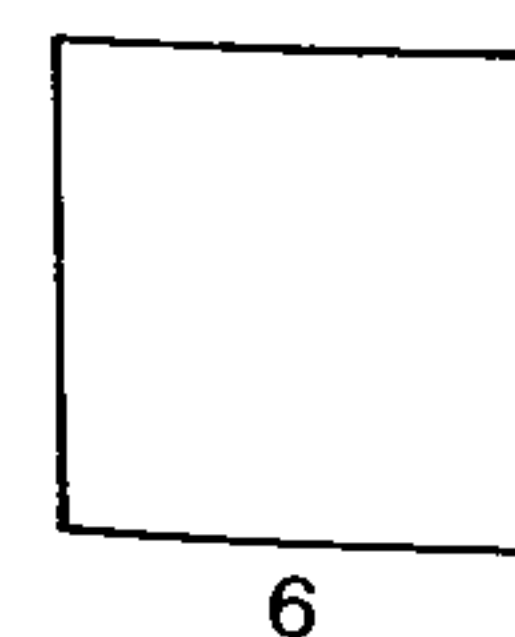
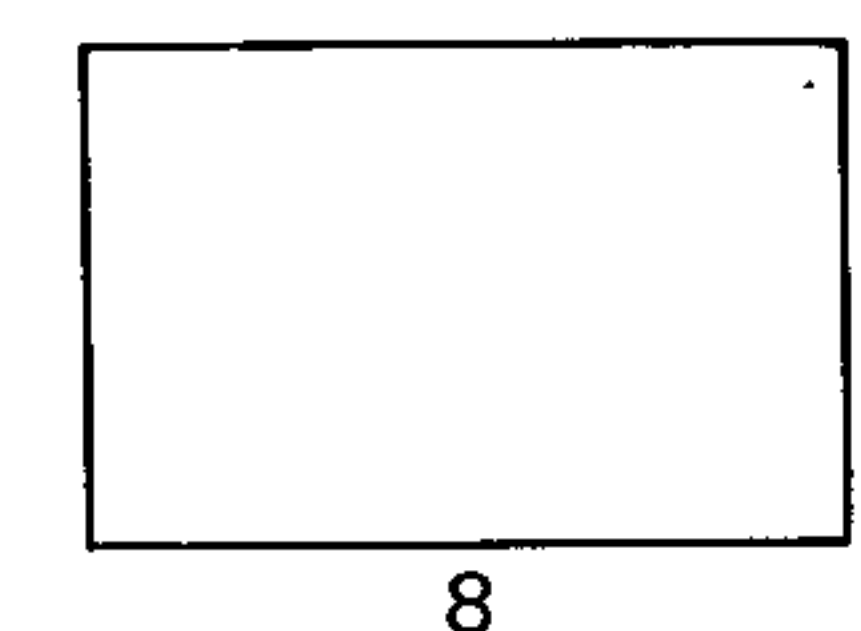
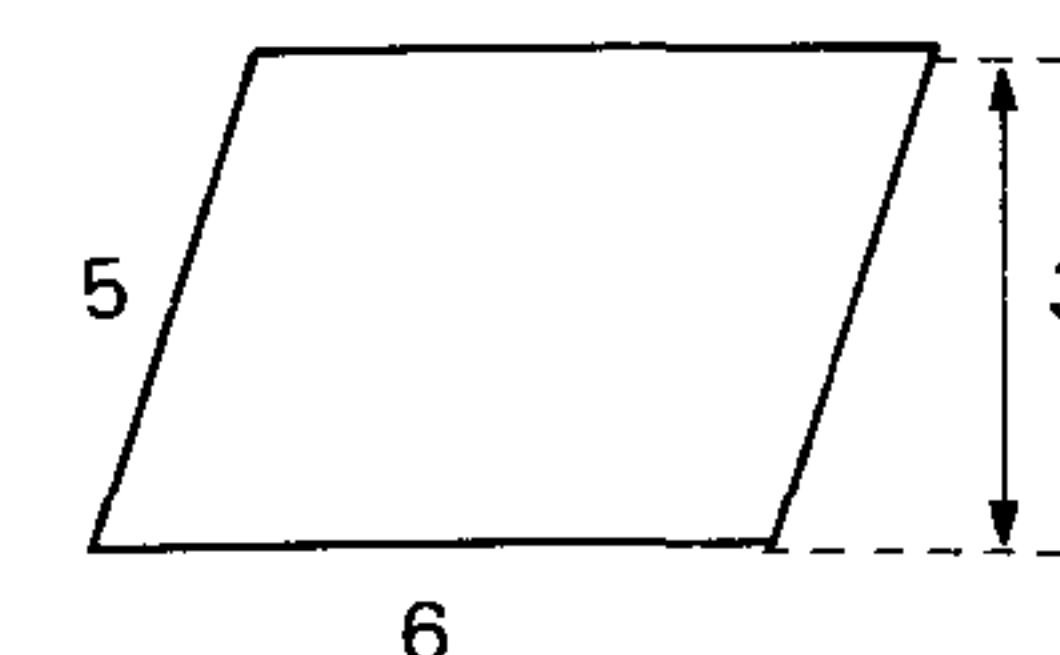
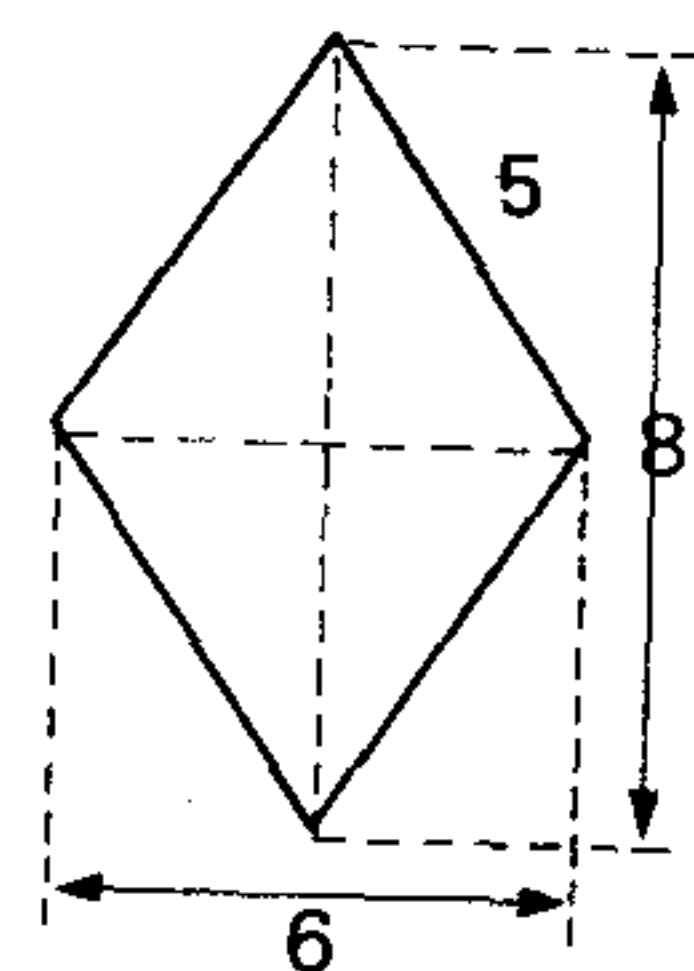
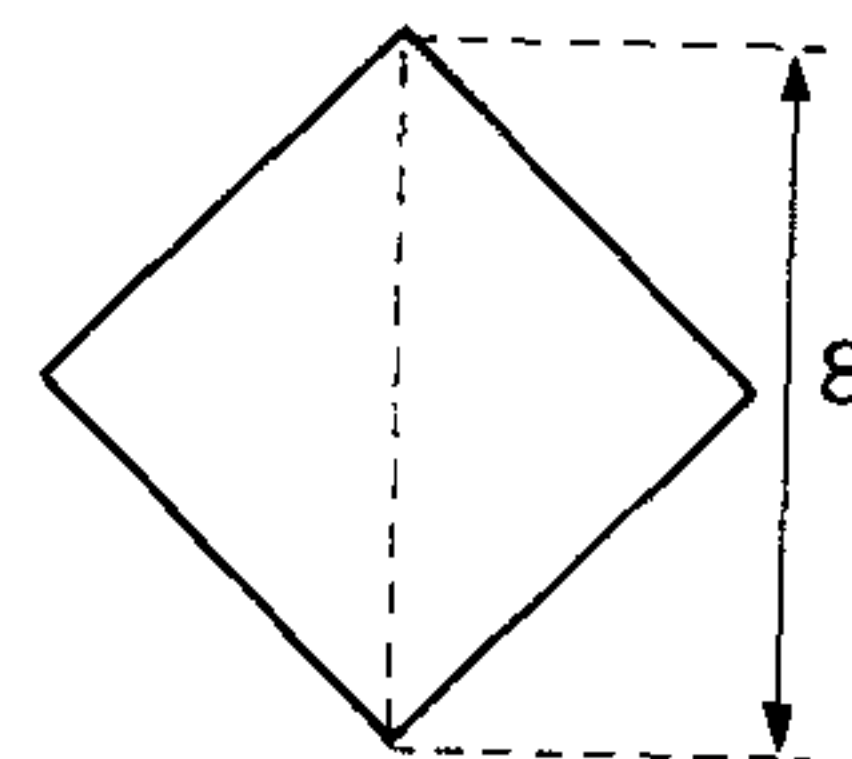
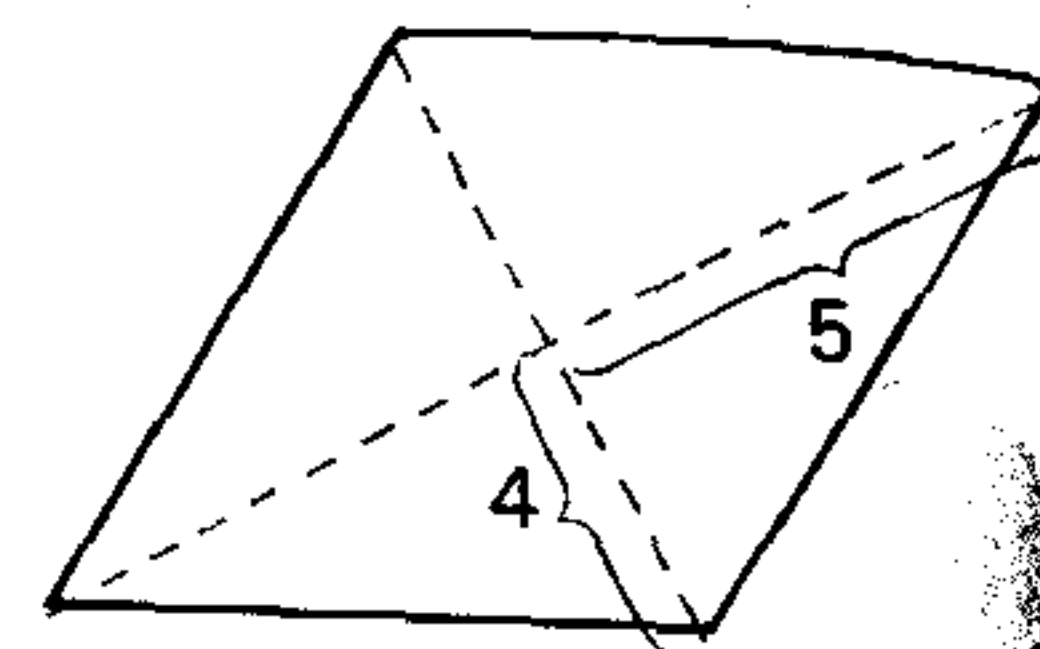
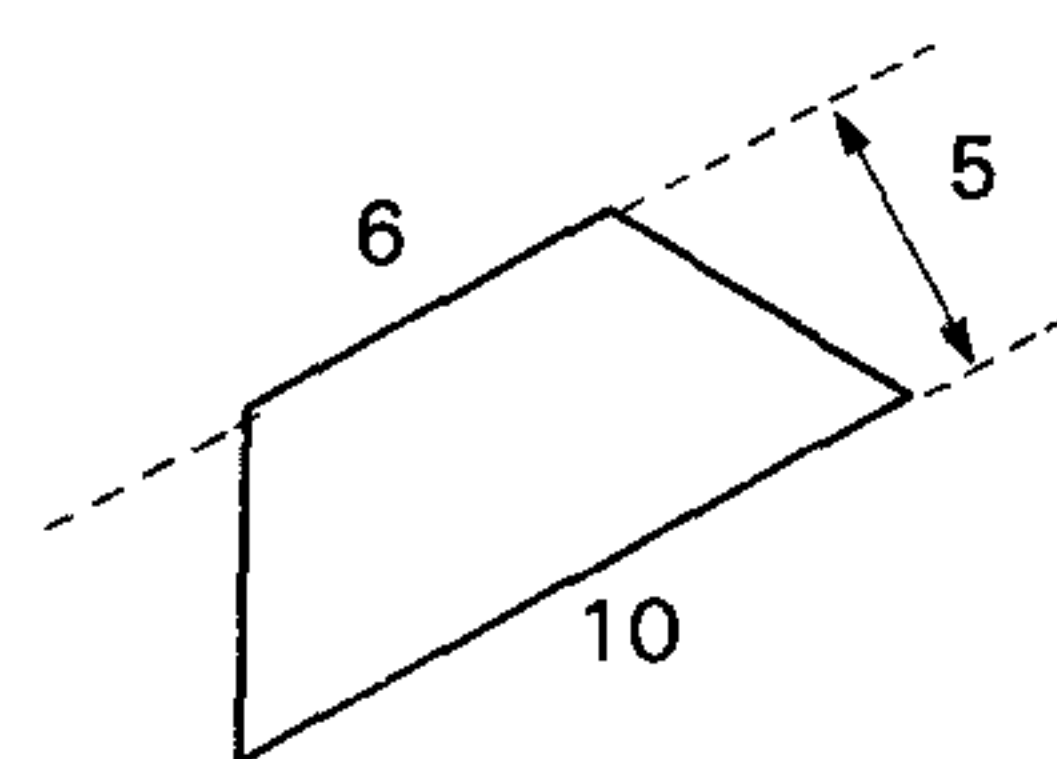
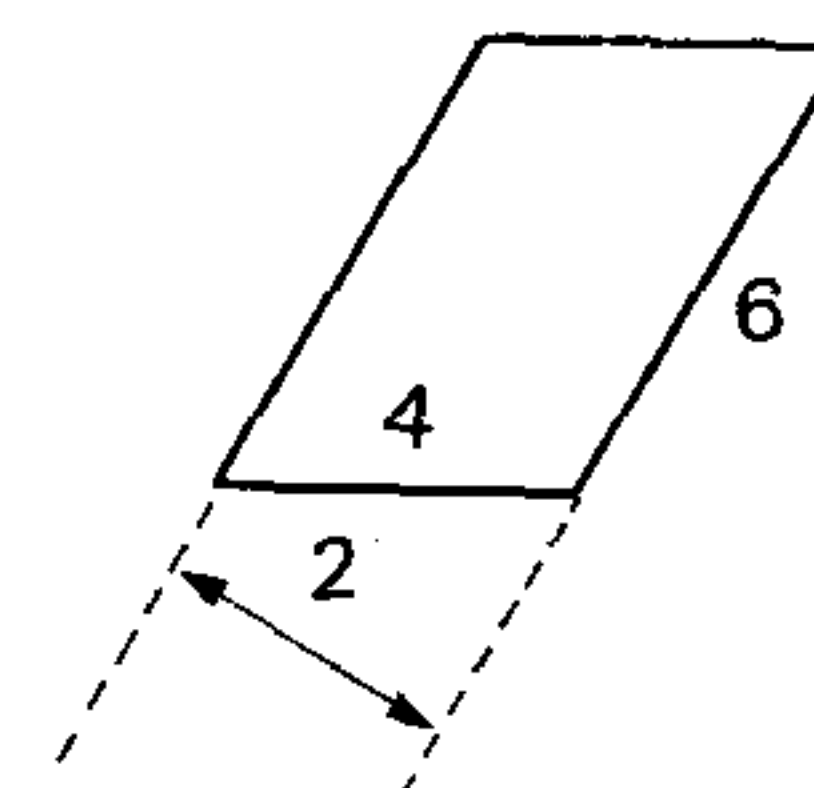
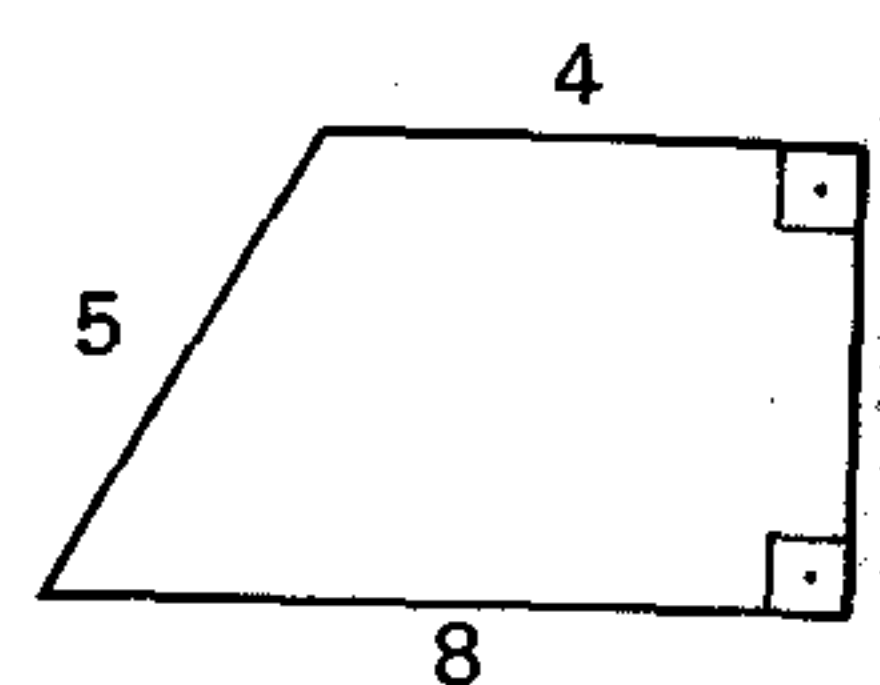
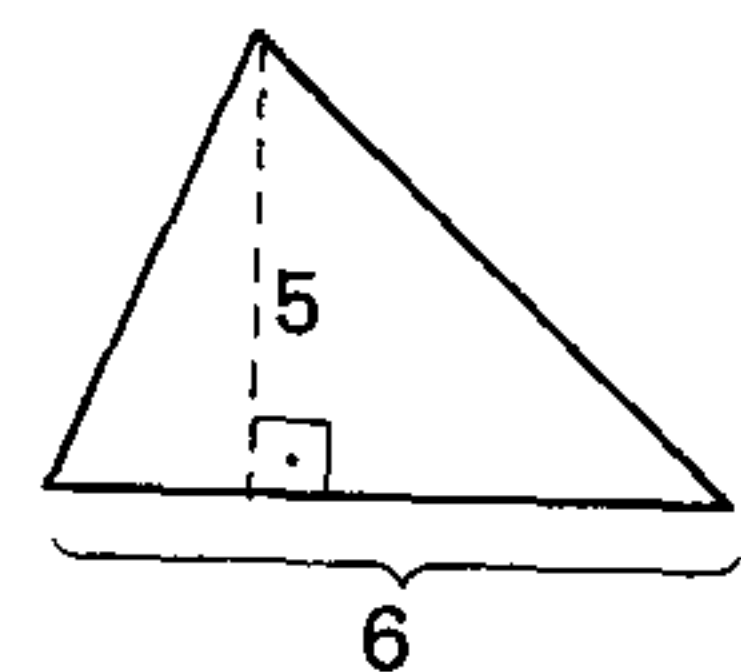
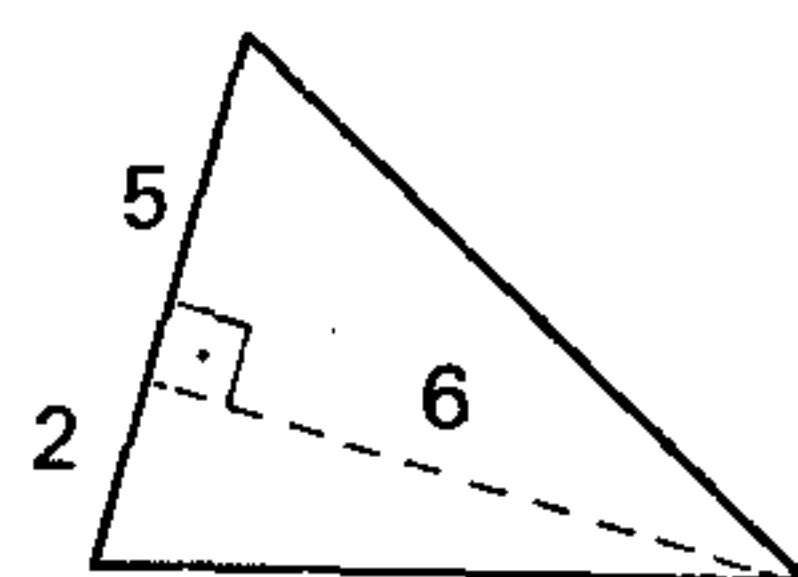
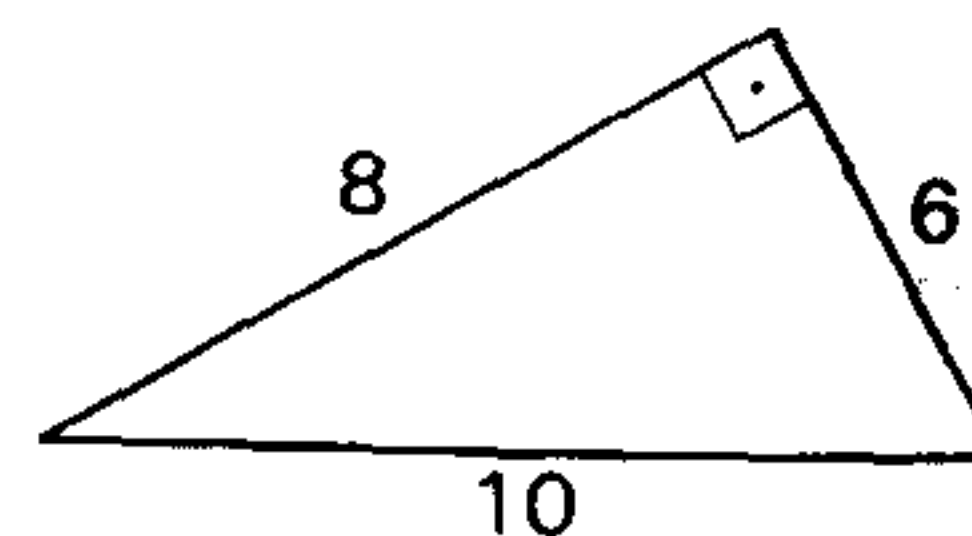
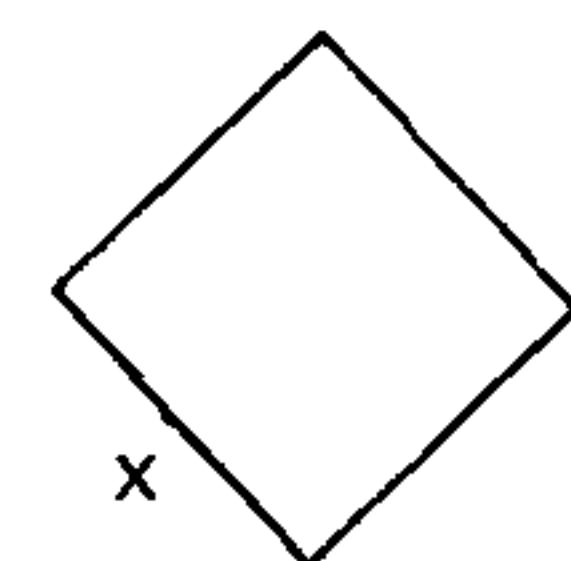
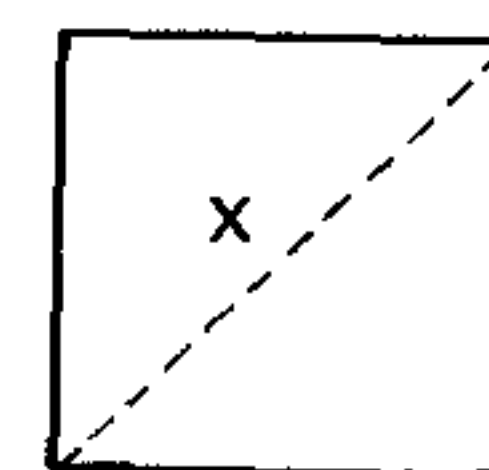
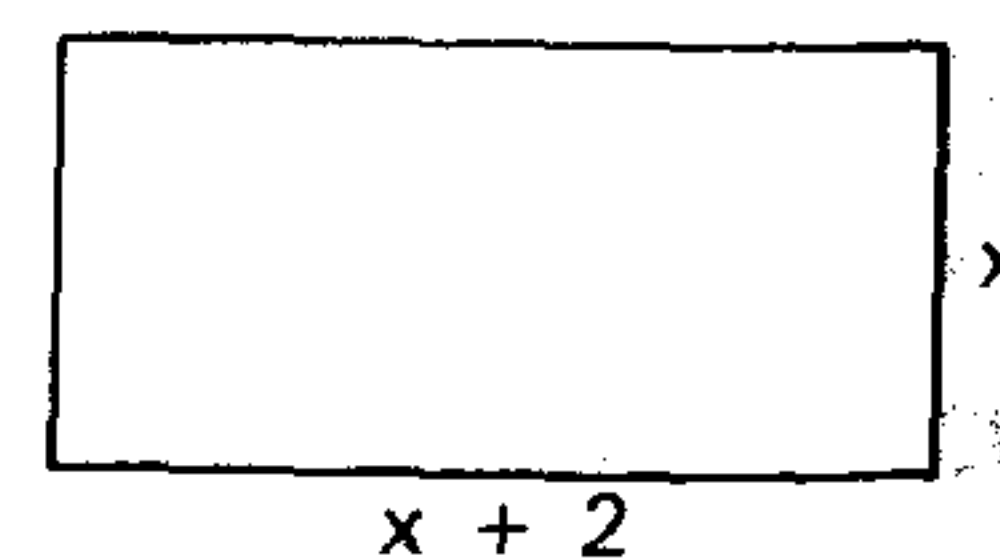
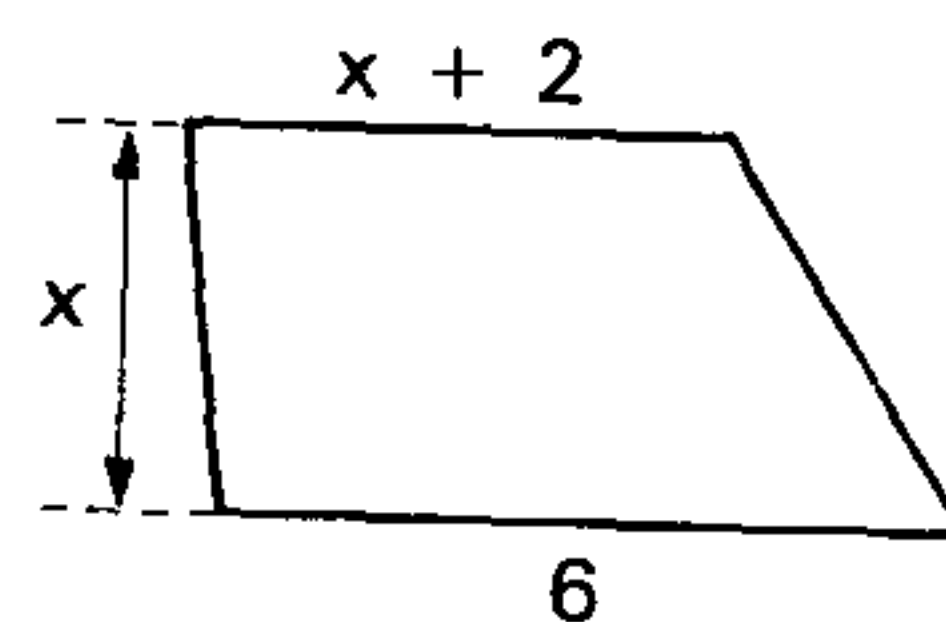
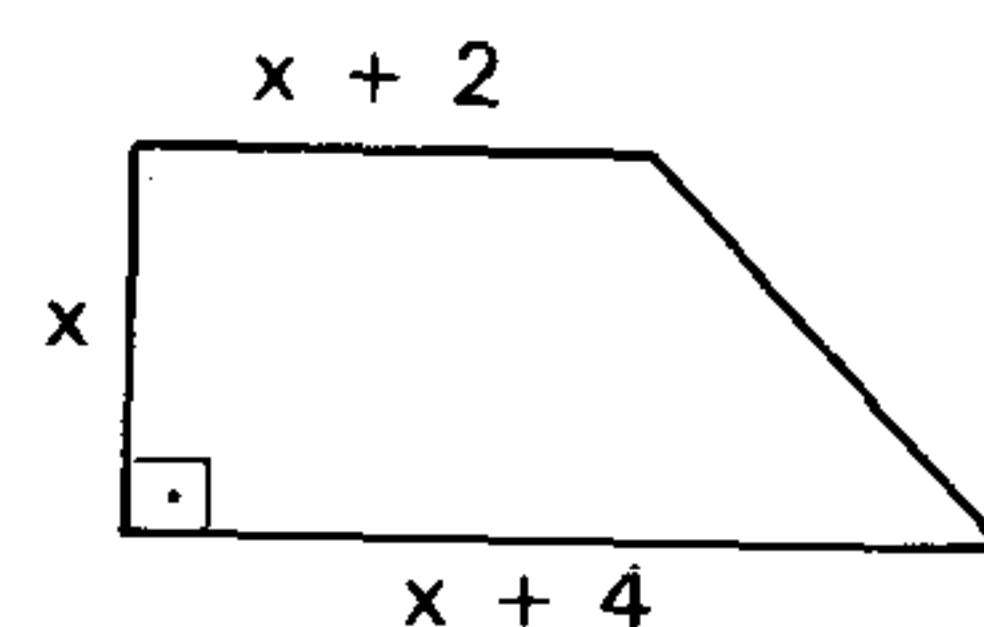
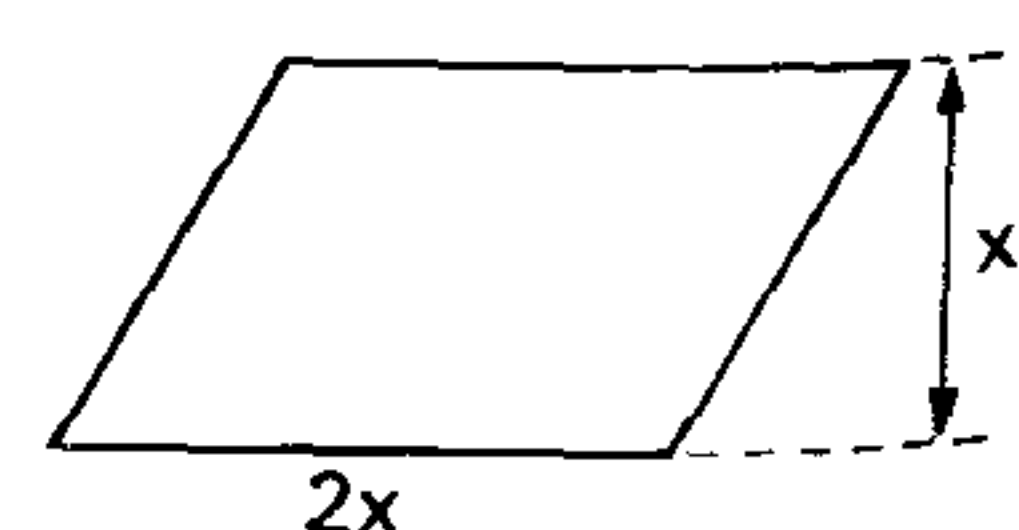
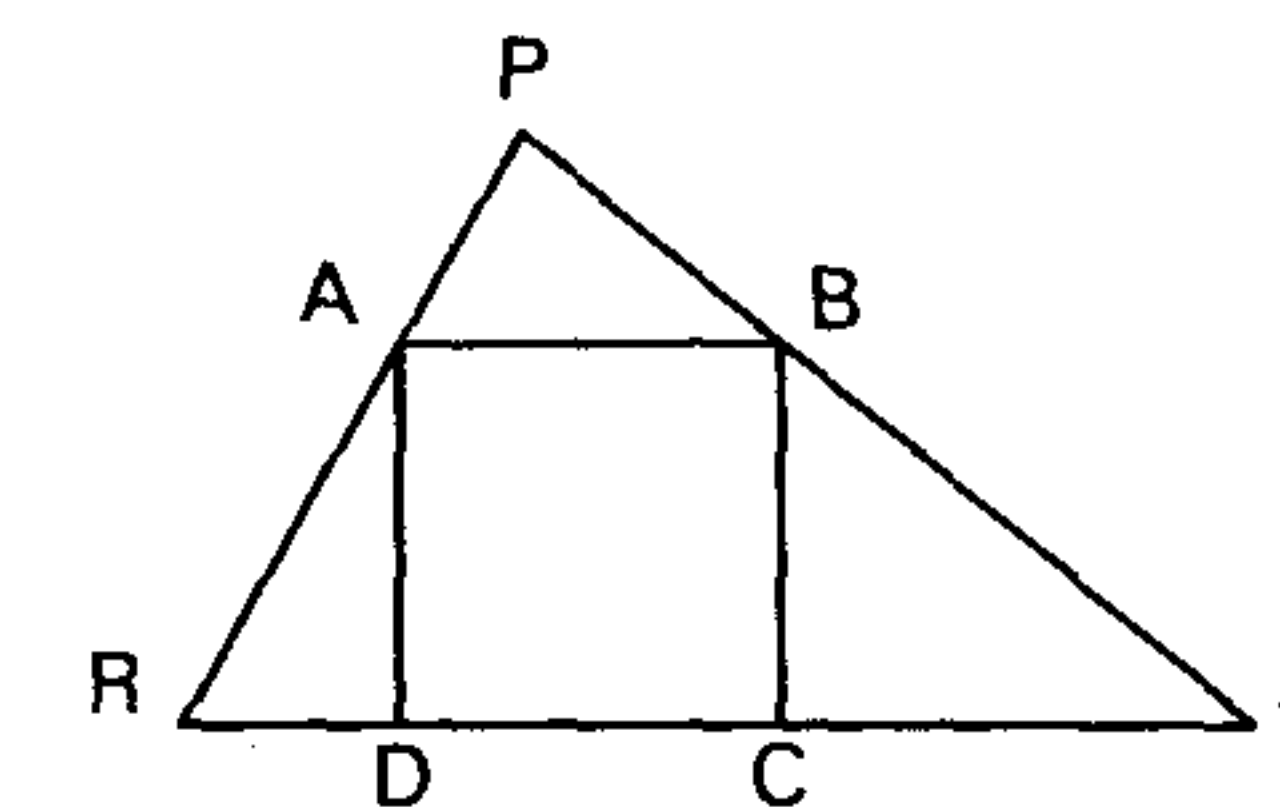
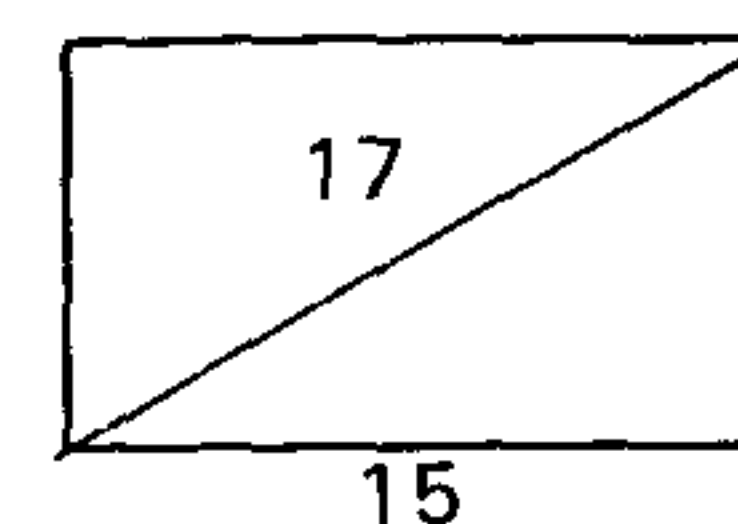
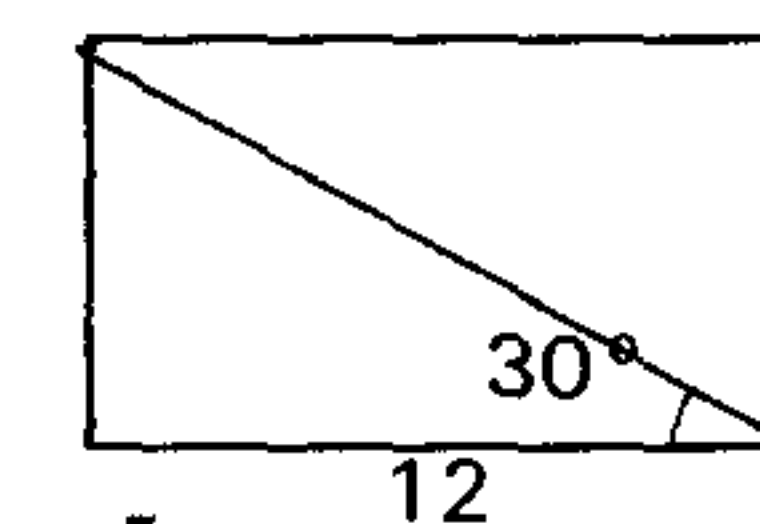
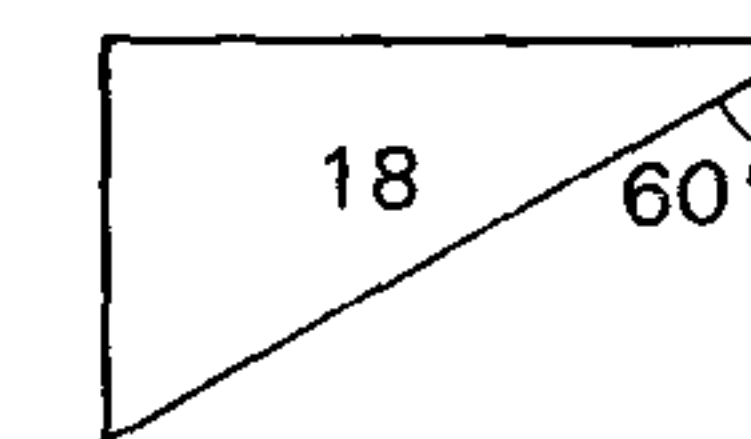
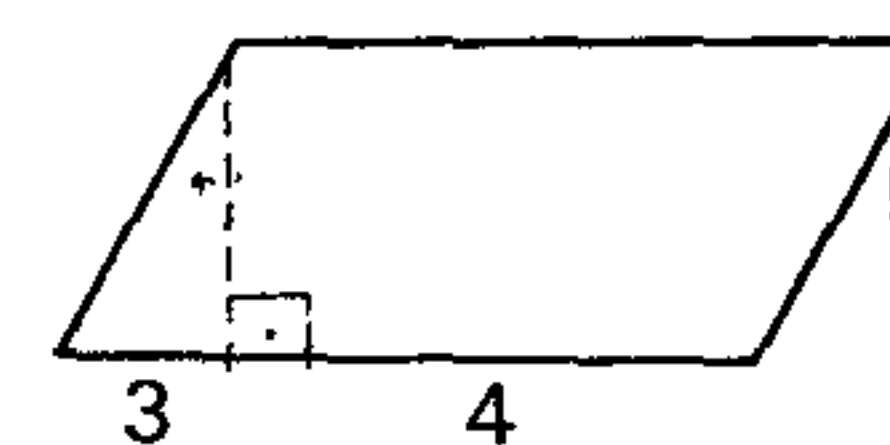
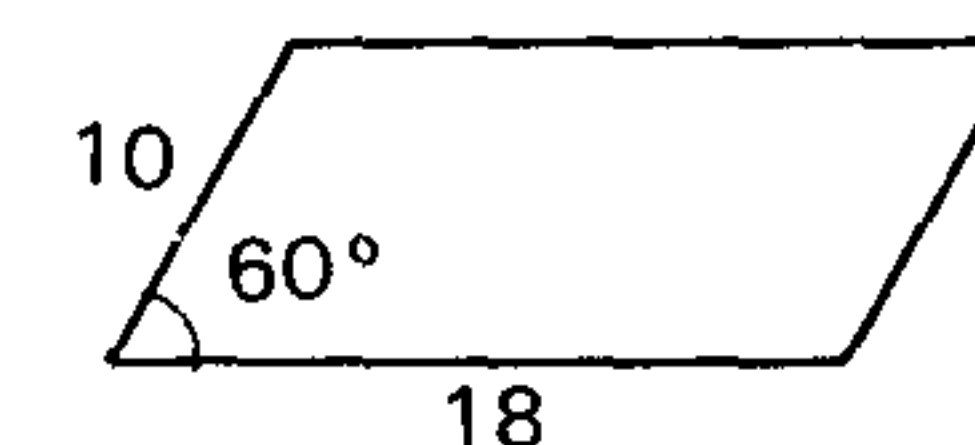
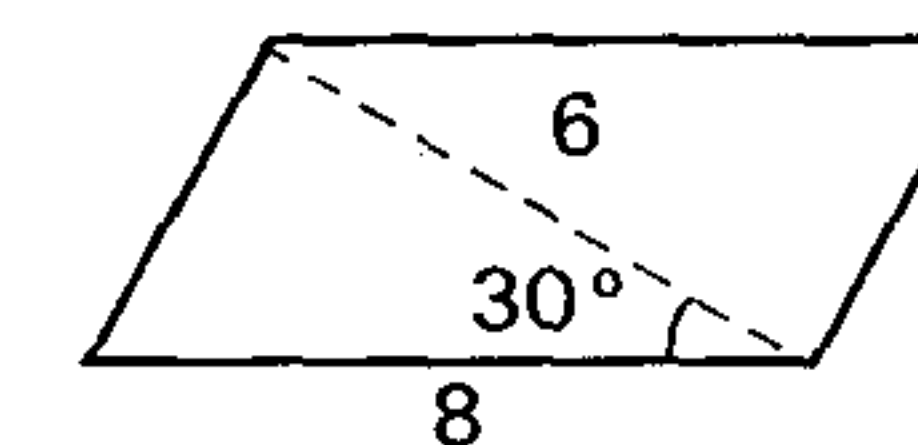
Um hexágono regular de lado a é a reunião de 6 triângulos equiláteros de lado a.

Sendo $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ a área do triângulo, temos:

$$A_{hexágono} = 6 \cdot S \Longrightarrow A_{hexágono} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_{hexágono} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}$$

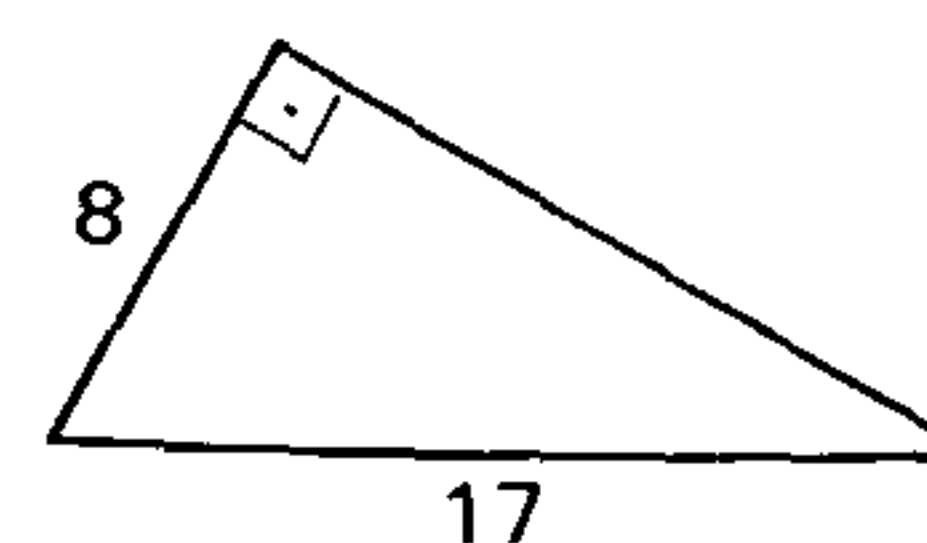
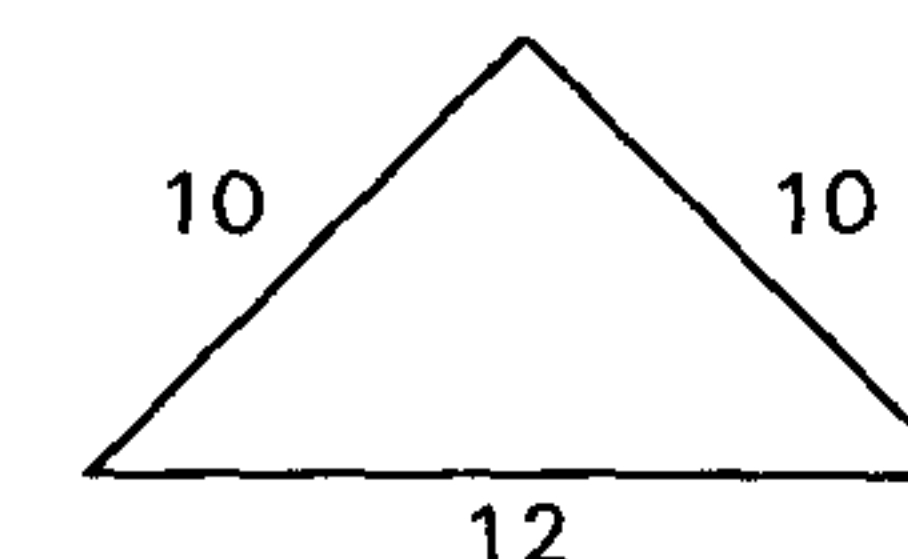
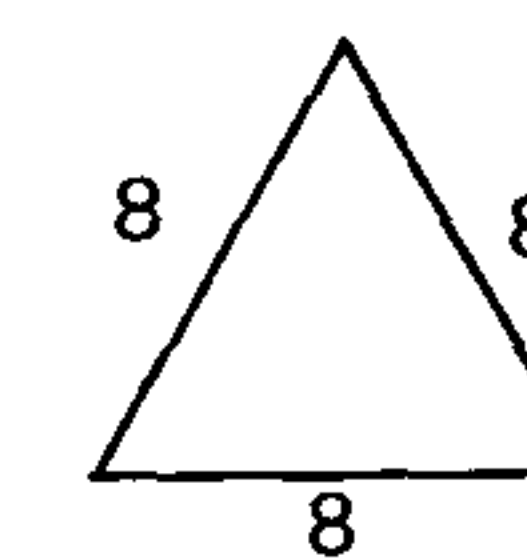
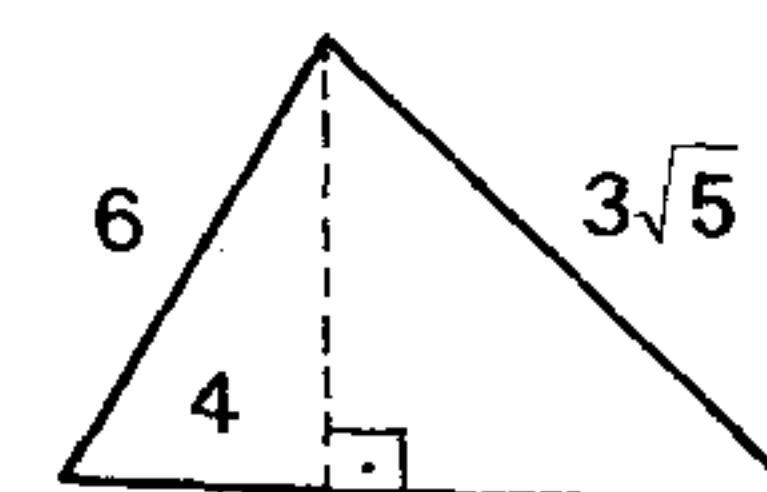
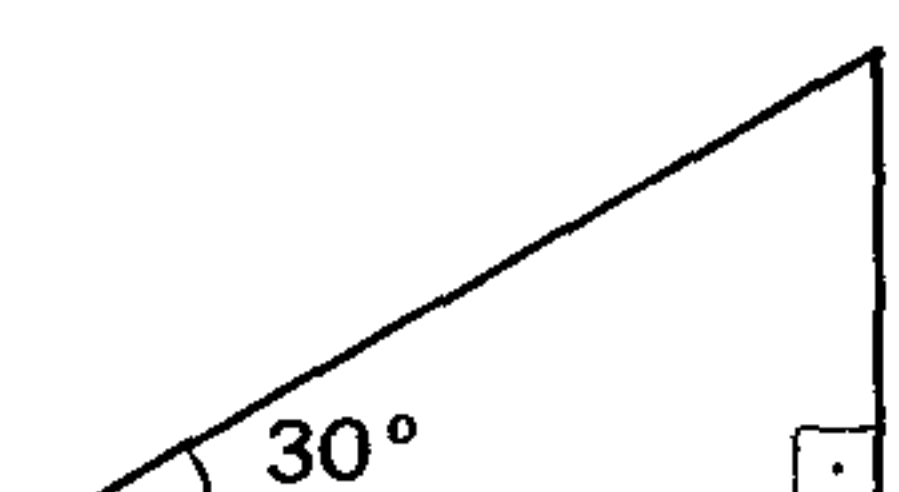
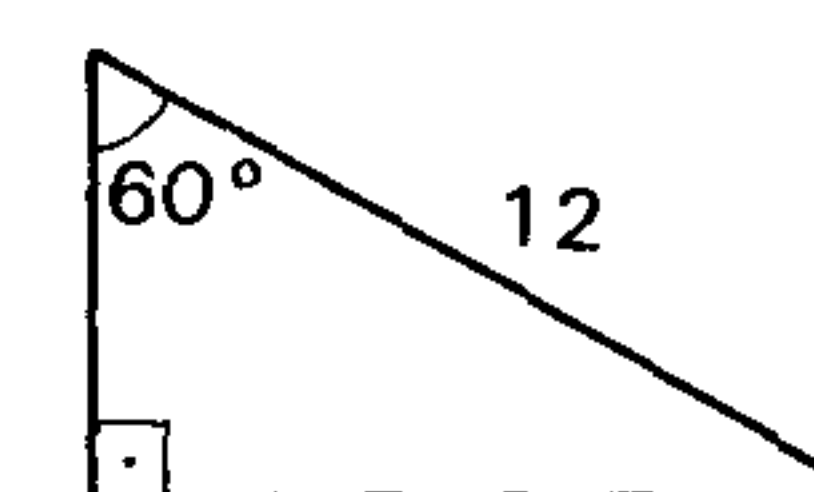
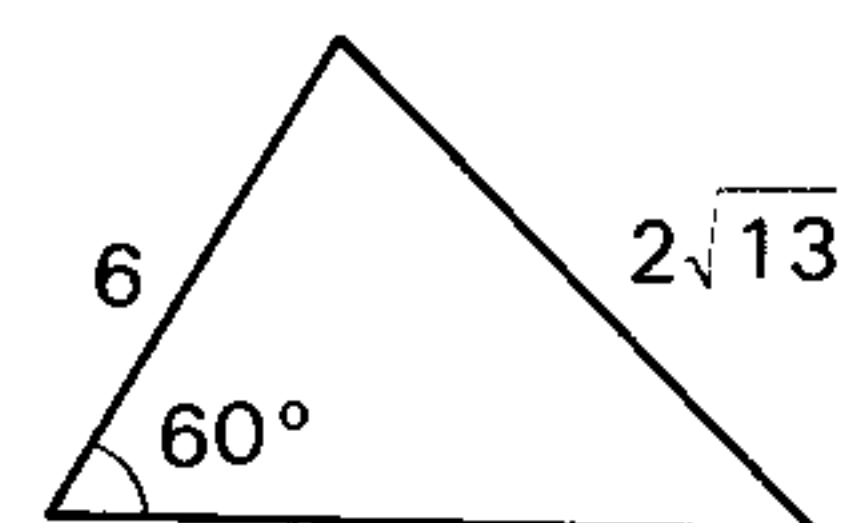
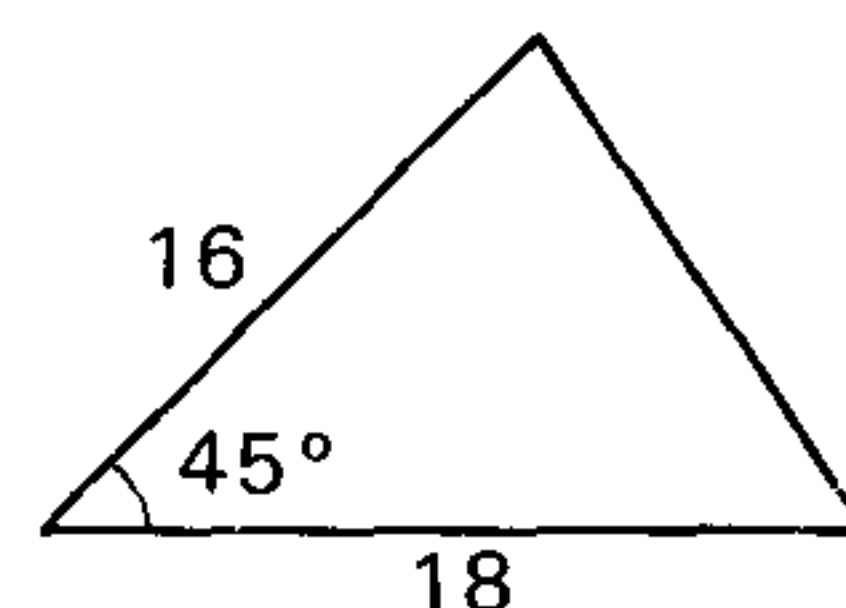
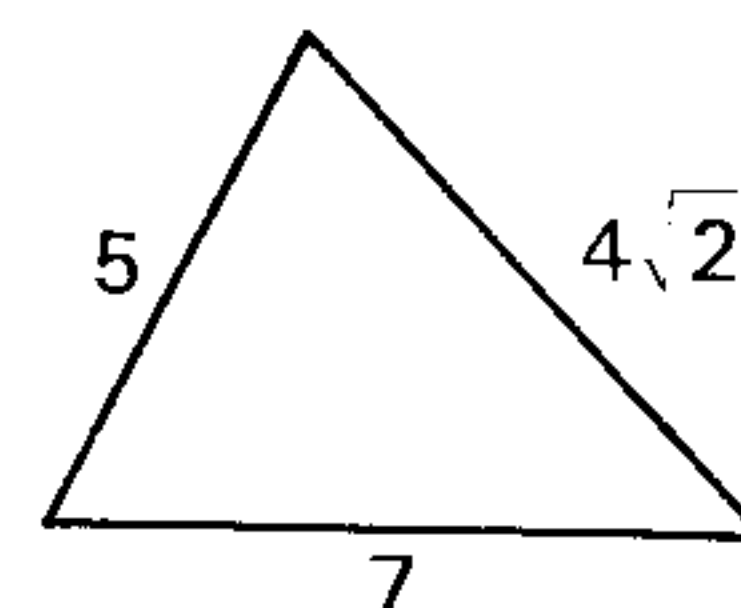
EXERCÍCIOS

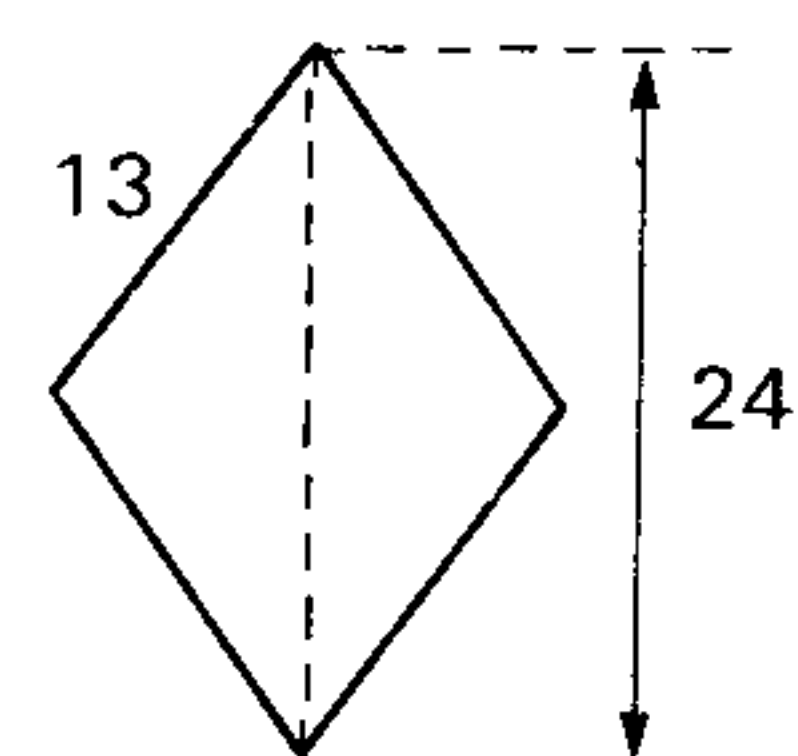
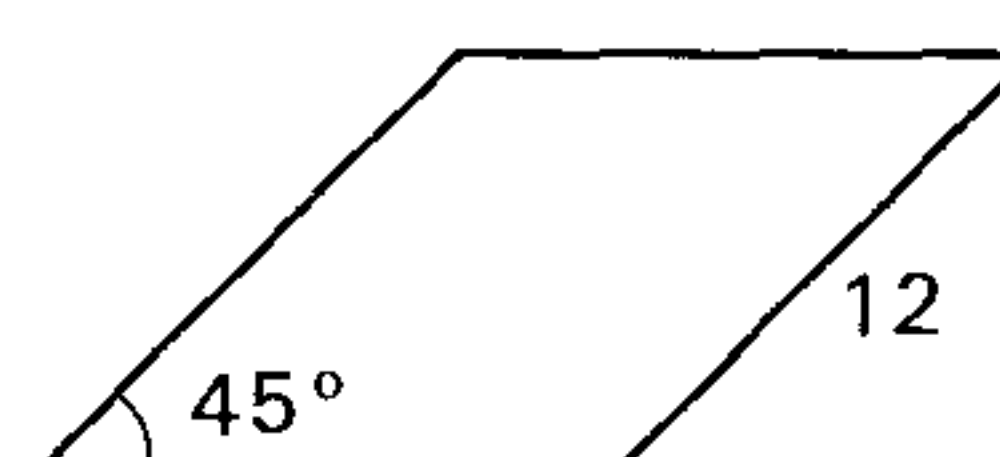
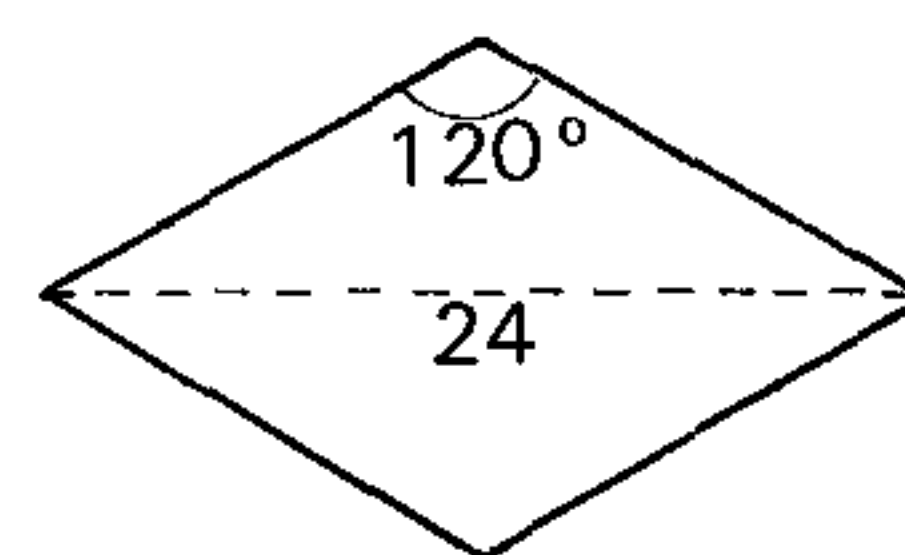
793. Determine a área dos polígonos nos casos abaixo, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

a) quadrado b) retângulo c) paralelogramo

d) losango e) quadrado f) losango

g) trapézio h) paralelogramo i)

j) k) l)

794. A área do polígono é dada entre parênteses, em cada caso. Determine x.

a) quadrado (36 m^2) b) quadrado (50 m^2) c) retângulo (24 m^2)

d) trapézio (10 m^2) e) trapézio (18 m^2) f) paralelogramo (32 m^2)

795. Na figura temos um quadrado $ABCD$ inscrito no triângulo PQR. Se QC é igual ao lado do quadrado, $RD = 3\ m$, a altura, relativa a $\overline{AB}$, do triângulo PAB é igual a $4\ m$ e a área do triângulo PQR é de $75\ m^2$. Determine o lado do quadrado.

796. Determine a área do retângulo nos casos a seguir, sendo a unidade das medidas o metro.

a) b) c)

797. Determine a área do paralelogramo nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas.

a) b) c)

798. Determine a área do triângulo nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas.

a) b) c)

d) e) f)

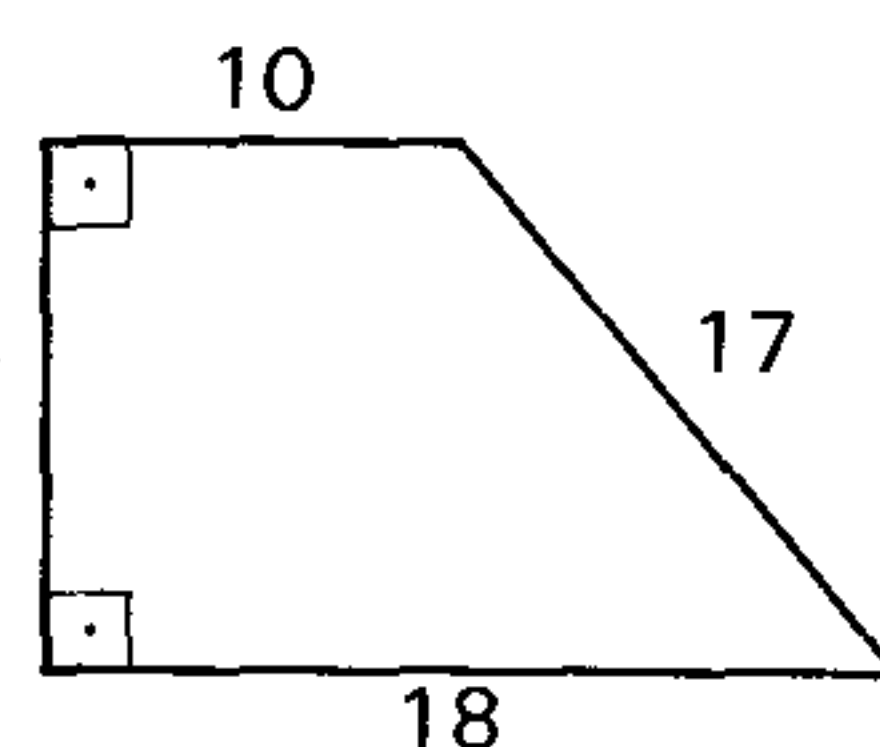
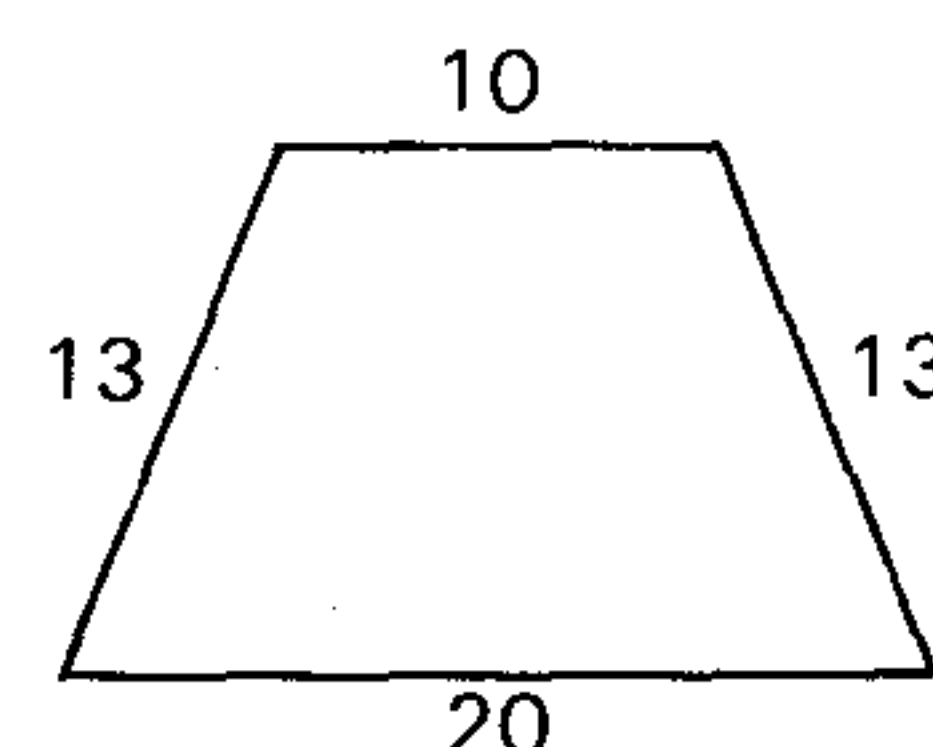
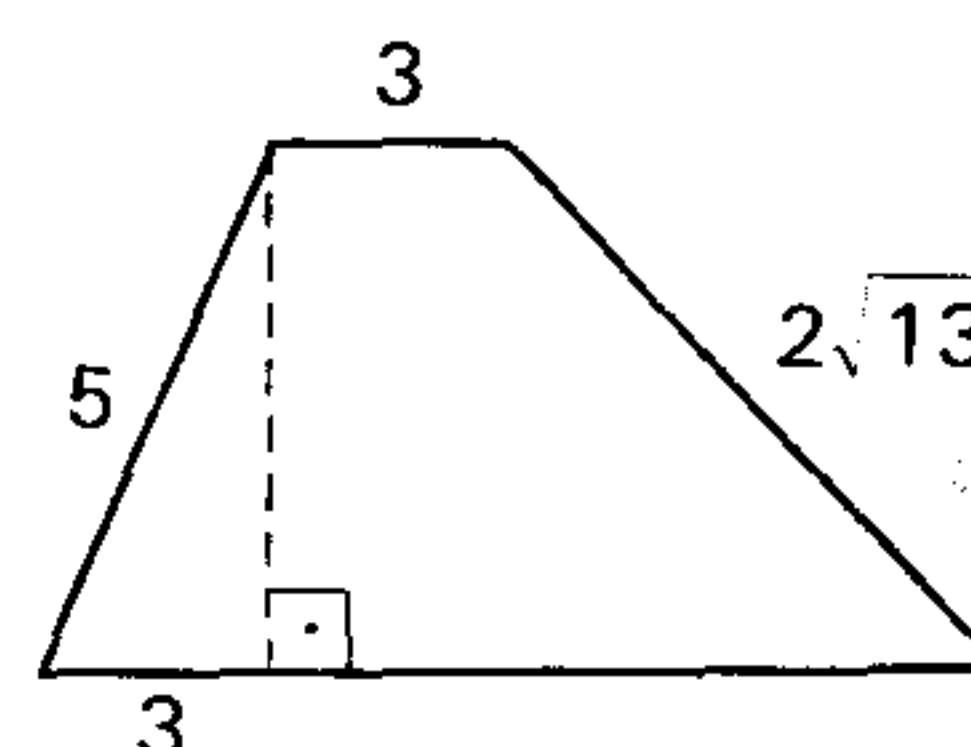
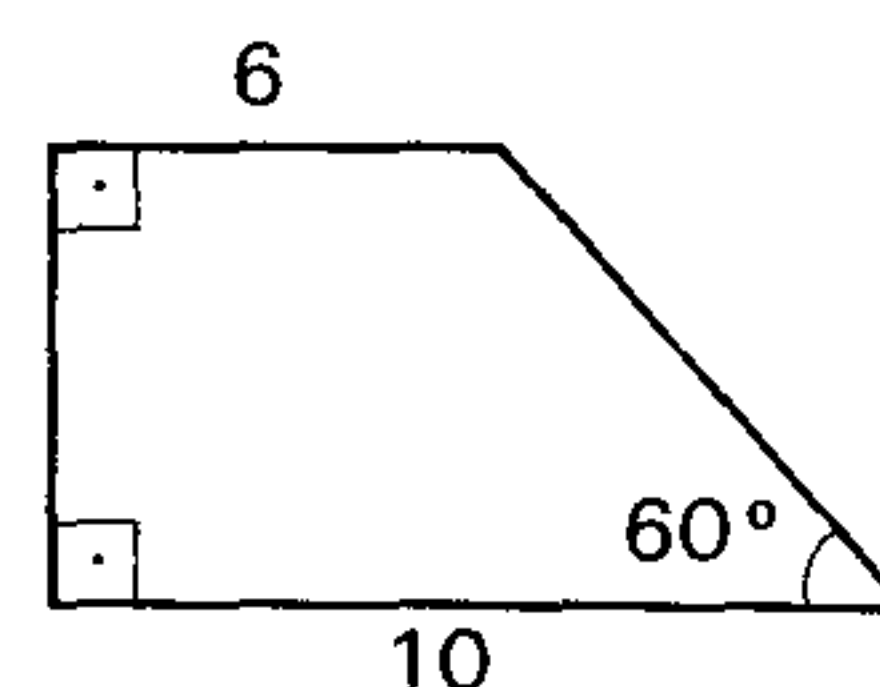
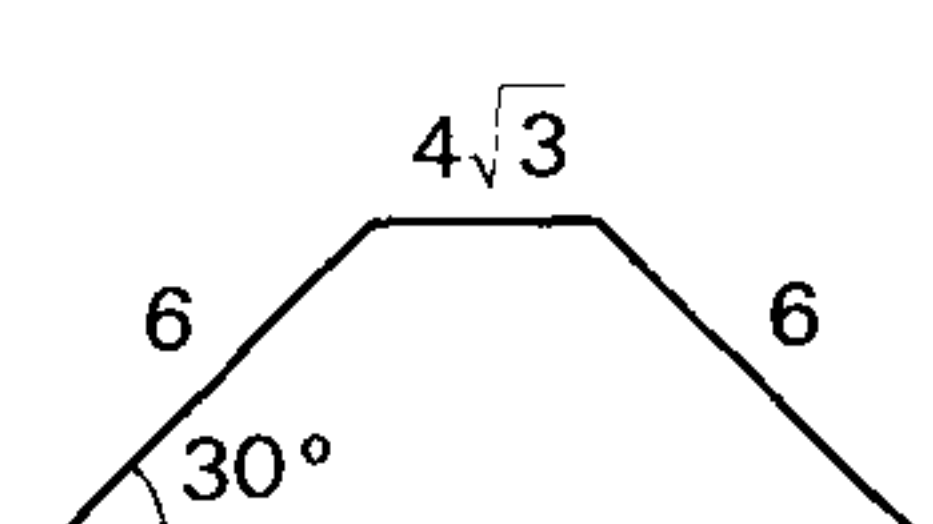
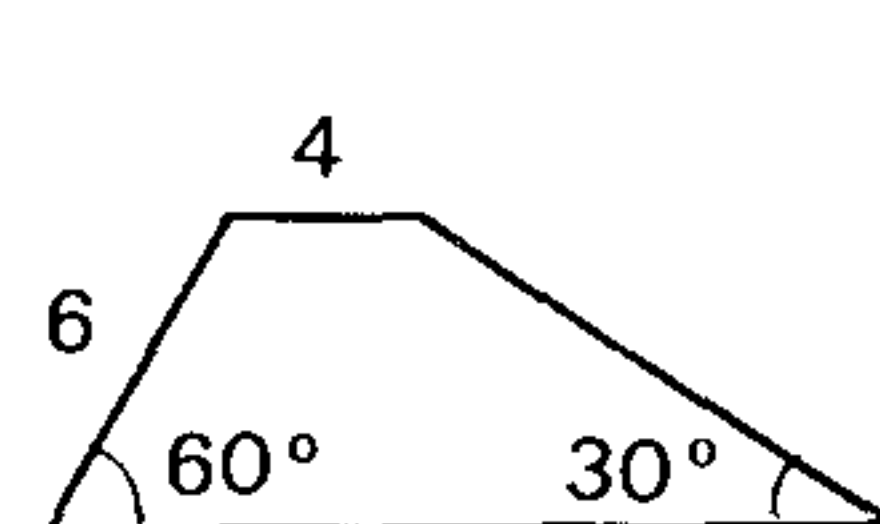
g) h) i)

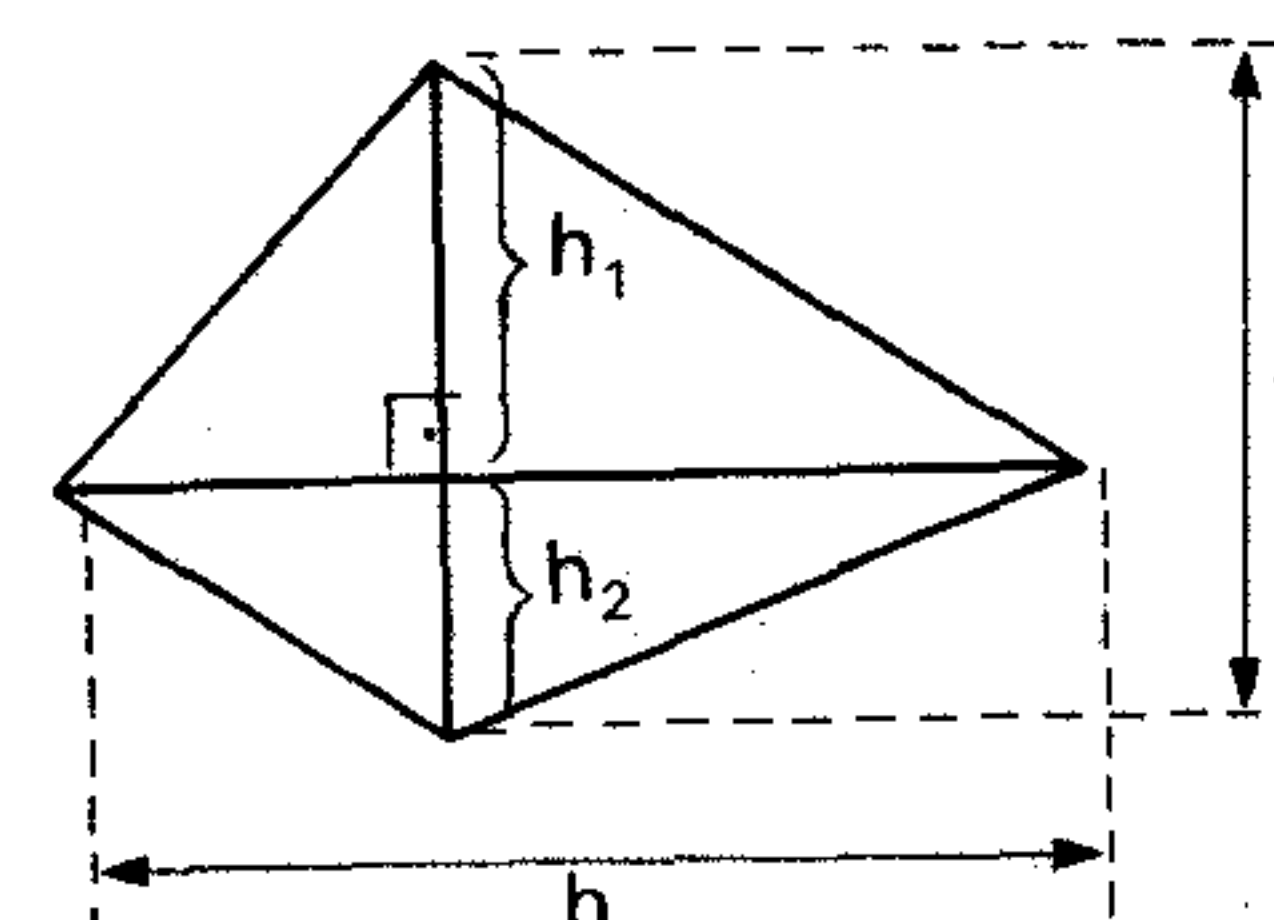
6 $2\sqrt{13}$ 60° — 16 45° 18 — 5 $4\sqrt{2}$ 7

799. Determine a área do losango nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

a) 13, 24 b) 45°, 12 c) 120°, 24

800. Determine a área do trapézio nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

a) 10, 17, 18 b) 10, 13, 13, 20 c) 3, 5, $2\sqrt{13}$, 3

d) 6, 60°, 10 e) $4\sqrt{3}$, 6, 6, 30° f) 4, 6, 60°, 30°

801. Determine a área de um trapézio isósceles com bases de *4 m* e *16 m* e perímetro de *40 m*.

802. Mostre que a área de um quadrilátero de diagonais perpendiculares, que medem a e b, é dada por $\frac{ab}{2}$.

Solução

h_1, h_2, a, b

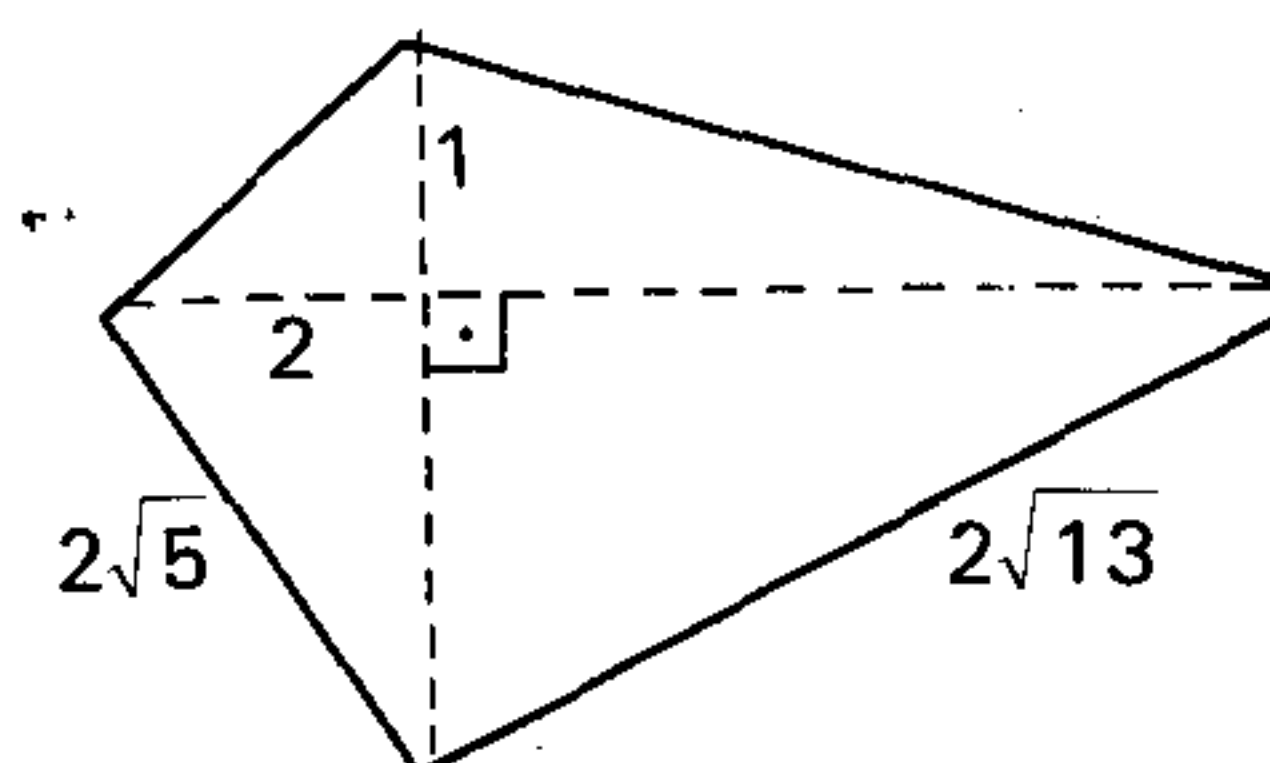
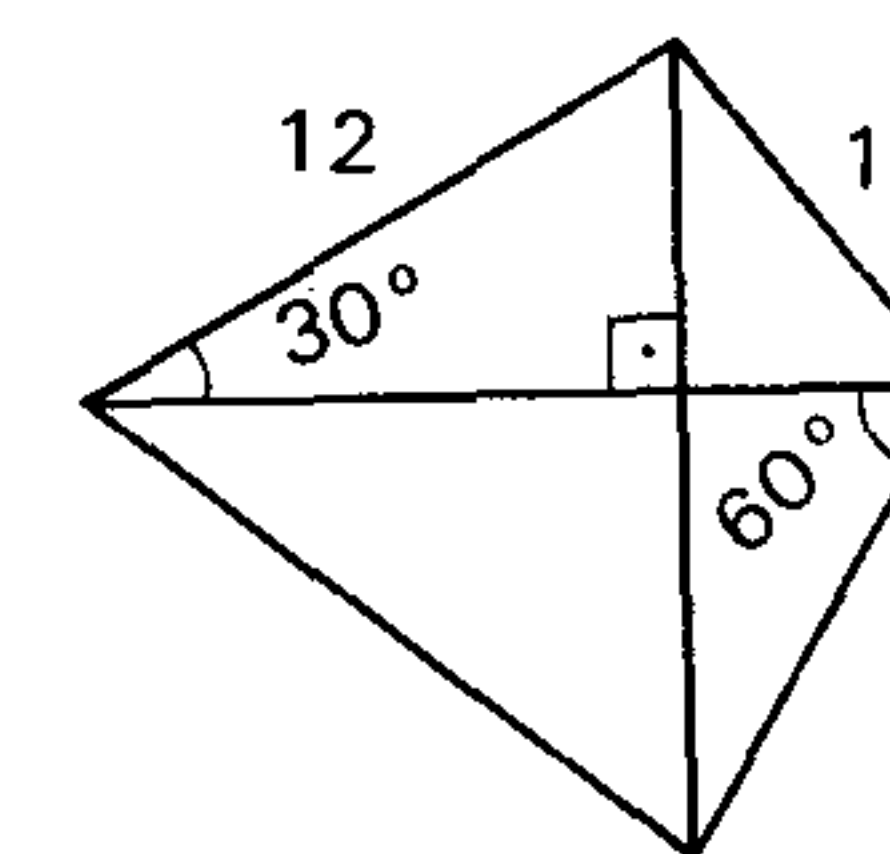
Como a área do quadrilátero é igual à soma das áreas dos triângulos e $h_1 + h_2 = a$, temos:

$$A_Q = \frac{b \cdot h_1}{2} + \frac{b \cdot h_2}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_Q = \frac{b}{2}(h_1 + h_2) \Longrightarrow$$

$$A_Q = \frac{b}{2}(a) \Longrightarrow A_Q = \frac{ab}{2}$$

803. Determine a área do quadrilátero nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

a) 1, 2, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{13}$ b) 12, 10, 30°, 60°

804. A área de um retângulo é *40 cm²* e sua base excede em *6 cm* sua altura. Determine a altura do retângulo.

805. Um retângulo tem *24 cm²* de área e *20 cm* de perímetro. Determine suas dimensões.

806. A base de um retângulo é o dobro de sua altura. Determine suas dimensões, sendo *72 cm²* sua área.

807. As bases de um trapézio isósceles medem, respectivamente, *4 cm* e *12 cm*. Determine a área desse trapézio, sabendo que o semiperímetro do trapézio é igual a *13 cm*.

808. Uma das bases de um trapézio excede a outra em *4 cm*. Determine as medidas dessas bases, sendo *40 cm²* a área do trapézio e *5 cm* a altura.

809. As diagonais de um losango estão entre si como $\frac{2}{7}$. Determine a área desse losango, sabendo que a soma de suas diagonais é igual ao perímetro de um quadrado de *81 cm²* de área.

810. O perímetro de um losango é de *60 cm*. Calcule a medida de sua área, sabendo que a sua diagonal maior vale o triplo da menor.

811. Determine a área de um losango, sendo *120 cm* o seu perímetro e *36 cm* a medida da sua diagonal menor.

812. Com uma corda de *40 m* de comprimento construímos um quadrado e com a mesma corda construímos depois um trapézio isósceles cuja base maior é o dobro da menor e cujos lados oblíquos têm medidas iguais à base menor. Determine a razão entre a área do quadrado e a área do trapézio.

813. Determine o lado de um quadrado, sabendo que, se aumentamos seu lado em *2 cm*, sua área aumenta em *36 cm²*.

814. Determine a área de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um retângulo cuja base excede em *3 cm* a altura, sendo *66 cm* a soma do dobro da base com o triplo da altura.

815. Um quadrado e um losango têm o mesmo perímetro. Determine a razão entre a área do quadrado e do losango, sabendo que as diagonais do losango estão entre si como $\frac{3}{5}$ e que a diferença entre elas é igual a *40 cm*.

816. Determine a área de um retângulo em função de sua diagonal *d*, sabendo que a diagonal é o triplo de sua altura.

817. Mostre que a área de um triângulo equilátero de lado *a* é dada por $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

818. Determine a área de um triângulo equilátero com:

a) perímetro de 30 m.

b) altura de 6 m.

819. Determine a área de um hexágono regular nos casos:

a) Seu lado tem 8 m.

b) Seu apótema tem $2\sqrt{3}$ m.

c) Sua diagonal menor mede 12 m.

820. Determine, em cada caso, o raio do círculo circunscrito a um:

a) quadrado de *16 m²*.

b) hexágono regular de $54\sqrt{3}$ *m²*.

c) triângulo equilátero de $36\sqrt{3}$ *m²*.

821. Determine a área do:

a) quadrado inscrito em um círculo de *5 m* de raio.

b) hexágono regular inscrito em um círculo de raio *4 m*

c) triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio *6 m*.

d) quadrado circunscrito a um círculo de raio *4 m*.

e) hexágono regular circunscrito a um círculo de raio *6 m*.

f) triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio *5 m*.

822. Determine, em cada caso, o raio do círculo inscrito em um:

a) quadrado de 24 m².

b) hexágono regular de $6\sqrt{3}$ m².

c) triângulo equilátero de $9\sqrt{3}$ m².

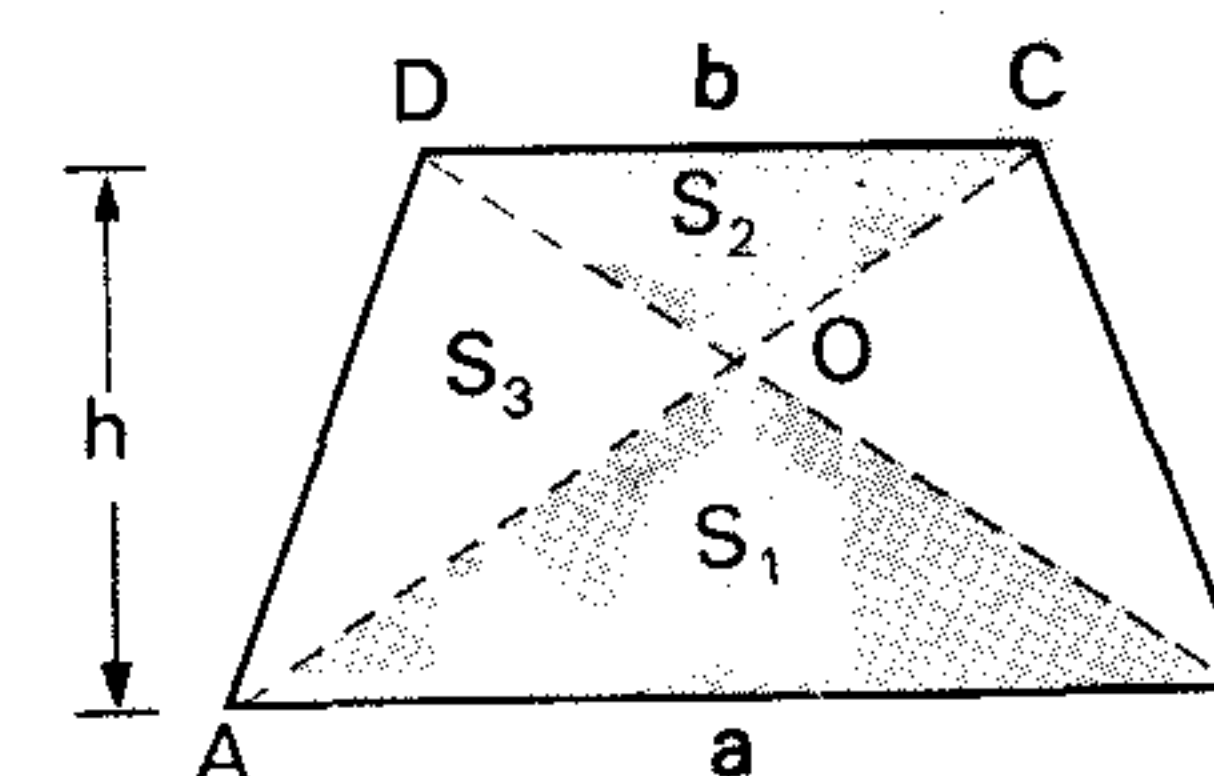
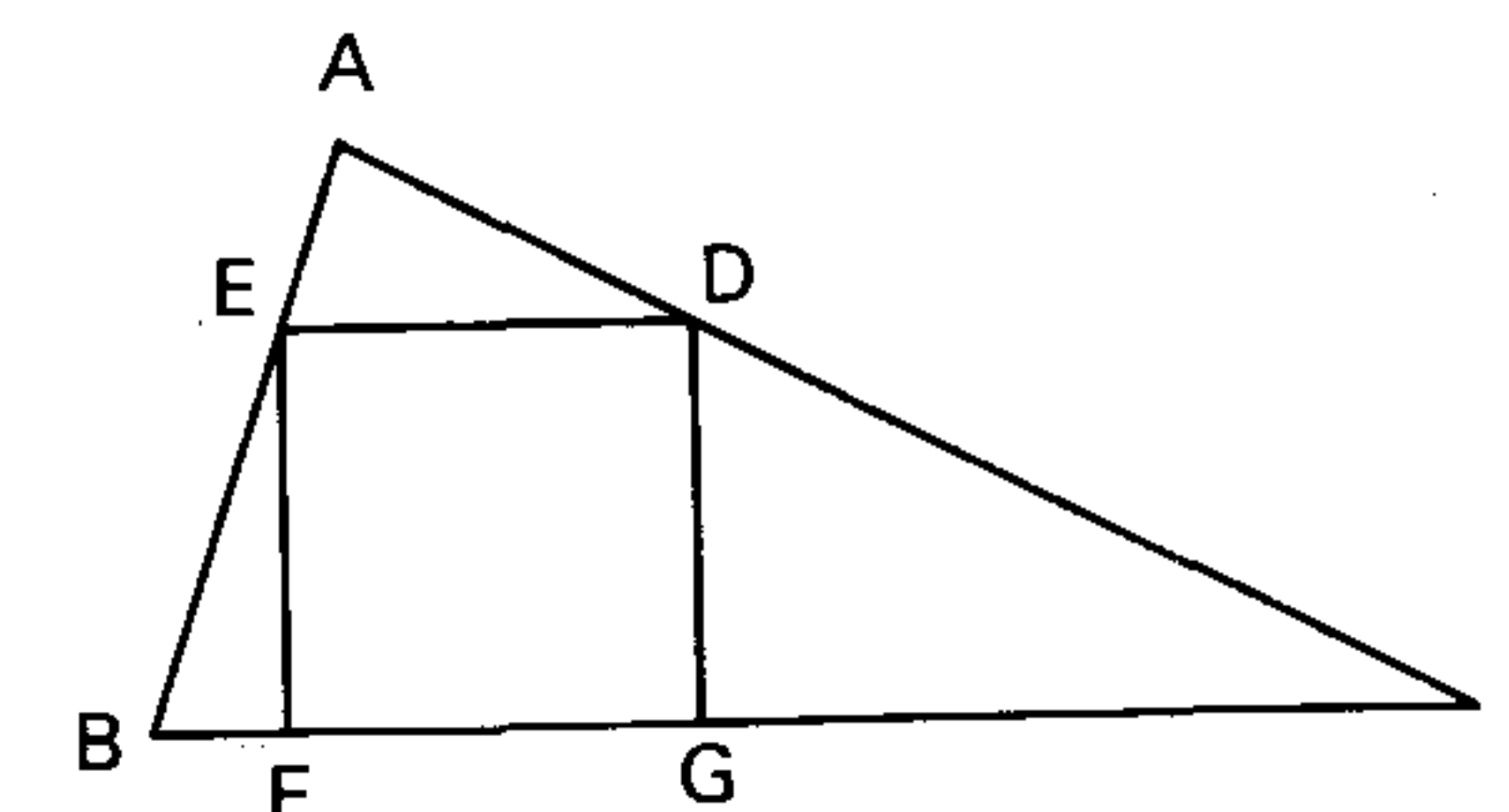
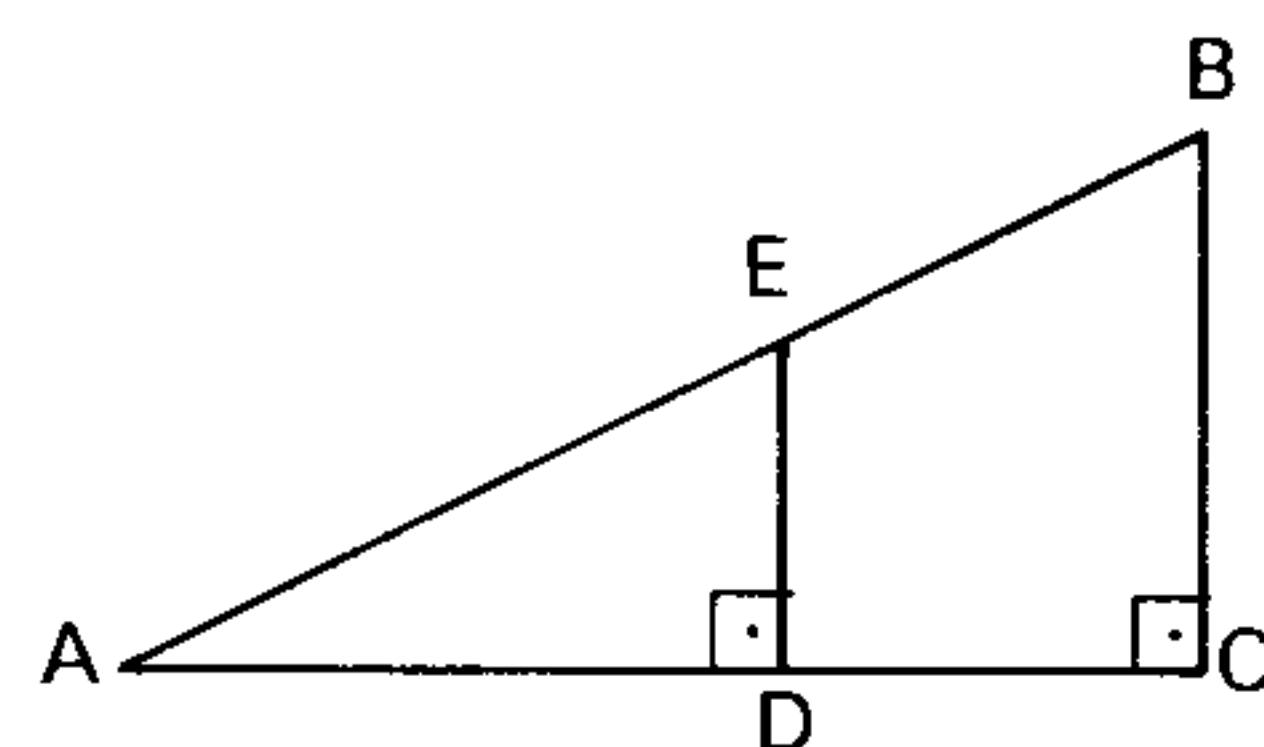
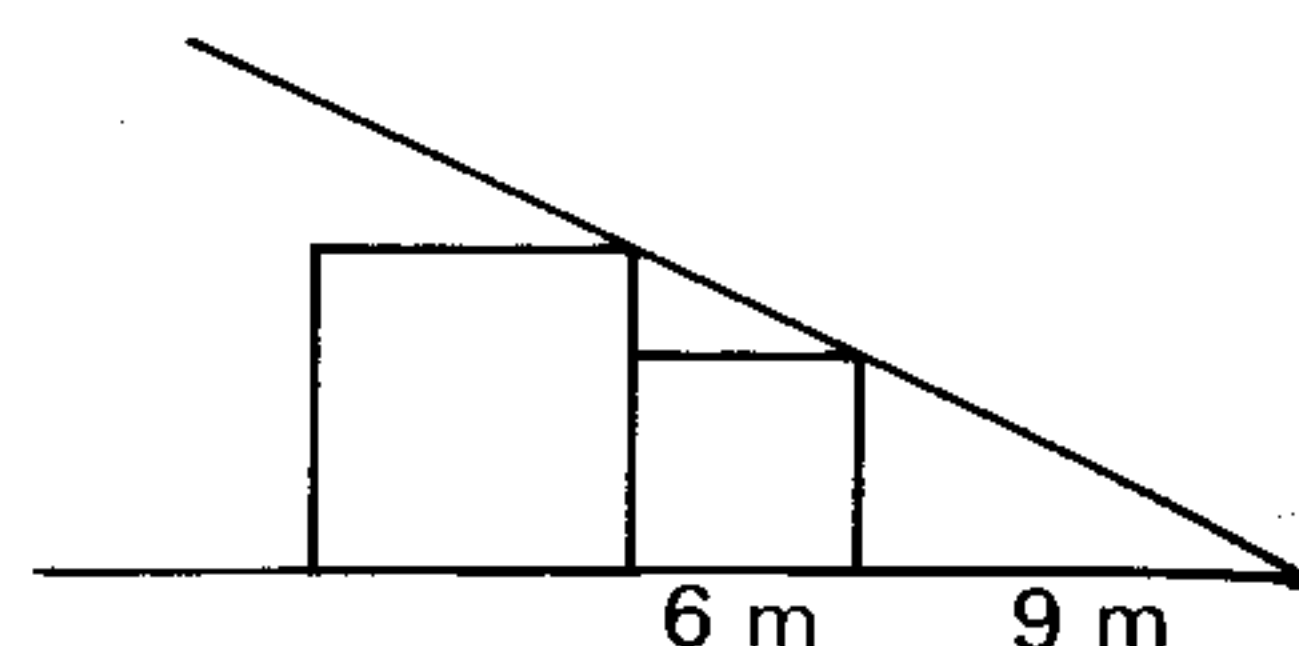
823. Dá-se um trapézio $ABCD$ de bases $AB = a$, $CD = b$ com $a > b$ e de altura h. Demonstre que a diferença entre as áreas dos triângulos que têm por bases AB e CD respectivamente e por vértice oposto a interseção das diagonais é $\frac{(a-b)\cdot h}{2}$.

Solução

Tese: $S_1 - S_2 = \frac{(a-b)h}{2}$

Demonstração

Considerando o ΔOAD de área S_3, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área } \Delta ABD = S_1 + S_3 = \frac{ah}{2} \\ \\ \text{Área } \Delta ACD = S_2 + S_3 = \frac{bh}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow S_1 - S_2 = \frac{ah}{2} - \frac{bh}{2} = \frac{(a-b)h}{2}$$

824. Determine a área do quadrado *DEFG* inscrito no triângulo *ABC* ao lado, sendo $BC = 15$ *m* e altura relativa ao lado BC igual a *10 m*.

825. Determine a área do triângulo ABC abaixo, sendo $AE = 10\ m$, $AD = 8\ m$ e $EB = 5\ m$.

826. Na figura abaixo temos dois quadrados. Determine a área do quadrado maior.

827. Determine a área de um triângulo isósceles de perímetro $36\ m$ se a altura relativa à base mede $12\ m$.

828. Determine a área de um retângulo de diagonal $15\ m$ e perímetro $42\ m$.

829. As bases de um trapézio retângulo medem $3\ m$ e $18\ m$ e o perímetro $46\ m$. Determine a área.

830. A altura de um trapézio isósceles mede $3\sqrt{3}\ m$, a base maior $14\ m$ e o perímetro $34\ m$. Determine a área desse trapézio.

831. As bases de um trapézio medem $4\ m$ e $25\ m$ e os lados oblíquos medem $10\ m$ e $17\ m$. Determine a área desse trapézio.

832. De um losango sabemos que uma diagonal excede a outra em $4\ m$ e que esta, por sua vez, excede o lado em $2\ m$. Determine a área desse losango.

833. A diagonal de um trapézio isósceles é bissetriz do ângulo da base maior. Se a altura desse trapézio mede $3\sqrt{5}\ m$ e o perímetro $48\ m$, determine a área dele.

834. Um lado de um quadrado é corda de uma circunferência e o lado oposto é tangente a ela. Determine a área do quadrado, sendo $10\ m$ o raio do círculo.

835. A diagonal maior de um trapézio retângulo é bissetriz do ângulo agudo. Se a altura e a base maior medem $5\ m$ e $25\ m$, determine a área desse trapézio.

836. A base de um triângulo isósceles excede a altura em $10\ m$. Se a área do triângulo é $300\ m^2$, quanto mede a altura relativa a um dos lados congruentes?

837. Uma diagonal de um losango mede $40\ m$ e a sua altura $24\ m$. Determine a área desse losango.

838. As medianas relativas aos catetos de um triângulo retângulo medem $2\sqrt{73}\ m$ e $4\sqrt{13}\ m$. Determine a área desse triângulo.

839. Determine a menor altura e a área de um triângulo de lados $5\ m$, $3\sqrt{5}\ m$ e $10\ m$.

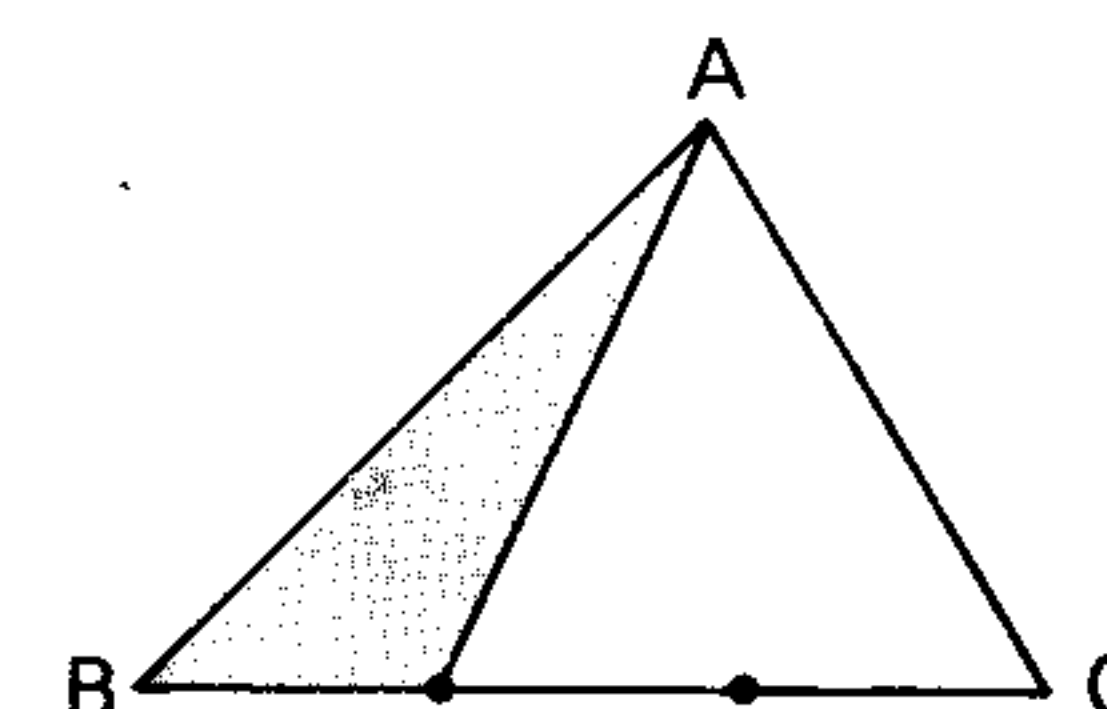
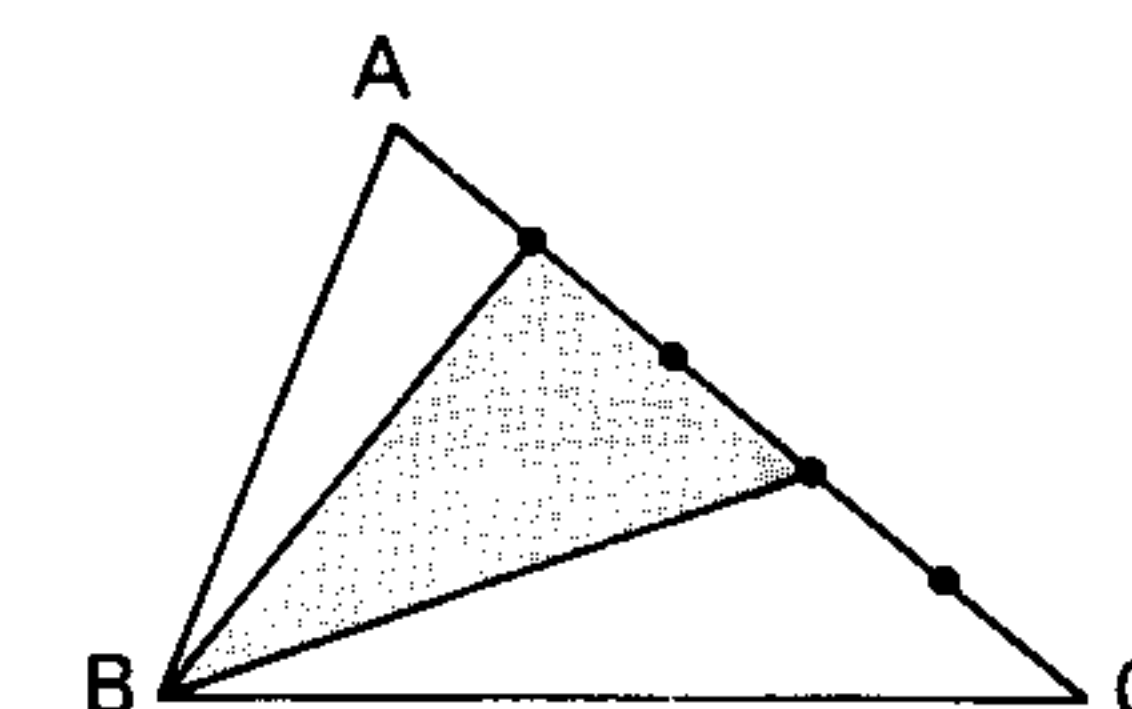
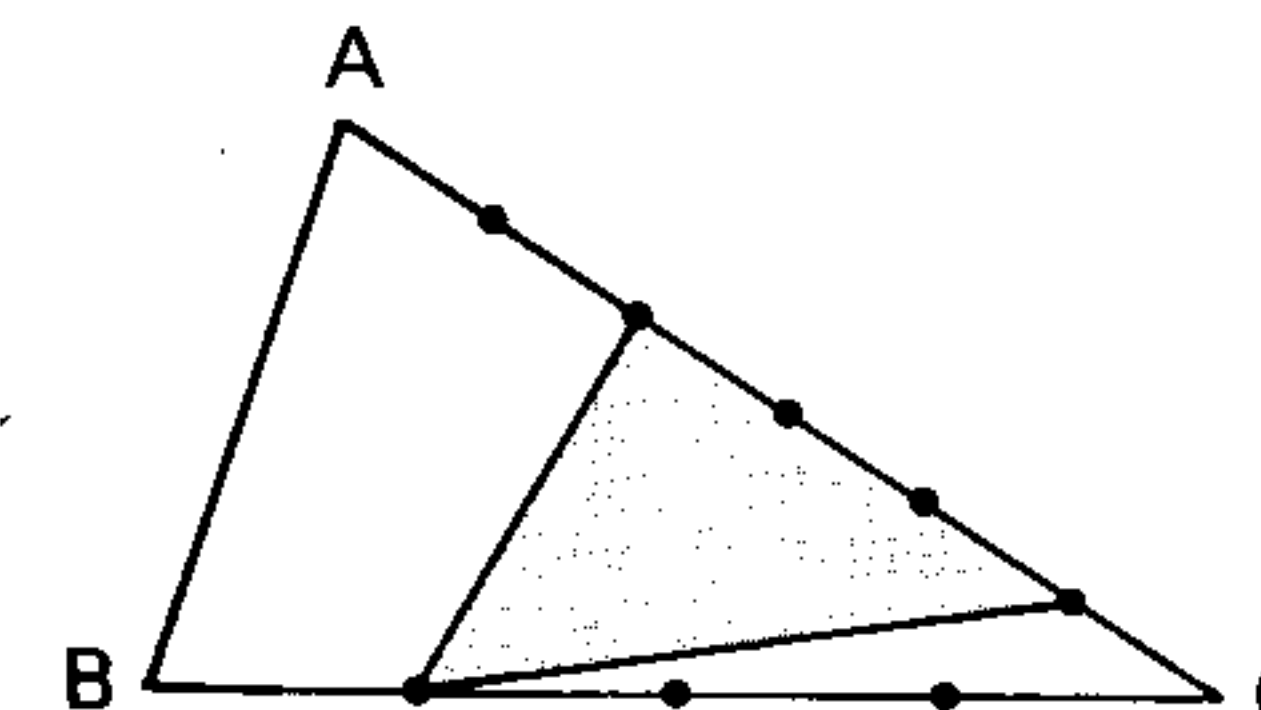
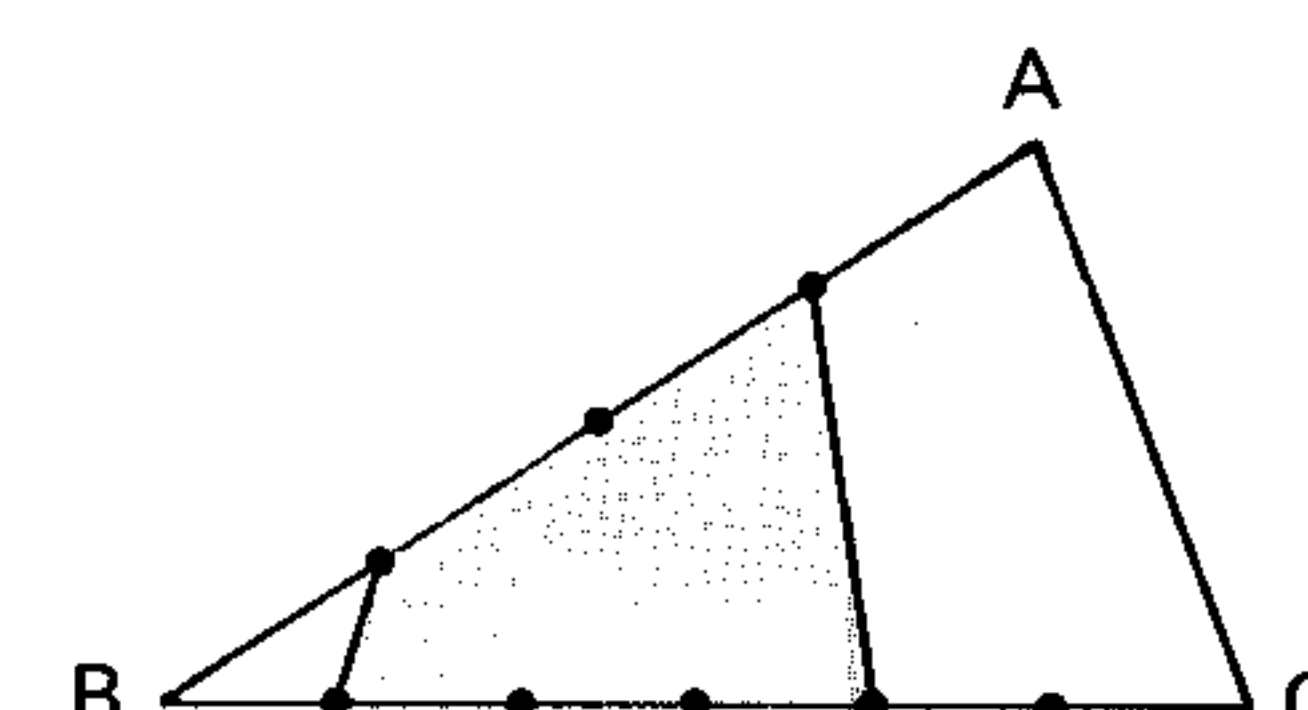
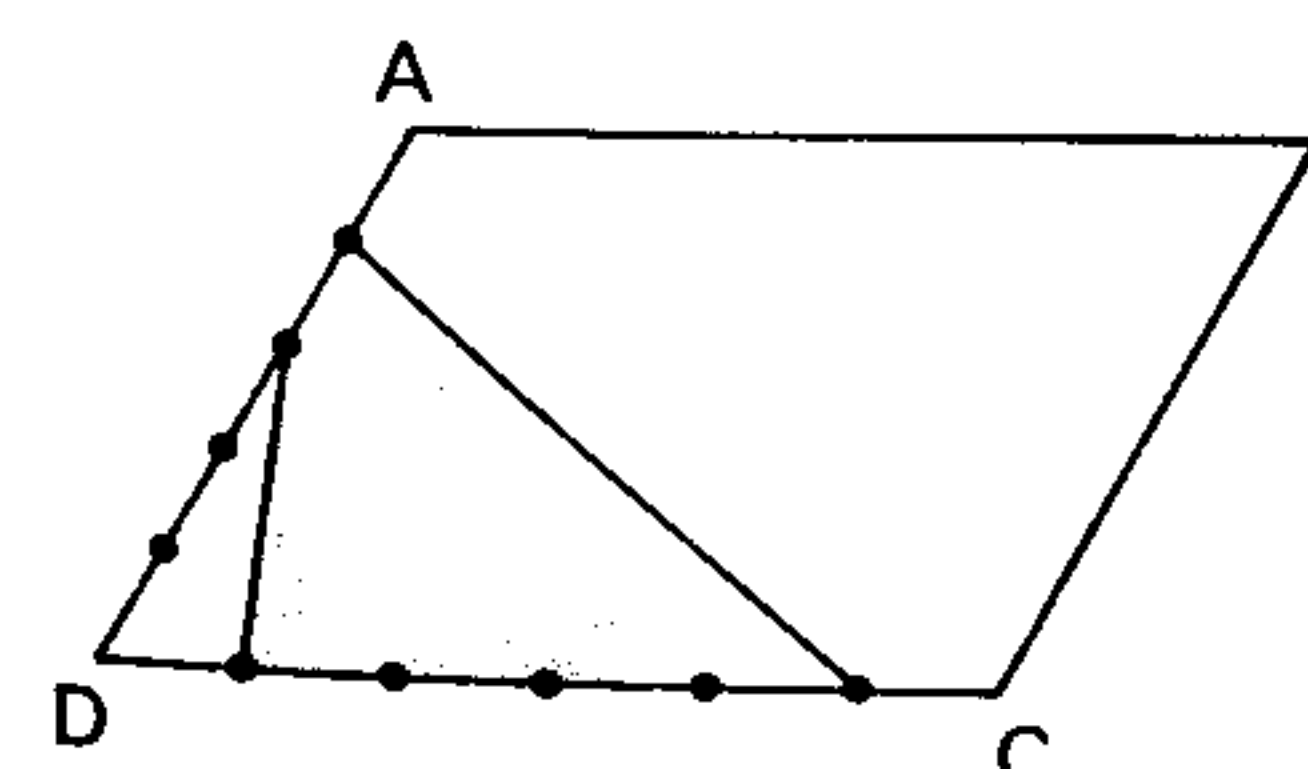
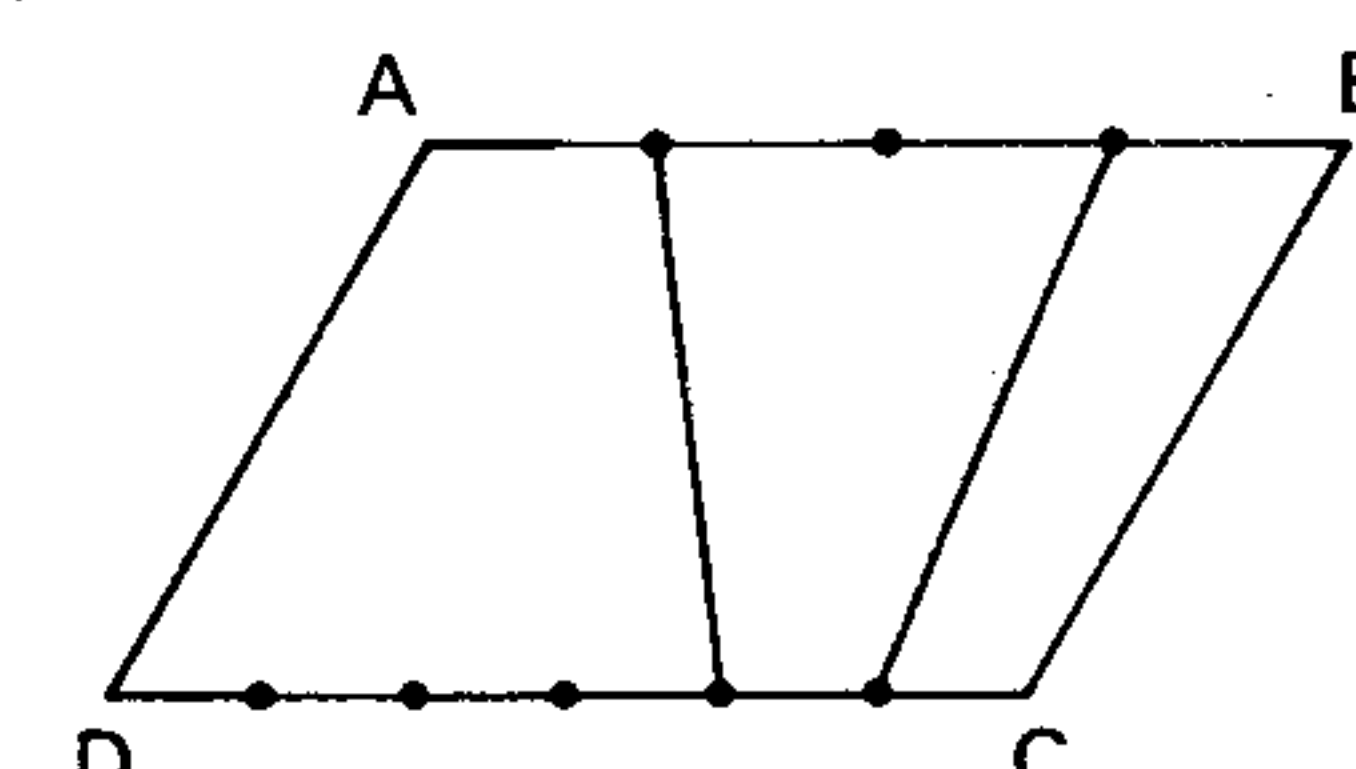
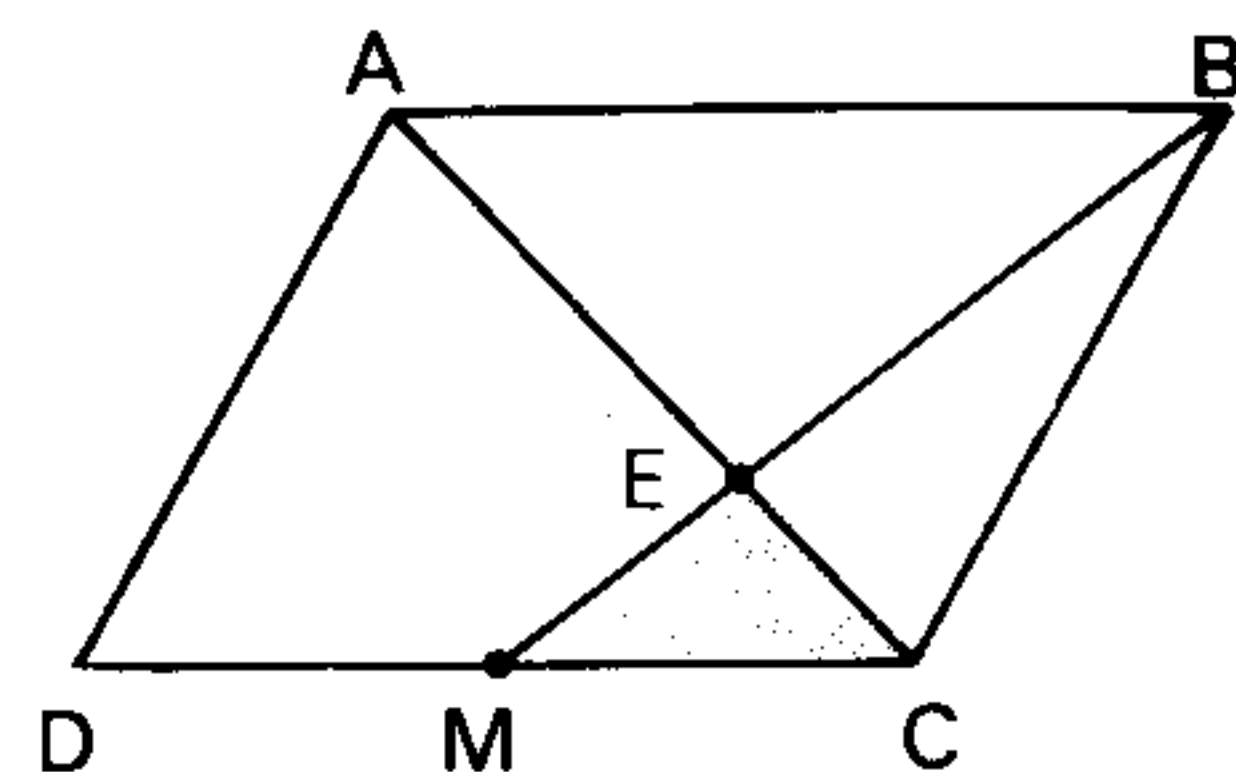
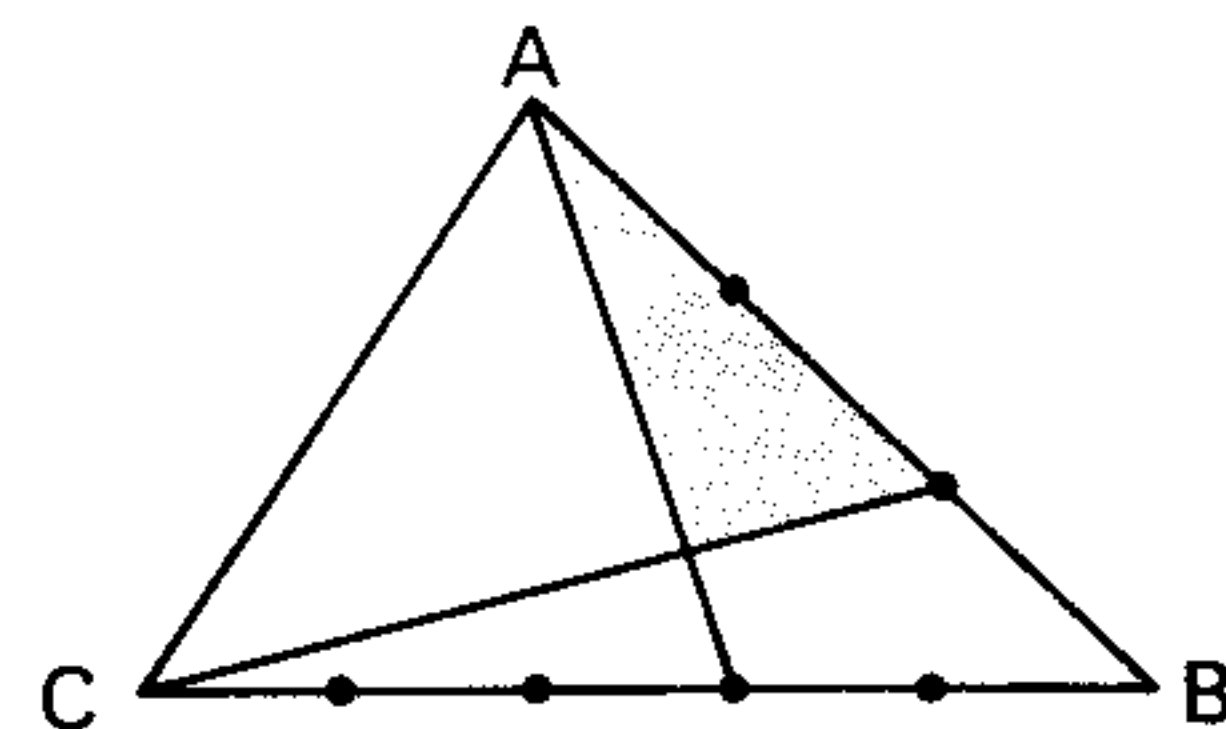
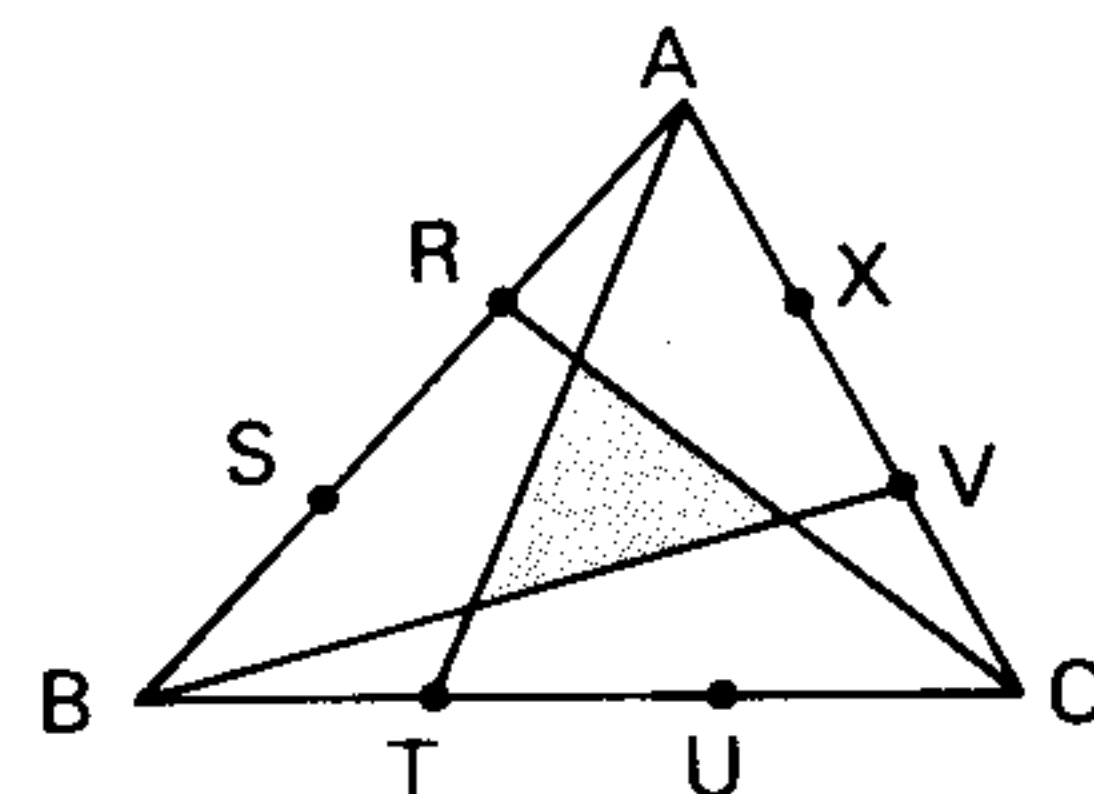
840. Considere um triângulo retângulo e a circunferência inscrita nele. Se o ponto de contato entre a hipotenusa e a circunferência determina na hipotenusa segmentos de $4\ m$ e $6\ m$, determine a área do triângulo.

841. Suponhamos que se percorra um triângulo num sentido determinado e que se prolongue, nesse sentido, cada lado de um comprimento igual ao próprio lado que se prolonga. Demonstre que a área do triângulo que tem por vértices as extremidades dos prolongamentos é igual a sete vezes a área do triângulo dado.

842. Mostre que a razão entre as áreas de dois triângulos de bases congruentes é igual à razão entre as alturas relativas a essas bases.

843. Mostre que as medianas de um triângulo determinam nele seis triângulos de áreas iguais.

844. Determine a área do triângulo sombreado em função da área k do triângulo ABC nos casos a seguir, sabendo que os pontos assinalados em cada lado o dividem em partes iguais (congruentes).

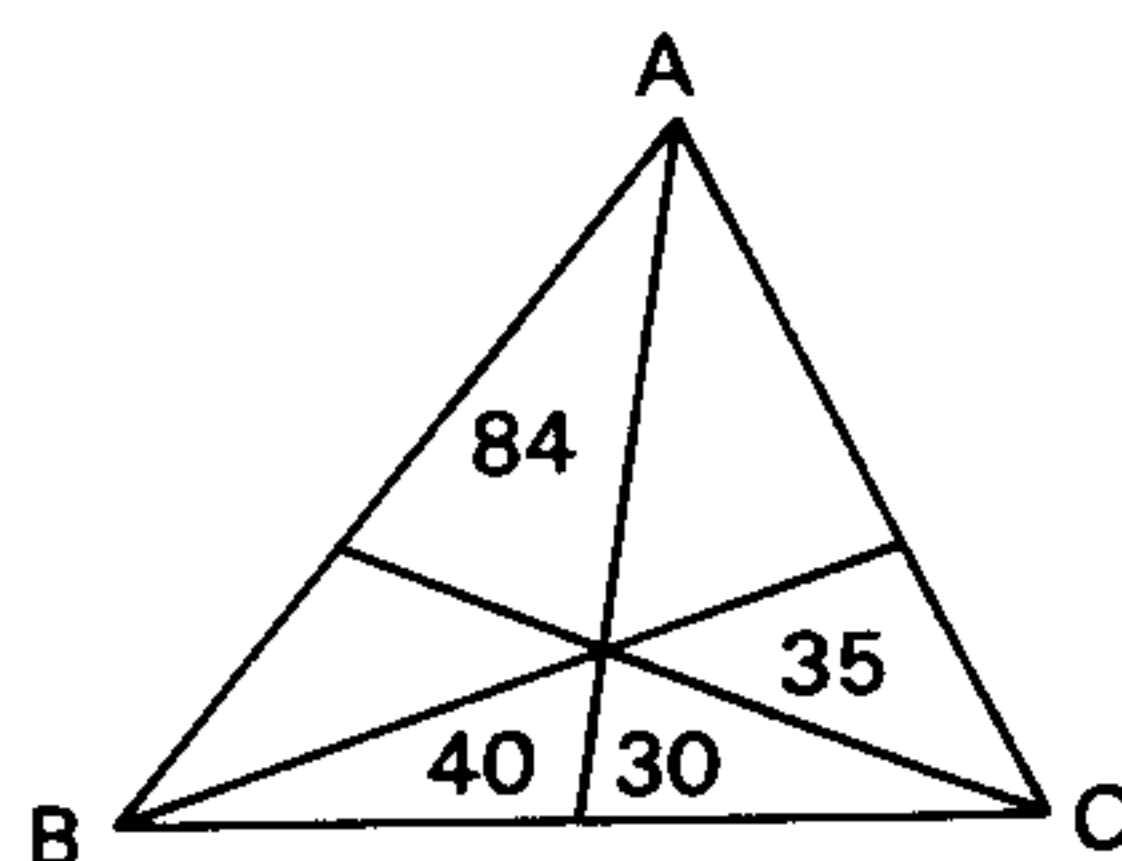
a) b)

) d)

845. Determine a área da região sombreada em função da área k do paralelogramo $ABCD$ nos casos a seguir, sabendo que os pontos assinalados sobre cada lado o dividem em partes de medidas iguais.

a) b)

846. Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo de área S e M é ponto médio de $\overline{CD}$. Determine a área da região sombreada em função de S.

847. Se a área do triângulo ABC é k e os pontos assinalados em cada lado o dividem em partes iguais, determine a área do triângulo sombreado em função de k.

848. Se os pontos R, S, T, U, V e X dividem $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, em três partes iguais, determine a área do triângulo sombreado em função da área k do triângulo ABC.

849. Determine a área de um octógono regular de lado ℓ.

850. Determine a área de um decágono regular de lado ℓ.

851. Determine a área de um pentágono regular de lado ℓ.

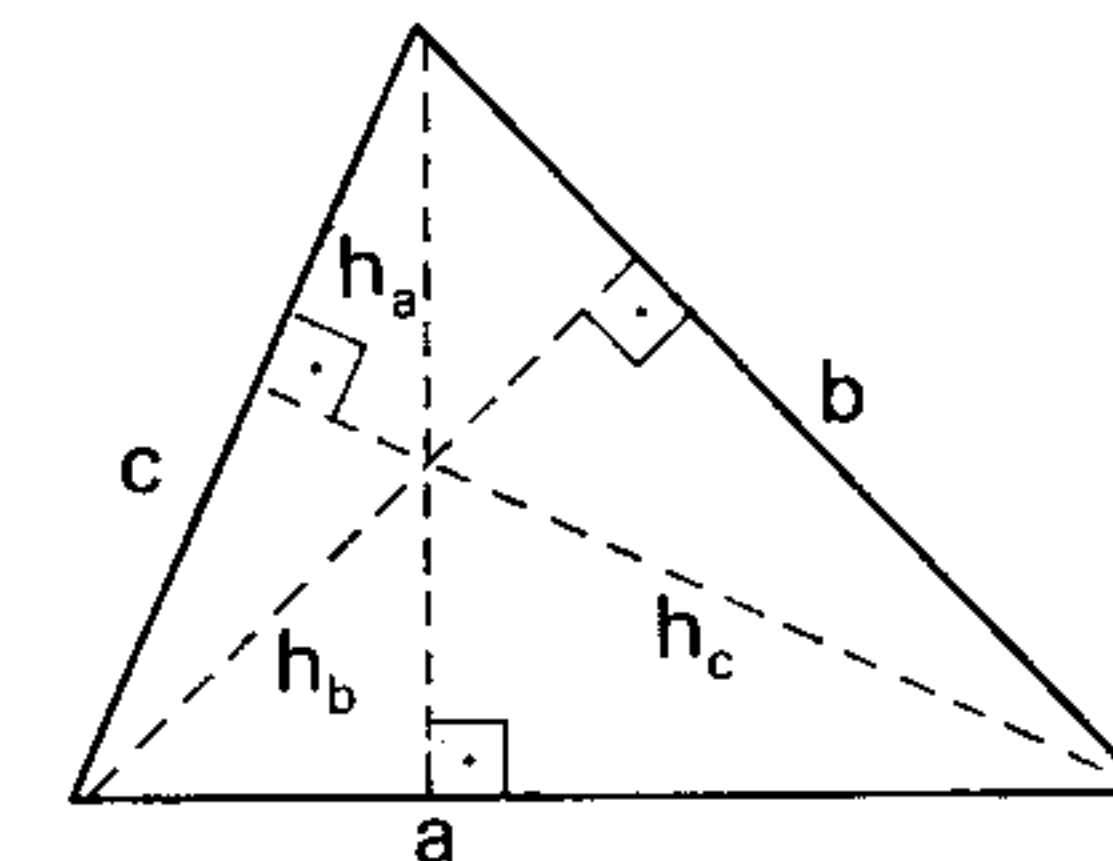
852. Determine a área de um retângulo cuja base e altura são respectivamente o lado e o apótema de um pentágono inscrito em uma circunferência de raio r.

853. Determine a área de um quadrado cujo lado é igual ao lado de um octógono regular inscrito em um círculo de raio r.

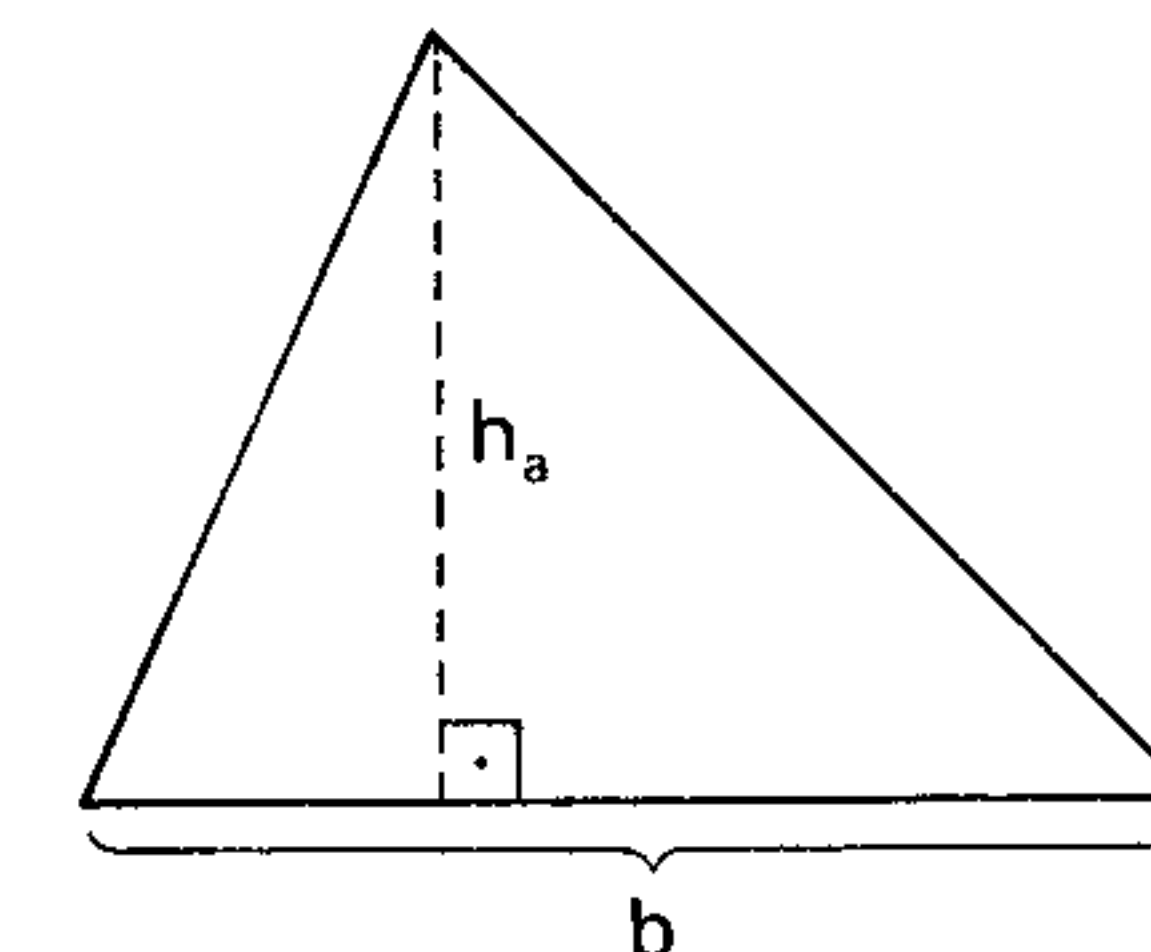
854. Como mostra o desenho, o triângulo ABC está dividido em seis triângulos. O número indicado no interior de quatro deles expressa a sua área. Determine a área do triângulo ABC.

III. Expressões da área do triângulo

250. Em função dos lados e respectivas alturas.

Em vista do item 246:

$$S = \frac{1}{2}ah_a,\ S = \frac{1}{2}bh_b,\ S = \frac{1}{2}ch_c$$

251. Área do triângulo em função dos lados.

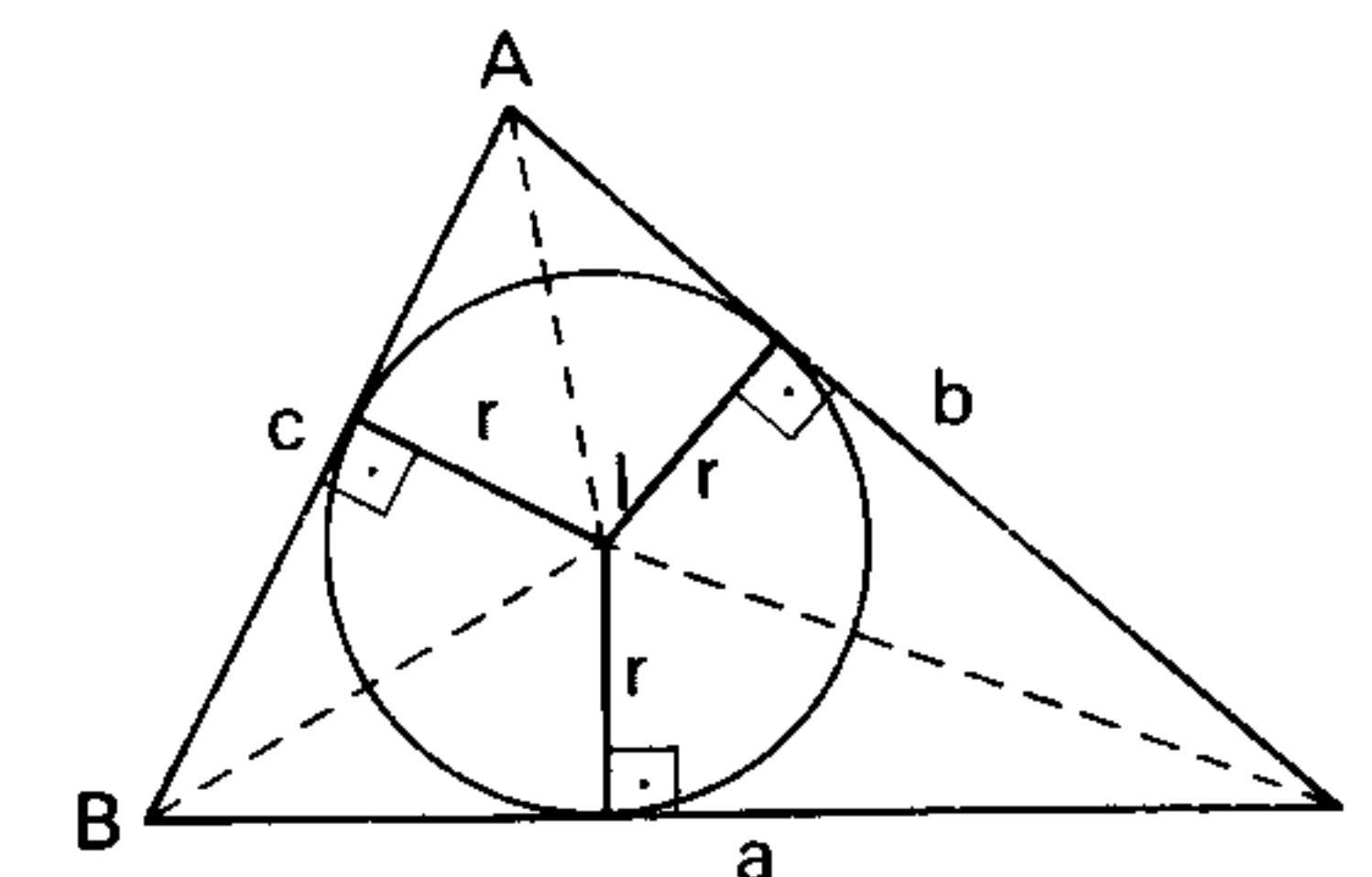
Dados: a, b, c e com $p = \frac{a+b+c}{2}$, em vista do item 207, temos:

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{1}{2}ah_a \\ h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

252. Área do triângulo em função dos lados e do raio r da circunferência inscrita.

$$S = S_{ABC} = S_{IBC} + S_{IAC} + S_{IAB} =$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}\cdot r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{S = pr}$$

253. Área do triângulo em função dos lados e do raio R da circunferência circunscrita.

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2} ah_a \qquad (1)$$

Para o cálculo de h_a (dados R, a, b e c), construímos o ΔABE com $AE = 2R$.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{D} = \hat{B} \text{ (reto)} \\ \hat{C} = \hat{E} = \dfrac{\widehat{AB}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ADC \sim \Delta ABE \Longrightarrow \frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R} \Longrightarrow h_a = \frac{bc}{2R}$$

Substituindo em (1), vem:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

254. Área do triângulo em função do raio de qualquer das circunferências ex-inscritas. (Por exemplo: ex-inscrita tangente ao lado a, de raio r_a.)

$$\left.\begin{array}{l}S_{ABOC} = S_{ABC} + S_{OBC} \\ S_{ABOC} = S_{OAC} + S_{OAB}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

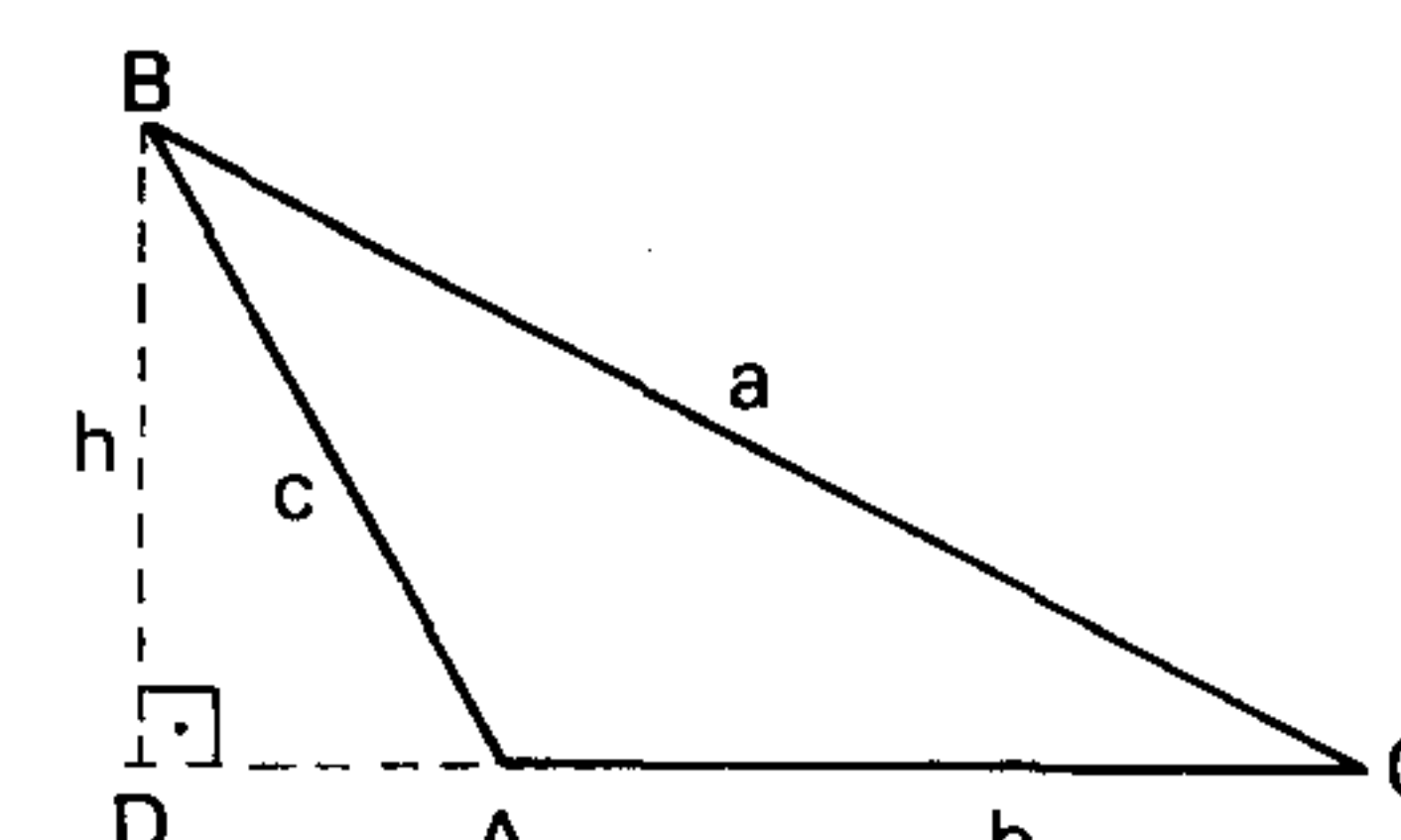
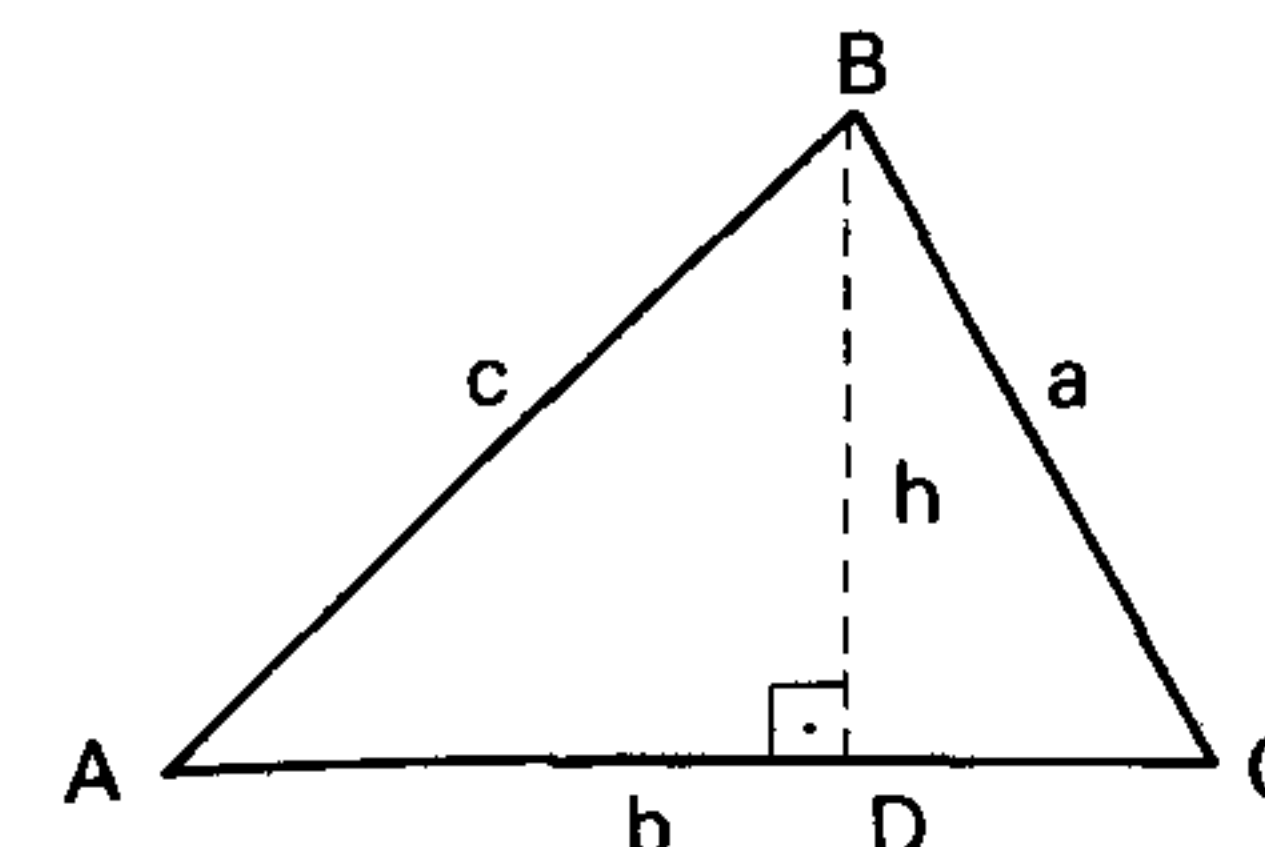
($S_{ABC} = S$, $S_{OBC} = \frac{1}{2}ar_a$, $S_{OAC} = \frac{1}{2}br_a$, $S_{OAB} = \frac{1}{2}cr_a$)

$$S + \frac{1}{2}a \cdot r_a = \frac{1}{2}b \cdot r_a + \frac{1}{2}c \cdot r_a \Longrightarrow S = \frac{1}{2}(-a+b+c)r_a = \frac{1}{2}\,2(p-a)r_a \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{S = (p-a) \cdot r_a}$$

Analogamente, temos:

$$\boxed{S = (p-b)r_b} \qquad \boxed{S = (p-c)r_c}$$

255. Área do triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido.

No caso da primeira figura: $S = \frac{1}{2} bh$, mas no ΔADB: $h = c \cdot \text{sen } A$ $\Longrightarrow S = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen } A$

No caso da segunda figura: $S = \frac{1}{2} bh$, mas no ΔADB: $h = c \cdot \text{sen }(180° - A) = c \cdot \text{sen } A$ $\Longrightarrow S = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen } A$

No caso do triângulo ser retângulo em A é imediato.
Assim, temos:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen } A}$$

Analogamente: $\boxed{S = \frac{1}{2} ac \cdot \text{sen } B}$ $\boxed{S = \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen } C}$

256 *Notas*

1ª) Usando a expressão da área do triângulo

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen } C$$

e a expressão do teorema dos senos (lei dos senos),

$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$, de onde sai: $\text{sen } C = \frac{c}{2R}$, temos:

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen } C \Longrightarrow S = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} \Longrightarrow S = \frac{abc}{4R}$$

2ª) Resumo das fórmulas sobre área do triângulo

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= pr = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c =$$
$$= \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen } C = \frac{1}{2}ac \cdot \text{sen } B = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen } A$$

3ª) As fórmulas $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$, $S = (p-a)r_a$, $S = (p-b)r_b$ e $S = (p-c)r_c$ são mais usadas para o cálculo dos raios. Assim,

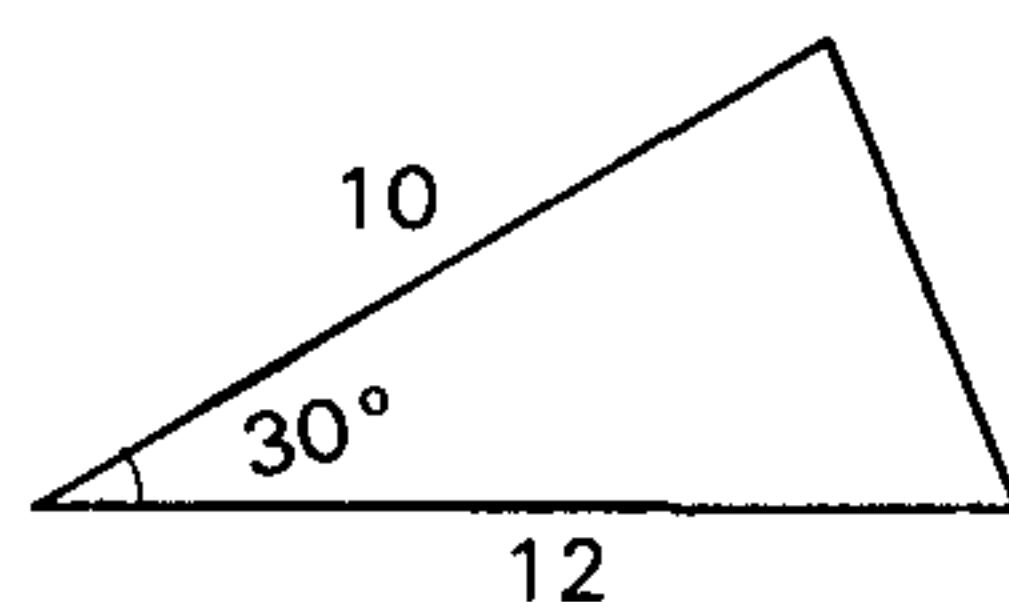
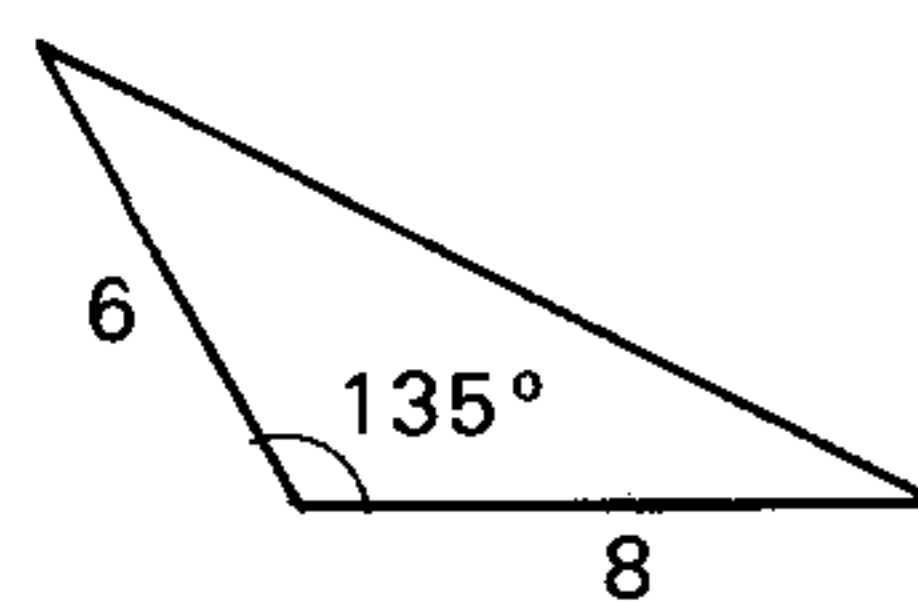
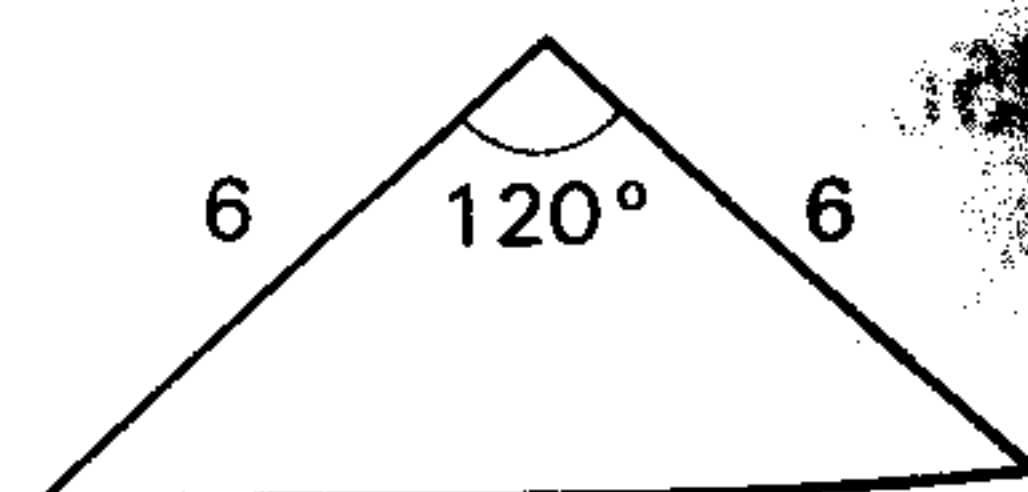
$$r = \frac{S}{p},\ R = \frac{abc}{4S},\ r_a = \frac{S}{p-a},\ r_b = \frac{S}{p-b},\ r_c = \frac{S}{p-c}.$$

EXERCÍCIOS

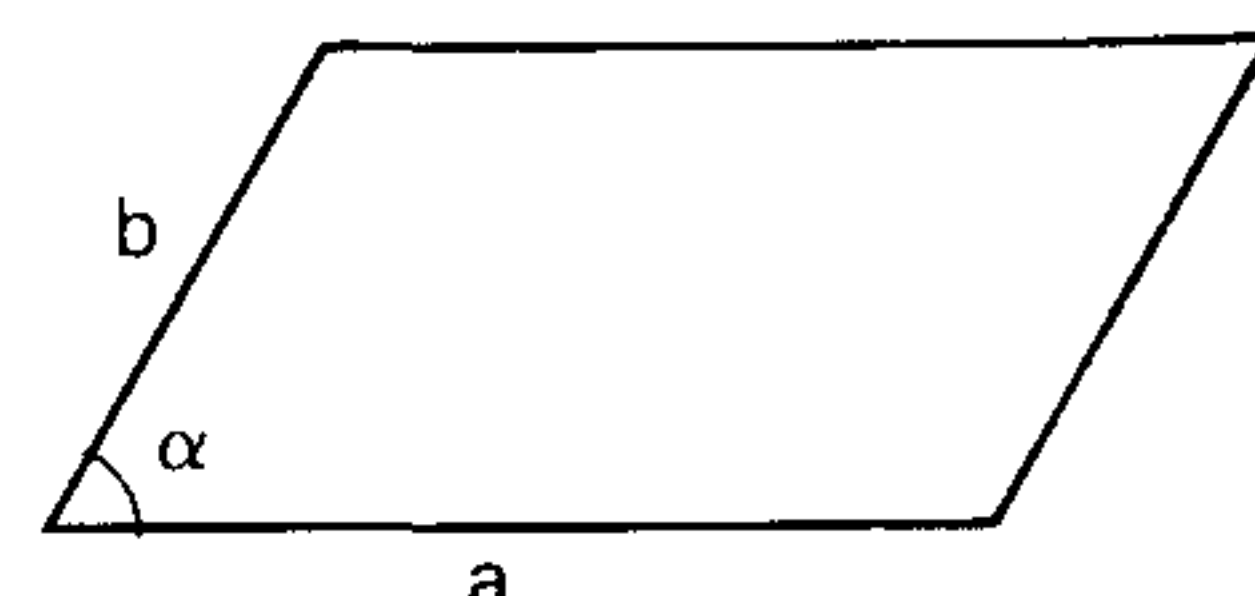
855. Determine a área do triângulo nos casos abaixo, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

a) 10, 30°, 12

b) 6, 135°, 8

c) 6, 120°, 6

856. Mostre que a área do paralelogramo da figura é dada por

$$S = ab \text{ sen } \alpha$$

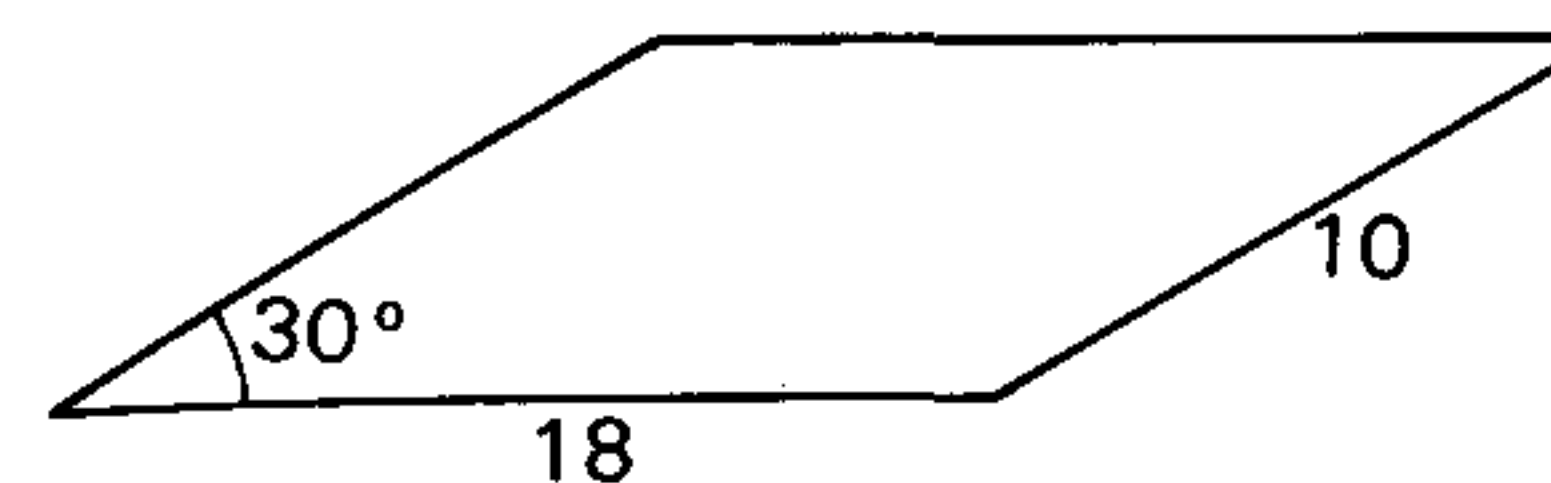
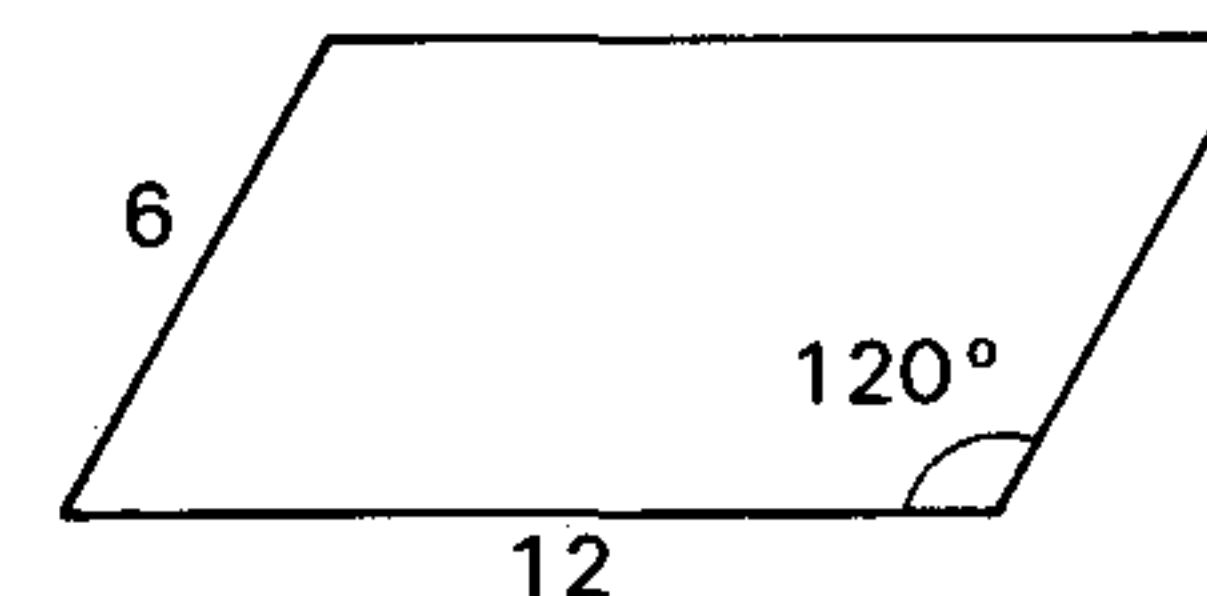
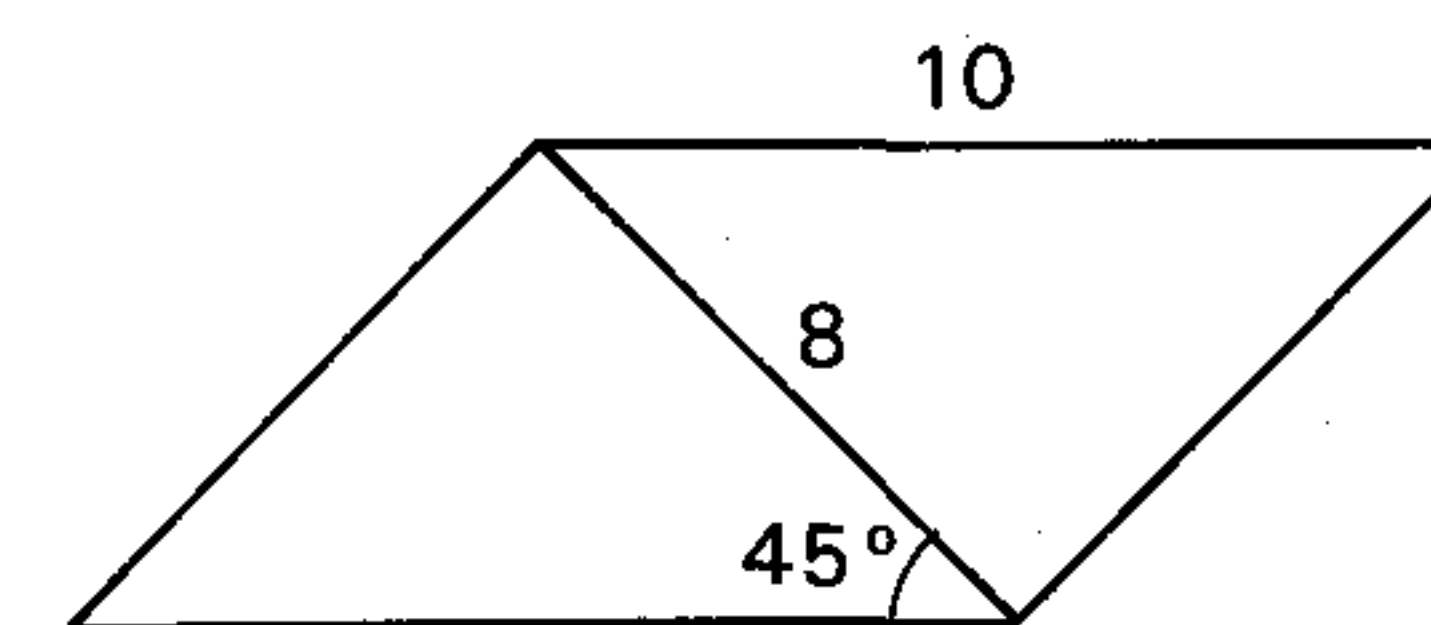
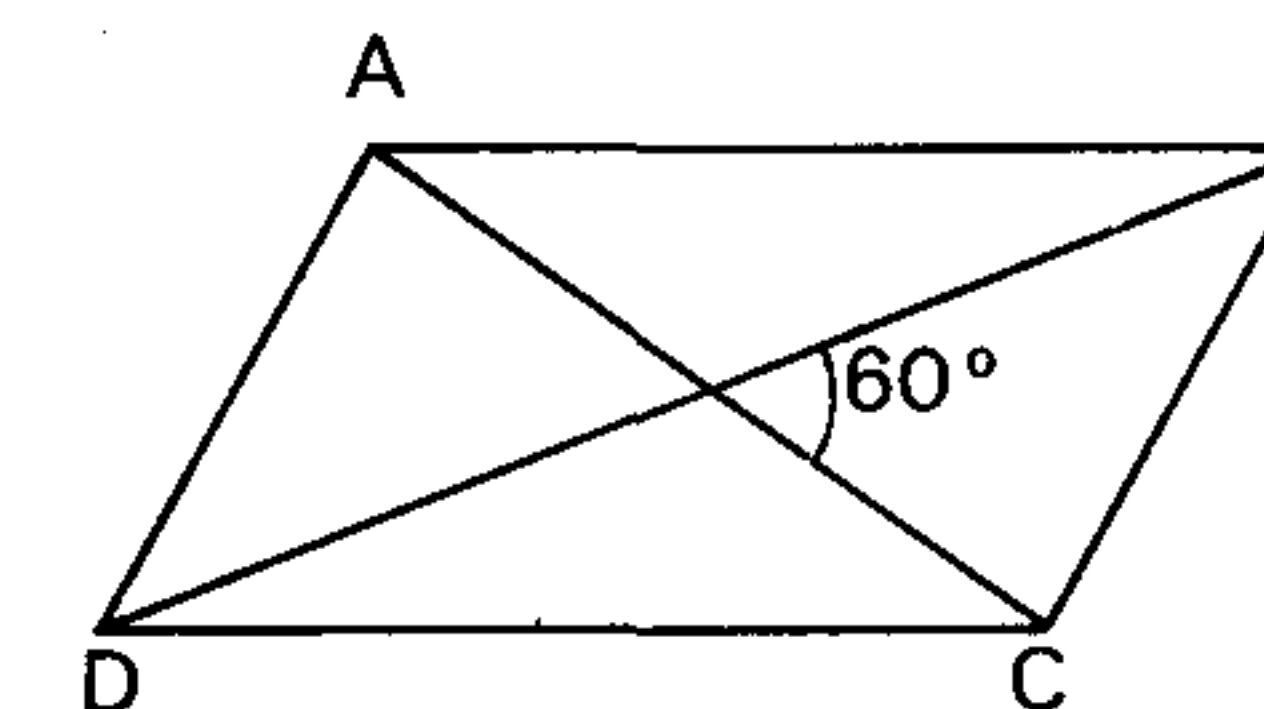
b, α, a

857. Determine a área do paralelogramo nos casos, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

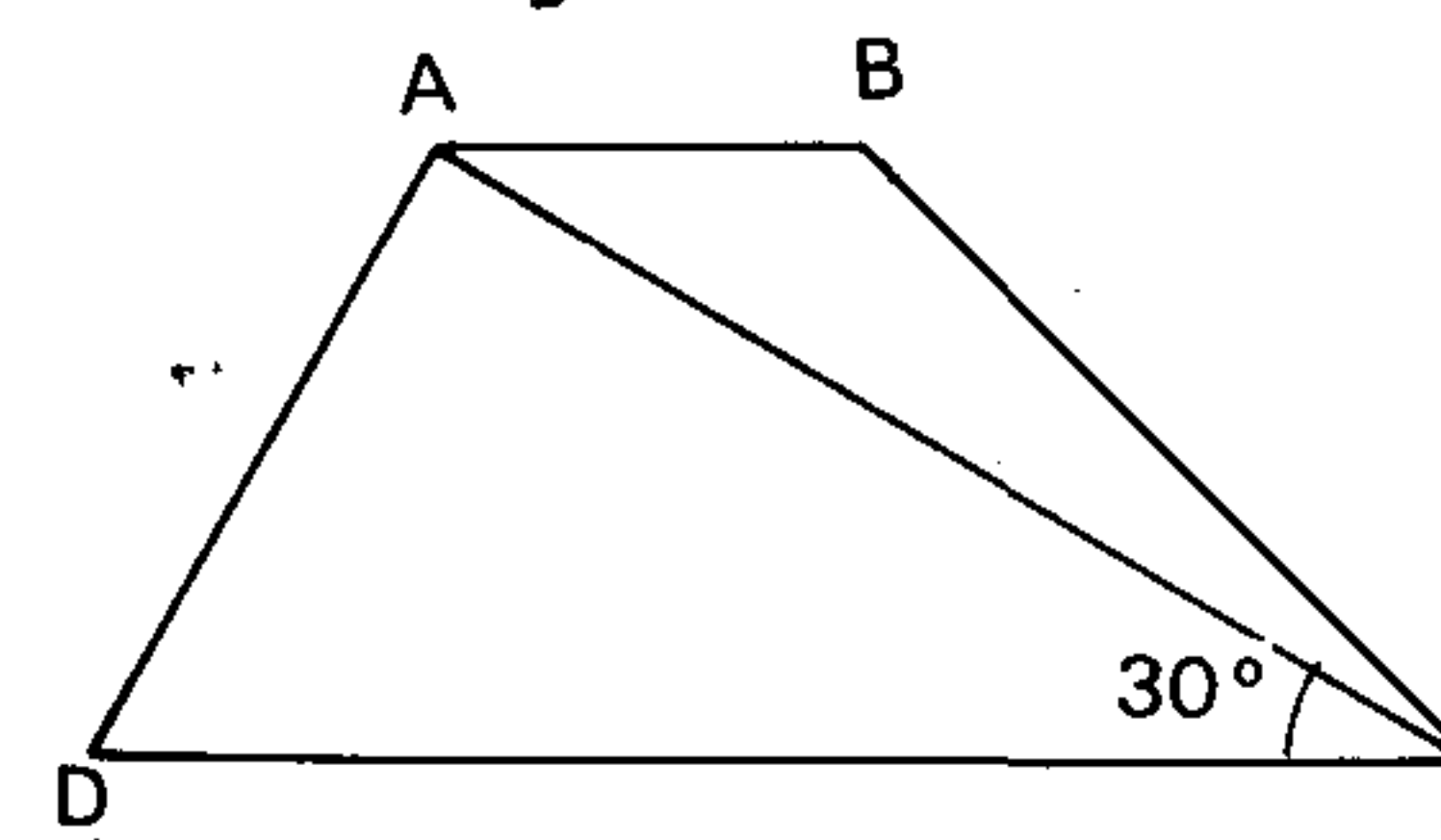
a) 30°, 18, 10

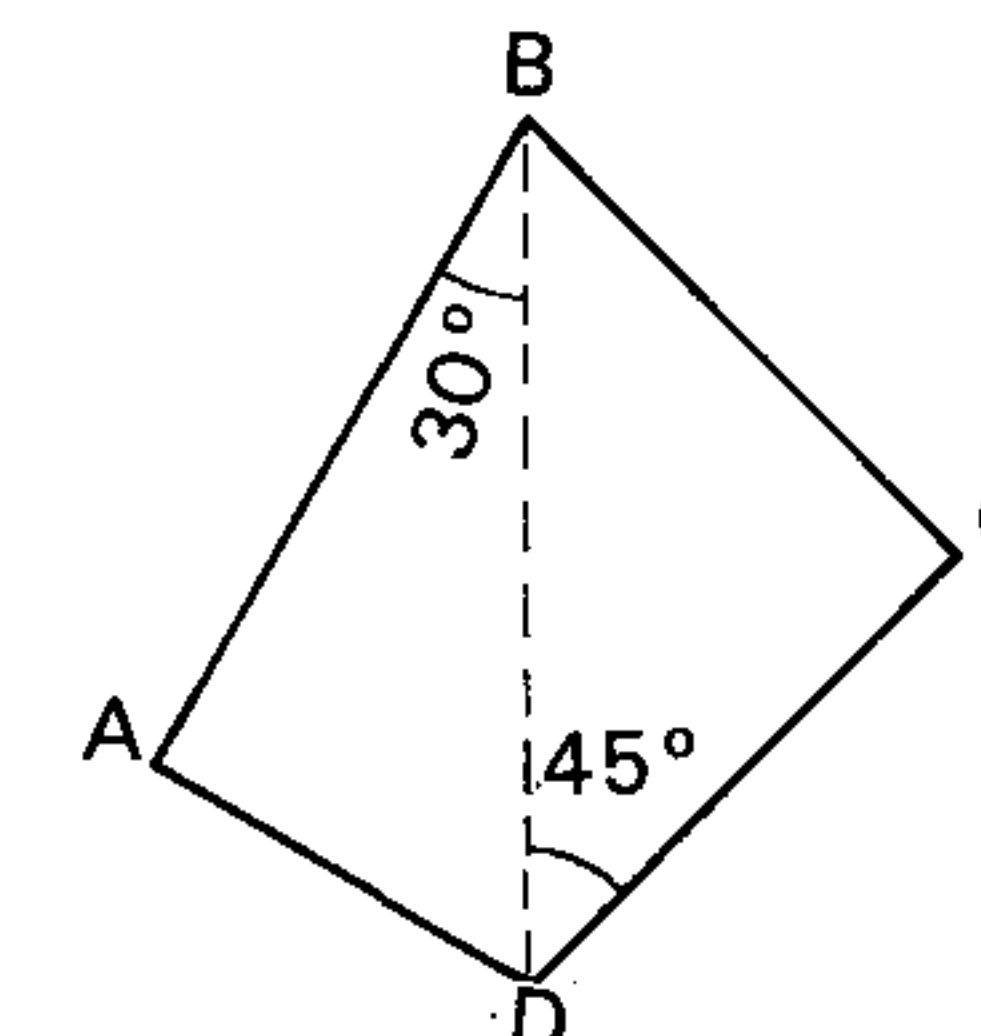
b) 6, 120°, 12

c) 10, 8, 45°

d) AC = 16, BD = 24

A, B, 60°, D, C

858. Determine a área do trapézio da figura, dados: $AB = 4\ m$, $AC = 8\ m$ e $CD = 12\ m$.

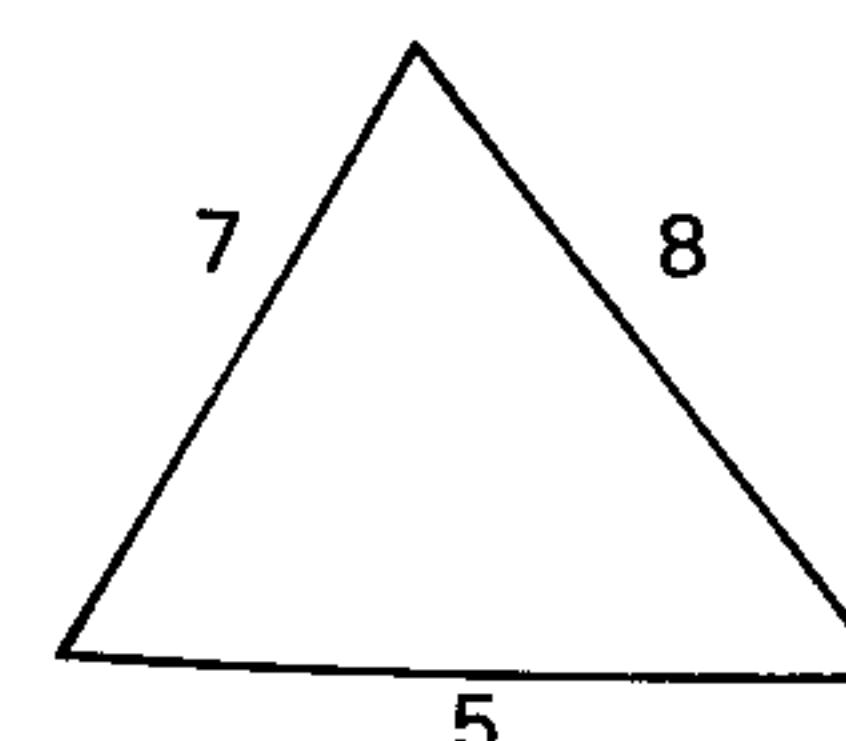
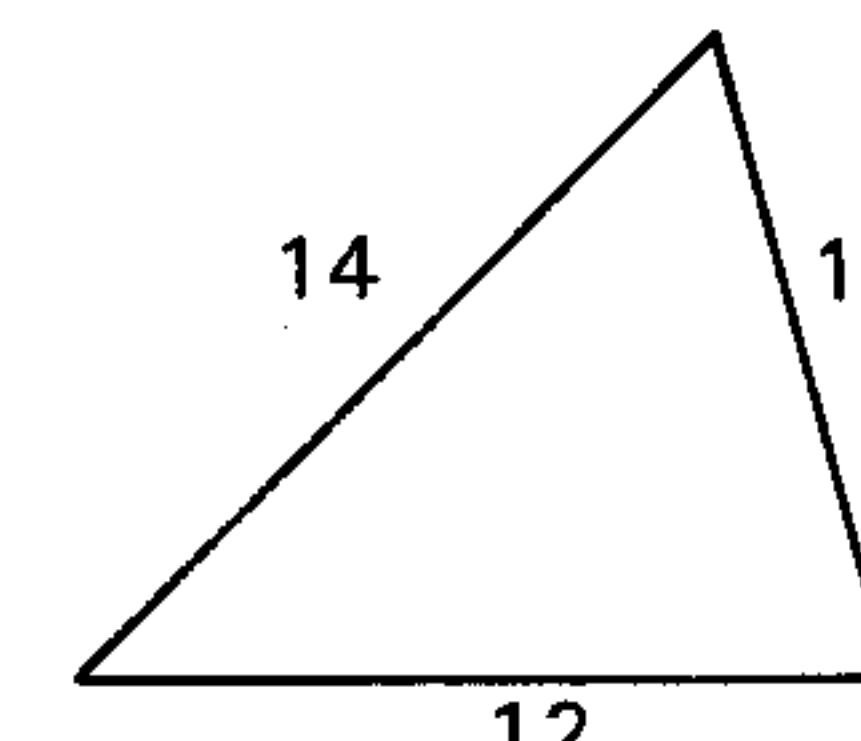
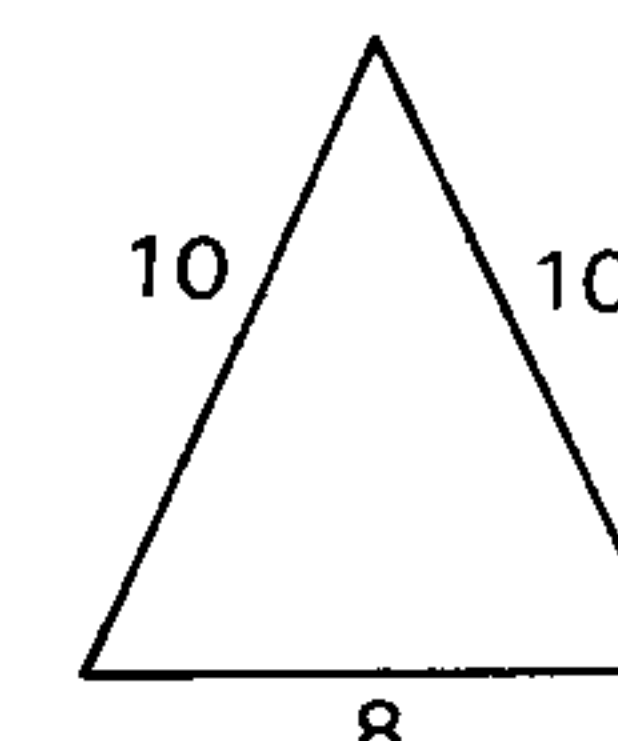
A, B, 30°, D, C

859. Determine a área do quadrilátero da figura, dados: $AB = 12\ m$, $BD = 18\ m$ e $CD = 12\sqrt{2}\ m$.

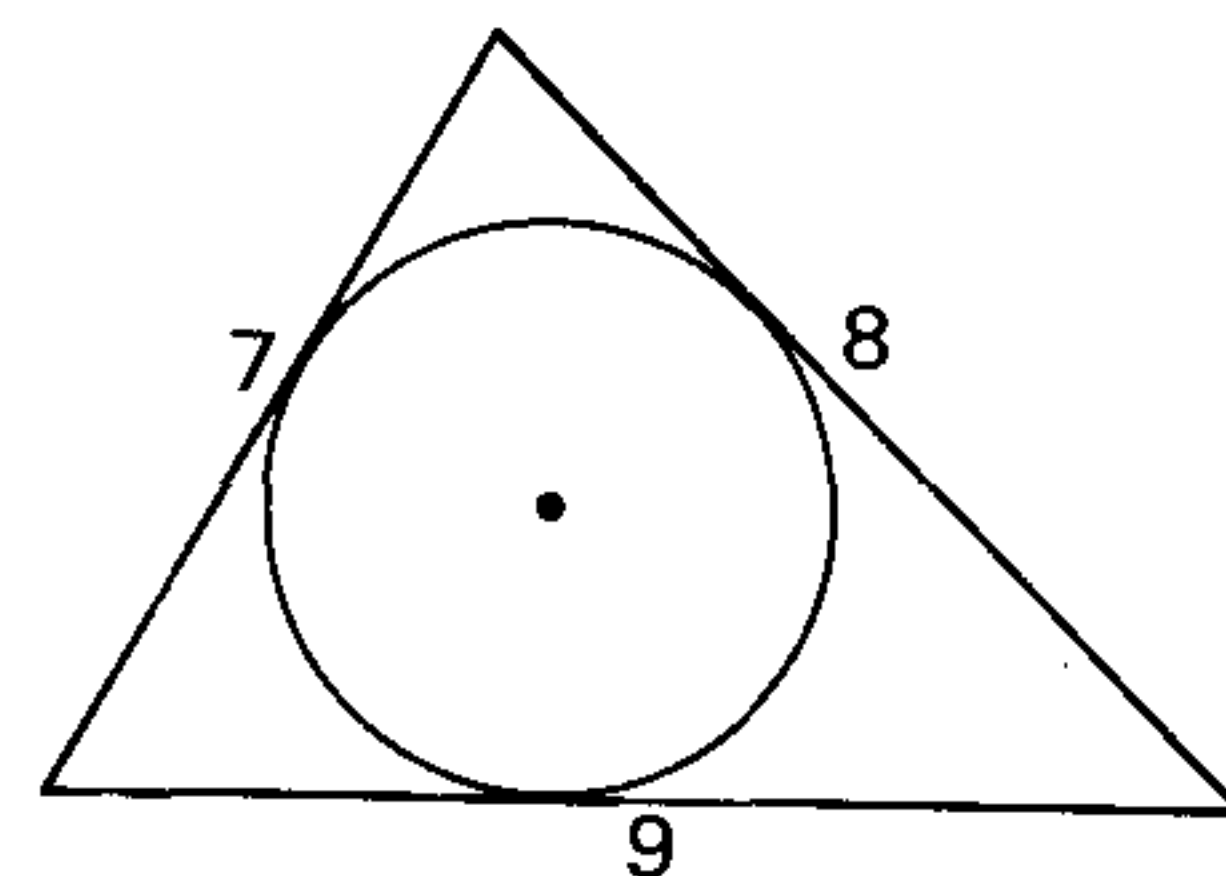
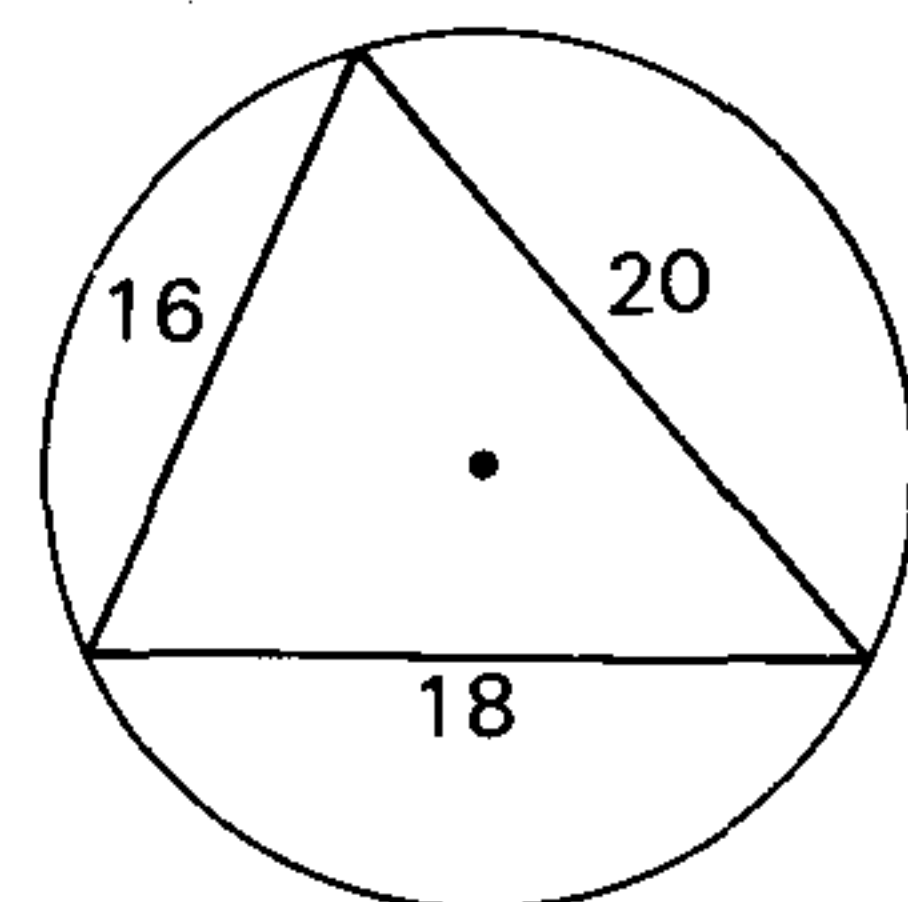
B, 30°, C, A, 45°, D

860. Mostre que a área de um quadrilátero com diagonais de medidas a e b, que formam ângulo α, é dada por $S = \frac{1}{2} ab \text{ sen } \alpha$.

861. Determine a área do triângulo nos casos abaixo. Use: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. O metro é a unidade das medidas indicadas.

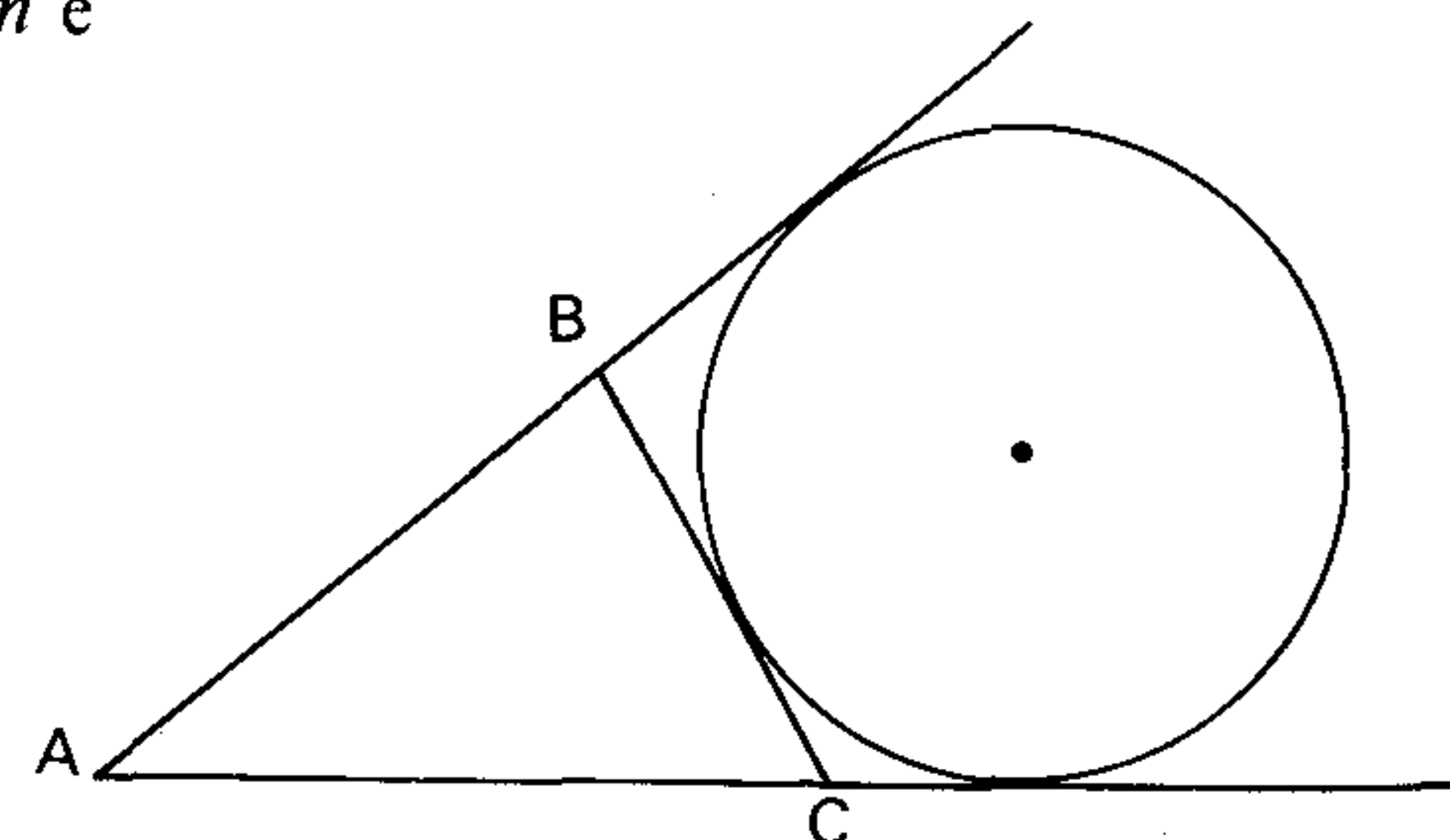
a) 7, 8, 5

b) 14, 10, 12

c) 10, 10, 8

862. Determine o raio do círculo nos casos:

a)

b)

863. Os lados de um triângulo medem $6\ m$, $10\ m$ e $12\ m$. Determine:

a) a sua área;
b) a sua menor altura;
c) a sua maior altura;
d) o raio da circunferência inscrita;
e) o raio da circunferência circunscrita.

864. Determine o raio da circunferência, dados: $AB = 14\ m$, $BC = 10\ m$ e $AC = 16\ m$.

865. Determine a área de um triângulo retângulo, sabendo que um dos catetos mede $10\ cm$ e o ângulo agudo oposto a esse cateto $30°$.

866. A razão entre a base e a altura de um triângulo é $\frac{8}{5}$. Sendo $52\ cm$ a soma da base com a altura, determine a área do triângulo.

867. Determine a área de um triângulo isósceles, sabendo que sua base mede $6a$ e a soma dos lados congruentes $10a$.

868. Determine a área de um triângulo isósceles de perímetro igual a $32\ cm$, sabendo que sua base excede em $2\ cm$ cada um dos lados congruentes.

869. Determine a área de um triângulo equilátero em função de sua altura h.

870. O apótema de um triângulo equilátero é igual ao lado de um quadrado de $16\ cm^2$ de área. Determine a área do triângulo.

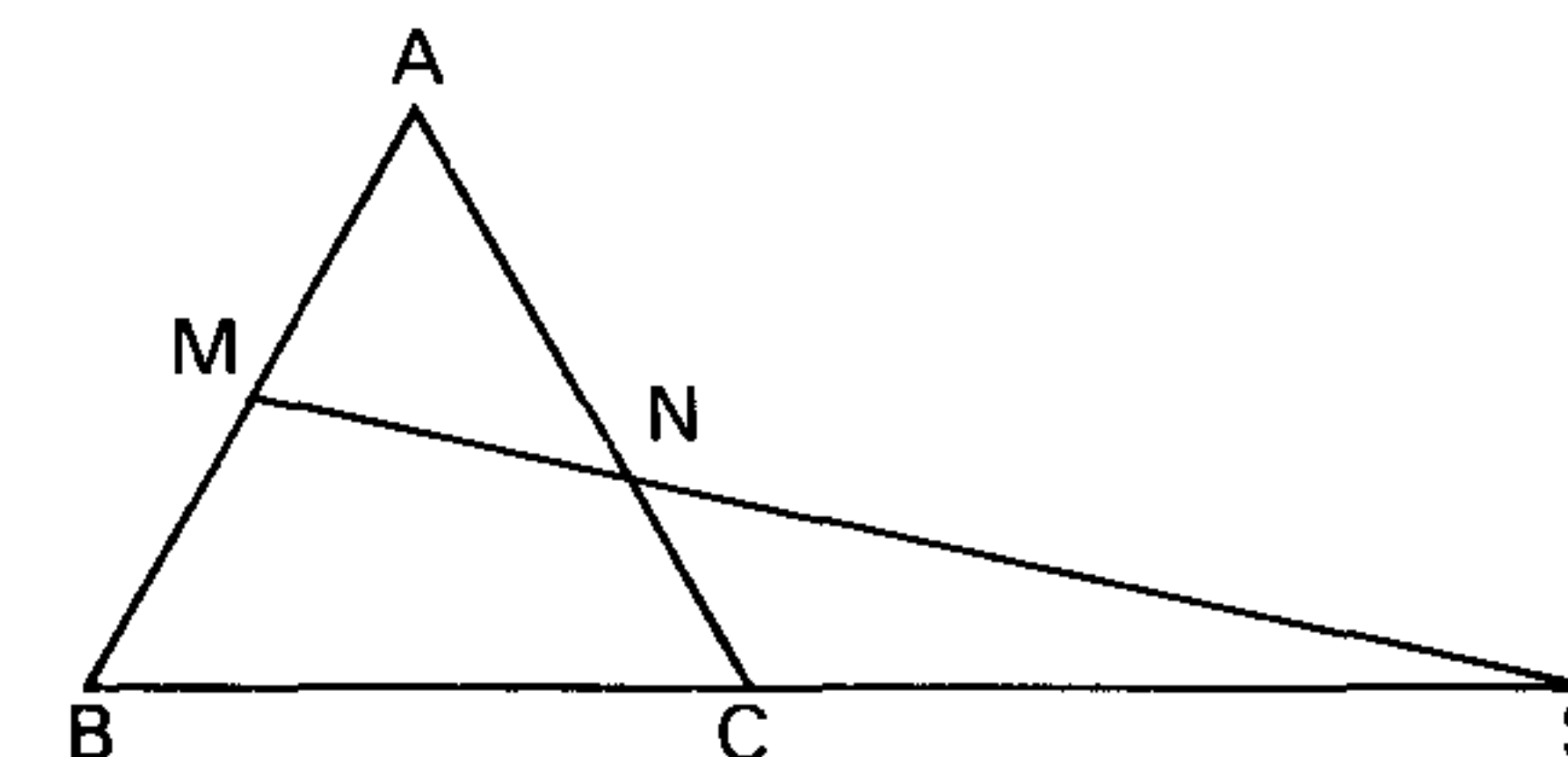
871. O perímetro de um triângulo retângulo é $90\ cm$. Determine a área do triângulo, sabendo que seus lados são inversamente proporcionais a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{13}$.

872. Em um triângulo retângulo a hipotenusa é os $\frac{5}{3}$ do cateto menor, e o cateto maior os $\frac{4}{3}$ do menor. Sendo $60\ cm$ o perímetro do triângulo, determine a sua área.

873. Calcule a área de um triângulo ABC do qual se conhecem os dados seguintes: $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e o ângulo compreendido $150°$.

874. Consideremos um triângulo retângulo isósceles ABC de catetos $AB = AC = a$ e um ponto E tomado sobre o prolongamento do cateto $\overline{CA}$. Unindo-se B a E, temos o segmento $\overline{BE}$, que é paralelo à bissetriz $\overline{AD}$ do ângulo reto $\hat{A}$. Determine a área do triângulo CBE em função de a.

875. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $AB = 4\ cm$, $\hat{A} = 30°$ e $\hat{C} = 45°$.

876. Um triângulo equilátero ABC tem $60\ m$ de perímetro. Prolonga-se a base $\overline{BC}$ e sobre o prolongamento toma-se $CS = 12\ m$. Une-se o ponto S ao meio M do lado $\overline{AB}$. Calcule a área do quadrilátero $BCMN$.

877. Determine a área de um triângulo equilátero em função do raio R do círculo circunscrito a esse triângulo.

878. Determine a área de um triângulo equilátero em função do raio r do círculo inscrito nesse triângulo.

879. A área de um triângulo retângulo é igual ao produto dos segmentos determinados sobre a hipotenusa pelo ponto de contato do círculo inscrito ao triângulo.

880. A base de um triângulo mede $12\ cm$ e sua altura $6\ cm$. Determine a razão entre a área do triângulo e a área de um quadrado inscrito nesse triângulo, sabendo que a base do quadrado está apoiada sobre a base do triângulo.

881. Determine a medida do raio de um círculo inscrito em um triângulo isósceles de lados $10\ cm$, $10\ cm$ e $12\ cm$.

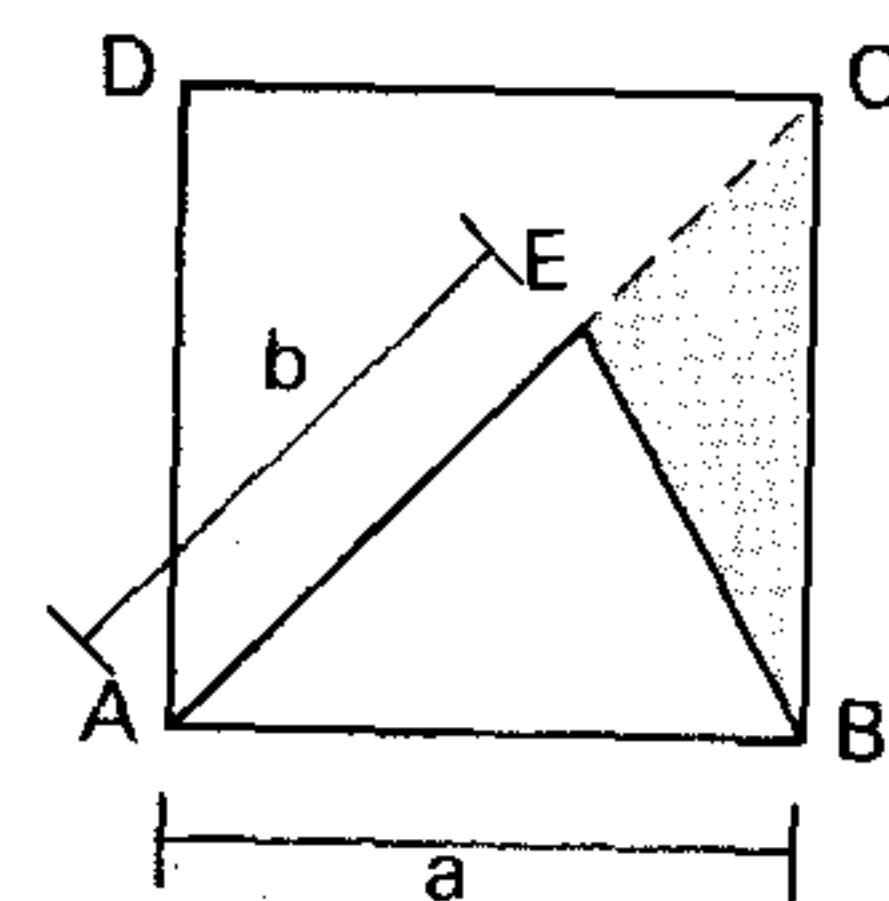
882. Calcule o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base *6 cm*, tendo outro lado medindo *5 cm*.

883. Seja ABC um triângulo isósceles cujos lados congruentes medem *5 cm*, sendo *6 cm* a medida do lado $\overline{BC}$ (base do triângulo). Calcule a razão entre o raio do círculo circunscrito e o raio do círculo inscrito nesse triângulo.

884. Determine o perímetro de um triângulo retângulo, sabendo que sua área é igual a $36\ cm^2$ e que a hipotenusa é igual ao dobro da altura relativa a ela.

885. As diagonais de um paralelogramo medem *10 m* e *20 m* e formam um ângulo de $60°$. Ache a área do paralelogramo.

886. Mostre que a soma das distâncias de um ponto interno, de um triângulo equilátero, aos lados é igual à altura h do triângulo.

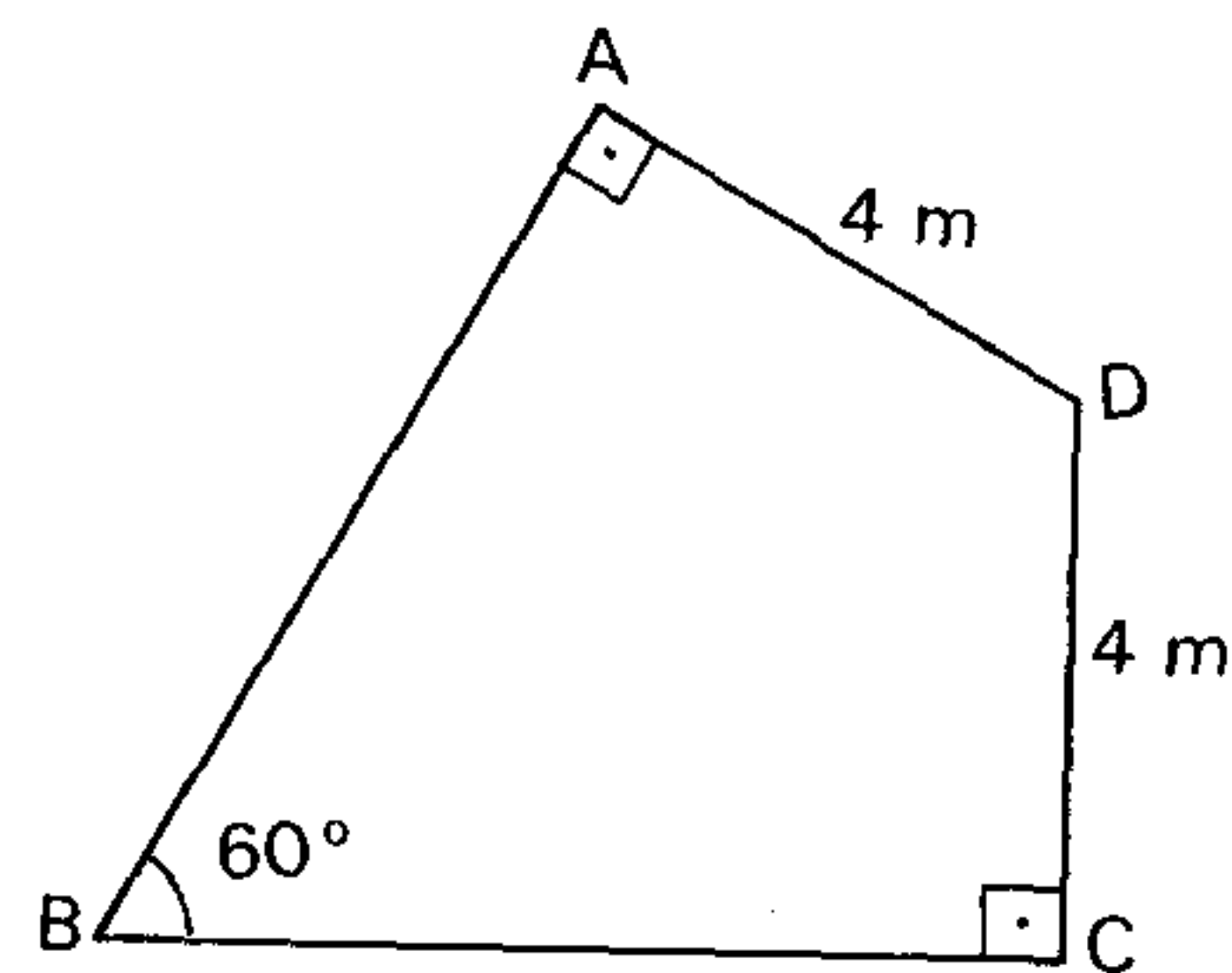
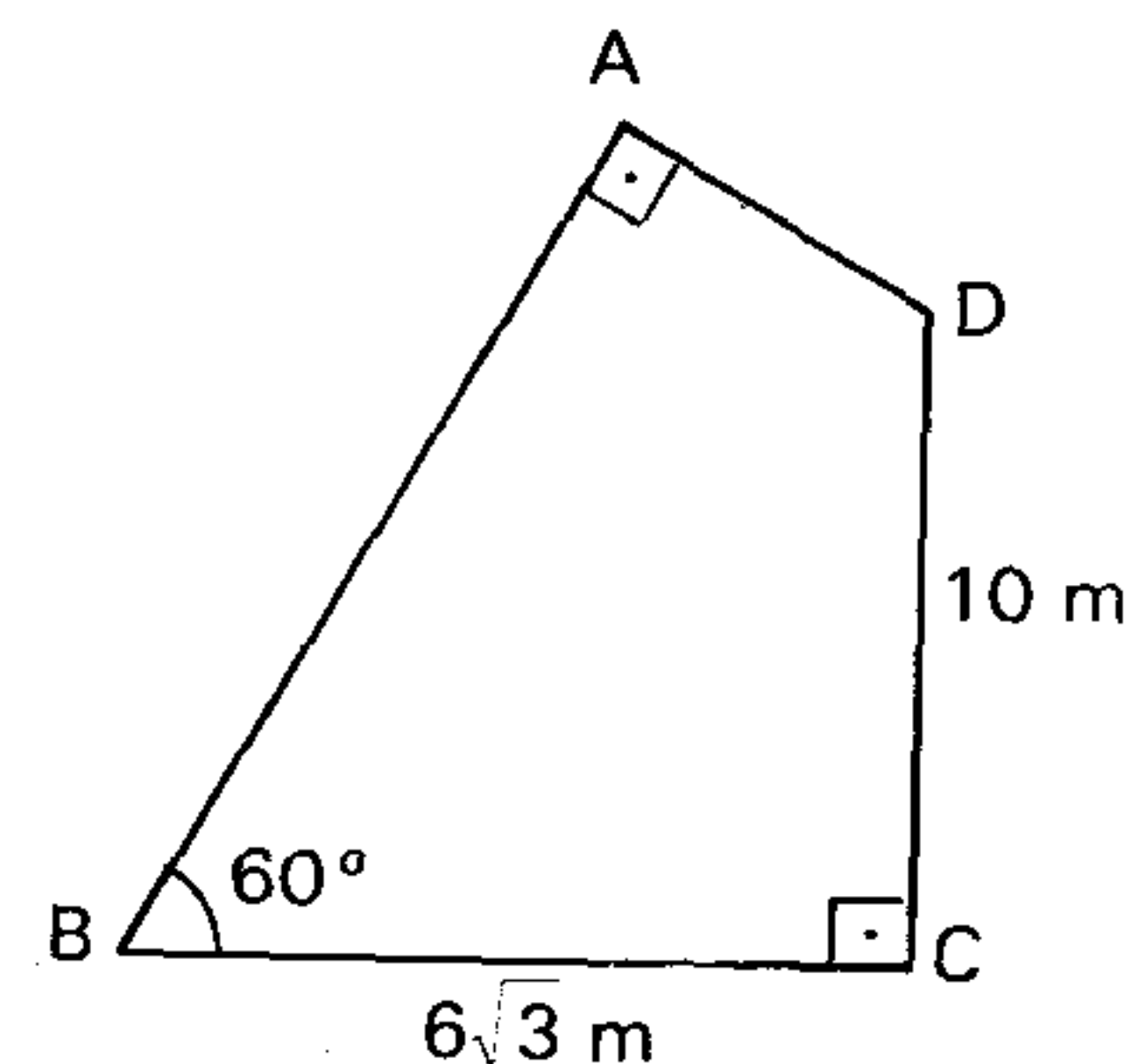
887. Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado a e $AE = b$. Determine a área do triângulo AEB.

888. Determine a área dos quadriláteros nos casos:

a)

b)

889. Os ângulos de um hexágono convexo medem $120°$. Determine a área desse hexágono, sendo os lados opostos congruentes e medindo *4 m, 6 m* e *8 m*.

890. As medianas de um triângulo medem *9 m, 12 m* e *15 m*. Determine a área do triângulo.

891. O ponto de interseção das diagonais de um paralelogramo dista a e b dos lados e o ângulo agudo mede α. Determine a área.

IV. Área do círculo e de suas partes

257. *Área do círculo*

Vimos no item 249 que a área de um polígono regular é o produto da medida do semiperímetro pela do apótema.

$$A_{pol} = p \cdot m$$

Tendo em vista os itens 221, 222, 223, 224 e 225 do capítulo XVII, consideremos as afirmações abaixo:

Fixado um círculo, de raio R (diâmetro D), considerando os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo, com o crescimento do número de lados as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro do círculo (vide comprimento da circunferência) e os apótemas se aproximam do raio do círculo. Podemos então colocar, por extensão:

A área do círculo é o produto de seu semiperímetro pelo raio.

$$A_C = \pi R \cdot R = \pi R^2$$

Então:

$$\boxed{A_C = \pi \cdot R^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{A_C = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}}$$

258. *Área do setor circular*

Notemos que, quando dobramos o arco (ou ângulo central), dobra a área do setor; triplicando-se o arco (ou ângulo central), a área do setor também é triplicada, e assim por diante.

De modo geral,

a área do setor é proporcional ao *comprimento do arco* (ou à medida do ângulo central).

Portanto,

a área do setor pode ser calculada por uma regra de três simples:

a) Área de um setor circular de raio R e α radianos

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad} — \pi R^2 \\ \alpha \text{ rad} — A_{setor} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}}$$

b) Área de um setor circular de raio R e α graus

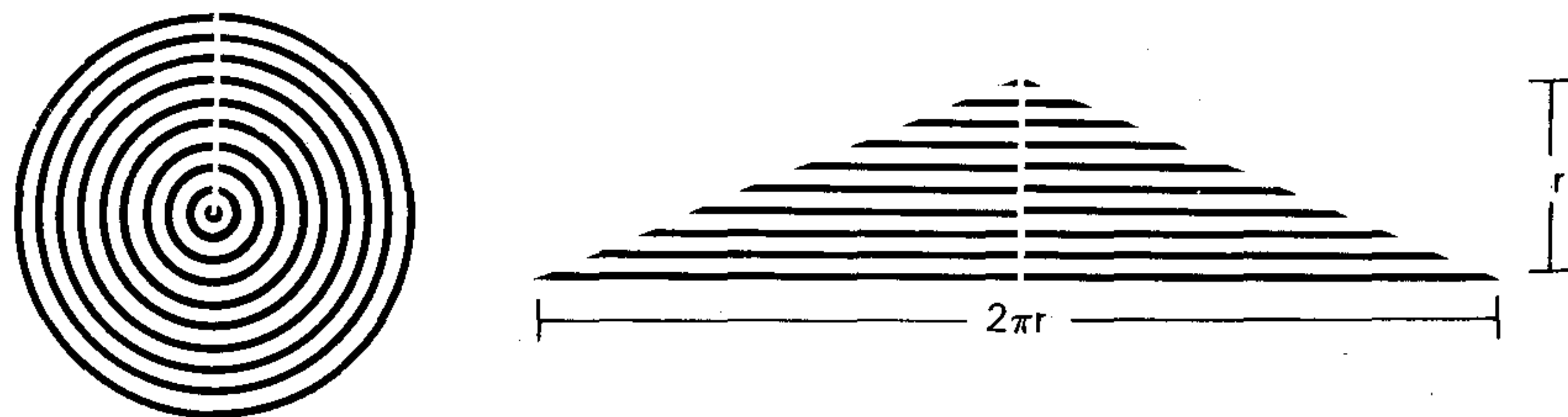
$$\left.\begin{array}{l} 360° — \pi R^2 \\ \alpha° — A_{setor} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}}$$

c) Área de um setor circular em função de R e do comprimento ℓ do arco

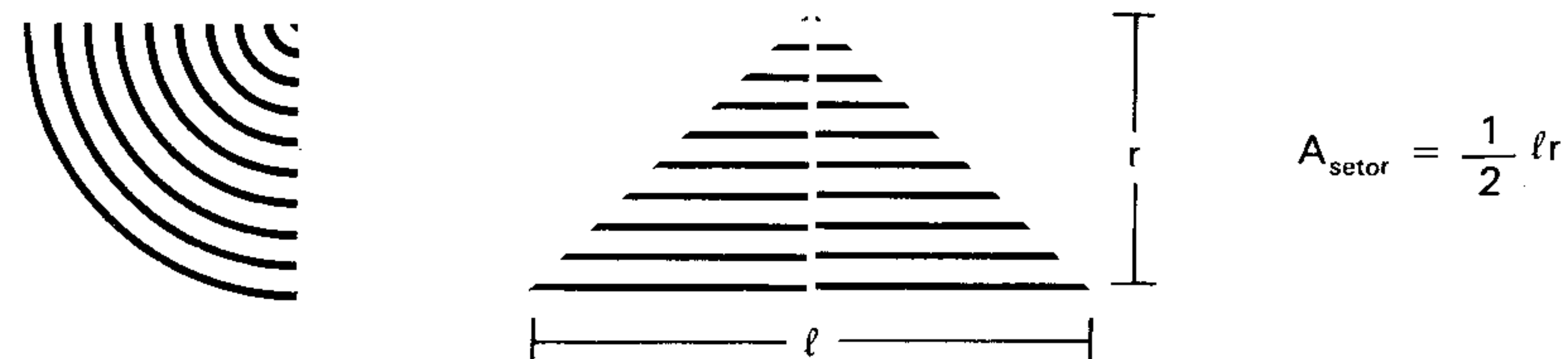
$$\left.\begin{array}{l} 2\pi R — \pi R^2 \\ \ell — A_{setor} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\ell R}{2}}$$

259. *Observação*

Note que tanto a área do setor, como a do círculo são análogas à área do triângulo e as figuras abaixo dão idéia disso.

$2\pi r$ r

$$A_{círculo} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r \Rightarrow A_{círculo} = \pi r^2$$

ℓ r

$$A_{setor} = \frac{1}{2} \ell r$$

260. *Área do segmento circular*

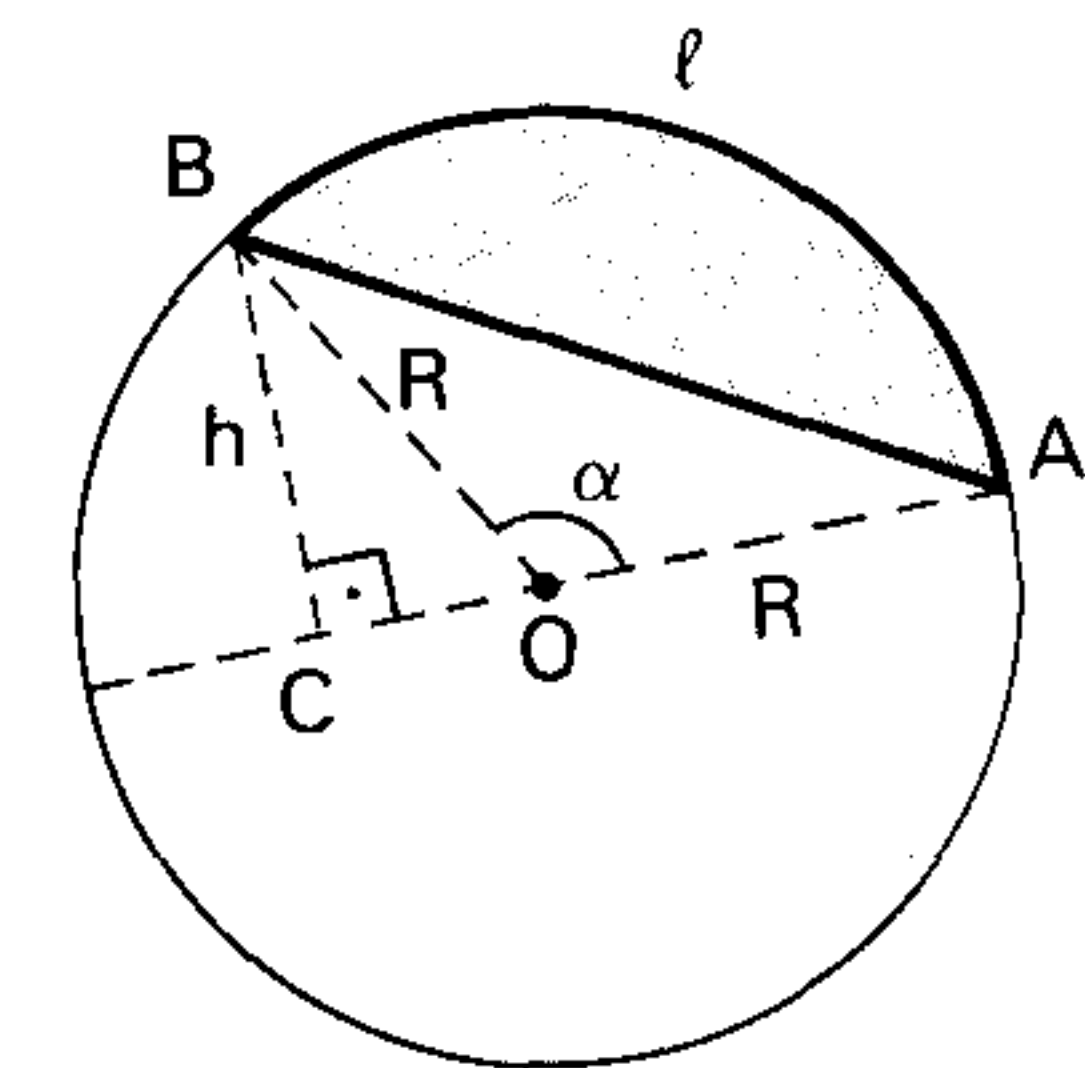
Cálculo da área do segmento circular indicado na figura: R é o raio, α é a medida do ângulo central e ℓ é o comprimento do arco.

$$A_{segm} = A_{set\,OAB} - A_{\Delta OAB}$$

a) Usando o h (que pode ser obtido no ΔOBC)

$$A_{segm} = \frac{\ell R}{2} - \frac{Rh}{2} \Longrightarrow$$

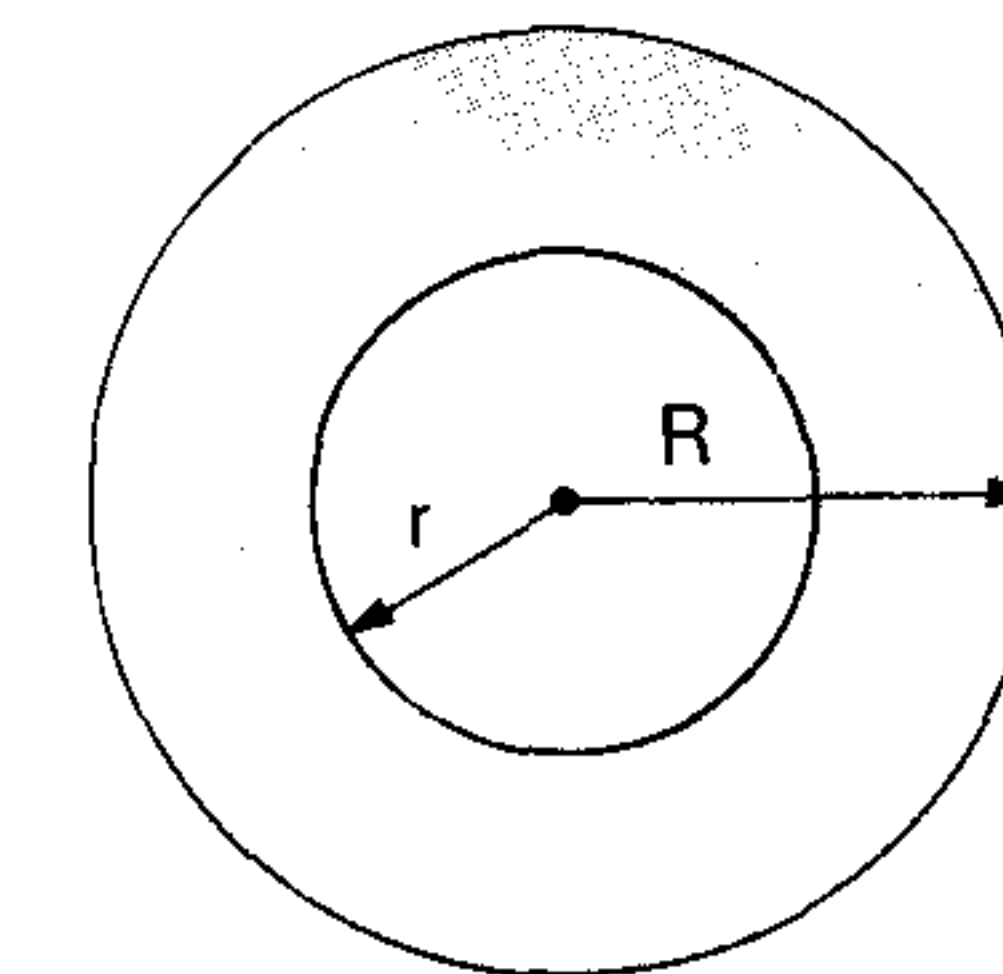
$$\Longrightarrow \boxed{A_{segm} = (\ell - h)\frac{R}{2}}$$

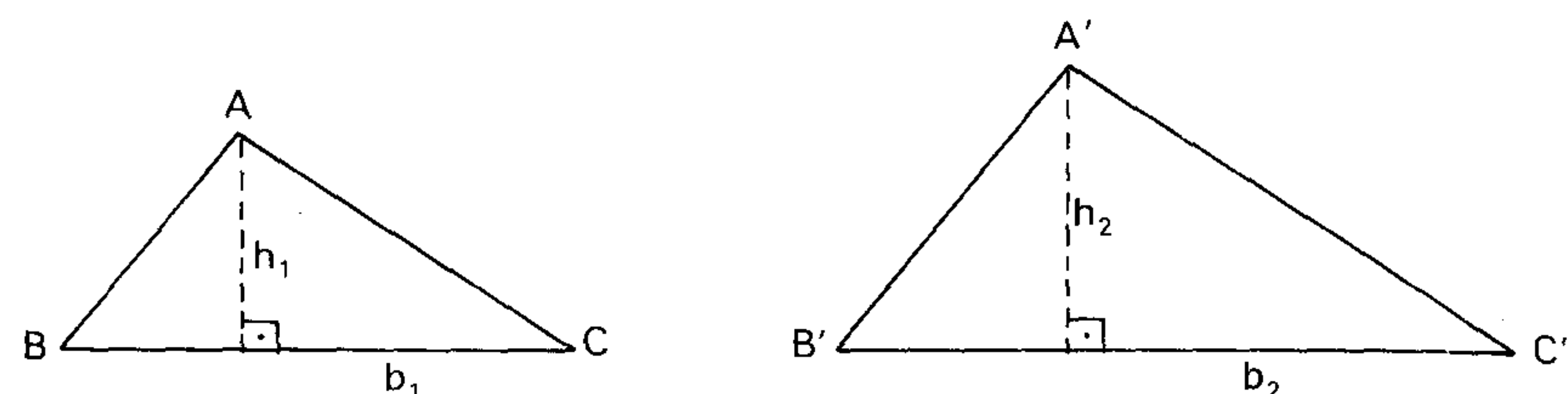
B, A, C, O, h, R, α, ℓ

b) Usando α em radianos

$$A_{segm} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2} R \cdot R \text{ sen } \alpha \qquad \boxed{A_{segm} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen } \alpha)}$$

261. *Área da coroa circular*

$$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 \Longrightarrow \boxed{A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)}$$

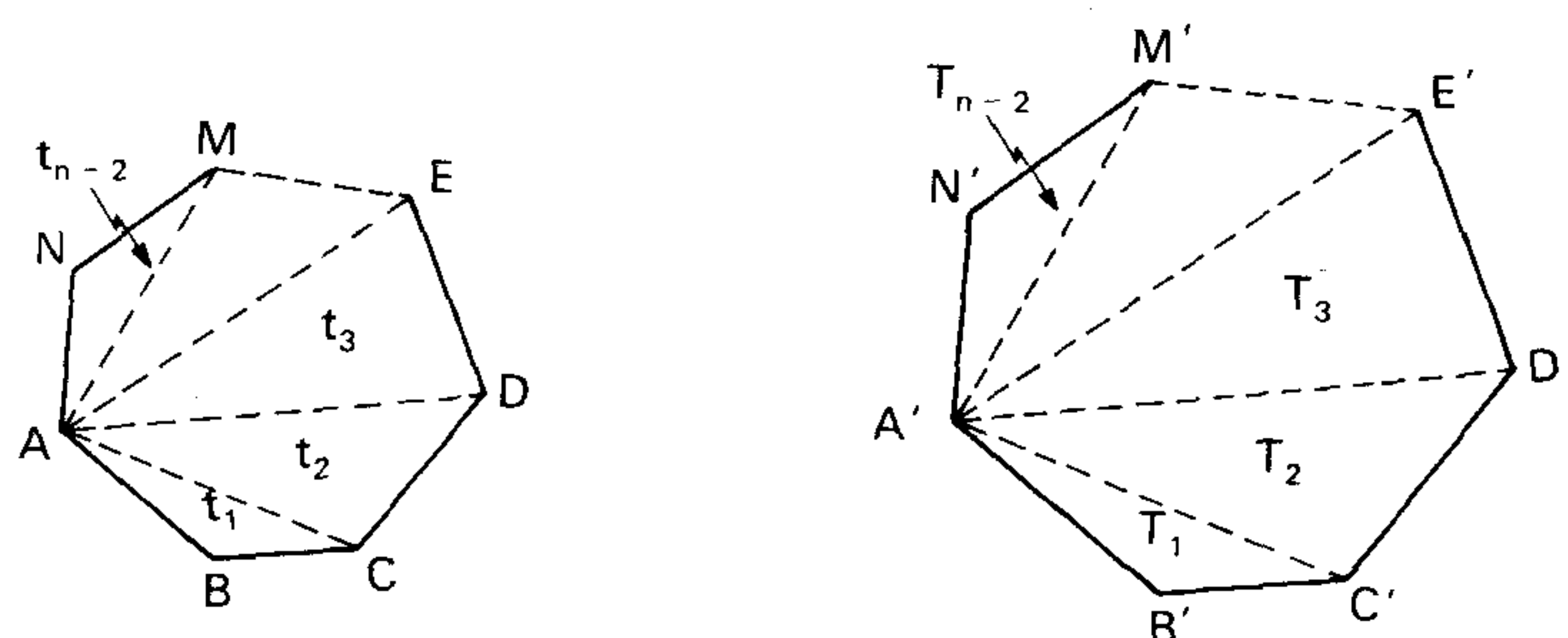
R, r

V. Razão entre áreas

262. *Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes*

Área do triângulo $ABC = S_1$ Área do triângulo $A'B'C' = S_2$

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \implies \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} b_1 h_1}{\frac{1}{2} b_2 h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2 \implies \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Conclusão: A razão entre as *áreas* de dois triângulos semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

263. *Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes*

Área de $ABCDE \ldots MN = S_1$ Área de $A'B'C'D' \ldots M'N' = S_2$

$$ABCDE \ldots MN \sim A'B'C'D' \ldots M'N' \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \text{ e}$$

$$\text{e } \Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \text{ e} \ldots \text{e } \Delta AMN \sim \Delta A'M'N' \implies \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} =$$

$$= \ldots = \frac{MN}{M'N'} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

Fazendo:

Área $\Delta ABC = t_1$, Área $\Delta ACD = t_2$, ..., Área $\Delta AMN = t_{n-2}$

Área $\Delta A'B'C' = T_1$, Área $\Delta A'C'D' = T_2$, ..., Área $\Delta A'M'N' = T_{n-2}$

Foi provado no item anterior que:

$$\frac{t_i}{T_i} = k^2 \implies t_i = k^2 T_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots, n-2$$

Então:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-2}} =$$

$$= \frac{k^2T_1 + k^2T_2 + k^2T_3 + \ldots + k^2T_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-2}} \implies \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Conclusão: A razão entre as *áreas* de dois polígonos semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

264. *Observação*

A propriedade acima é extensiva a quaisquer superfícies semelhantes e, por isso, vale:

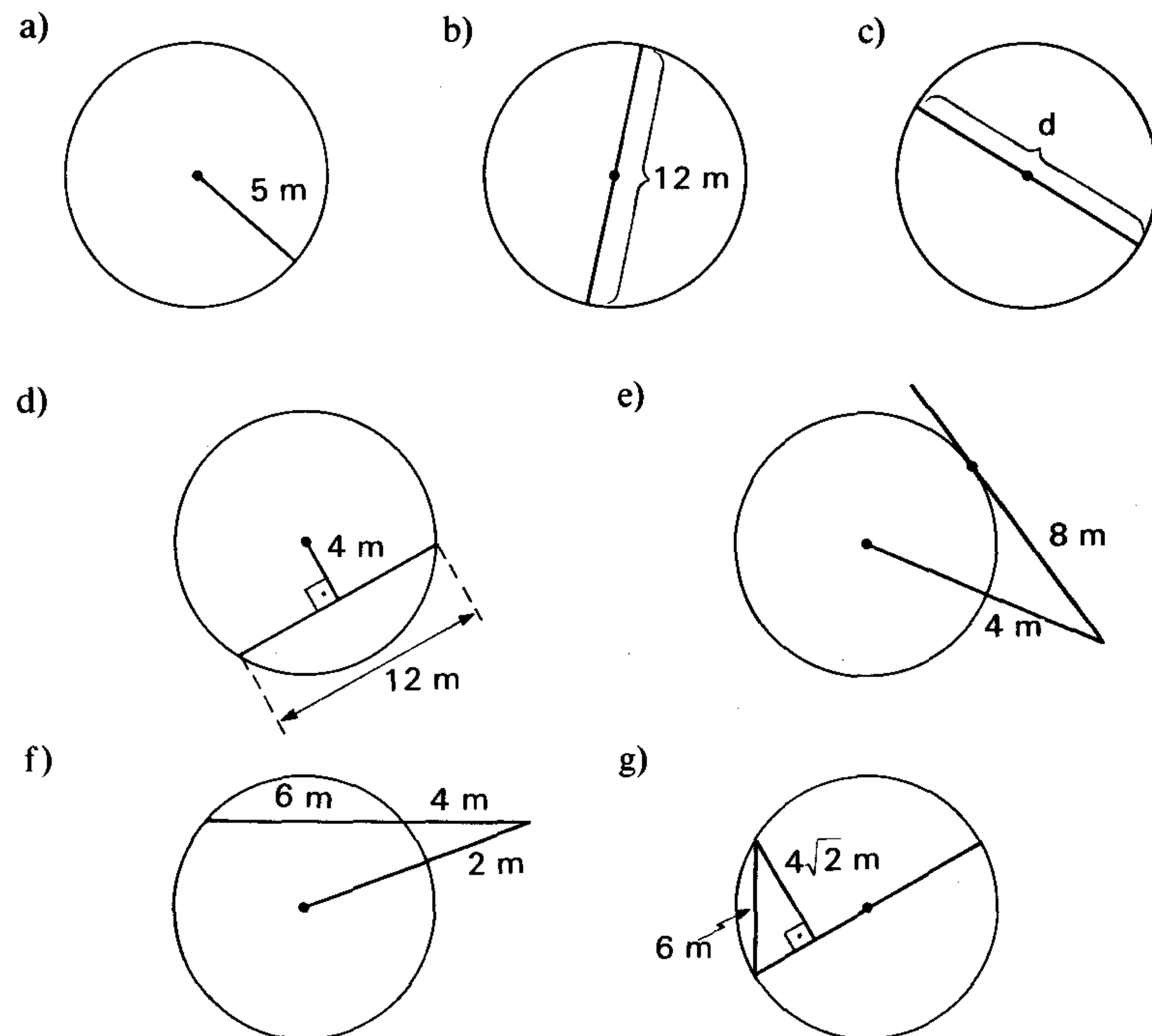
A razão entre as *áreas* de duas *superfícies* semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

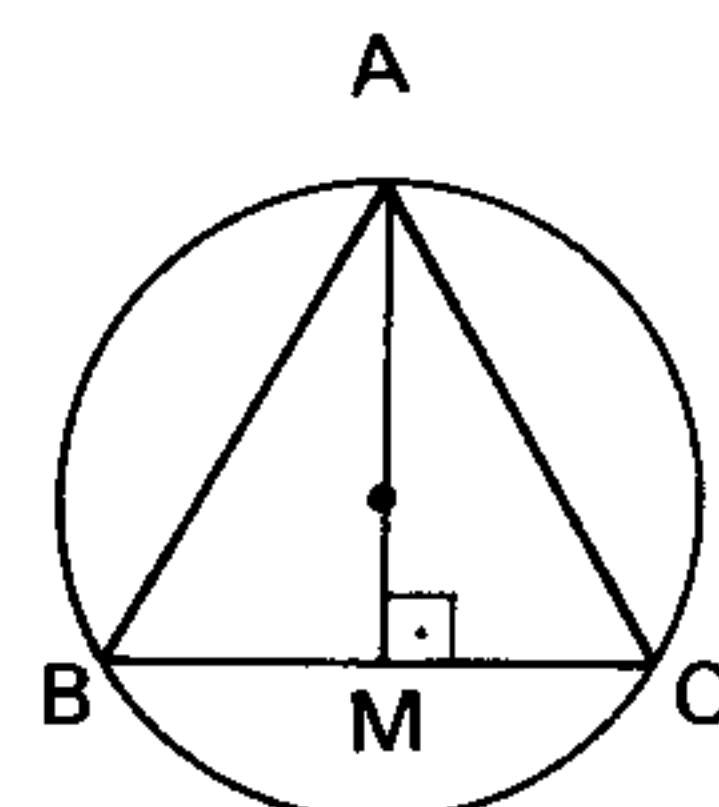
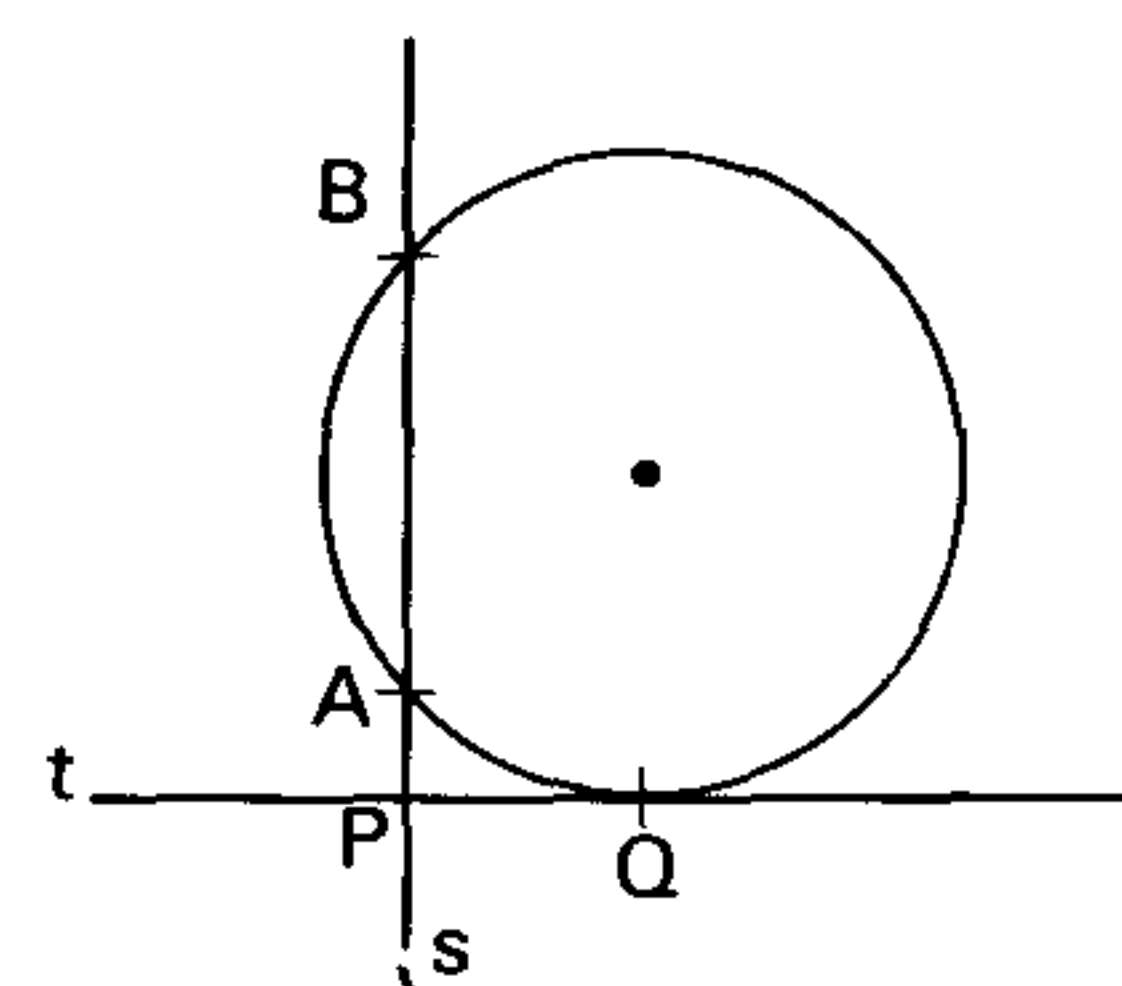
EXERCÍCIOS

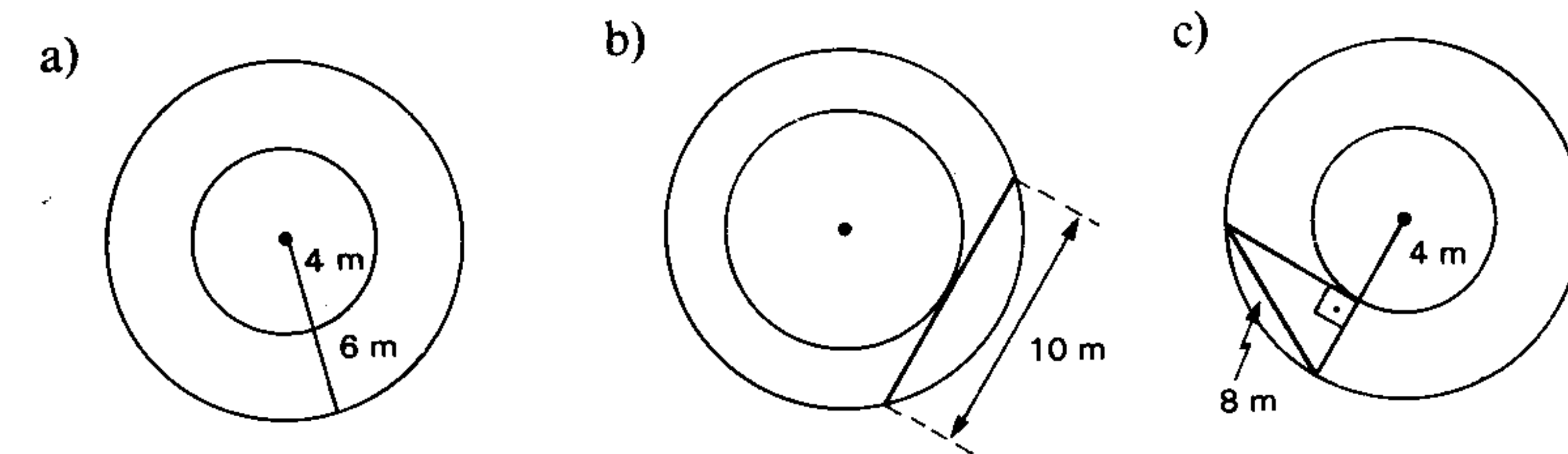
892. Determine a área do círculo e o comprimento da circunferência nos casos:

a) b) c)

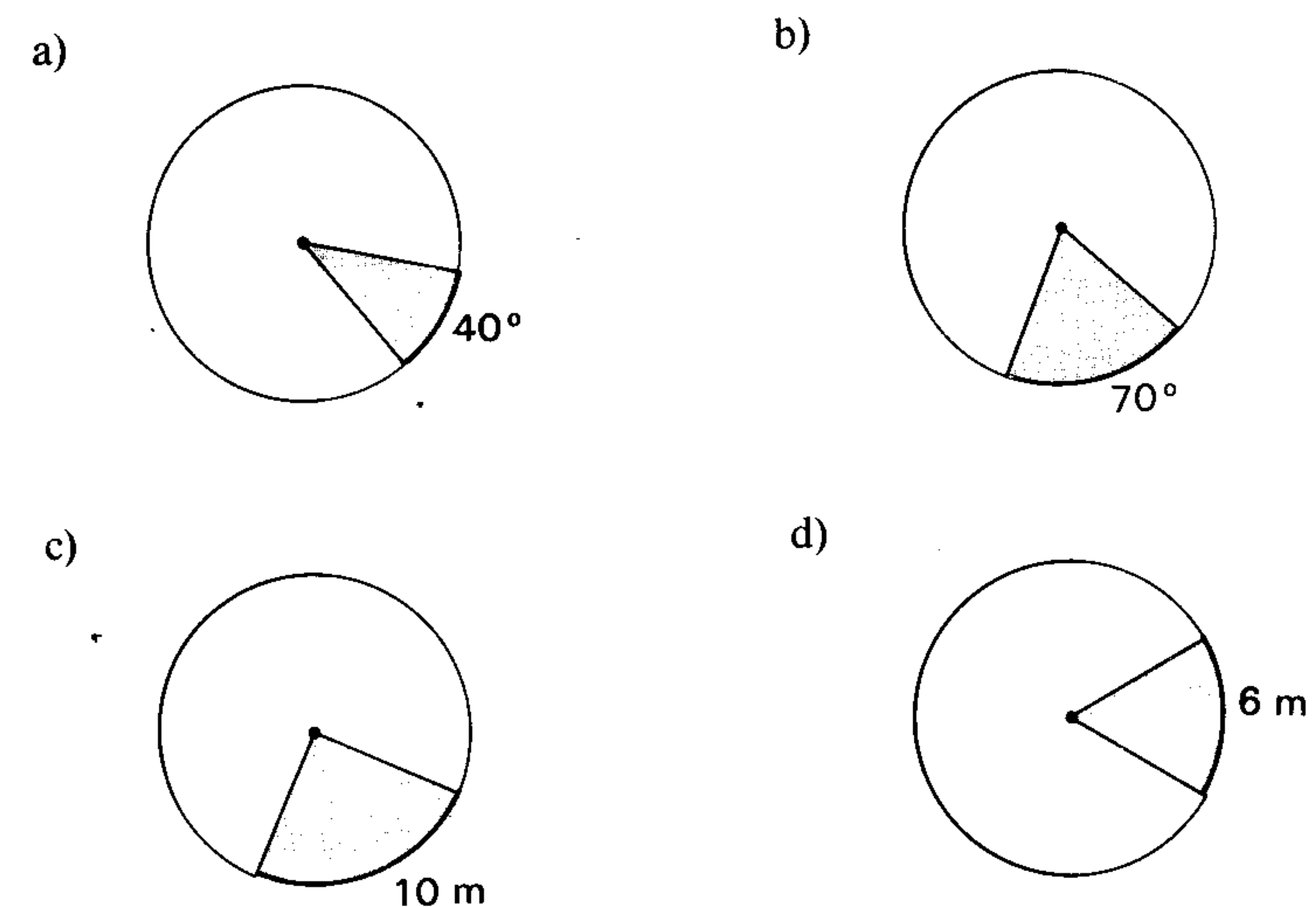
d) e)

f) g)

893. Determine a área do círculo nos casos:

a) PA = 4 m, PQ = 8 m, s ⊥ t b) BC = 30 m, AM = 25 m

894. Determine a área da coroa circular nos casos:

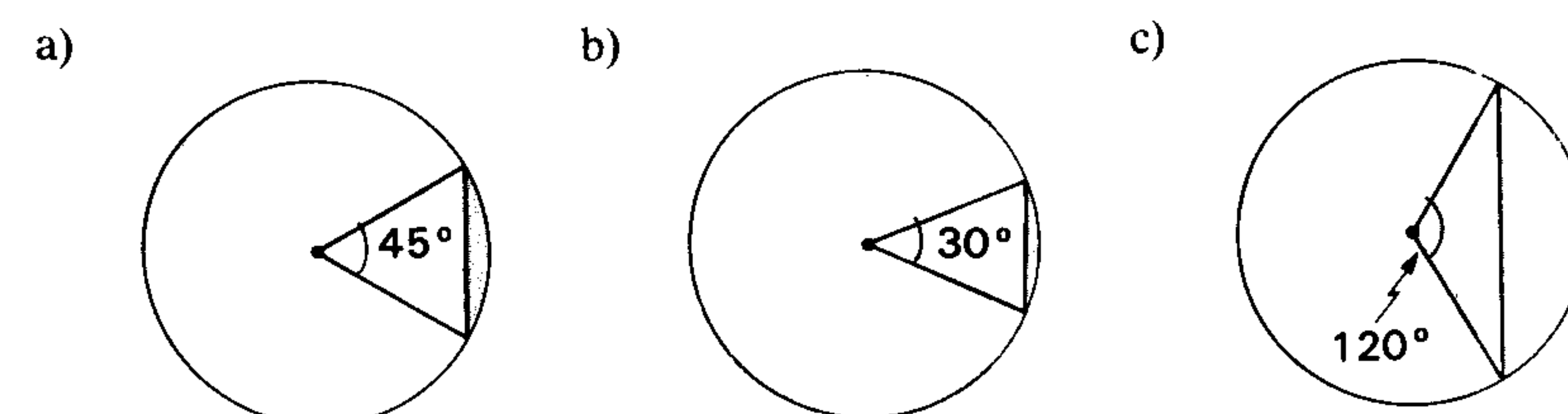
a) b) c)

895. Determine a área de cada setor circular sombreado nos casos abaixo, sendo *6 m* o raio.

a) b)

c) d)

896. Determine as áreas dos setores de medidas indicadas abaixo, sendo *60 cm* o raio do círculo.

a) 90° b) 60° c) 45° d) 120° e) 17° f) 5°15′

897. Determine a área do segmento circular sombreado, nos casos a seguir, sendo *6 m* o raio do círculo.

a) b) c)

898. Determine as áreas dos segmentos circulares cujas medidas dos arcos são dadas abaixo, sendo *12 m* o raio do círculo.

a) 60° b) 90° c) 135° d) 150°

899. Determine a área de um círculo, sabendo que o comprimento de sua circunferência é igual a 8π cm.

900. Calcule a área de um setor circular de raio r e ângulo central medindo:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 135° g) 150°

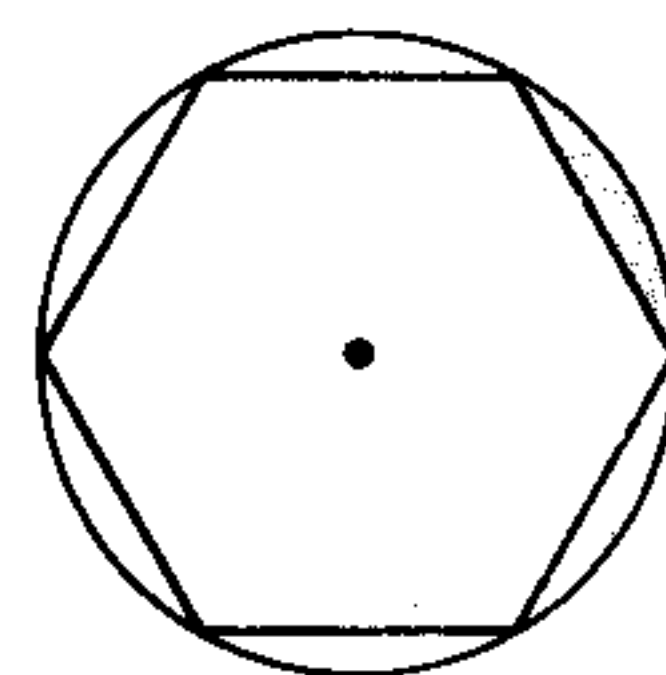
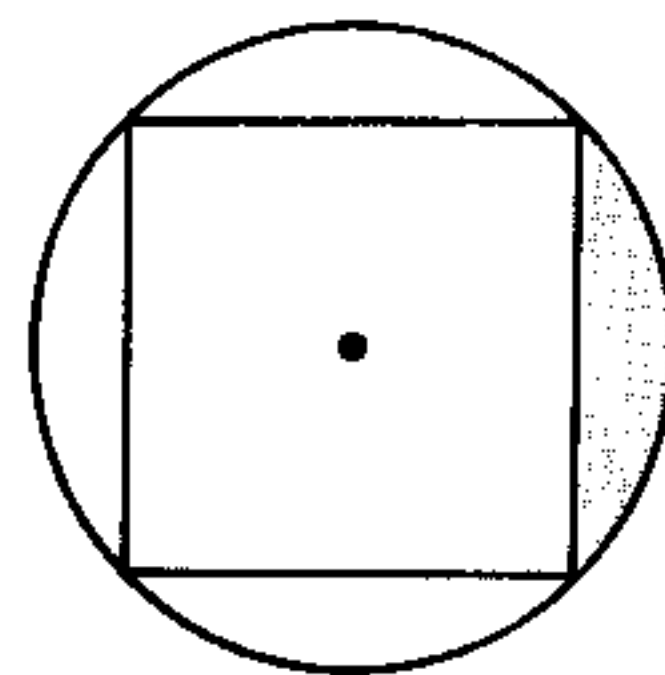
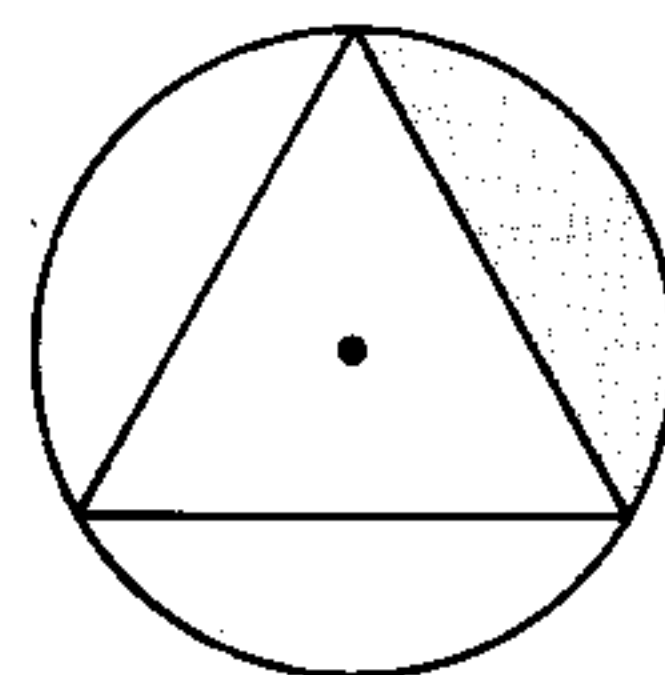
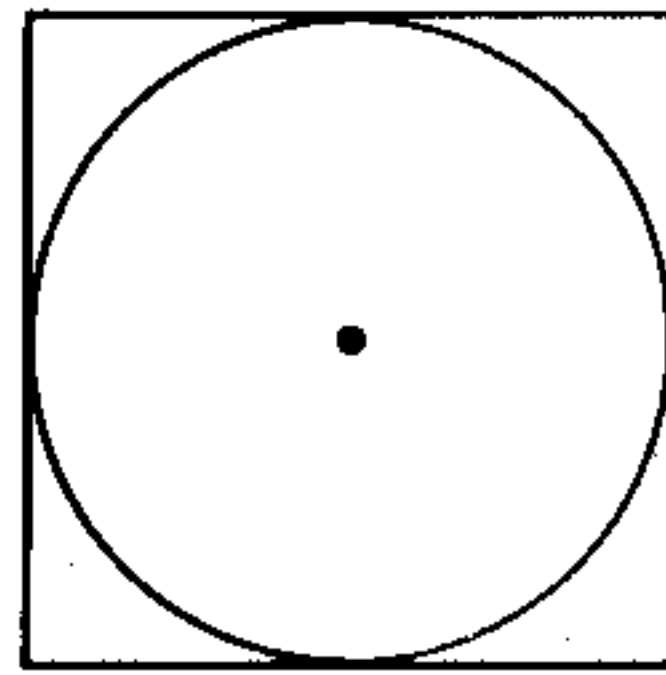
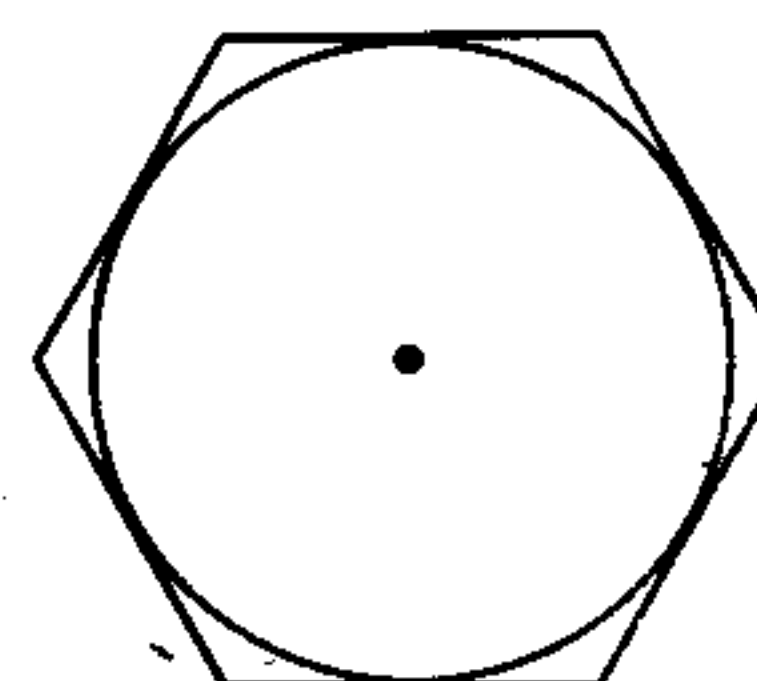
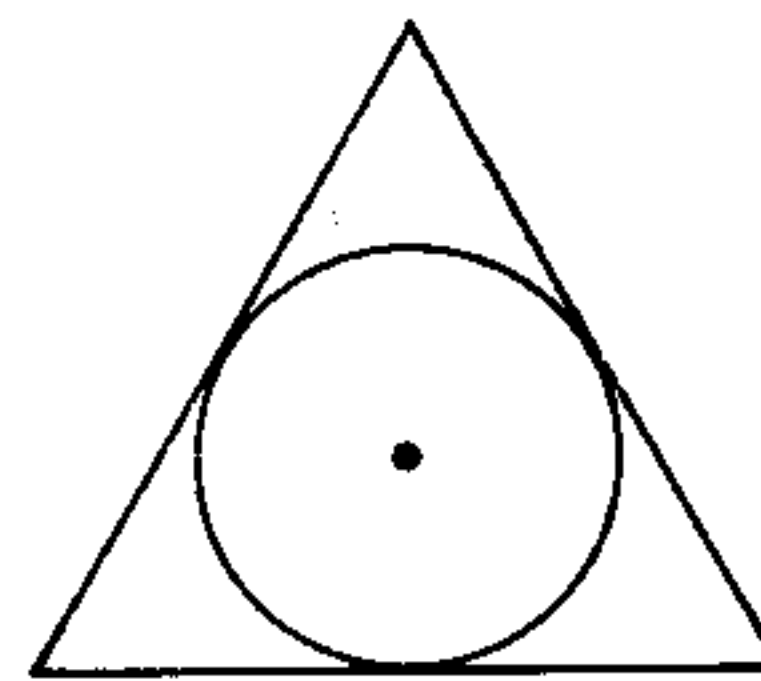
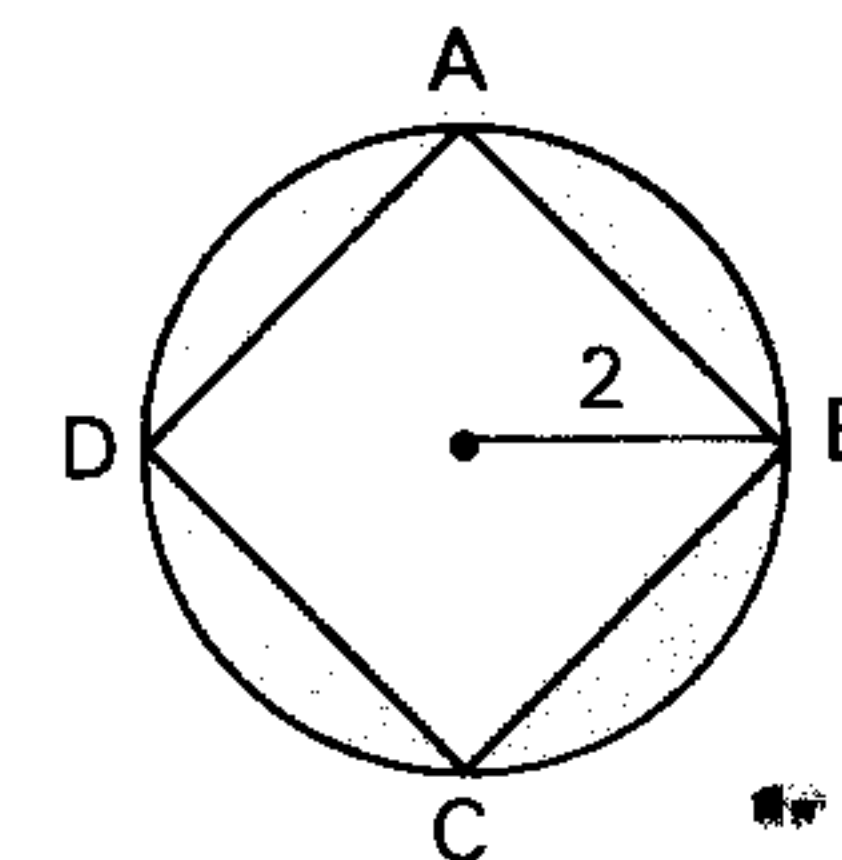
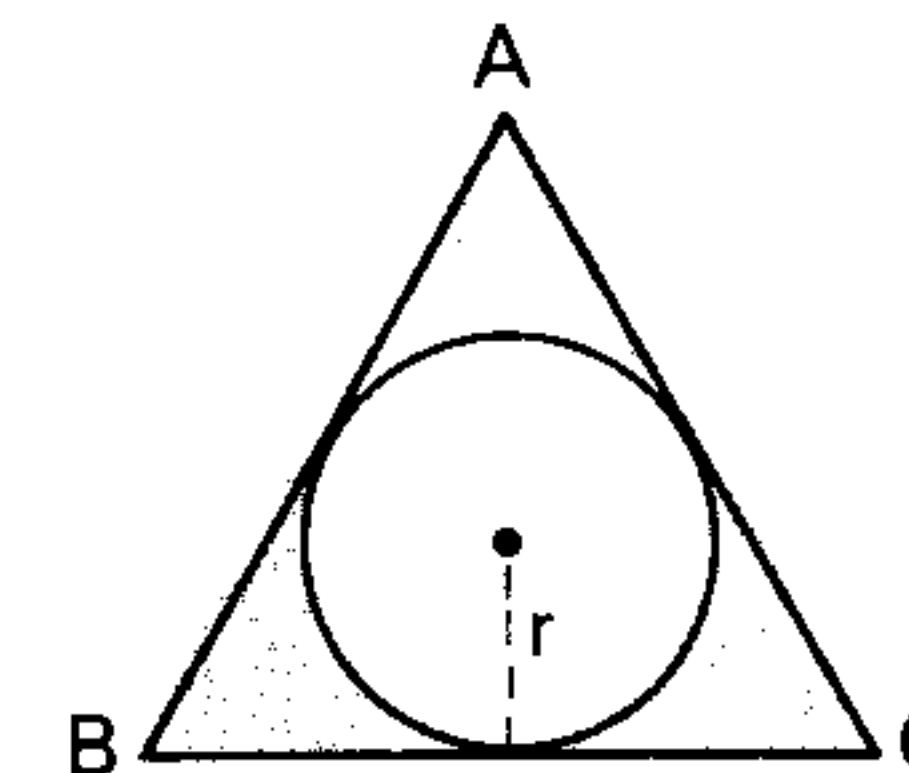
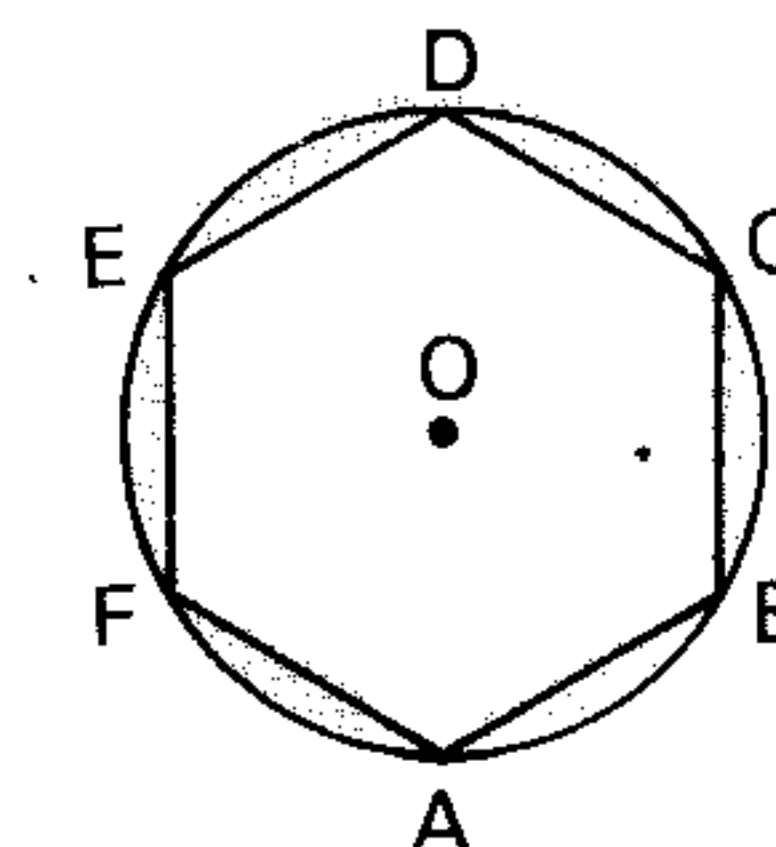
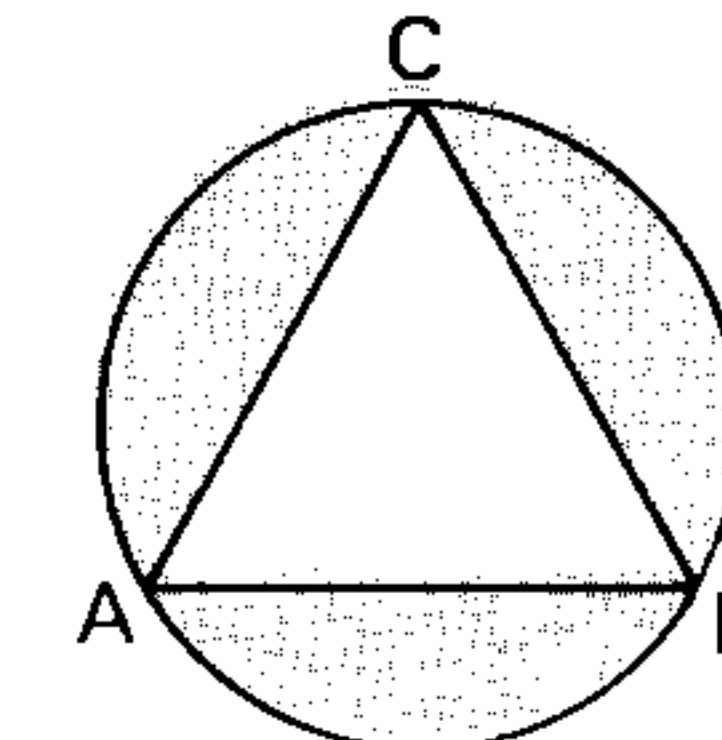
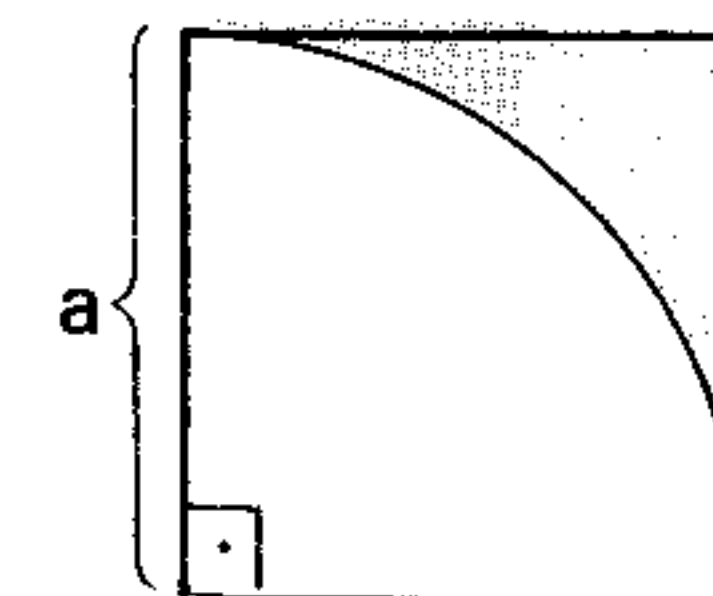
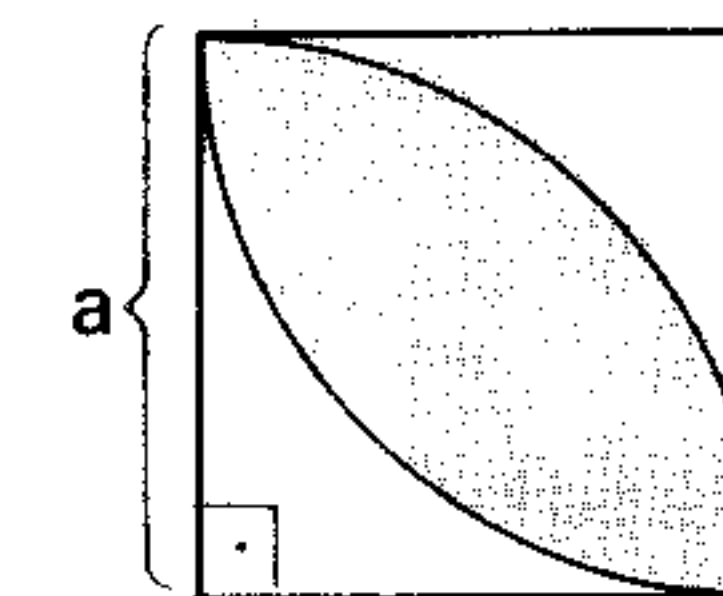
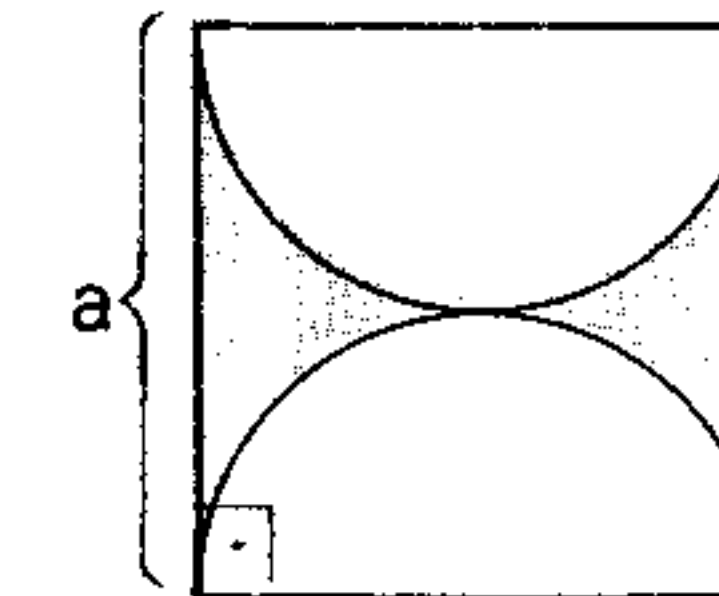
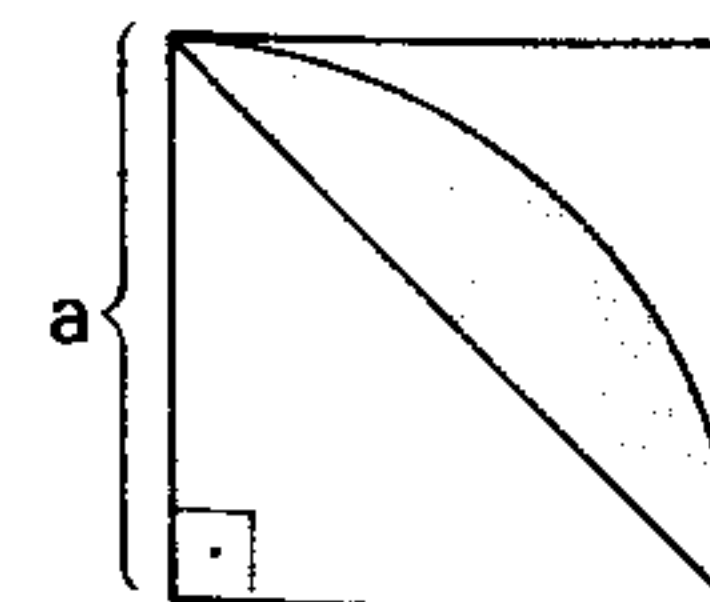
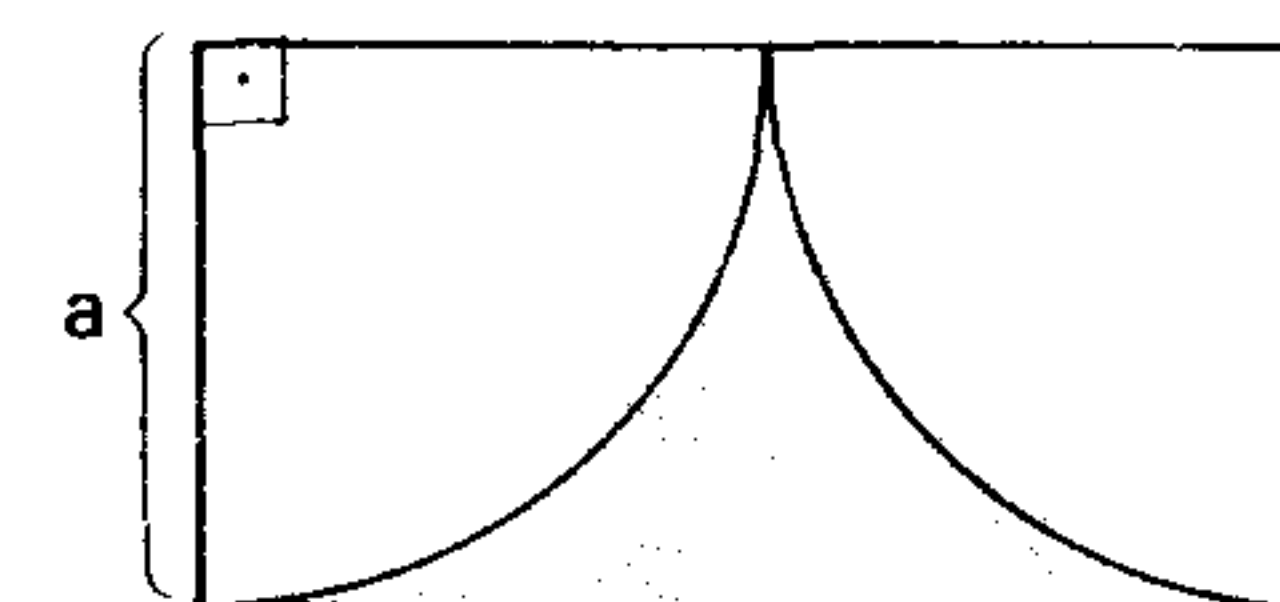
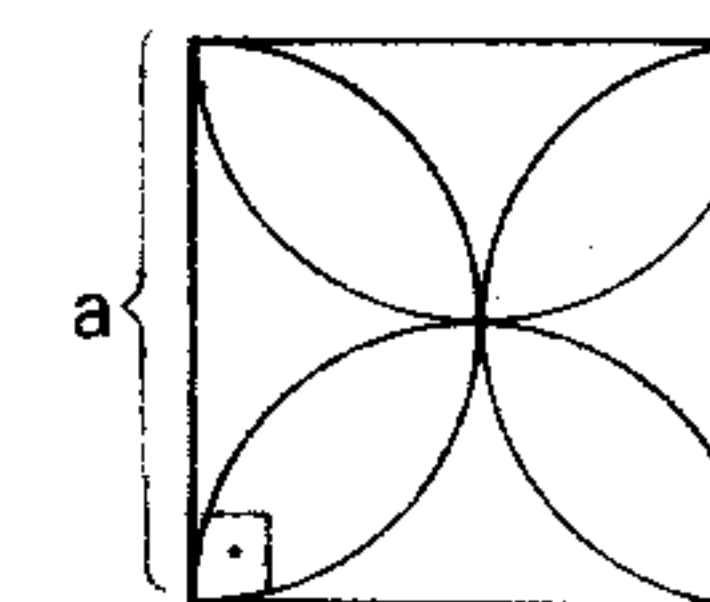
901. Calcule a área de um segmento circular de um círculo de raio R e ângulo central medindo:

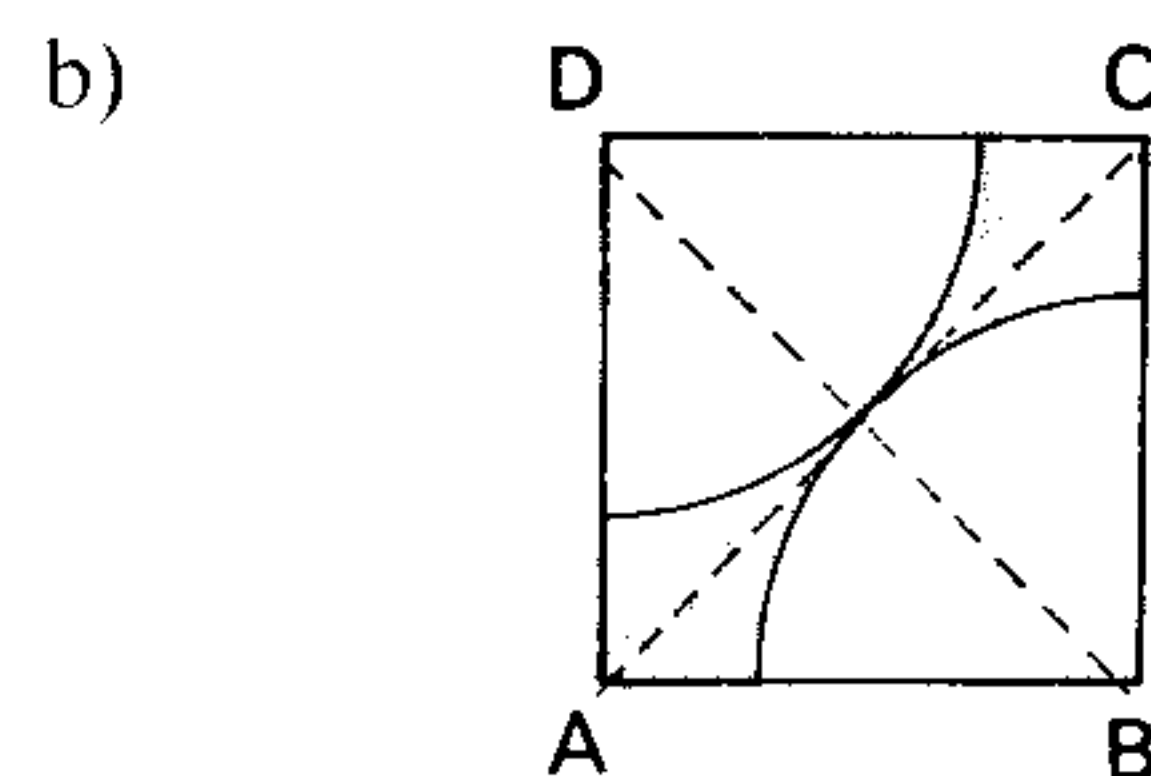
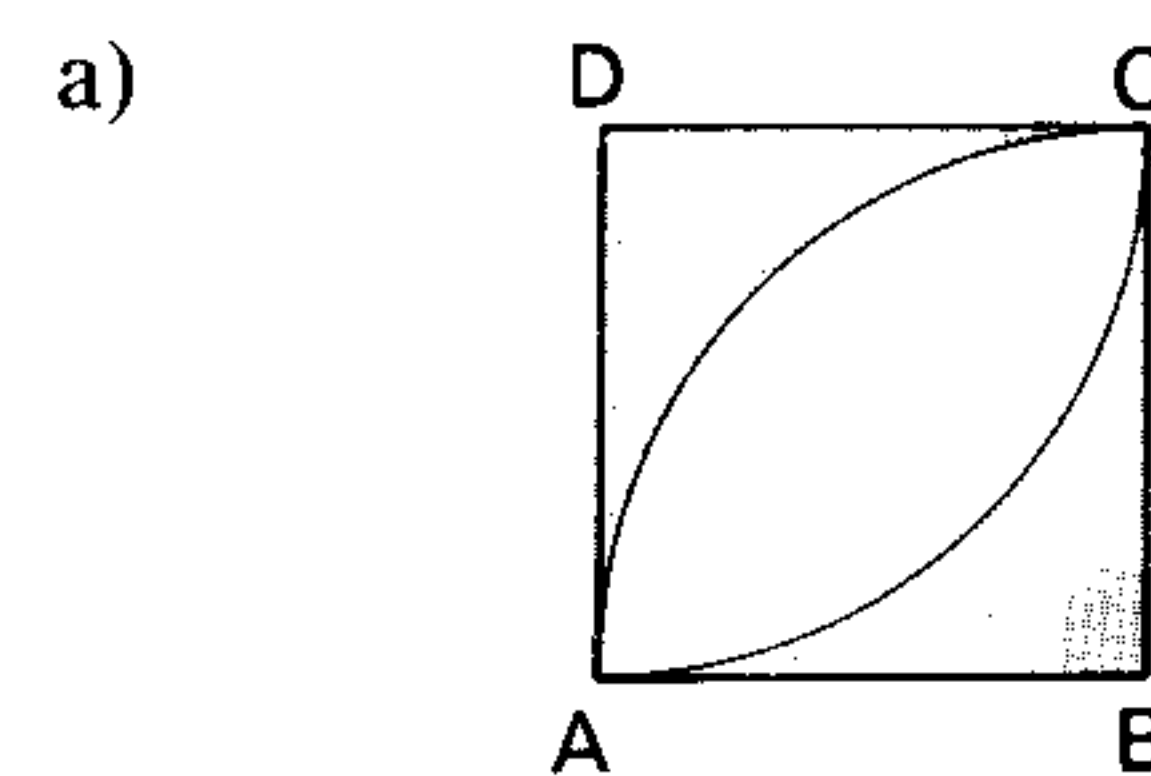
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 135° g) 150°

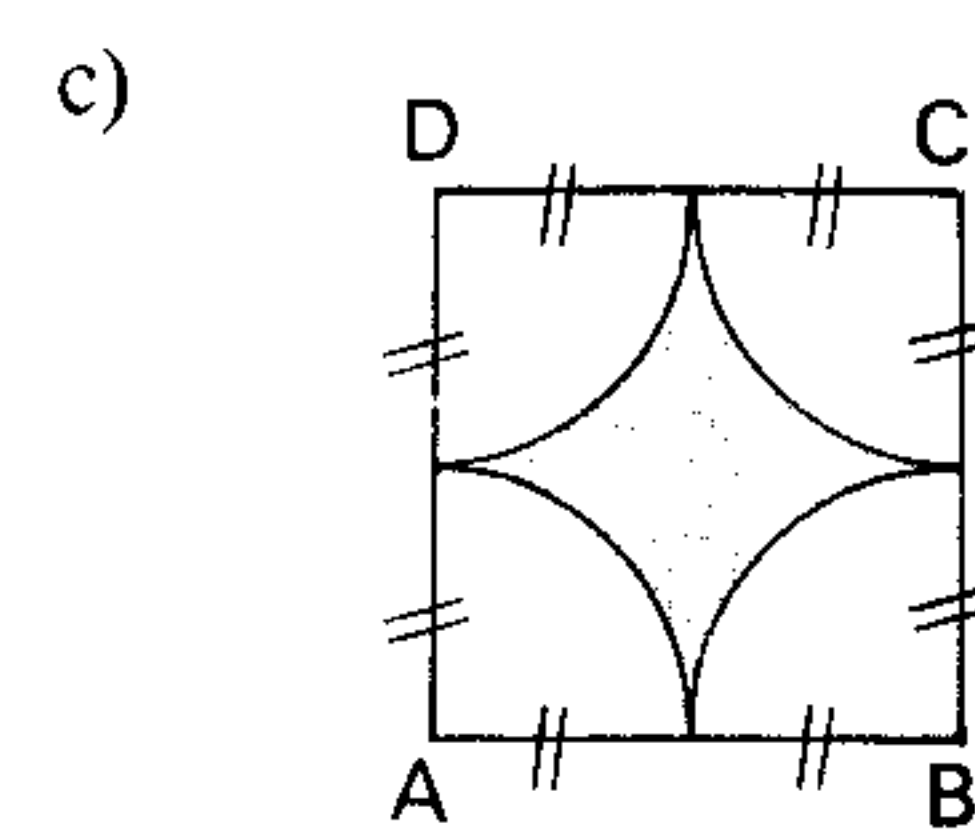
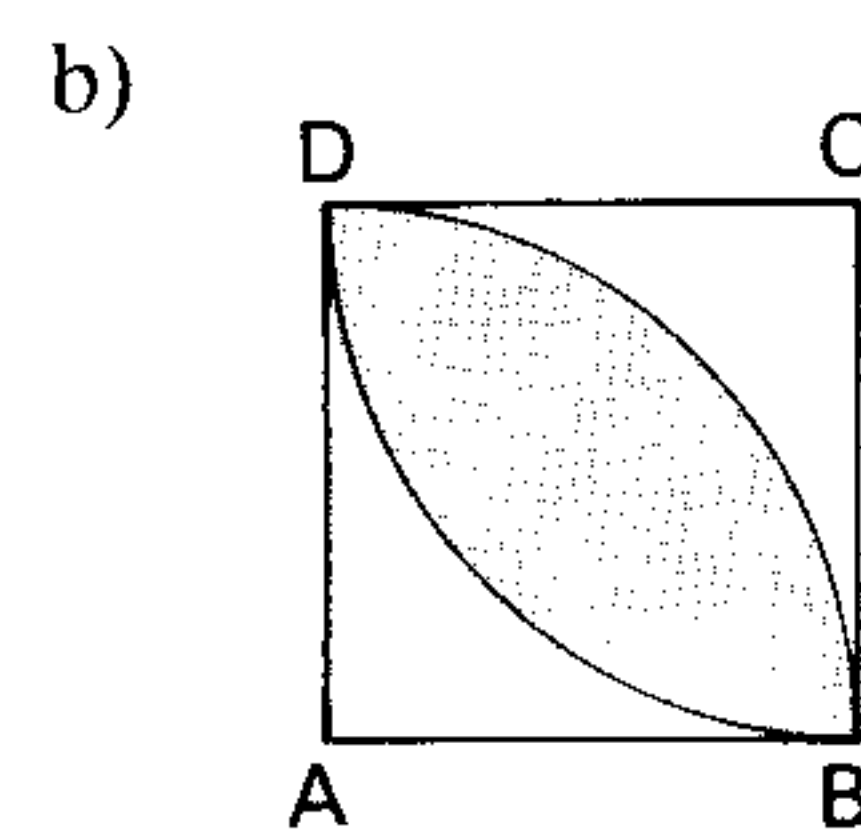
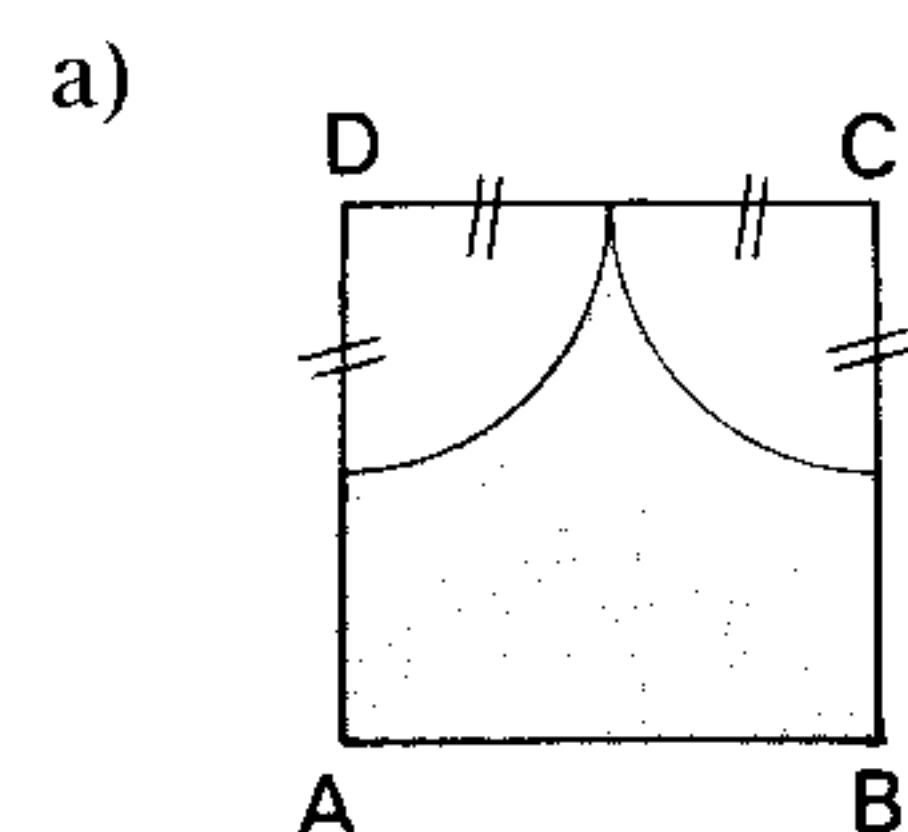
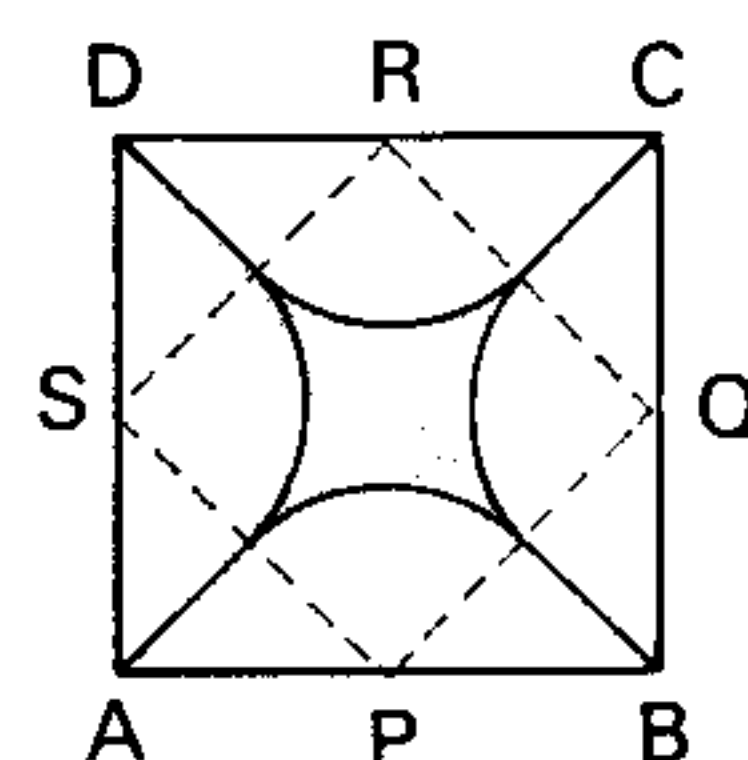
902. Determine a área de coroa determinada por duas circunferências concêntricas de raios *15 cm* e *12 cm*.

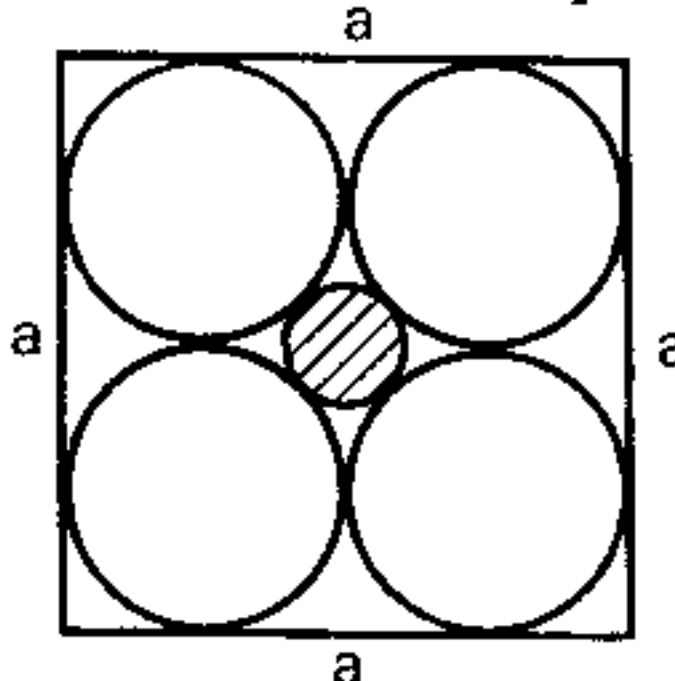
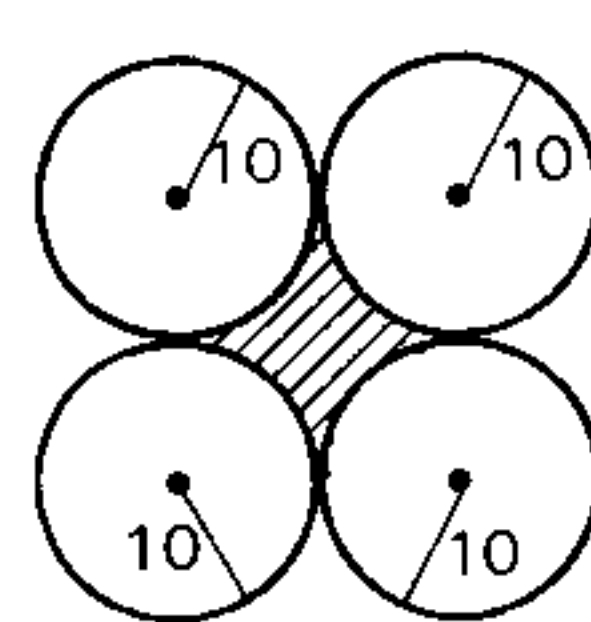
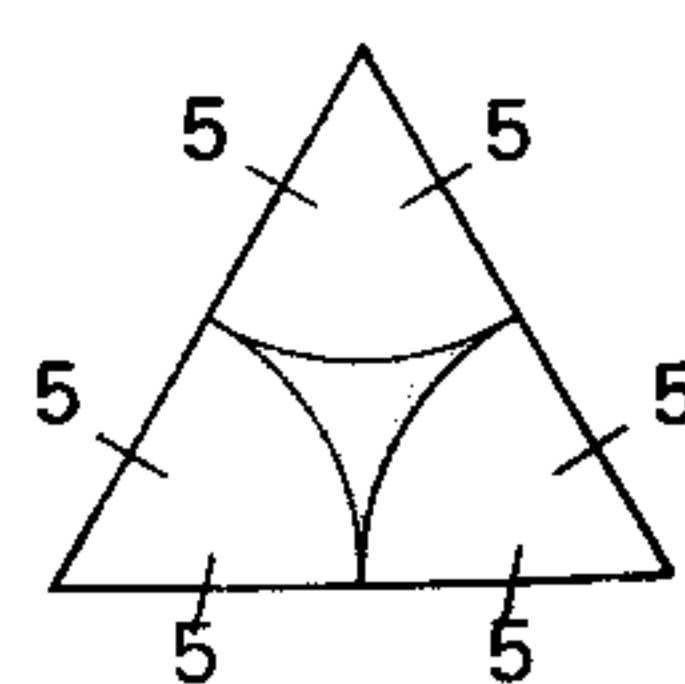
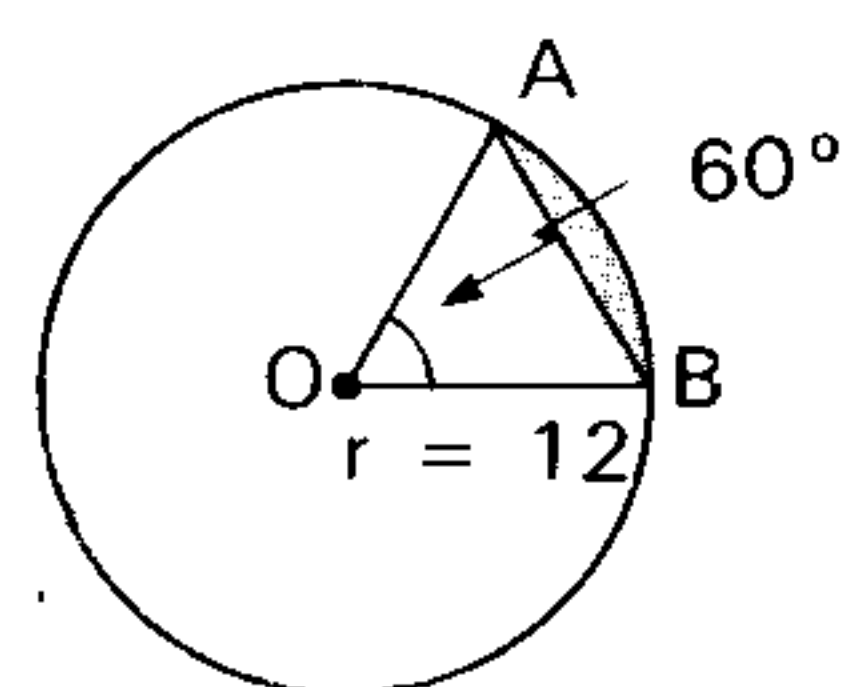
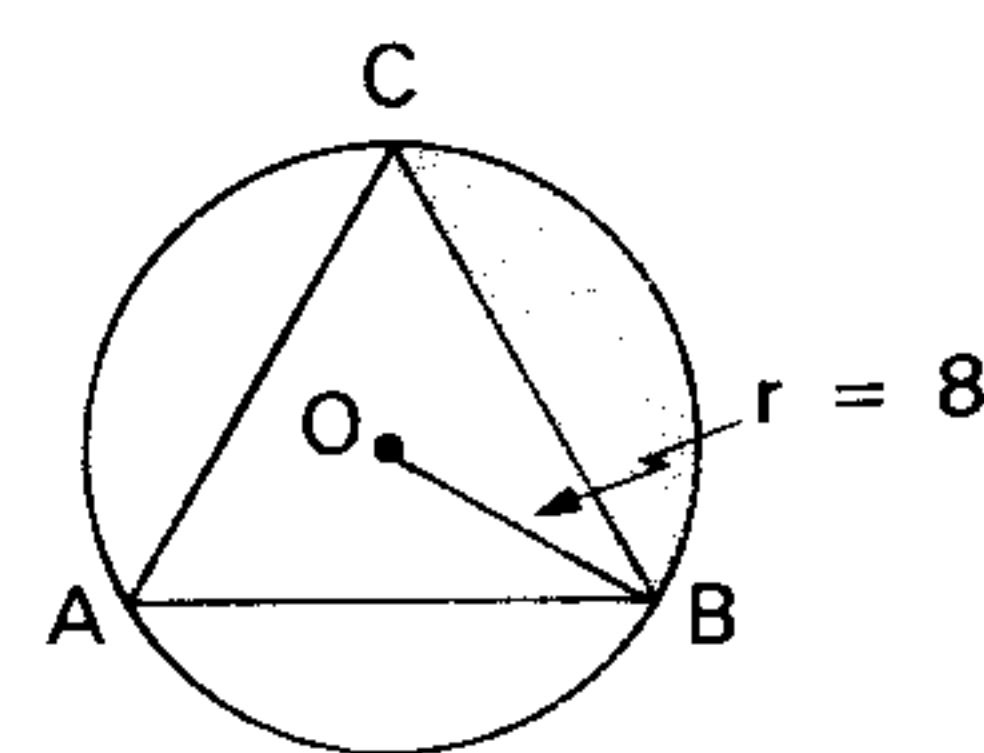
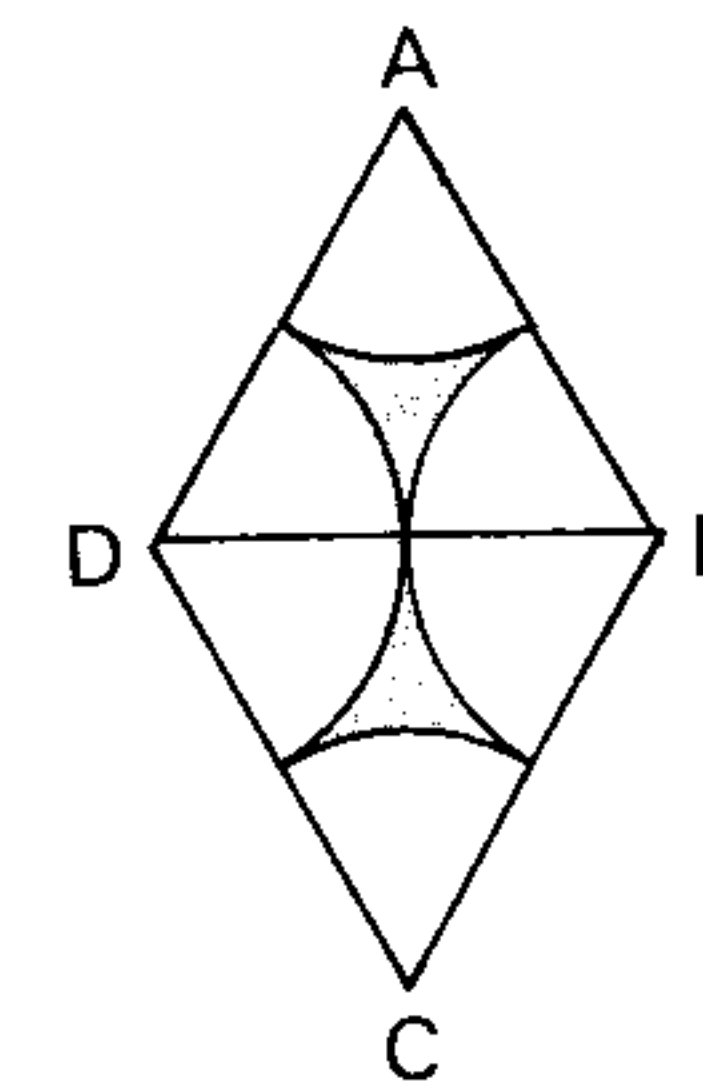
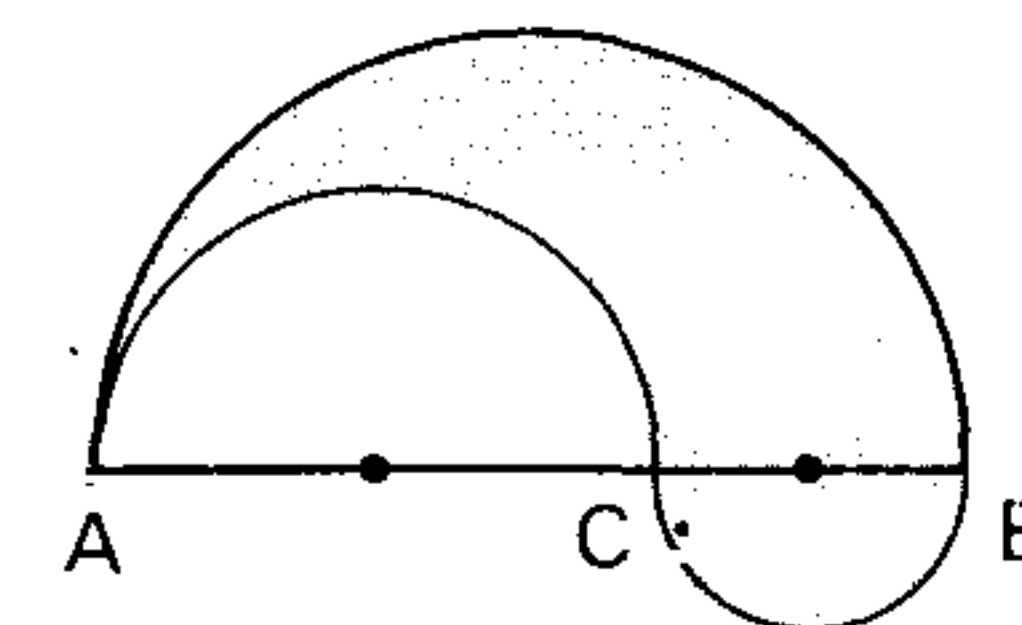
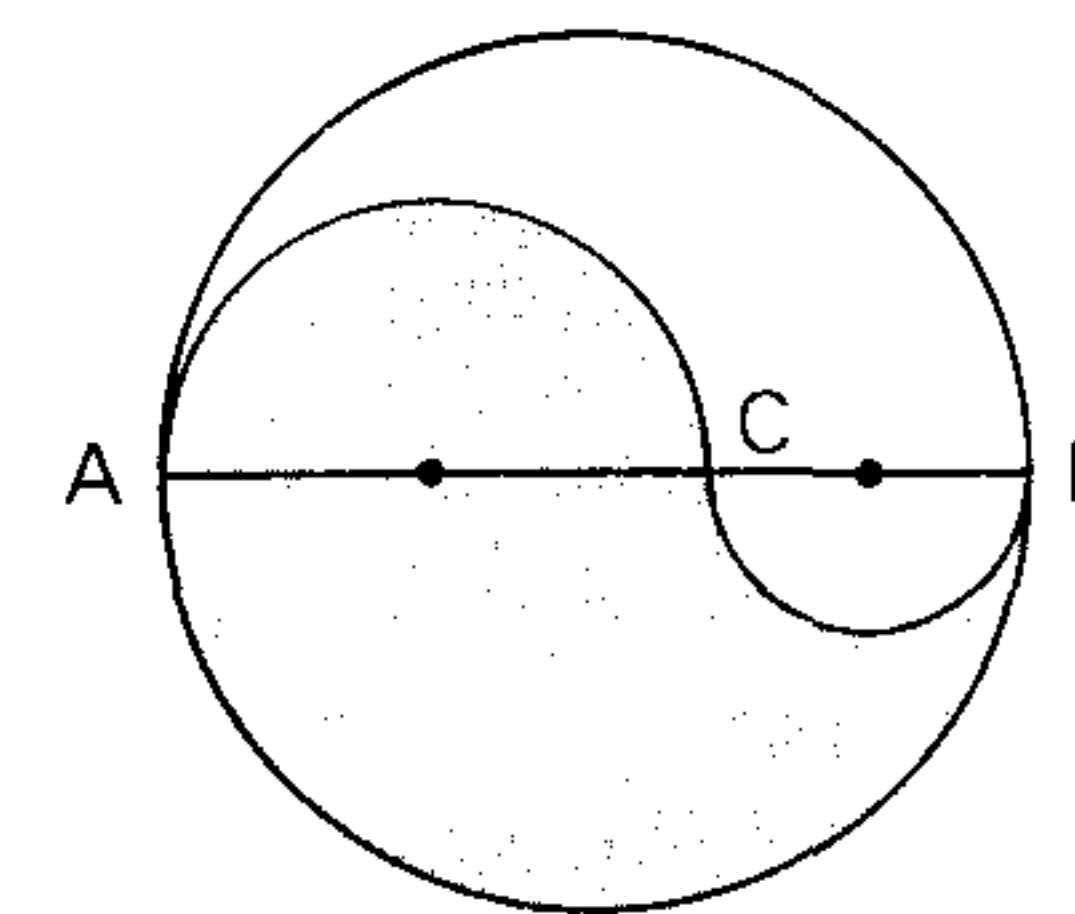
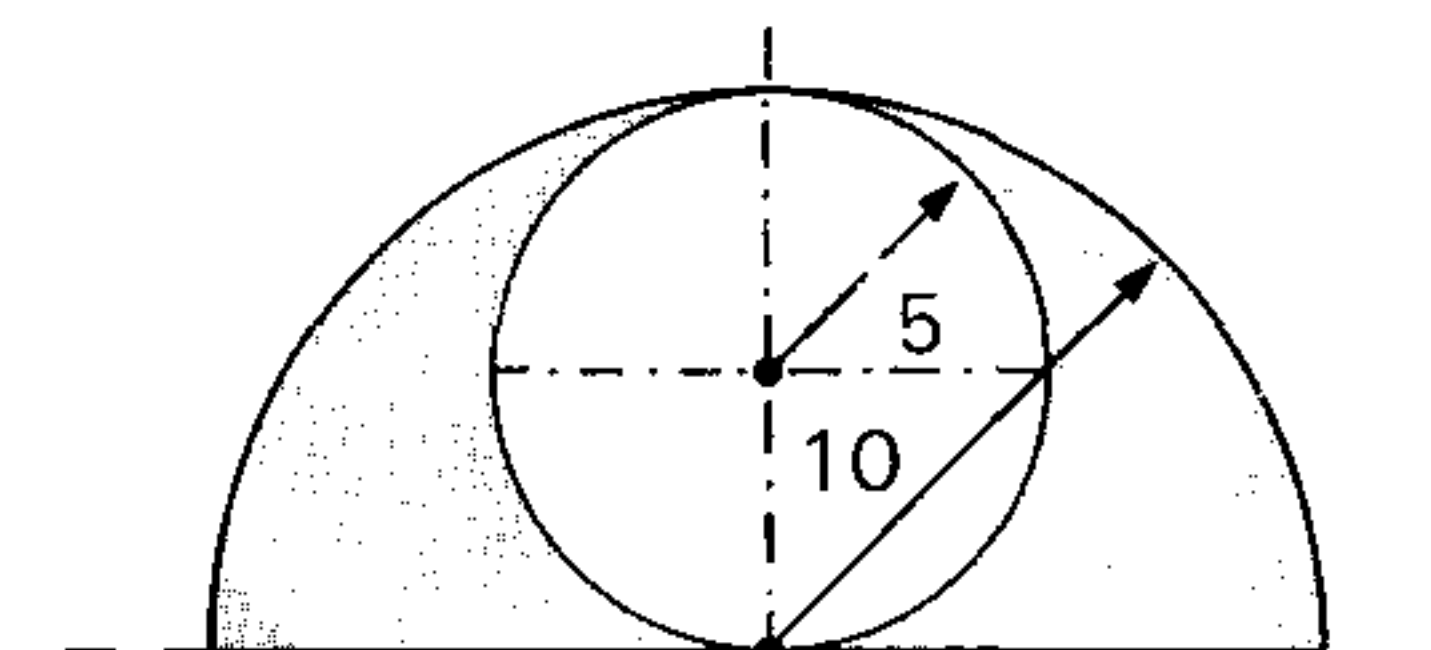
903. Determine a área da região sombreada nos casos:

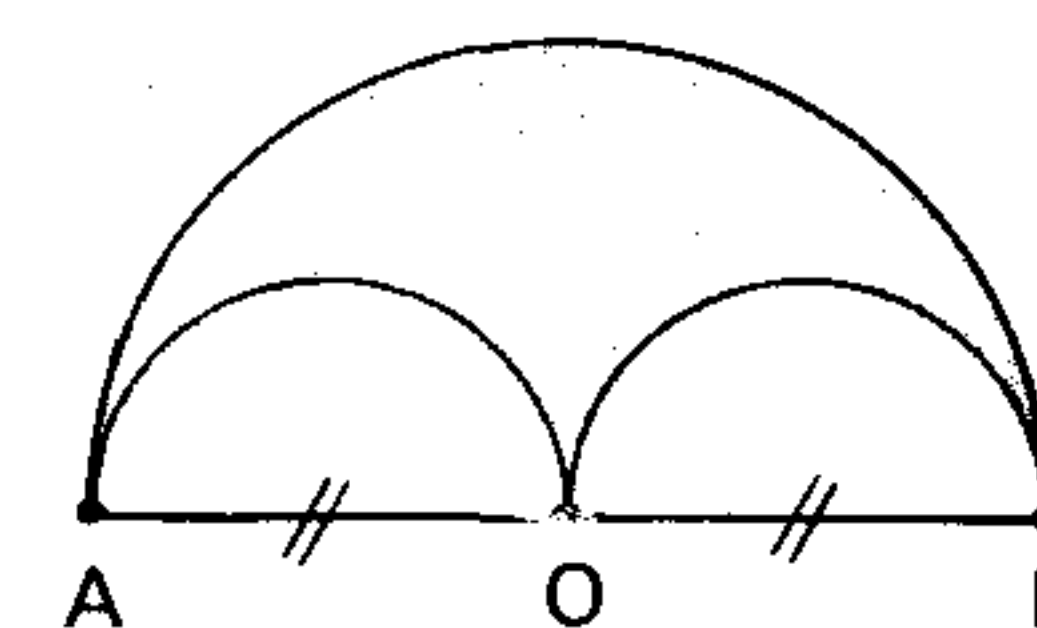
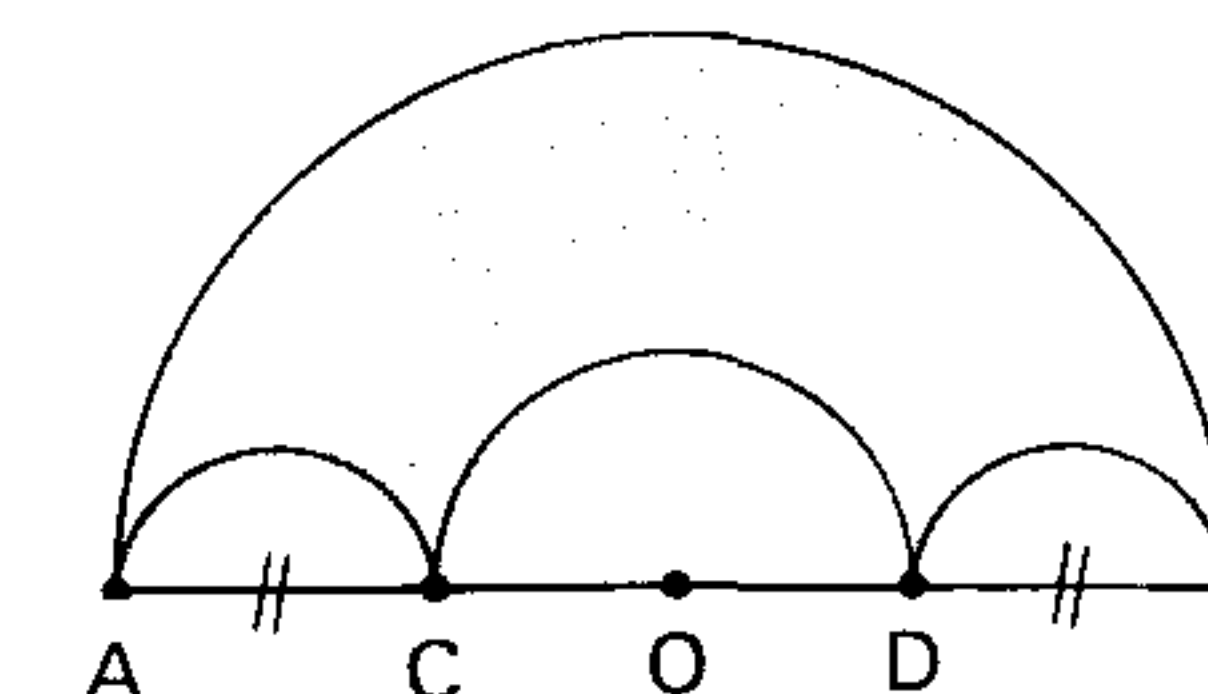
a) quadrado de lado *8 m*

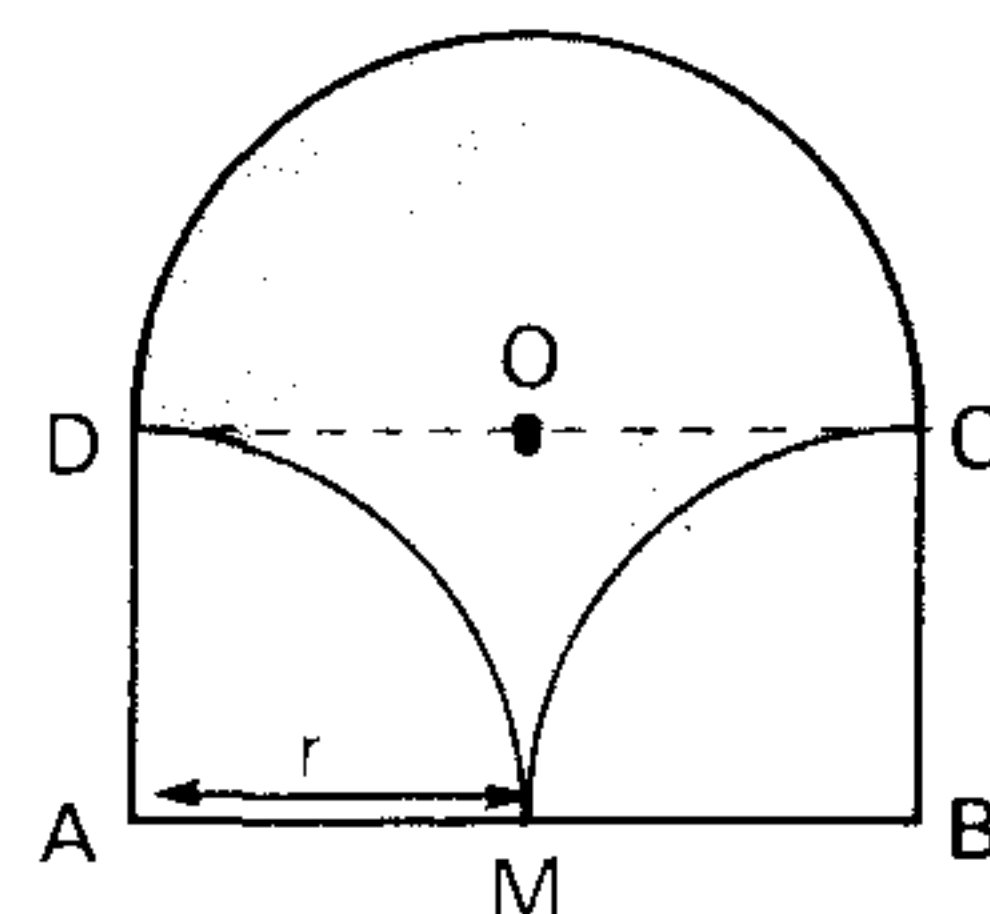
b) hexágono regular de lado *6 m*

c) triângulo equilátero de lado *12 m*

d) quadrado de lado *8 m*

e) hexágono regular de lado *12 m*

f) triângulo equilátero de *6 m* de lado

904. Calcule a área da figura sombreada, sendo $ABCD$ um quadrado.

905. Determine a área da figura sombreada abaixo, em função do raio r do círculo inscrito no triângulo equilátero ABC.

906. Na figura abaixo, o apótema do hexágono regular mede $5\sqrt{3}$ *cm*. Determine a área sombreada.

907. O apótema do triângulo equilátero ABC inscrito no círculo mede $\sqrt{3}$ *cm*. Calcule a área sombreada.

908. Calcule a área da parte sombreada, sabendo que o quadrilátero dado é um quadrado.

a) b) c)

909. Calcule a área da superfície sombreada.

a) quadrado b) retângulo c) quadrado

910. *ABCD*, nas figuras abaixo, é um quadrado de perímetro *16 cm*. Determine as áreas sombreadas.

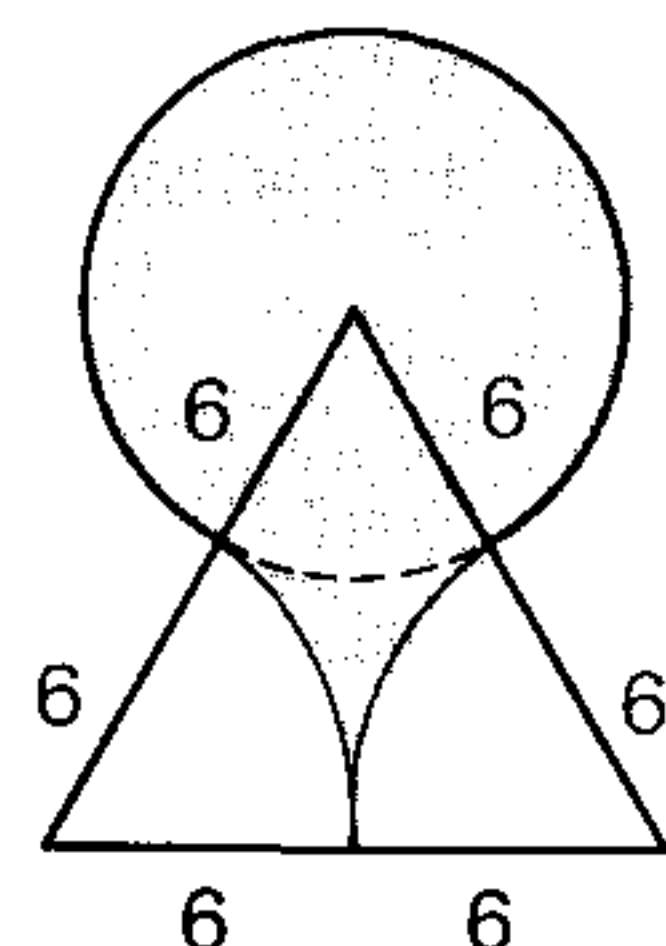
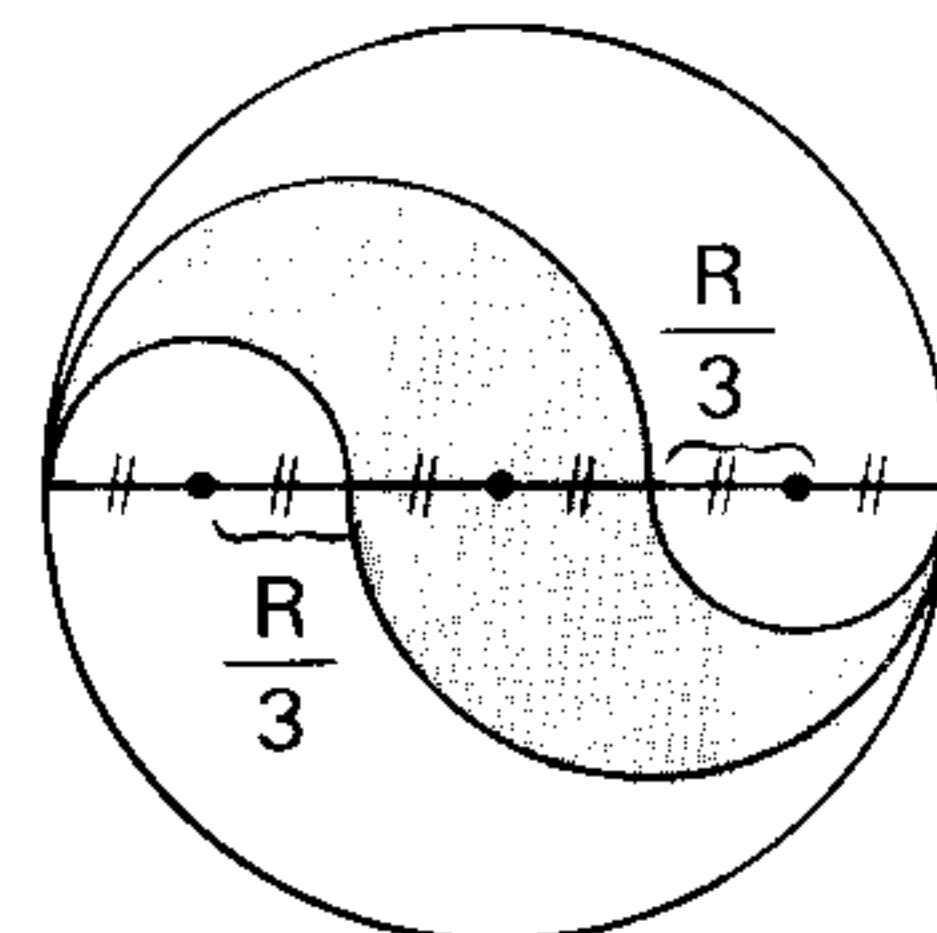
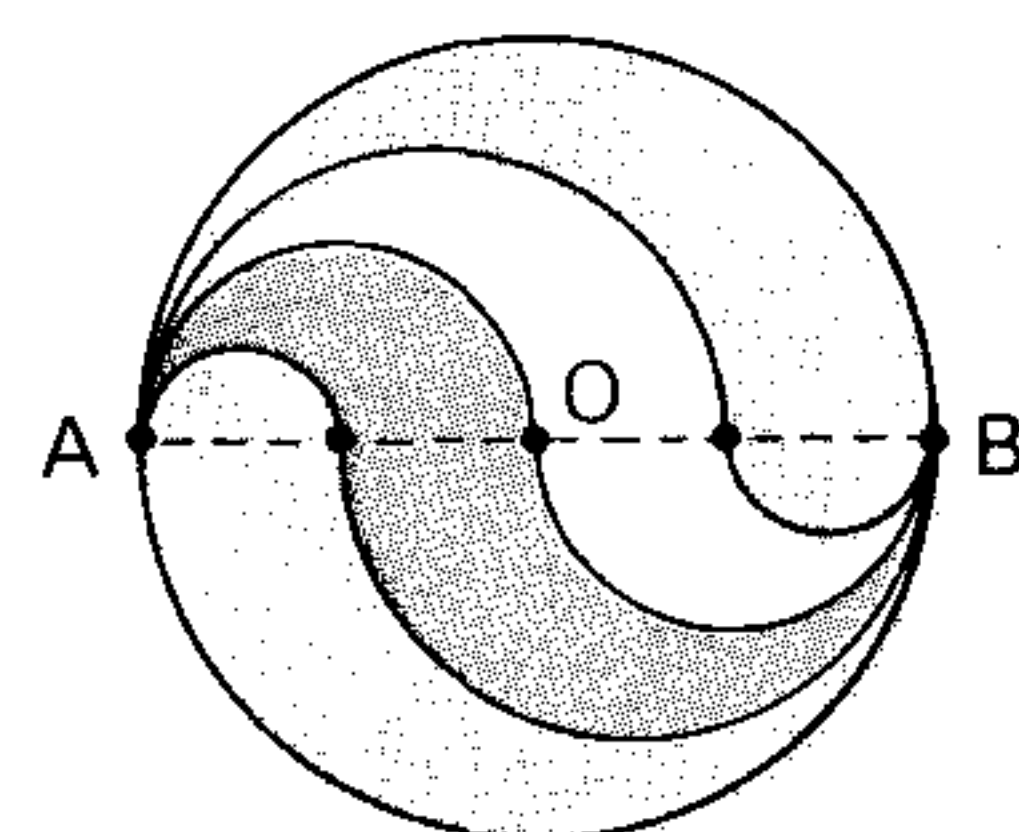
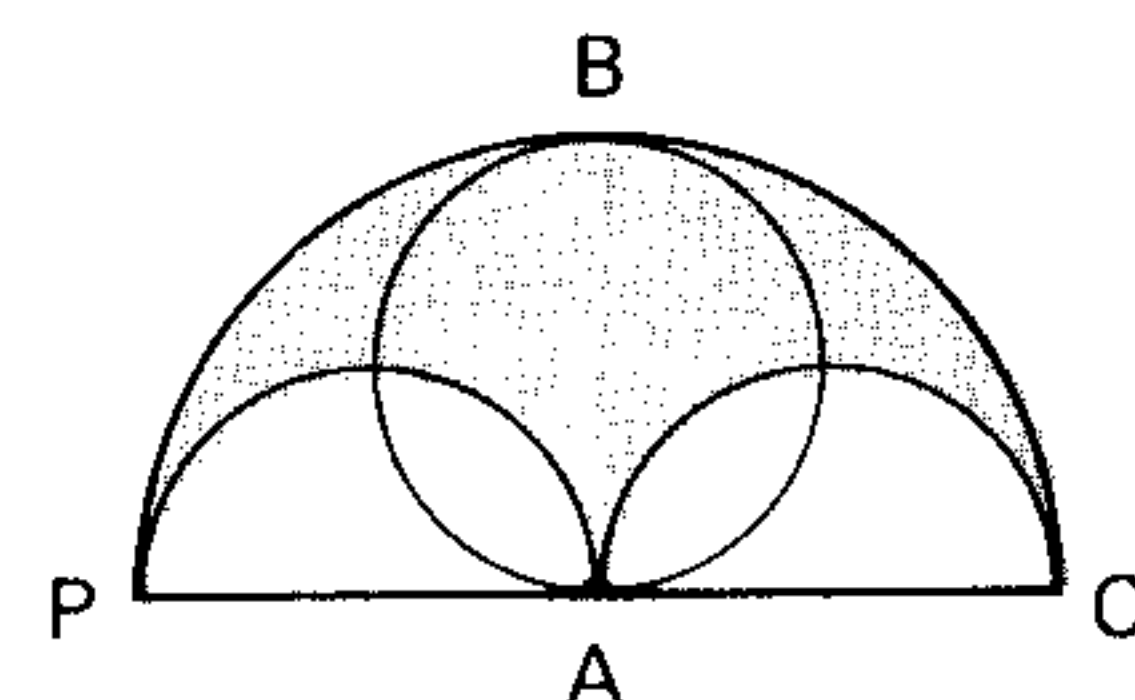
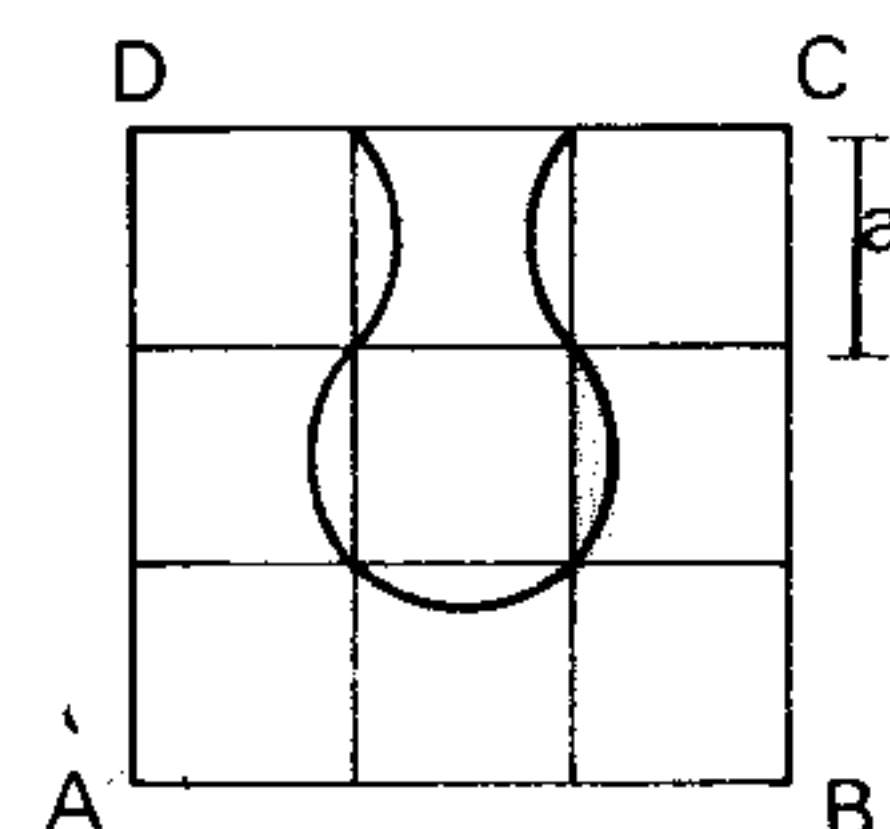
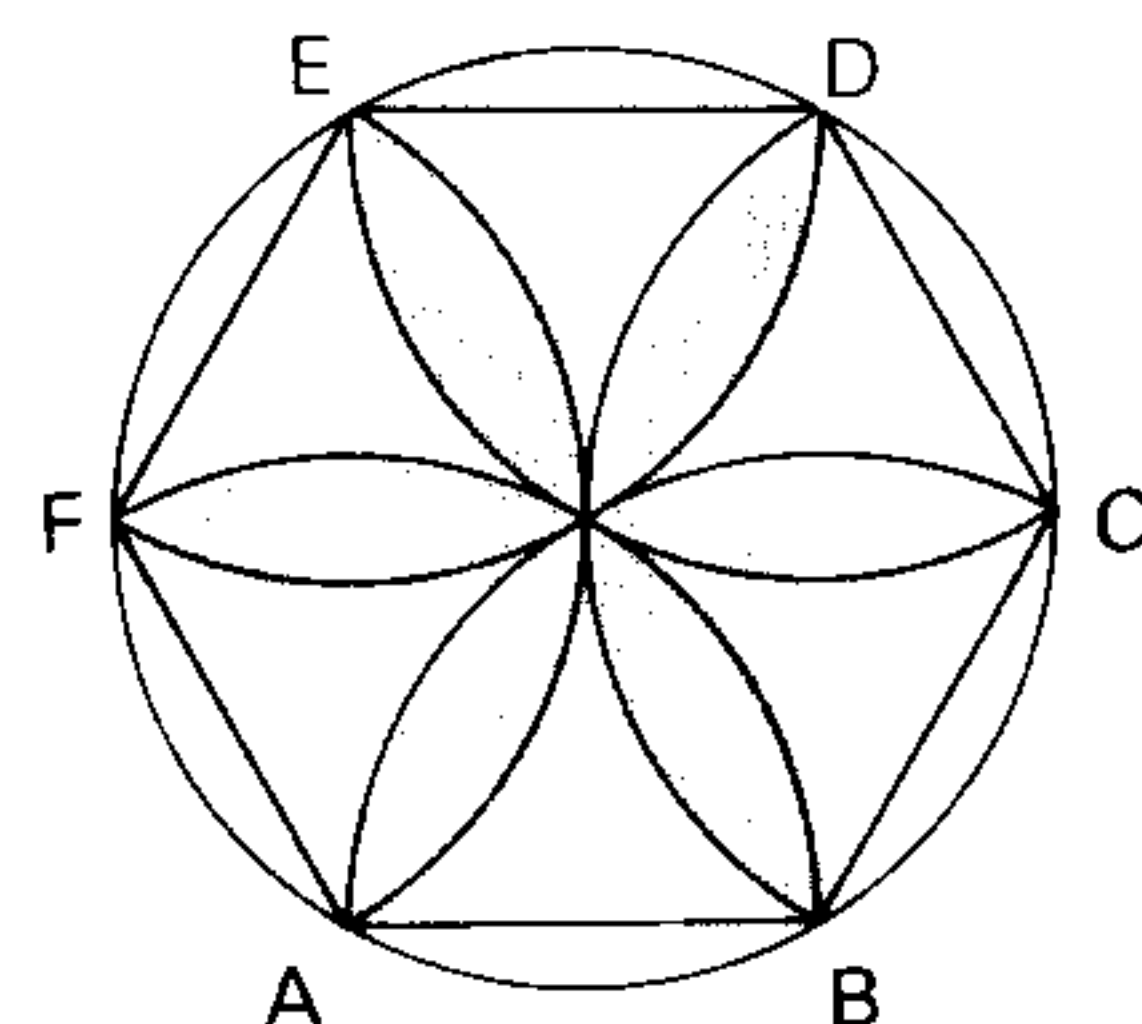
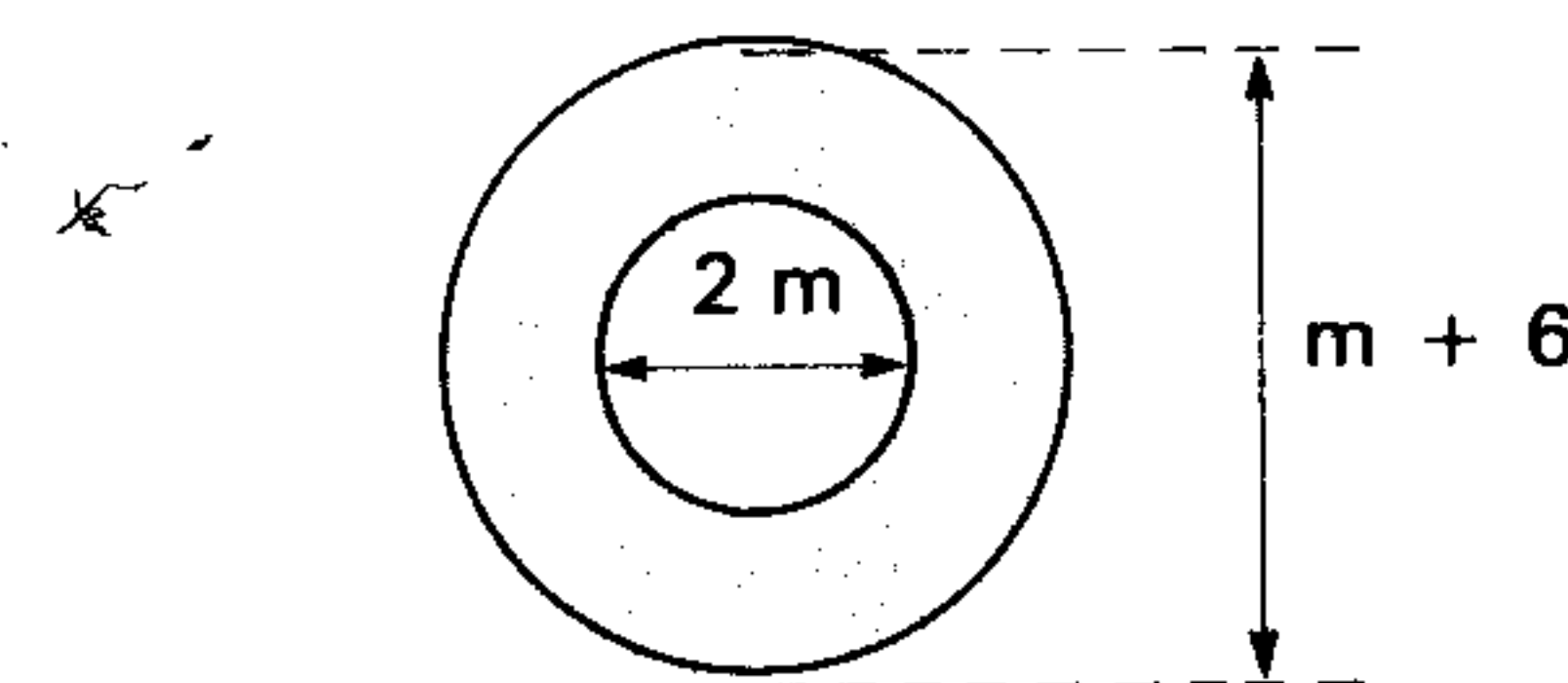
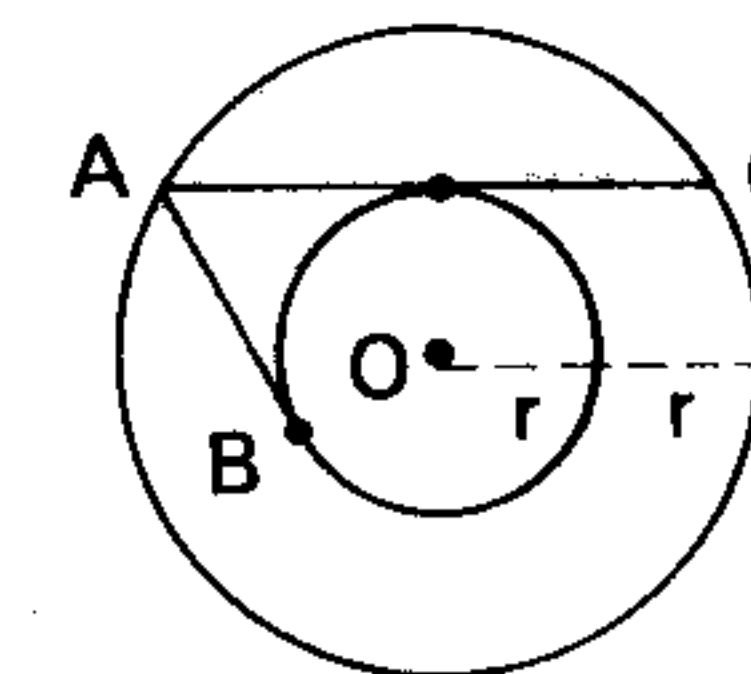
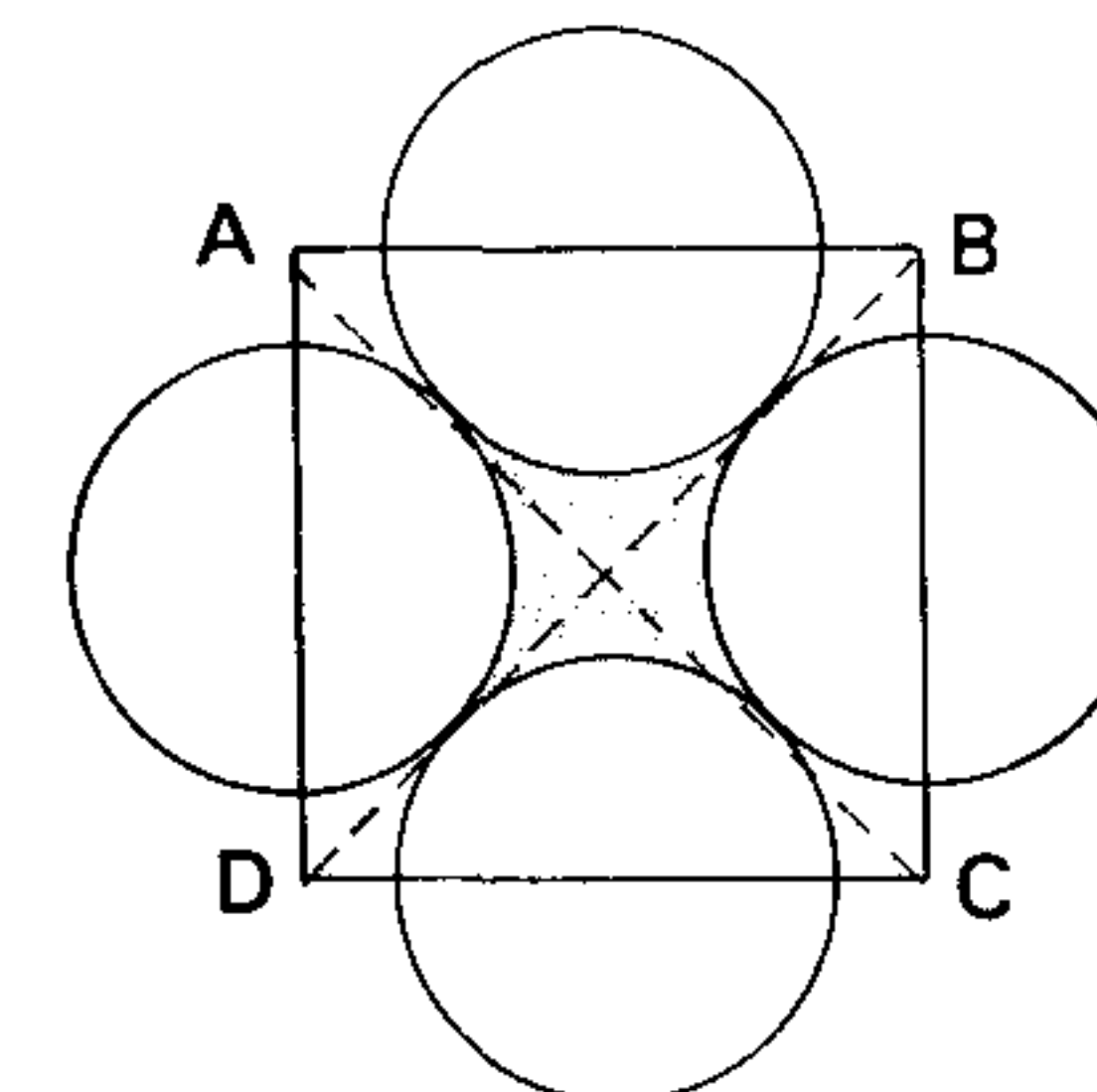
a) b)

911. Determine a área sombreada, nas figuras abaixo, sabendo que os três quadrados *ABCD* têm lado medindo *2 cm*.

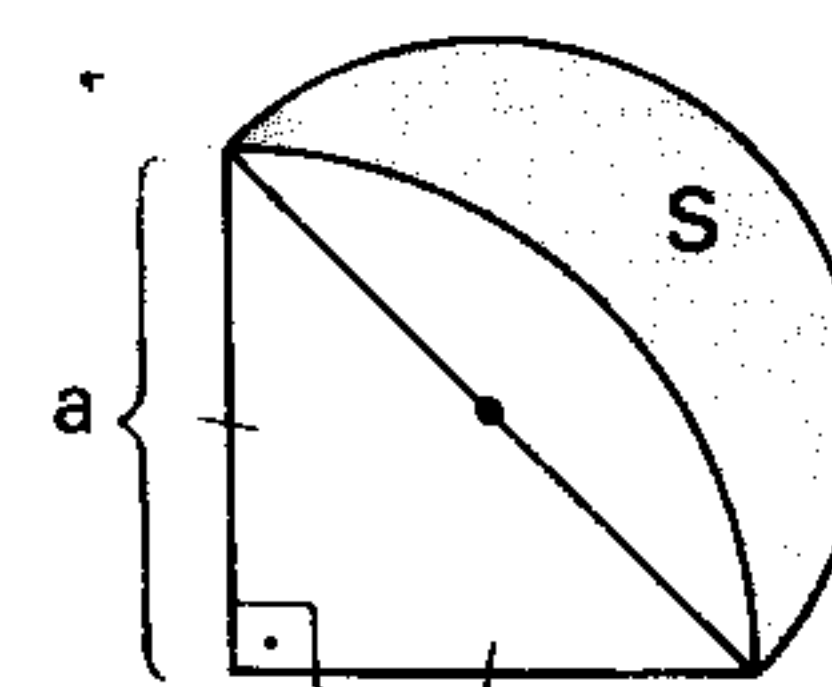
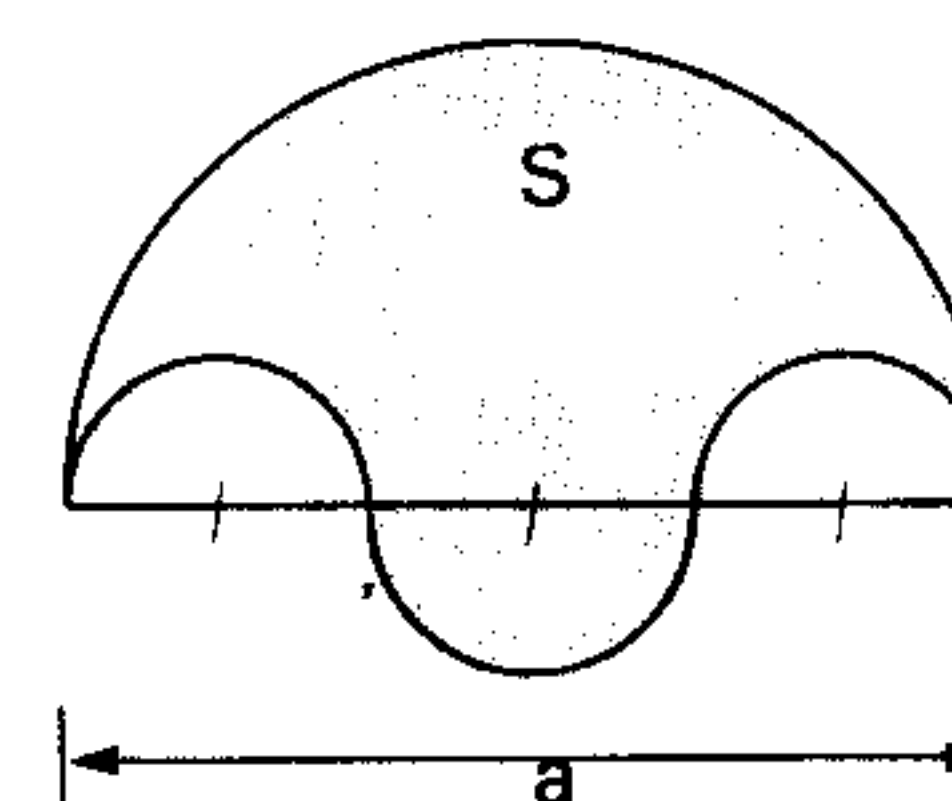
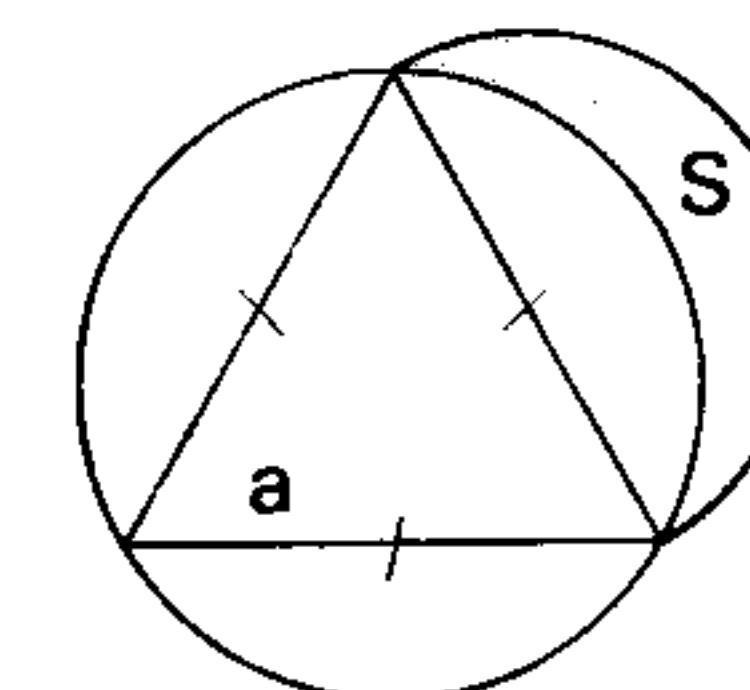
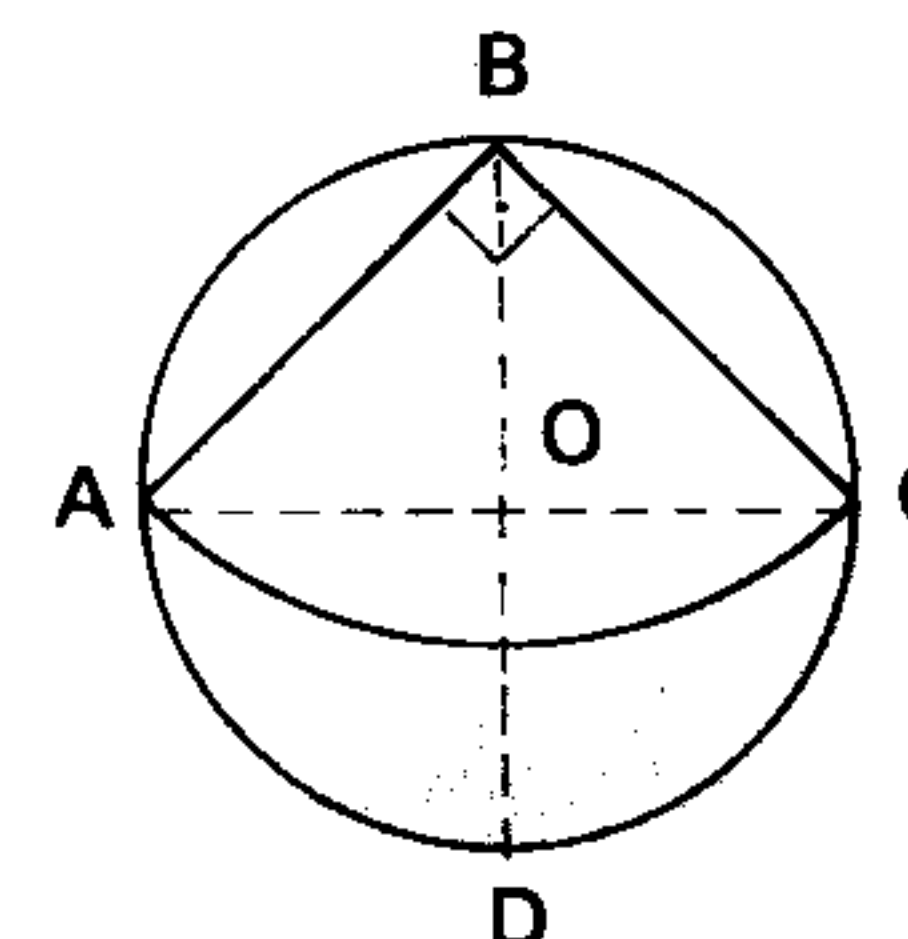
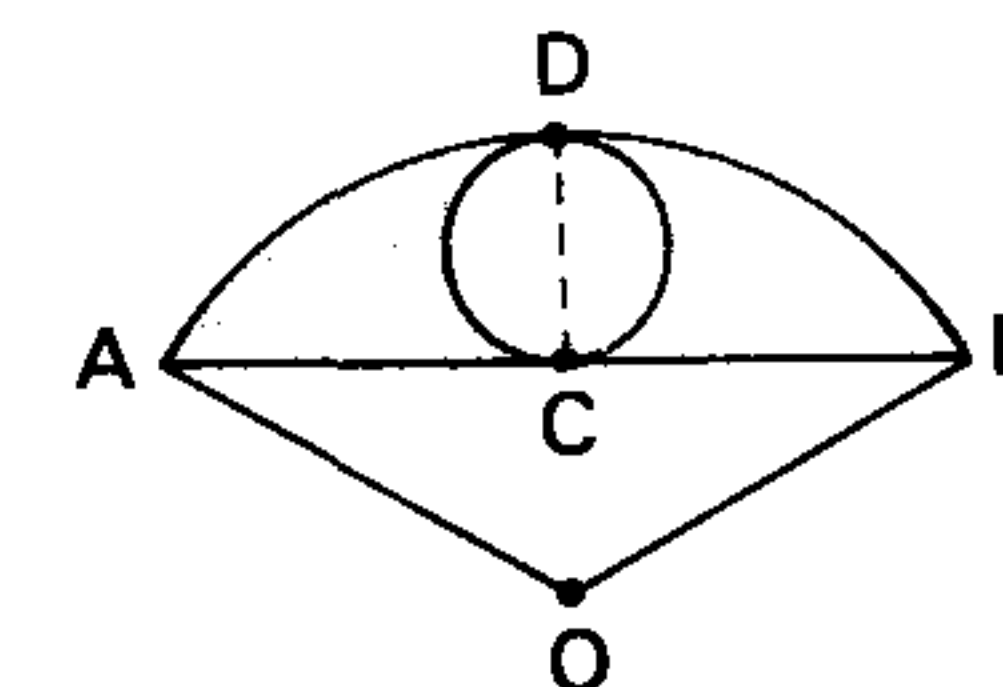
a) b) c)

912. Calcule a área sombreada, em função do lado *a* do quadrado *ABCD*.

913. Determine a área da região sombreada.

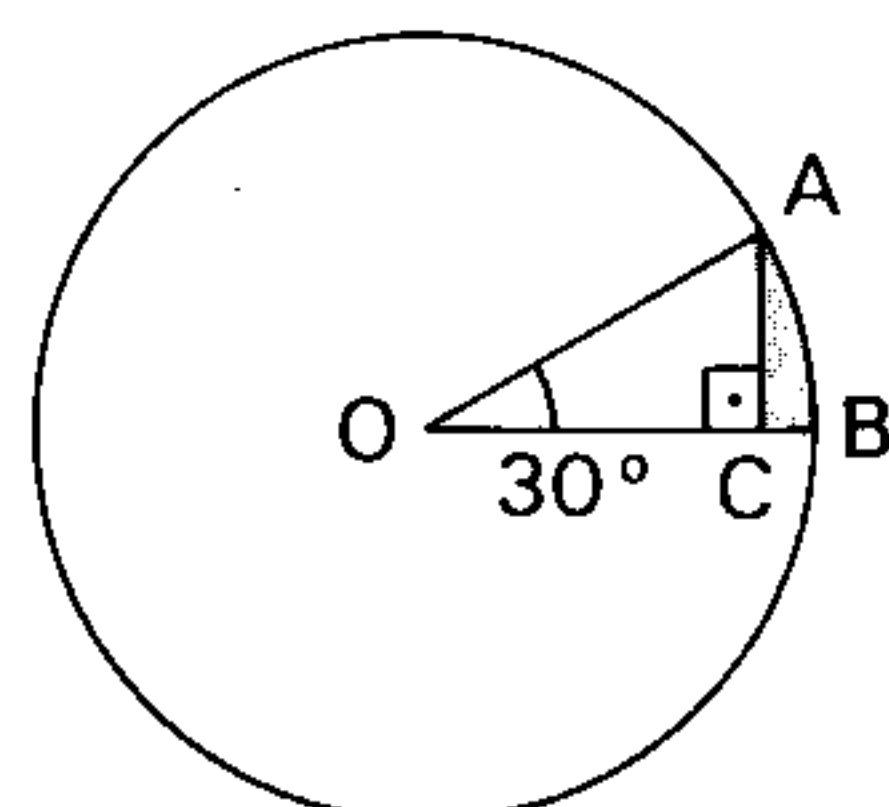
a) ABCD é quadrado b) c)

d) e) ΔABC é equilátero

914. Determine a área sombreada, na figura, sabendo que o lado do losango tem medida igual à sua diagonal menor e que ambos medem *10 cm*. Os arcos descritos têm centros nos vértices do losango e raio igual à metade do lado do losango.

915. Determine a área sombreada, nas figuras abaixo, sendo *AC* o triplo de *CB* e *AB* igual a *32 cm*.

a) b)

916. Calcule a área da parte sombreada.

917. Nas figuras abaixo, determine a área hachurada, sendo *AB* igual a *20 cm*.

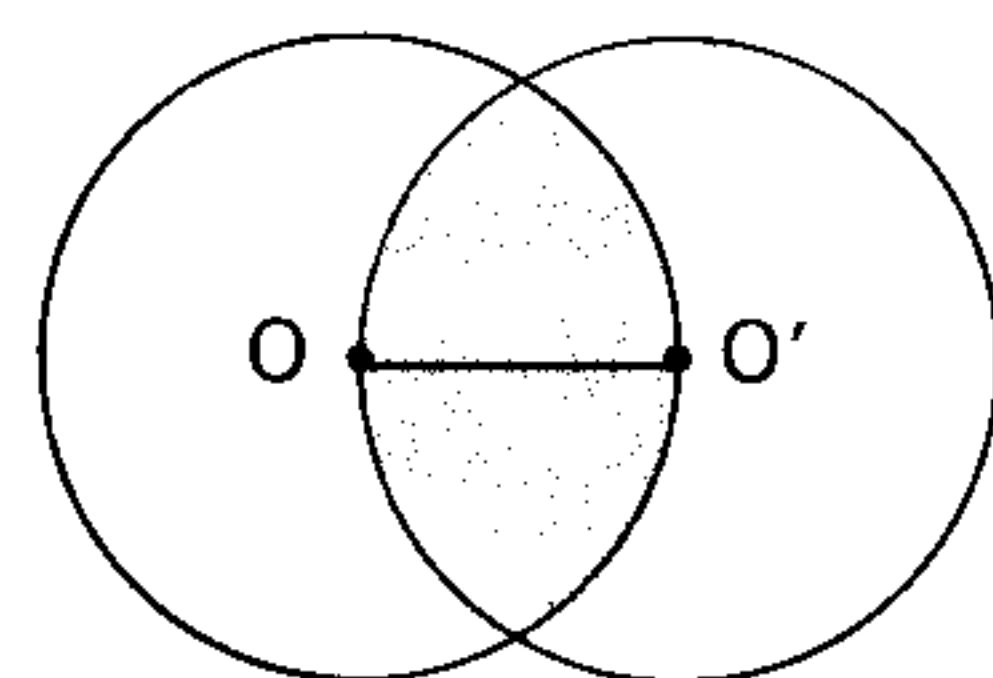
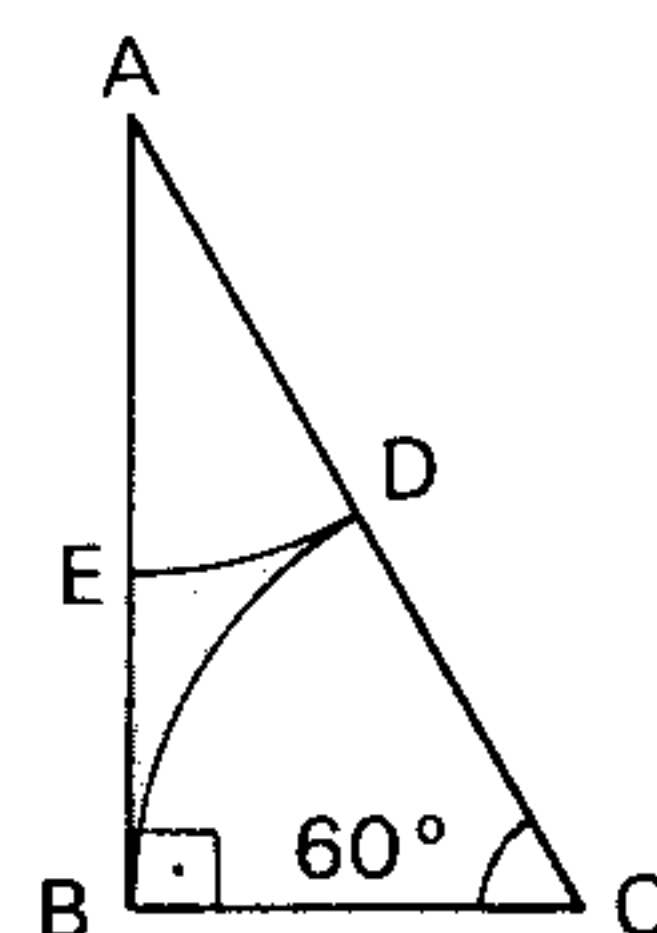
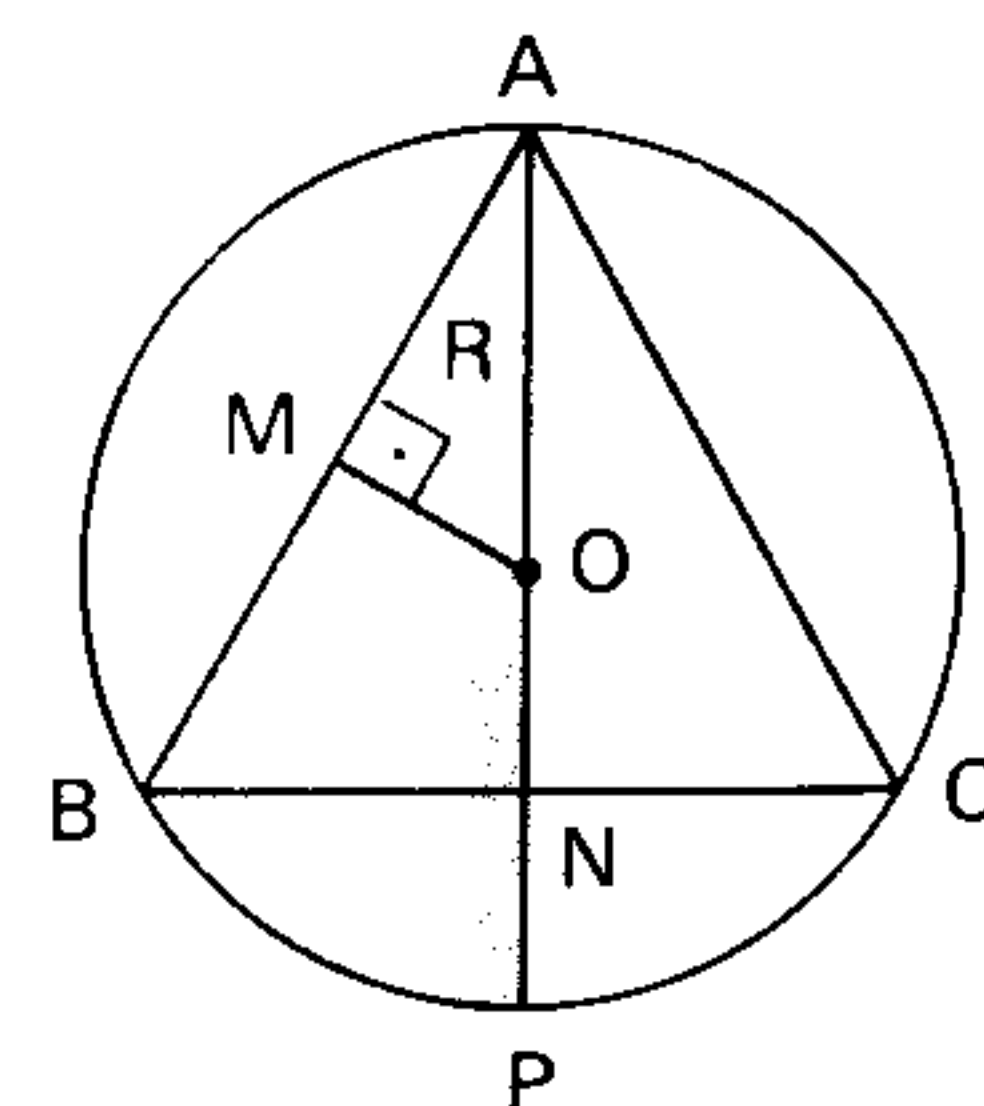
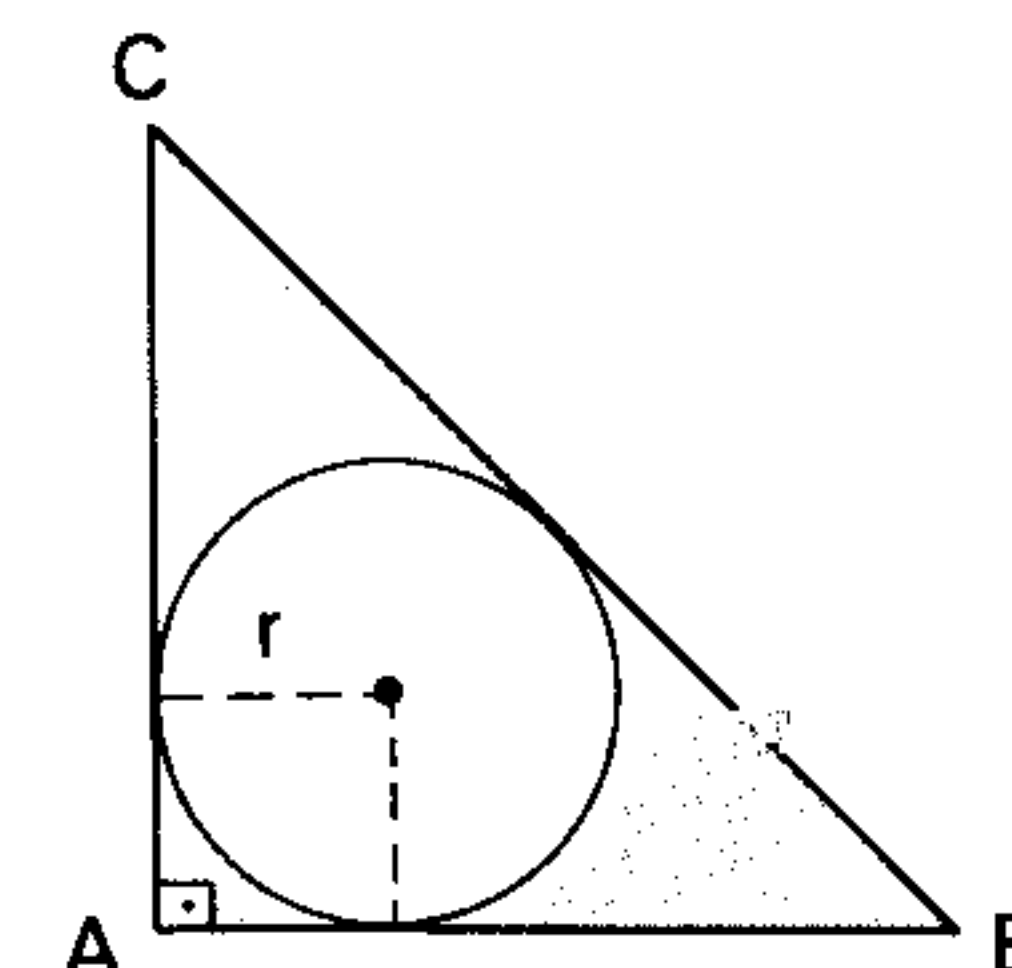
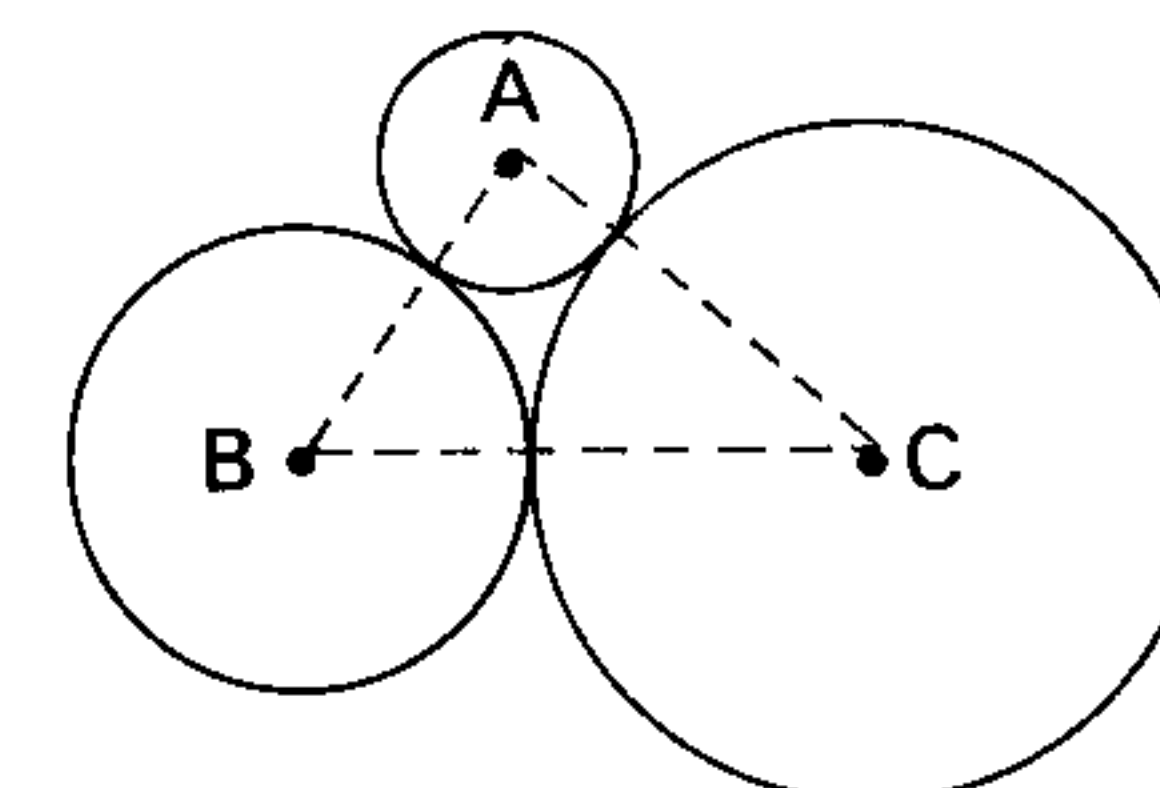
a) b)

$\overline{AO} \equiv \overline{OB}$

$\overline{AC} \equiv \overline{CO} \equiv \overline{OD} \equiv \overline{DB}$

918. Na figura ao lado, $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ têm mesma medida. Determine a área sombreada, sabendo que o perímetro do retângulo $ABCD$ mede *42 cm*.

919. Calcule a área da figura sombreada.

a)

b)

920. Determine a área da figura sombreada, abaixo, sabendo que $\overline{AB}$ foi dividido em quatro segmentos congruentes, de medidas iguais a r.

921. Na figura, o segmento $\overline{AP}$ é congruente ao segmento $\overline{AC}$ e a distância AB mede r. Calcule a área sombreada em função de r.

922. Na figura, $ABCD$ é um quadrado. Determine a área sombreada em função de a, sendo a a medida de um segmento tomado sobre o lado do quadrado, a $\frac{1}{3}$ do vértice C.

923. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular inscrito num círculo cujo raio mede *1 cm*. Calcule a área sombreada.

924. Determine a área da figura sombreada, em função de m.

925. Na figura abaixo, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são tangentes à circunferência menor. Calcule a área sombreada em função de r.

926. Determine a área sombreada ao lado, sabendo que os raios dos círculos são iguais e $ABCD$ é um quadrado de perímetro *16 cm*.

927. Calcule a área da superfície sombreada.

a)

b)

c)

928. Na figura abaixo, determine a área da parte sombreada em função do raio r do círculo, sendo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ os lados de um quadrado inscrito nesse círculo.

929. Na figura abaixo, C é o ponto médio de $\overline{AB}$, que mede *8 cm*. Determine a área sombreada, sabendo que o ângulo BOA mede *120°*.

930. Em um círculo de *20 m* de diâmetro, traça-se um ângulo central $A\hat{O}B$ de $30°$. Sendo $\overline{AC}$ a perpendicular baixada do ponto A sobre o raio $\overline{OB}$, calcule a área da parte sombreada.

931. Calcule a área da parte sombreada.

932. Determine a área sombreada, sabendo que o raio comum OO' dos círculos mede *26 cm*.

933. Determine a área sombreada na figura abaixo, sabendo que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede *10 cm*.

934. Determine a área e o perímetro da figura BED, inscrita no triângulo retângulo ABC, sabendo que AC mede *10 cm*, o ângulo $\hat{C}$ mede $45°$ e que os arcos $\widehat{BD}$ e $\widehat{ED}$ têm seus centros, respectivamente, nos pontos C e A.

935. Determine a área sombreada abaixo, sendo ABC um triângulo equilátero e R o raio do círculo circunscrito a esse triângulo.

936. Determine a área sombreada, na figura abaixo, em função do raio r do círculo inscrito no triângulo retângulo isósceles ABC.

937. Os pontos A, B e C são centros dos três círculos tangentes exteriormente, como na figura abaixo. Sendo as distâncias $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ respectivamente iguais a *10 cm*, *14 cm* e *18 cm*, determine as áreas desses três círculos.

938. Determine a razão entre as áreas dos círculos circunscrito e inscrito em um quadrado $ABCD$ de lado a.

939. Unindo-se um ponto P de uma semicircunferência às extremidades do diâmetro, obtemos um triângulo retângulo de catetos iguais a *9cm* e *12cm*, respectivamente. Determine a razão entre a área do círculo e a área do triângulo retângulo.

940. Determine a razão entre as áreas dos círculos inscrito e circunscrito a um hexágono regular.

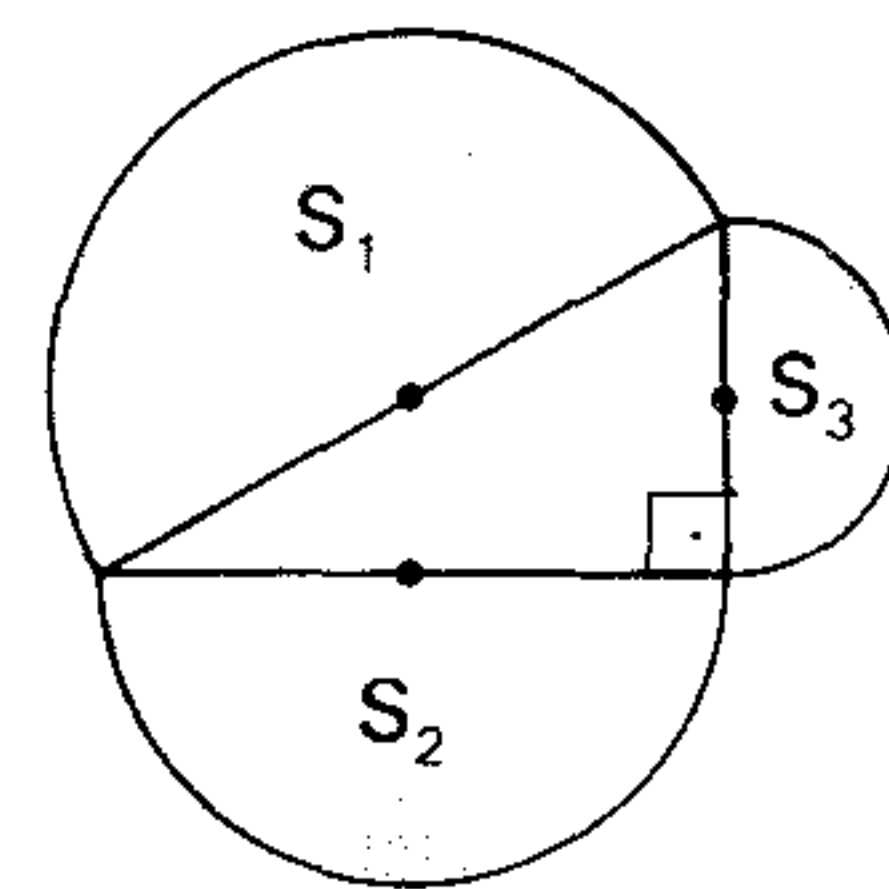
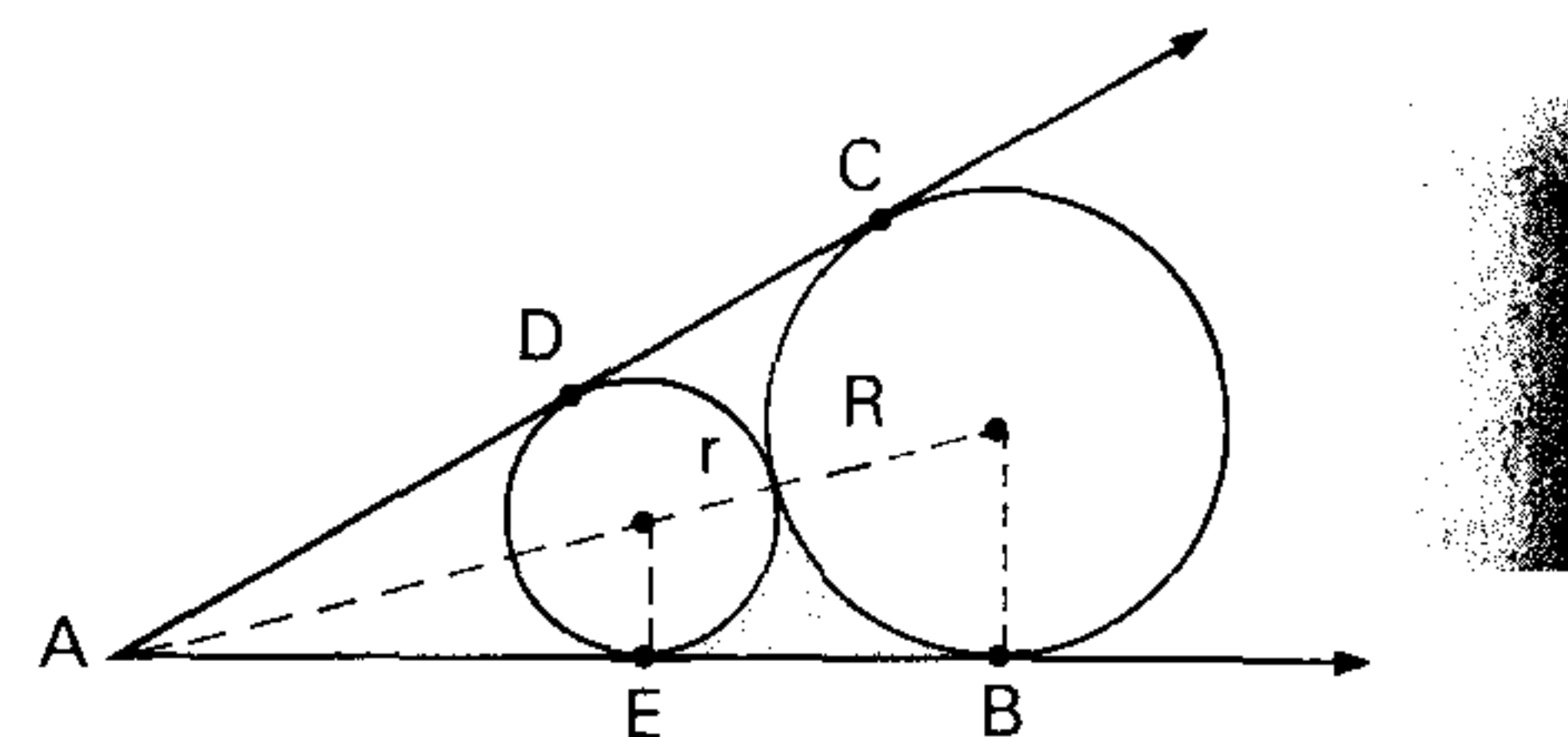
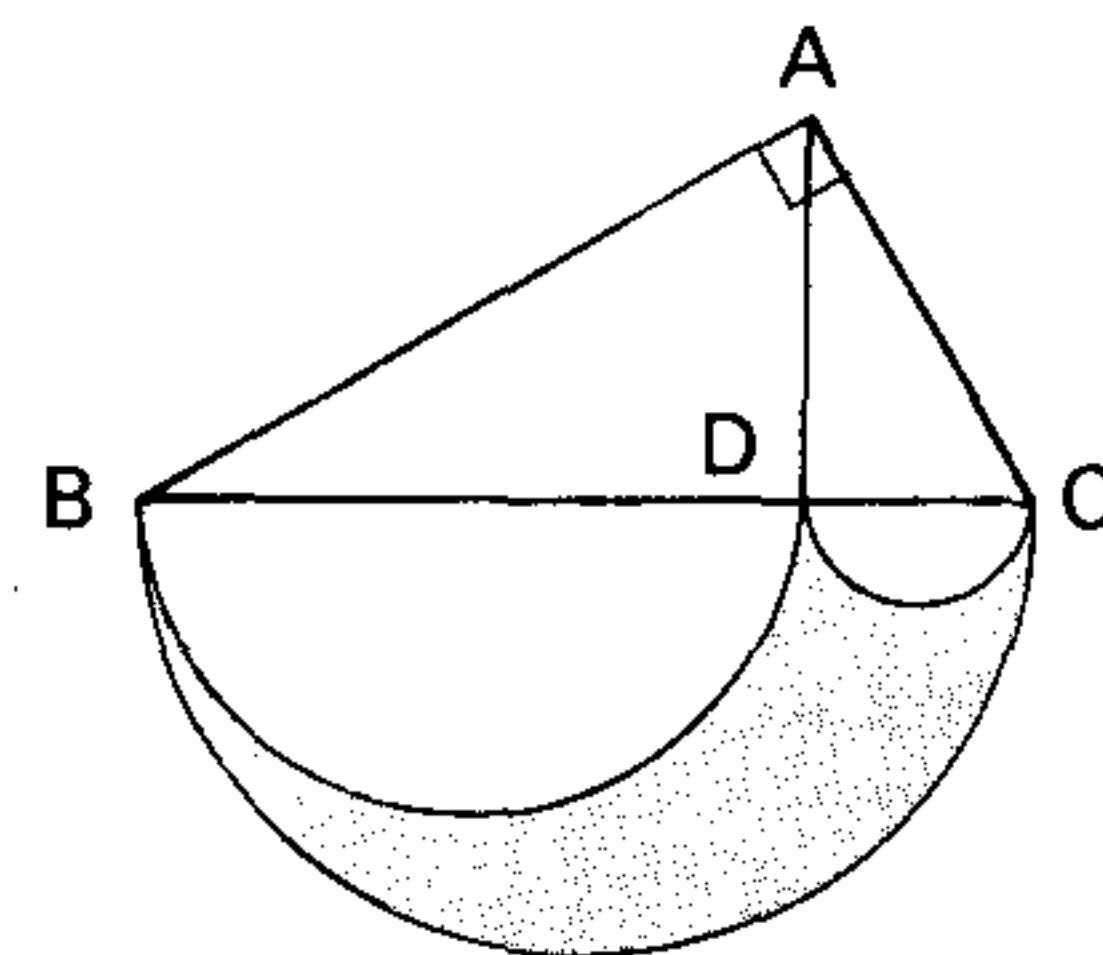
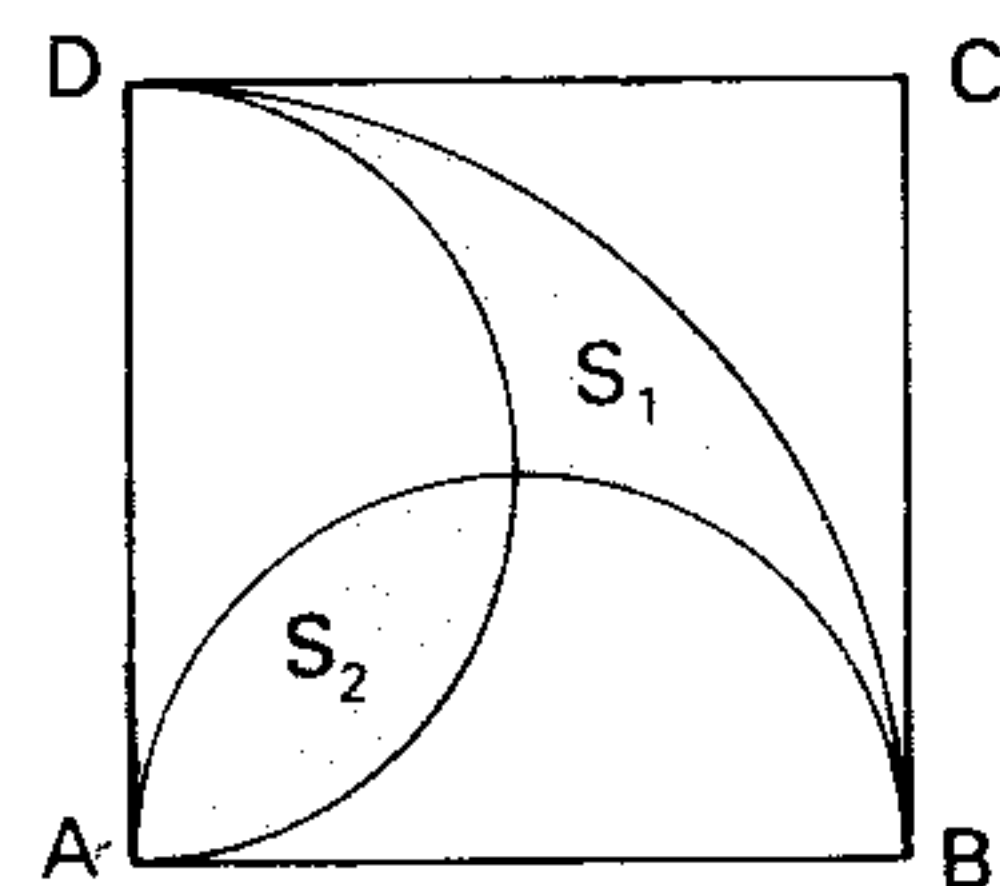
941. Determine a área de um segmento circular de $60°$ de um círculo que contém um setor circular de $6\pi\ cm^2$ de área, sendo $2\pi\ cm$ o comprimento do arco desse setor.

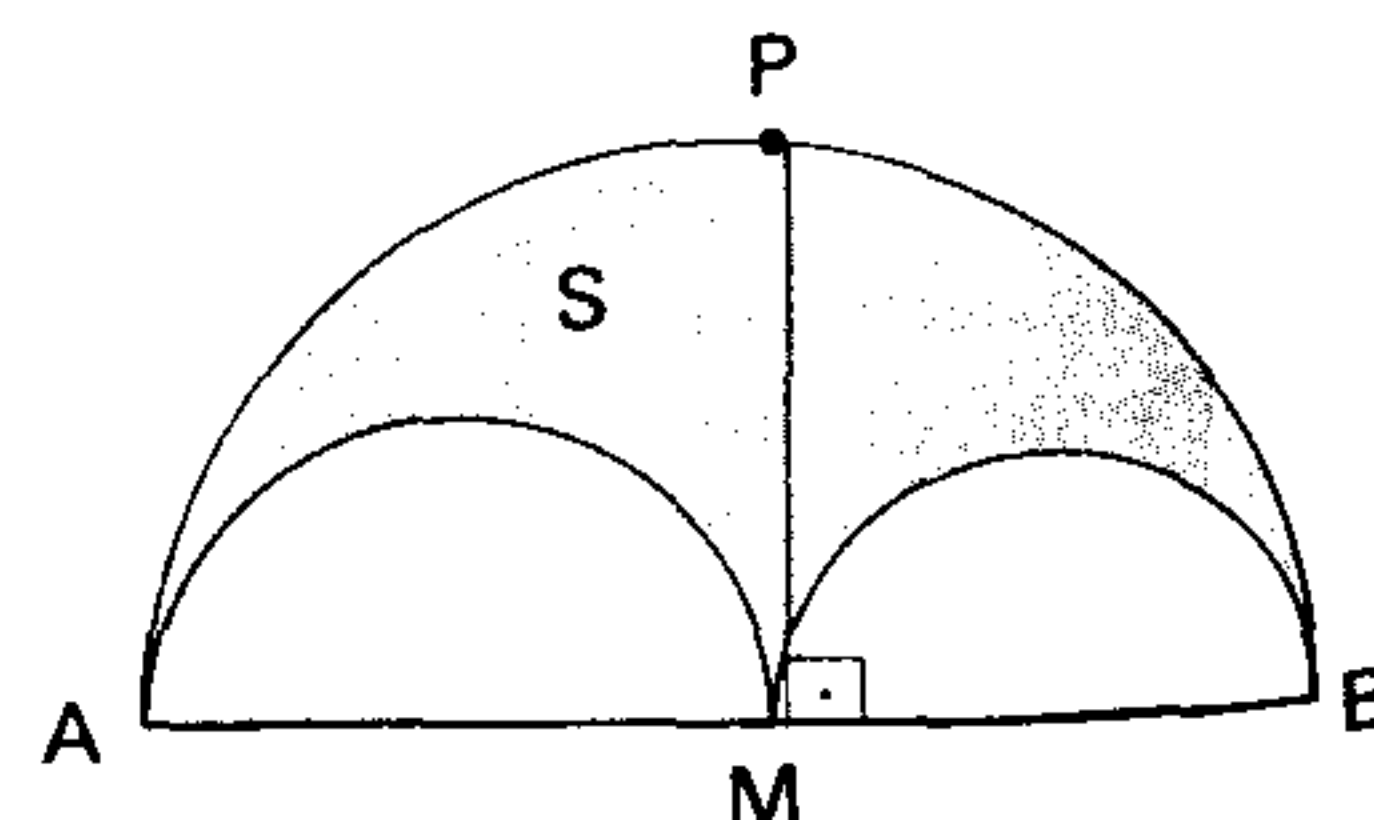
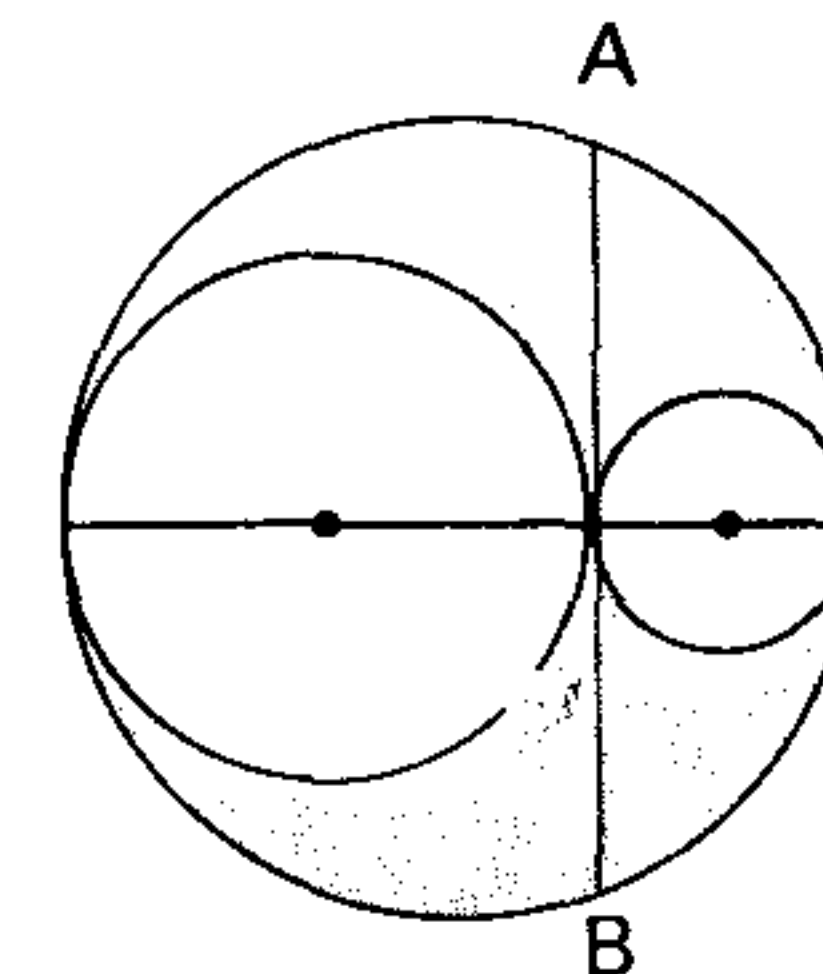
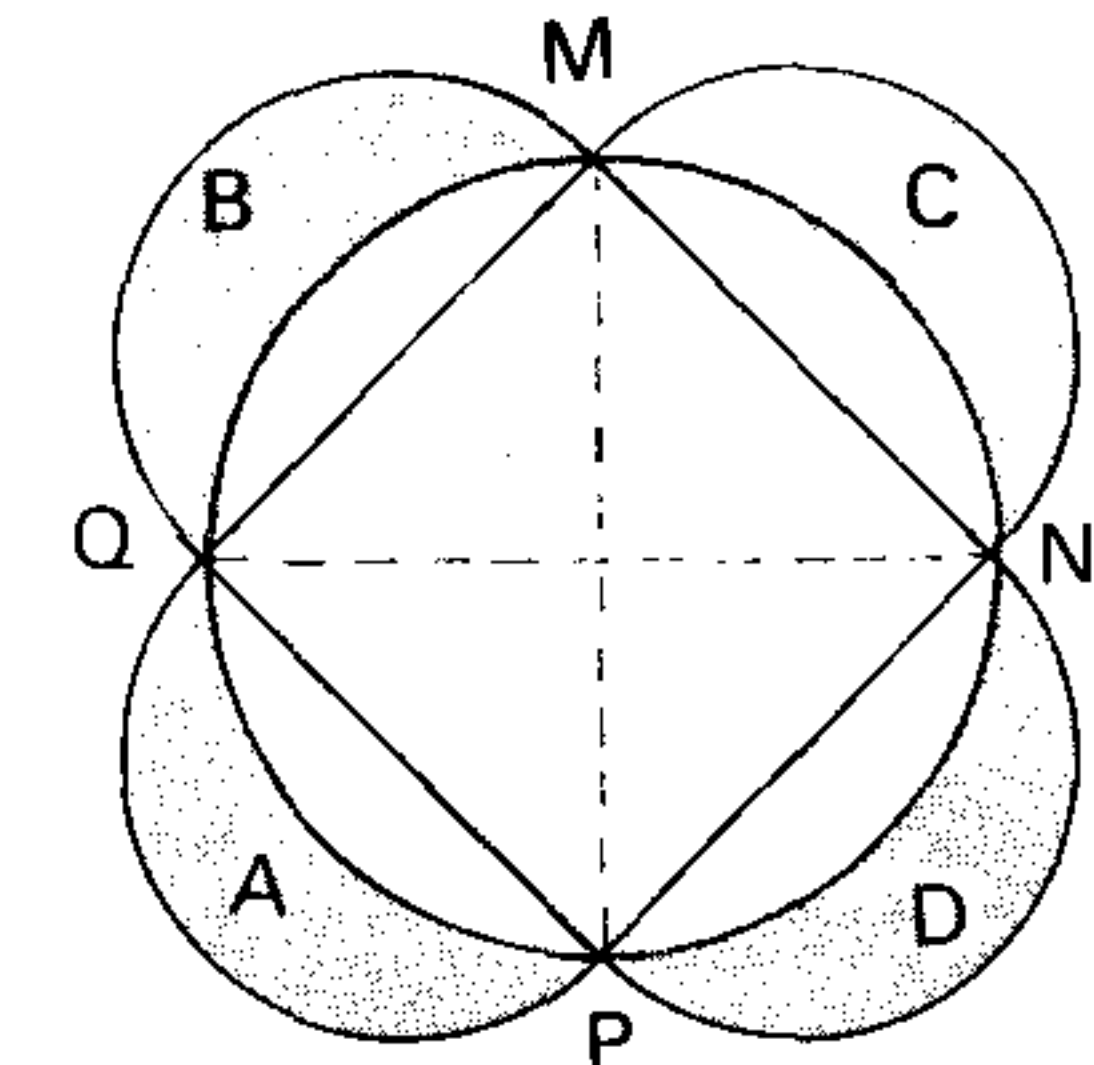
942. Determine a razão entre as áreas dos segmentos circulares em que fica dividido um círculo no qual se traça uma corda igual ao raio do círculo.

943. Duas circunferências iguais de raio r, tangentes entre si, tangenciam internamente uma outra circunferência de raio $3r$. Calcule a menor das duas áreas limitadas por arcos das três circunferências.

944. Calcule a área da superfície limitada por seis círculos de raio unitário com centros nos vértices de um hexágono regular de lado *2*.

945. Num triângulo retângulo, a é a medida da hipotenusa, b e c as dos catetos. Constroem-se os semicírculos de diâmetros b e c externos ao triângulo, e o semicírculo de diâmetro a circunscrito ao triângulo. As regiões dos dois primeiros semicírculos externos à terceira são chamadas "lúnulas de Hipócrates". Mostre que a soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo.

946. Sobre os lados de um triângulo retângulo, tomados como diâmetros, constroem-se semicircunferências externas ao triângulo. Qual a relação entre as áreas dos semicírculos determinados?

947. Na figura ao lado, calcule a área sombreada, sendo os dois círculos tangentes entre si e tangentes às duas semi-retas nos pontos B, C, D, E, dado o ângulo $D\hat{A}E = 60°$, e R o raio do círculo maior.

948. Sejam $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ as projeções dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo retângulo BAC. Determine a área sombreada, sabendo que esses catetos medem, respectivamente, *1,5 cm* e *2 cm*.

949. Na figura abaixo, prove que a área S_1 é igual a S_2, sendo ABCD um quadrado.

950. Sejam, um semicírculo C de diâmetro $AB = 2r$, um ponto M pertencente a $\overline{AB}$ e $\overline{MP} \perp \overline{AB}$.

Construamos os semicírculos de diâmetros $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$. Os três semicírculos limitam uma superfície S (região sombreada). Mostre que a área de S é igual à área do círculo de diâmetro MP.

951. Calcule a área da parte sombreada, sendo $AB = t$ e r o raio do círculo maior.

952. Sejam A, B, C e D as áreas sombreadas da figura. Prove que $S = A + B + C + D$, onde S é a área do quadrado $MNPQ$.

953. Qual a razão entre o raio de um círculo circunscrito e o raio de um círculo inscrito em um triângulo ABC de lados a, b, c e perímetro $2p$?

954. Determine o raio do círculo circunscrito e os lados congruentes de um triângulo isósceles ABC, cuja base BC mede *18 cm*, sendo *6 cm* a medida do raio do círculo inscrito nesse triângulo.

955. Dado um triângulo equilátero e sabendo que existe outro triângulo inscrito com os lados respectivamente perpendiculares aos do primeiro, calcule a relação entre as áreas dos dois triângulos.

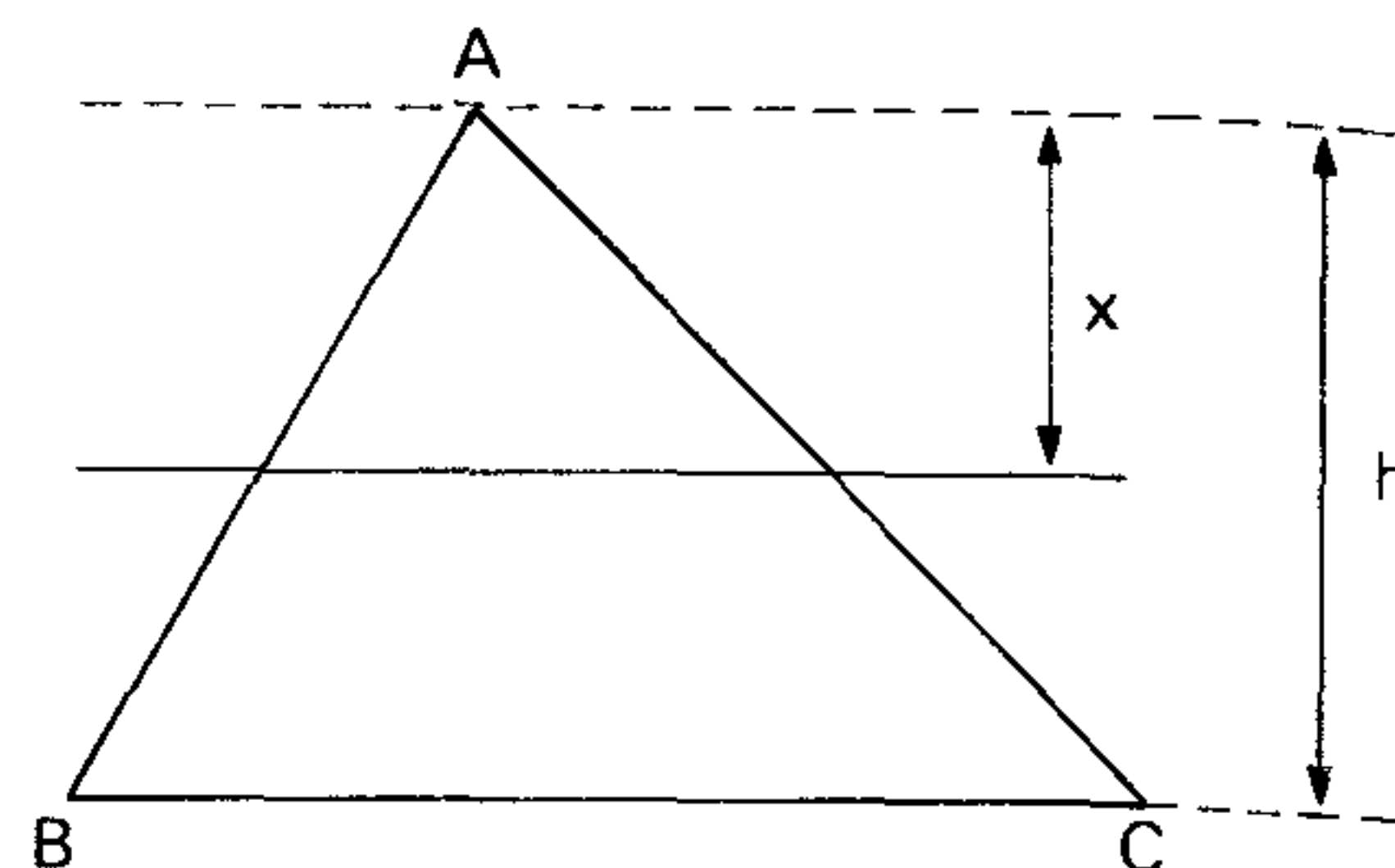
956. O produto da medida de cada lado do triângulo pela medida da altura do vértice oposto é constante. Demonstre.

957. Calcule a área de um retângulo, sabendo que cada diagonal mede *10 cm* e forma um ângulo de *60°*.

958. Determine a área de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $\frac{r}{2}$.

959. Um losango e um quadrado têm o mesmo perímetro. Determine a razão da área do losango para a área do quadrado, sabendo que o ângulo agudo formado por dois lados do losango mede *60°*.

960. Paulo e Carlos possuem tabletes de chocolate de forma, respectivamente, quadrada e retangular. O tablete de Paulo tem *12 cm* de perímetro e o tablete de Carlos tem a base igual ao triplo da altura e perímetro igual a *12 cm*. Sabendo que os tabletes possuem mesma espessura e que Paulo propôs a troca com Carlos, verifique se é vantagem para Carlos aceitar a troca.

961. A que distância do vértice A de um triângulo ABC, de altura, relativa a $\overline{BC}$, igual a h, devemos conduzir uma reta paralela a $\overline{BC}$, para que a área do trapézio obtido seja igual a 3 vezes a área do triângulo obtido?

962. A que distância da base, de um triângulo de altura, relativa a essa base, igual a h, devemos conduzir uma reta paralela a essa base para que o triângulo fique dividido em partes de áreas iguais?

963. As bases de um trapézio medem $8\ m$ e $18\ m$ e a sua altura $15\ m$. A que distância da base maior devemos conduzir uma reta paralela às bases para que os dois trapézios obtidos sejam semelhantes?

964. Os lados de dois heptágonos regulares medem $8\ m$ e $15\ m$. Quanto deve medir o lado de um terceiro heptágono, também regular, para que sua área seja igual à soma das áreas dos dois primeiros?

965. Os perímetros de dois polígonos semelhantes P_1 e P_2 são de $60\ m$ e $90\ m$, respectivamente. Se a área de P_1 é de $144\ m^2$, determine a área de P_2.

966. Dois lados homólogos de dois pentágonos semelhantes medem $6\ cm$ e $8\ cm$, respectivamente. Determine o lado do terceiro pentágono semelhante aos dois primeiros, sabendo que sua área é igual à soma das áreas dos dois primeiros pentágonos.

967. Determine a área de um quadrado, sabendo que seu lado é segmento áureo do lado do quadrado inscrito, num círculo de raio $10\ cm$.

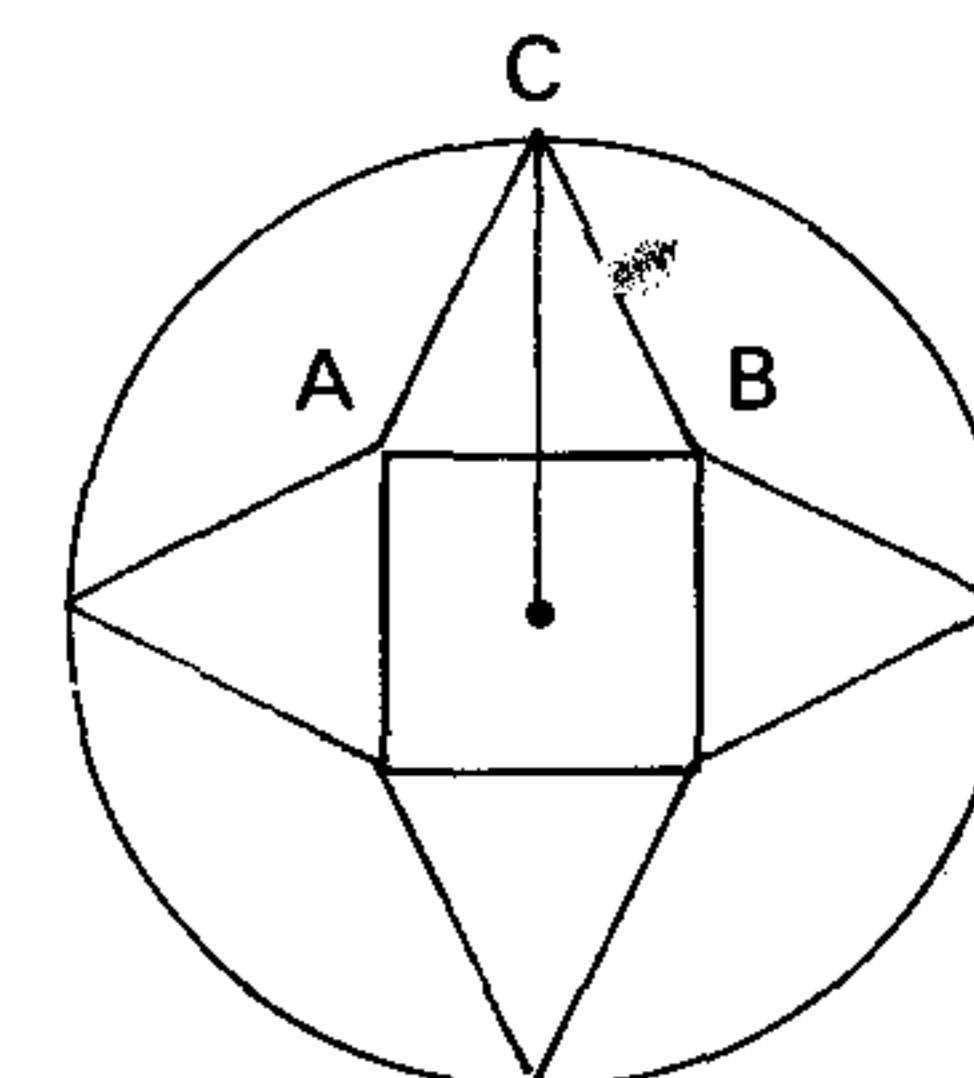
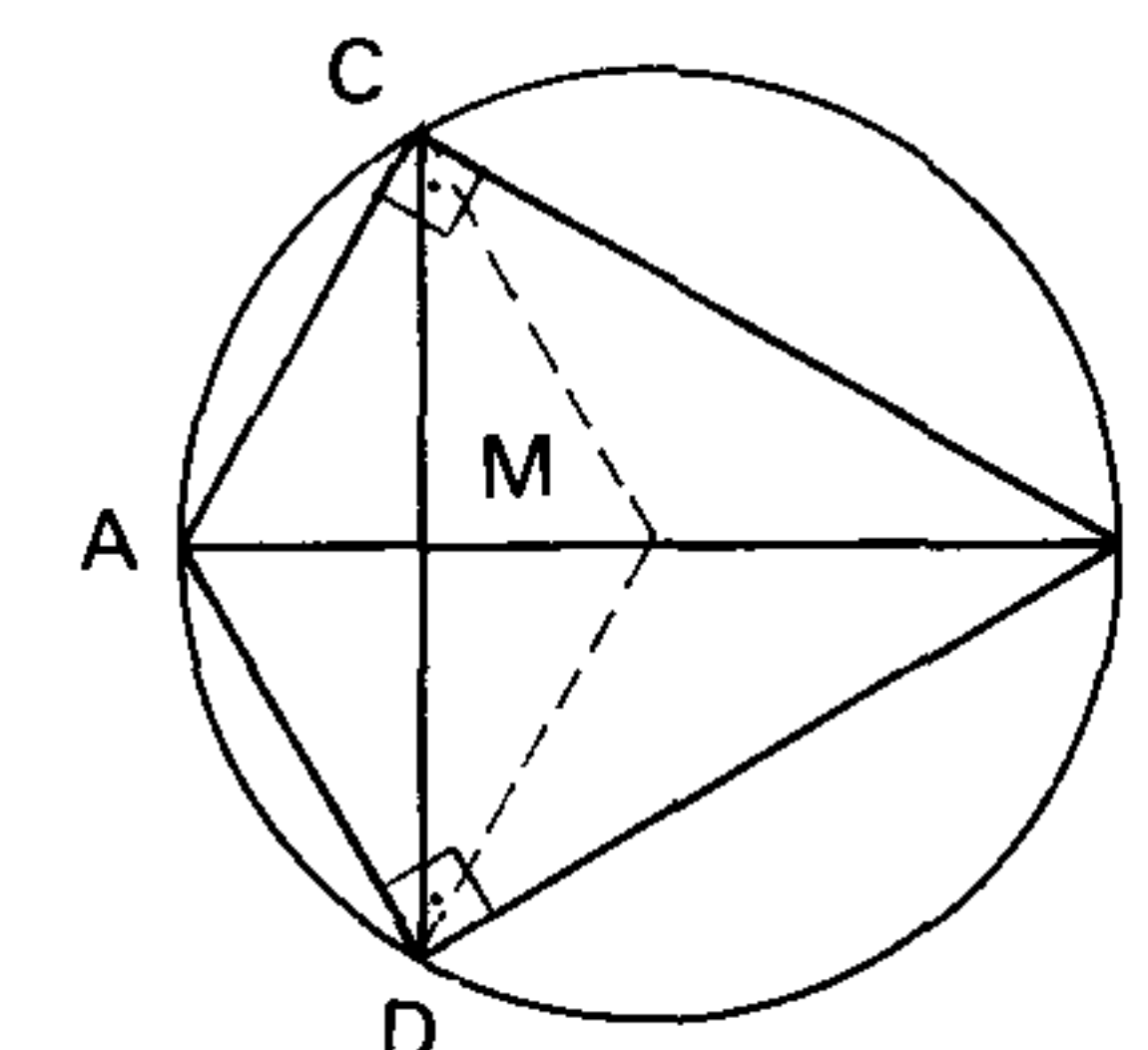
968. Determine a área de um triângulo retângulo isósceles, sabendo que sua hipotenusa é igual à oitava parte do perímetro de um quadrado inscrito em um círculo de raio $2r$.

969. Determine a área de um quadrado inscrito e de um quadrado circunscrito a um círculo de raio r.

970. Determine a razão entre a área de um decágono regular inscrito em um círculo de raio R e a área do pentágono regular inscrito nesse mesmo círculo.

971. Determine a área de um octógono regular, sendo $80\ cm$ o seu perímetro.

972. Determine a área de um octógono inscrito em um círculo cujo raio mede $6\ cm$.

973. Determine a área da figura obtida quando sobre os lados de um quadrado construímos quatro triângulos equiláteros, sabendo que esta figura está inscrita em um círculo de raio R.

974. Seja um círculo de diâmetro $\overline{AB}$ igual a $34\ cm$ e uma corda $\overline{CD}$ de comprimento $17\sqrt{3}\ cm$ perpendicular a esse diâmetro por um ponto M desse diâmetro, não coincidente com o centro do círculo. Determine a área do quadrilátero $ACBD$.

975. Determine a área de um quadrado inscrito num círculo em função da diagonal menor d de um dodecágono regular inscrito no mesmo círculo.

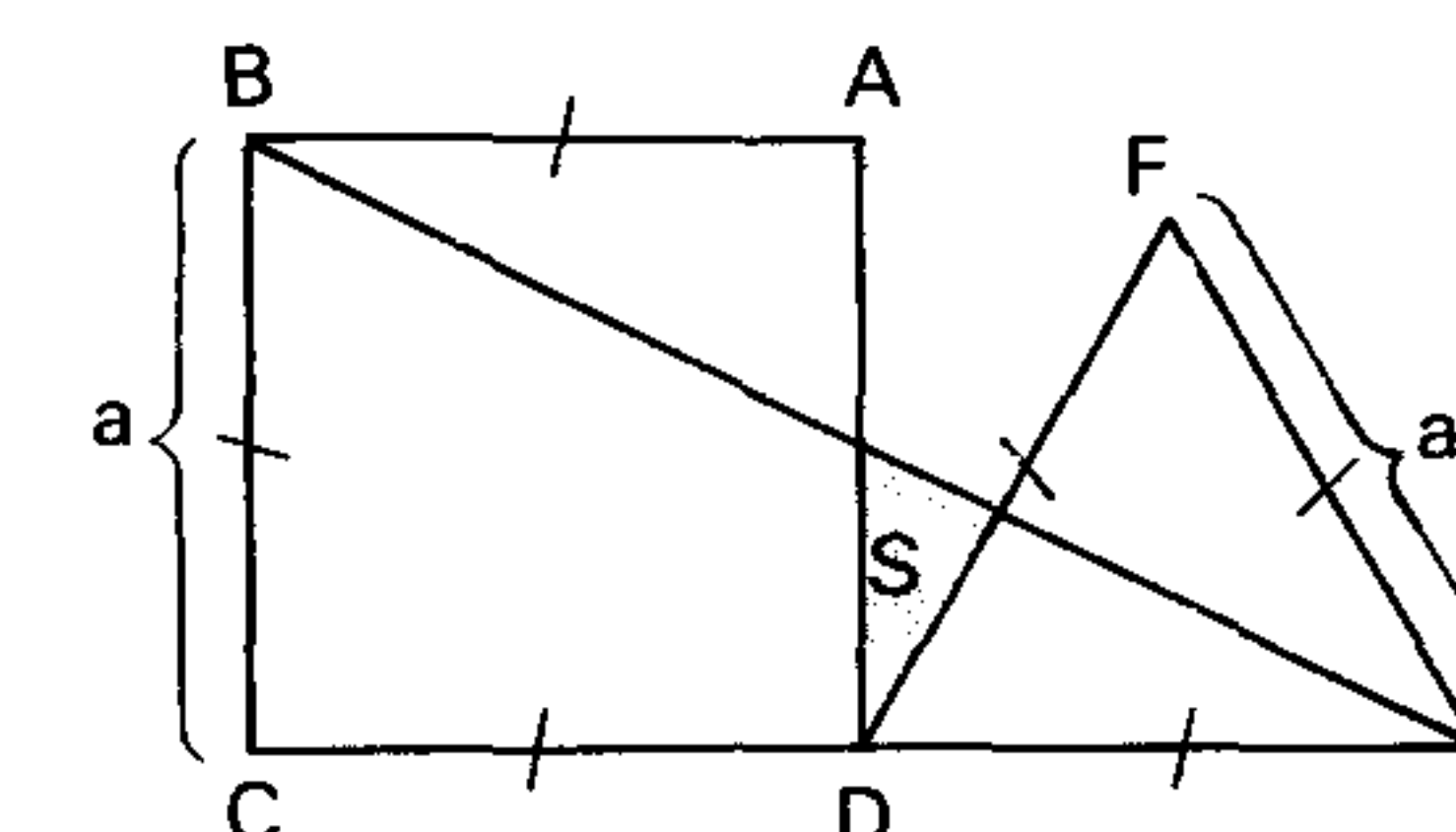
976. Determine a razão entre a soma das áreas de dois triângulos equiláteros construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo e a área de um quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo, sabendo que um dos catetos mede $21\ cm$ e o ângulo agudo oposto a ele mede $30°$.

977. Em um círculo de raio igual a $5\ cm$ está inscrito um retângulo de área igual a $25\ cm^2$. Calcule o ângulo formado pelas diagonais desse retângulo.

978. Sobre cada lado de um hexágono regular e externamente a este constrói-se um quadrado. Unindo-se os vértices dos quadrados de modo a obter um dodecágono regular, determine a área desse dodecágono em função do lado do hexágono que está inscrito em um círculo de raio R.

979. Sendo r o raio do círculo inscrito e r_a, r_b, r_c os raios dos círculos ex-inscritos num triângulo de área S, prove que:

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

980. Calcule a área S, sabendo que $ABCD$ é um quadrado e DEF é um triângulo equilátero, ambos de lados de medida a.

981. Determine a área de um quadrado inscrito em um triângulo equilátero em função do raio R do círculo circunscrito a esse triângulo.

982. Determine a razão entre a área de um quadrado e a área de um triângulo equilátero inscritos num círculo de raio r.

983. Os lados de um triângulo retângulo são proporcionais aos números 3, 4 e 5. A mediana relativa à hipotenusa tem medida igual ao raio de um círculo circunscrito ao triângulo. Determine a área do triângulo em função do raio r do círculo.

984. As projeções que os catetos de um triângulo retângulo determinam na hipotenusa medem $16\ cm$ e $9\ cm$. Determine a razão entre a área do círculo inscrito e a área do círculo circunscrito a esse triângulo.

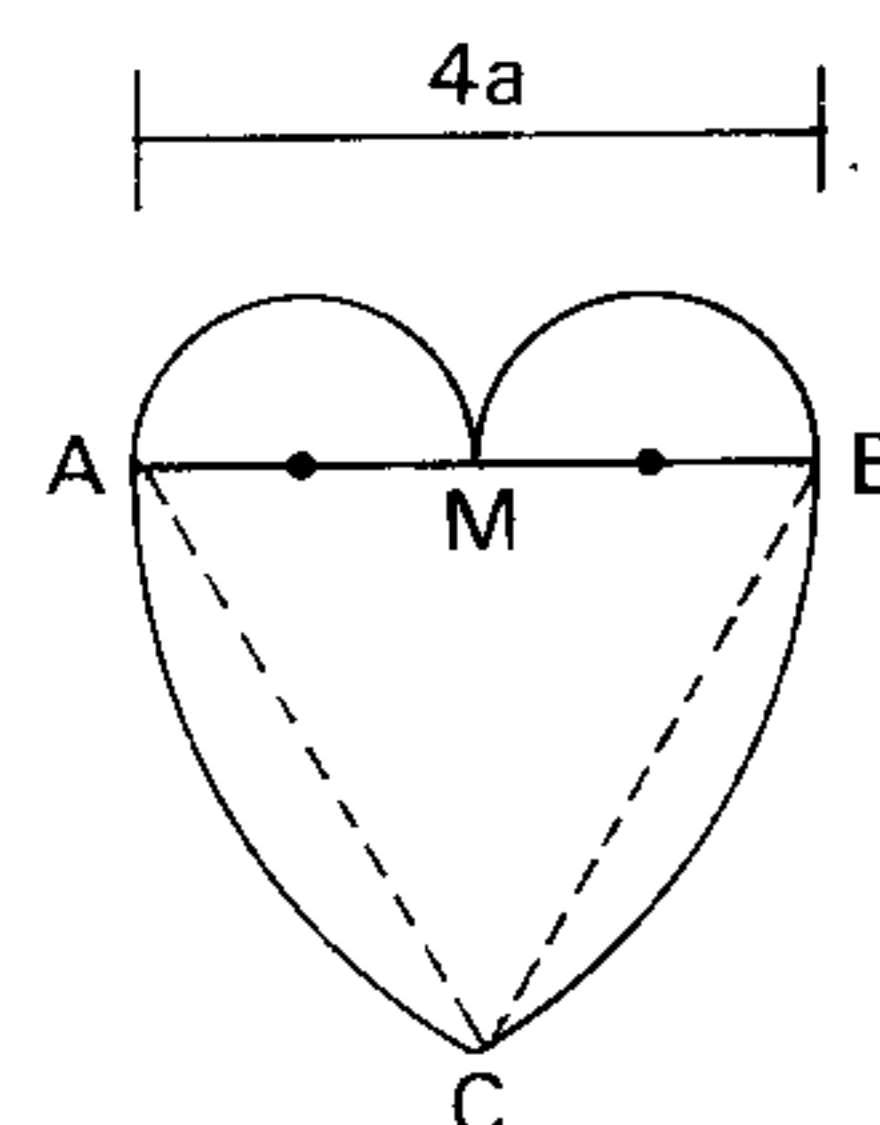
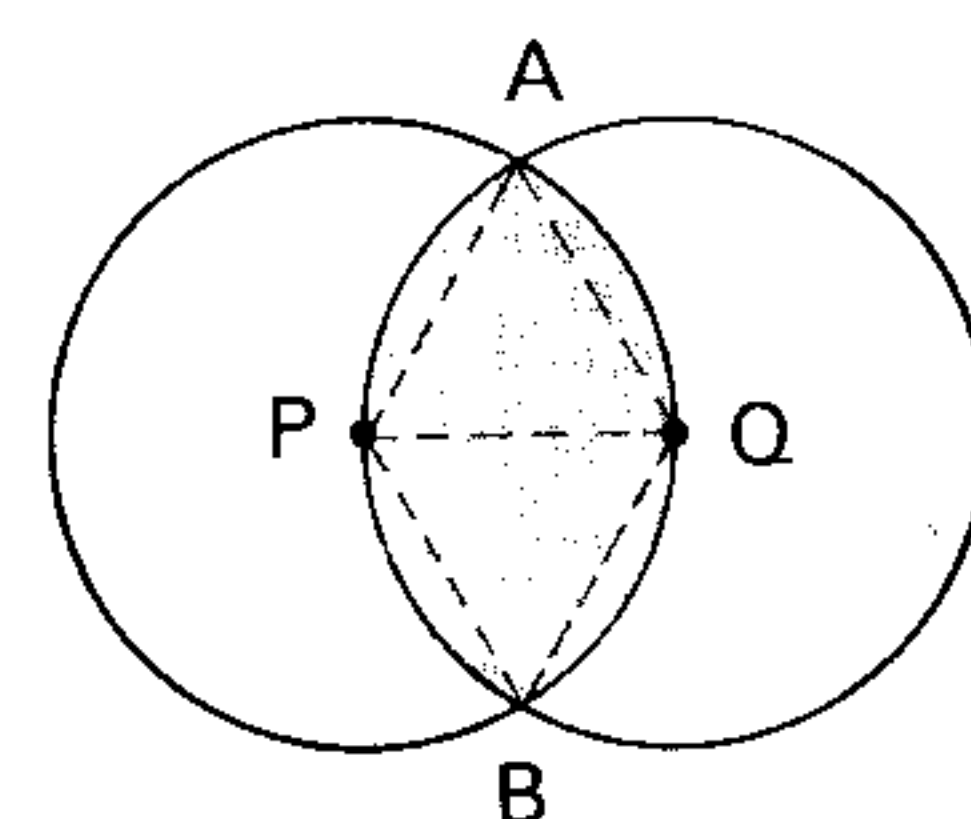
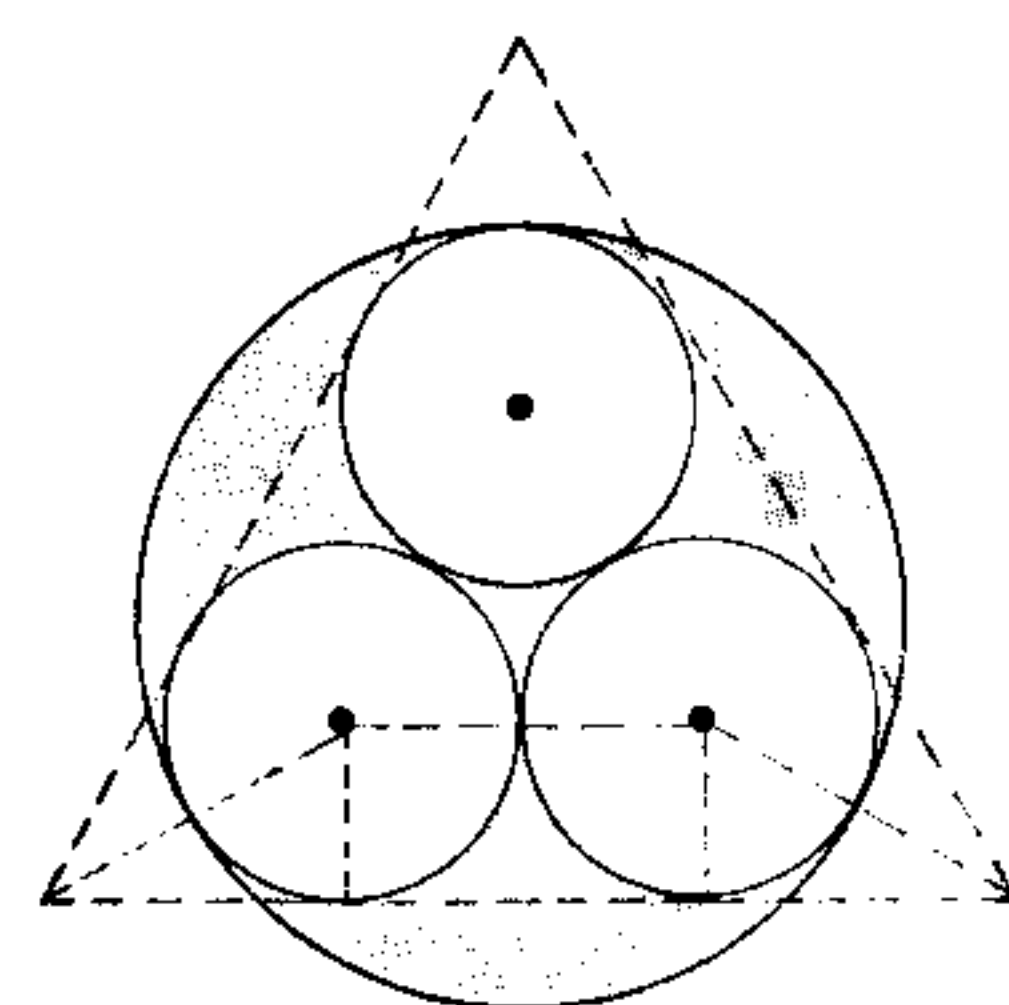
985. Determine a razão entre o raio do círculo circunscrito e o raio do círculo inscrito em um triângulo ABC isósceles de base $BC = a$, sendo $120°$ o ângulo do vértice do triângulo.

986. Determine o lado de um losango em função do raio r do círculo nele inscrito, de modo que a área do losango seja igual ao dobro da área desse círculo.

987. Dois eneágonos regulares convexos têm lados respectivamente iguais a $2\ cm$ e $3\ cm$. Determine o lado do eneágono regular convexo cuja área é igual à soma das áreas dos dois primeiros.

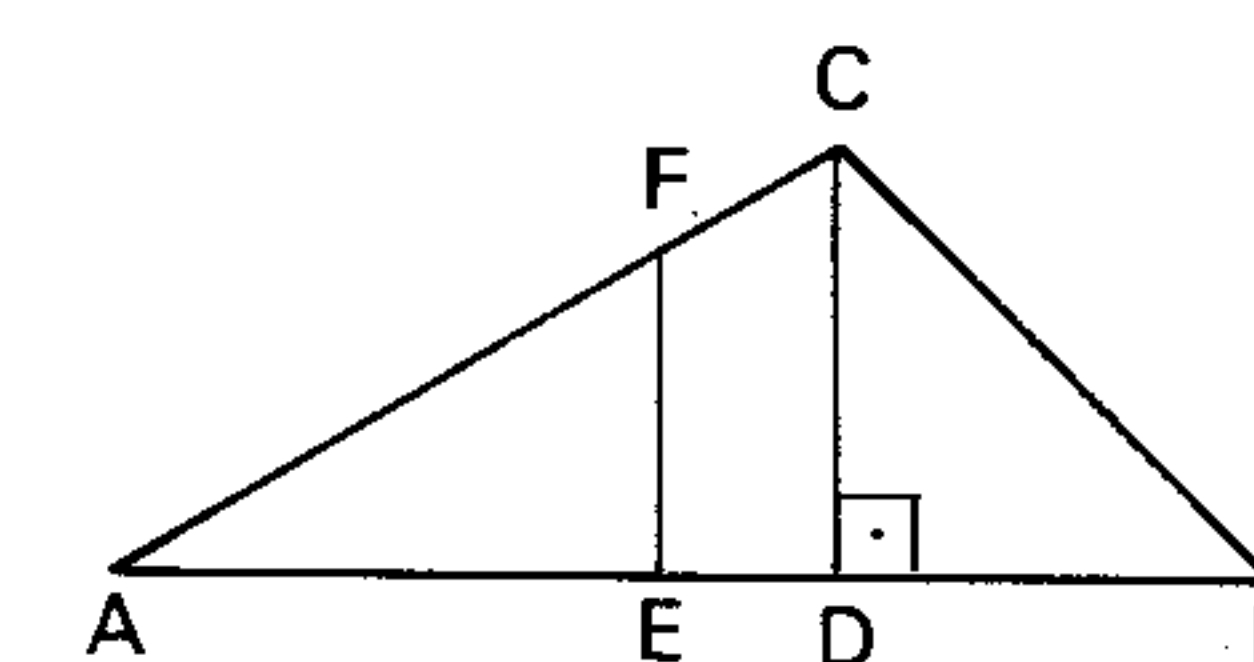
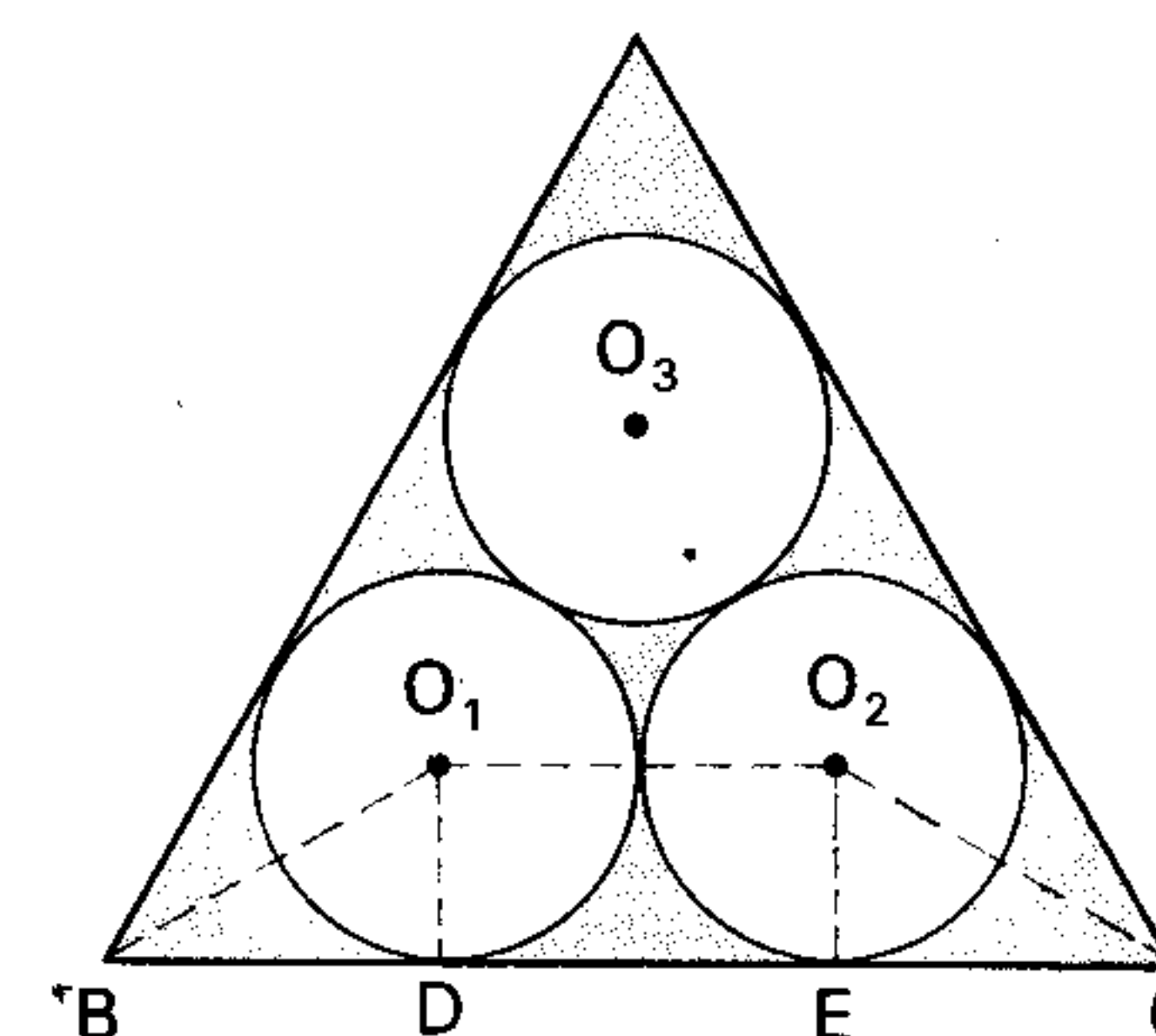
988. Determine a área sombreada da figura em função do raio r dos três círculos interiores ao círculo maior.

989. P e Q são os centros dos círculos, na figura. Sendo $\overline{PQ} = 6\ cm$, calcule a área sombreada.

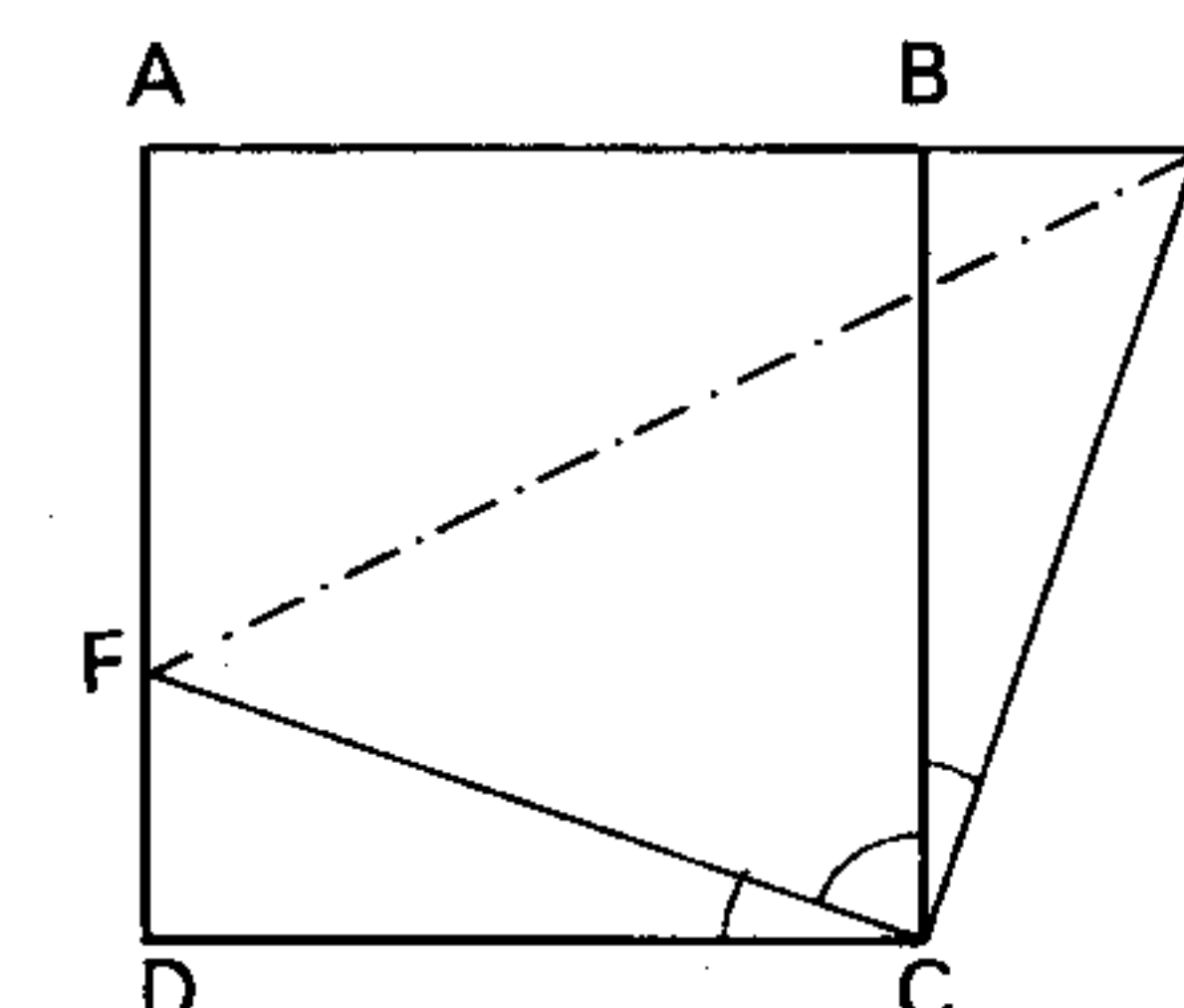
A P Q B

990. Seja dado um segmento de reta $\overline{AB}$ de medida $4a$ e ponto médio M. Constroem-se dois semicírculos com centros nos pontos médios de $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ e raios iguais a a. Com centros, respectivamente, em A e B, raios iguais a $4a$, descrevem-se os arcos $\widehat{BC}$ e $\widehat{AC}$. Calcule a área da figura assim construída (vide figura).

4a A M B C

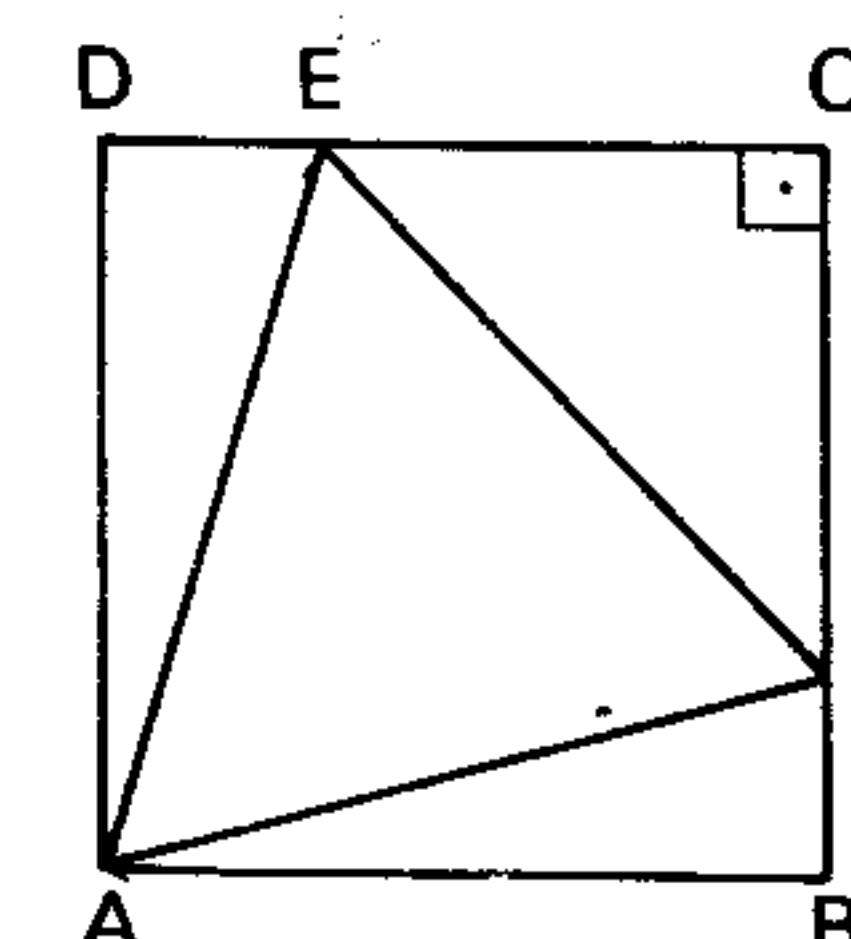
991. Consideremos o triângulo ABC, da figura ao lado, cujos lados BC, AC e AB medem, respectivamente, $13\ cm$, $15\ cm$ e $14\ cm$. A altura $\overline{CD}$ mede $12\ cm$, e o triângulo AEF tem área igual à metade da área do triângulo ABC. Determine a medida do segmento $\overline{AE}$, sendo $\overline{EF}$ paralelo a $\overline{CD}$.

C F A E D B

992. Determine a área sombreada em função do lado a do triângulo equilátero, sabendo que os três círculos têm mesmo raio.

993. Na figura abaixo, calcule a distância $\overline{BE}$, sabendo que a área do quadrado $ABCD$ é igual a $256\ cm^2$, a área do triângulo ECF igual a $200\ cm^2$ e que $\overline{EC}$ é perpendicular a $\overline{CF}$.

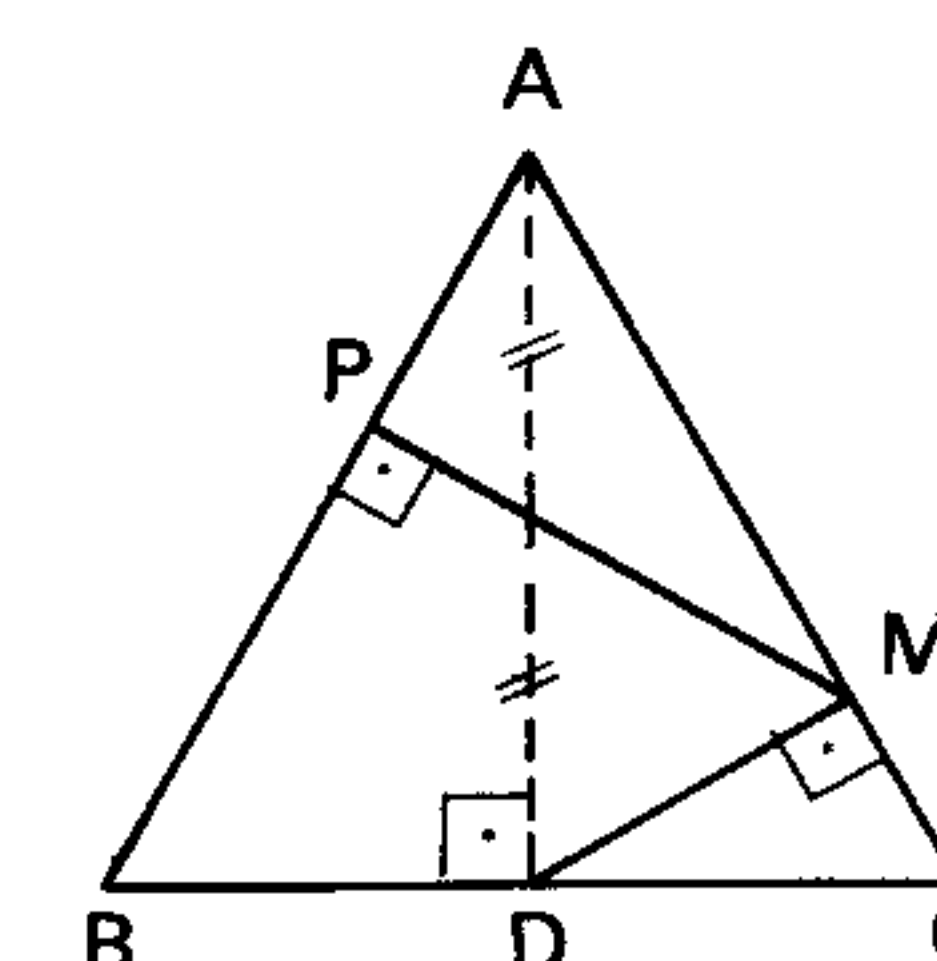
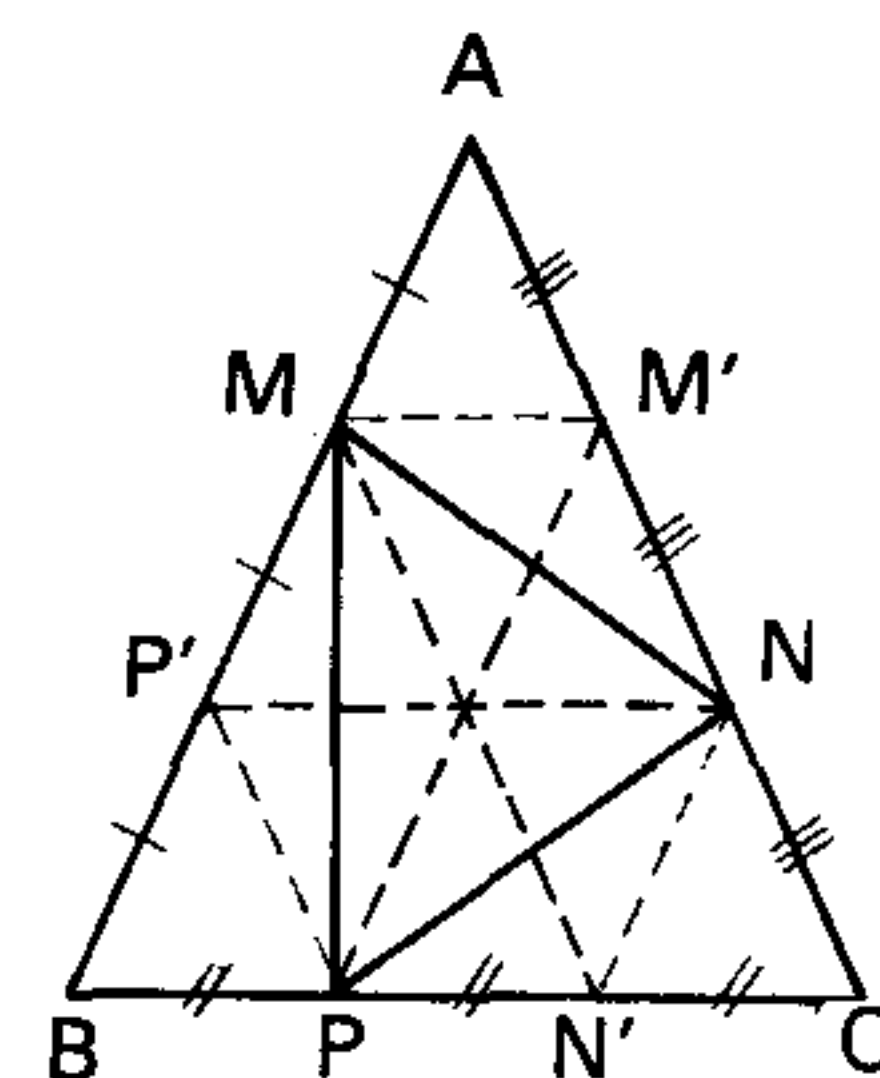
O_3 O_1 O_2 B D E C

A B E F D C

994. Determine a área de um círculo inscrito em um setor circular de $60°$, sendo $12\pi\ cm$ o comprimento do arco do setor.

995. Determine a área do quadrilátero formado pelas bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo $ABCD$, sabendo que os lados AB e BC medem, respectivamente, $8\ cm$ e $10\ cm$ e que um de seus ângulos mede $120°$.

996. Consideremos o triângulo equilátero AEF, inscrito no quadrado $ABCD$ de lado a. Calcule a área desse triângulo, sabendo que $\overline{CE}$ é congruente a $\overline{CF}$.

997. ABC é um triângulo equilátero cujo lado mede $8\sqrt{3}\ cm$. Determine a área do triângulo retângulo APM, sabendo que $\overline{MP} \perp \overline{AB}$, $\overline{DM} \perp \overline{AC}$ e $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

D E C F A B

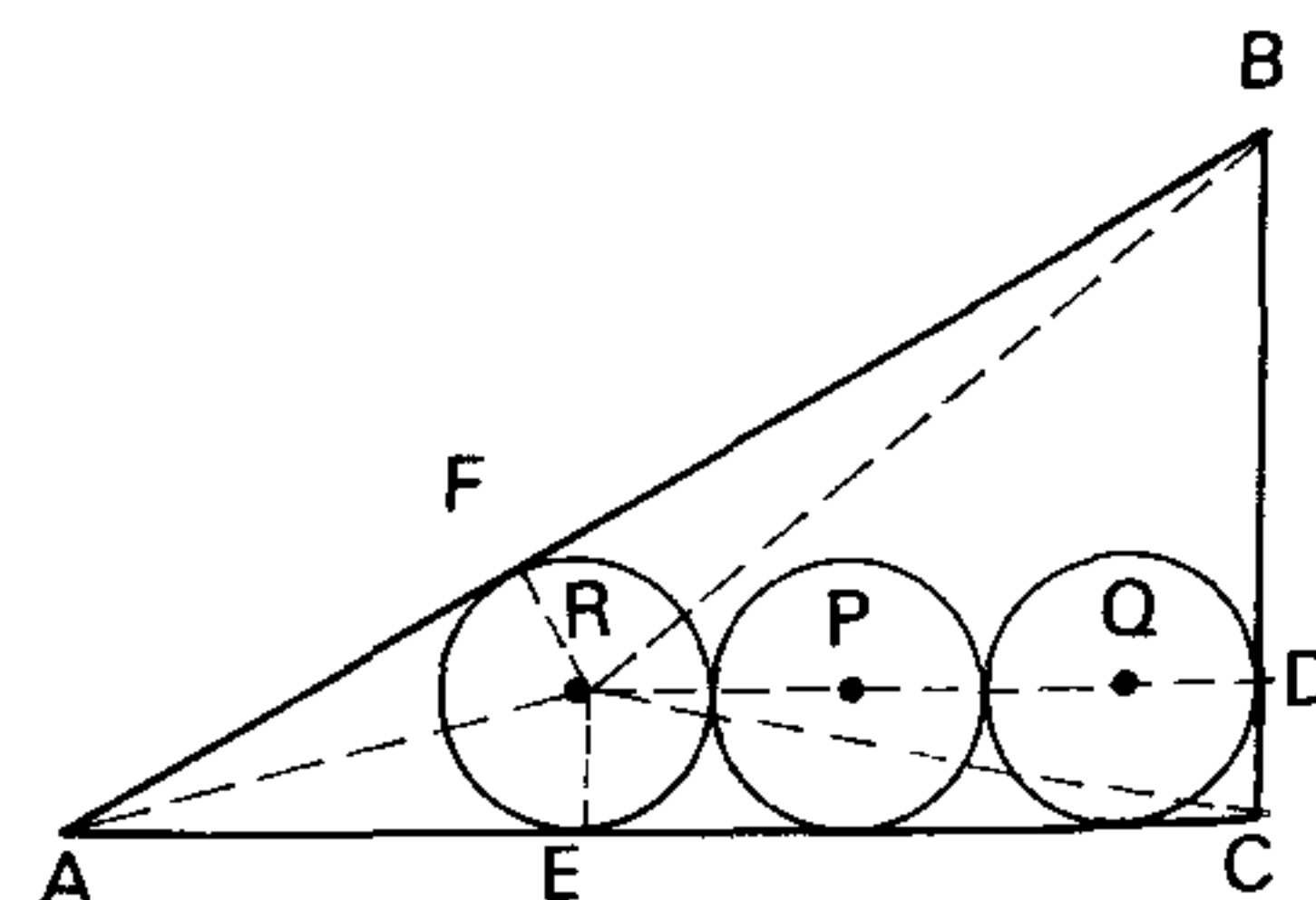
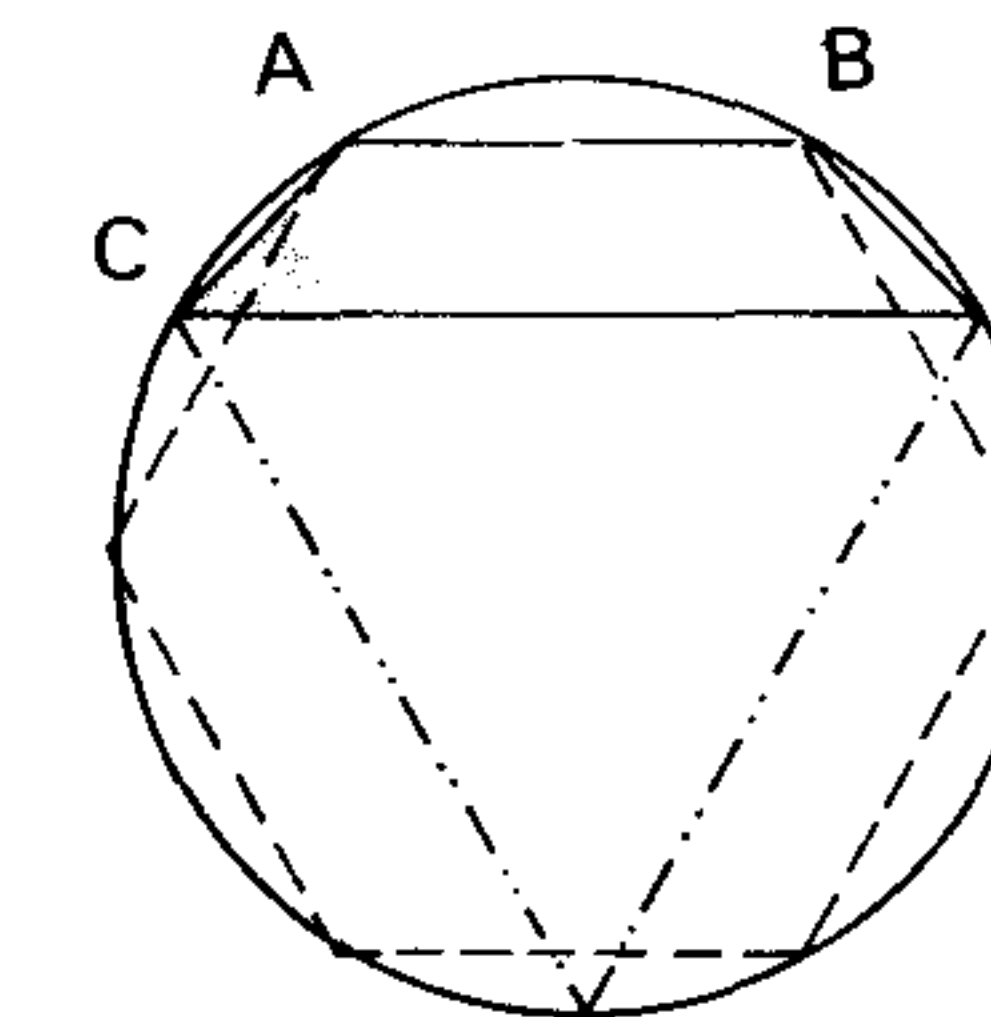
A P M B D C

998. Determine a razão entre a área do triângulo ABC e a área do triângulo MNP da figura ao lado, sendo que:
$\overline{AM} \equiv \overline{MP'} \equiv \overline{P'B}$
$\overline{BP} \equiv \overline{PN'} \equiv \overline{N'C}$
$\overline{CN} \equiv \overline{NM'} \equiv \overline{M'A}$

999. Calcule a área de um trapézio que se obtém ligando os pontos de tangência de duas retas tangentes externas a dois círculos tangentes exteriormente, sabendo que os raios dos círculos medem *9 cm* e *4 cm*, e a soma das bases do trapézio *24 cm*.

1000. Entre os triângulos de mesma base e mesmo ângulo do vértice oposto a essa base, qual o de maior área?

1001. Num terreno em forma de triângulo retângulo, de catetos *32* e *27*, quer-se construir um edifício de base retangular, de lados paralelos aos catetos. Quais devem ser as dimensões da base do edifício de modo a haver maior aproveitamento do terreno?

1002. Dá-se um trapézio $ABCD$ de bases $AB = a$, $CD = b$ $(a > b)$ e de altura h. Demonstre que a diferença das áreas dos triângulos que têm por bases AB e CD, respectivamente, e por vértice oposto o ponto de concurso das diagonais é: $\dfrac{(a-b)h}{2}$.

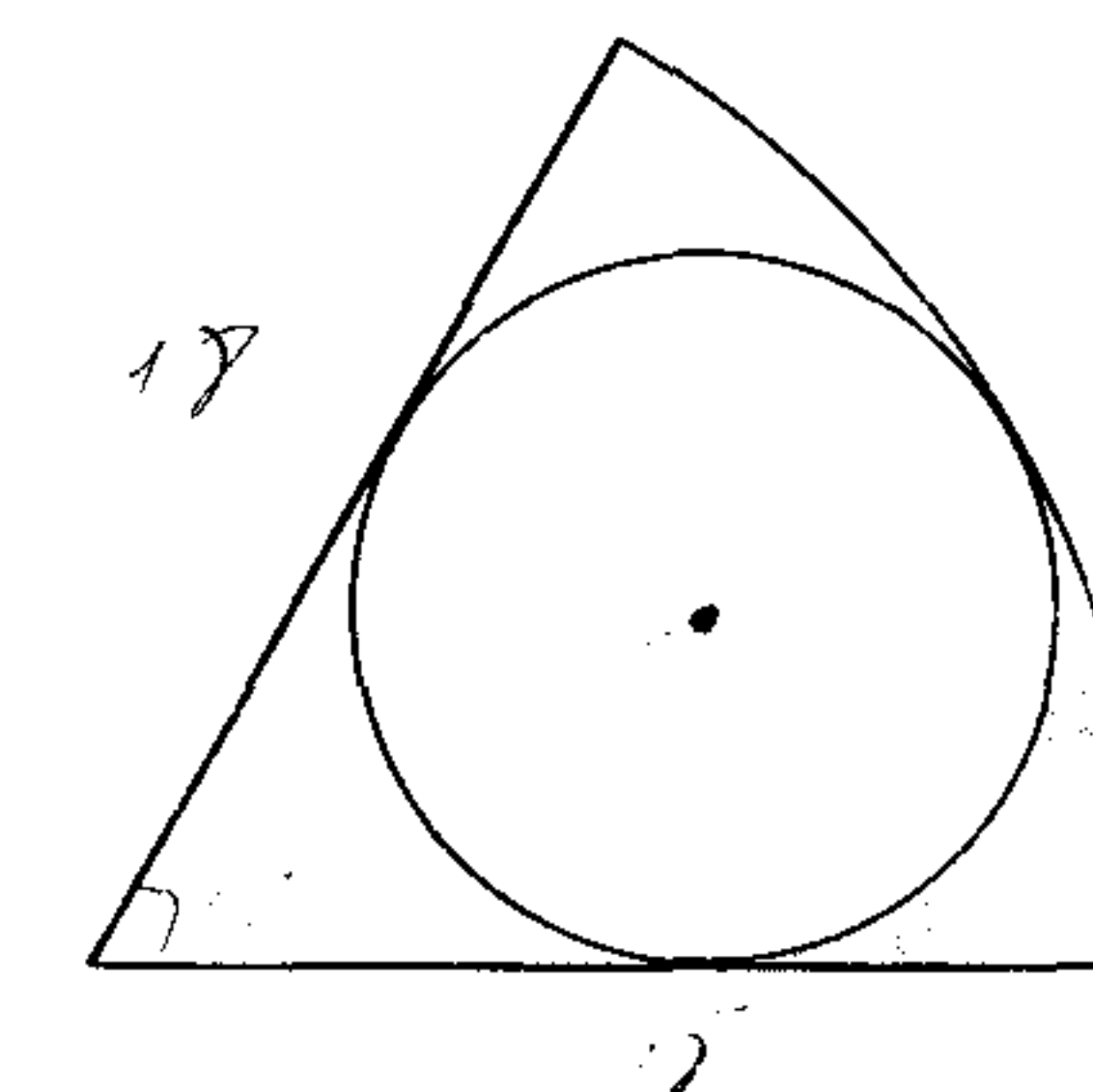
1003. Calcule a área de um decágono convexo regular inscrito em um círculo de raio *2 cm*.

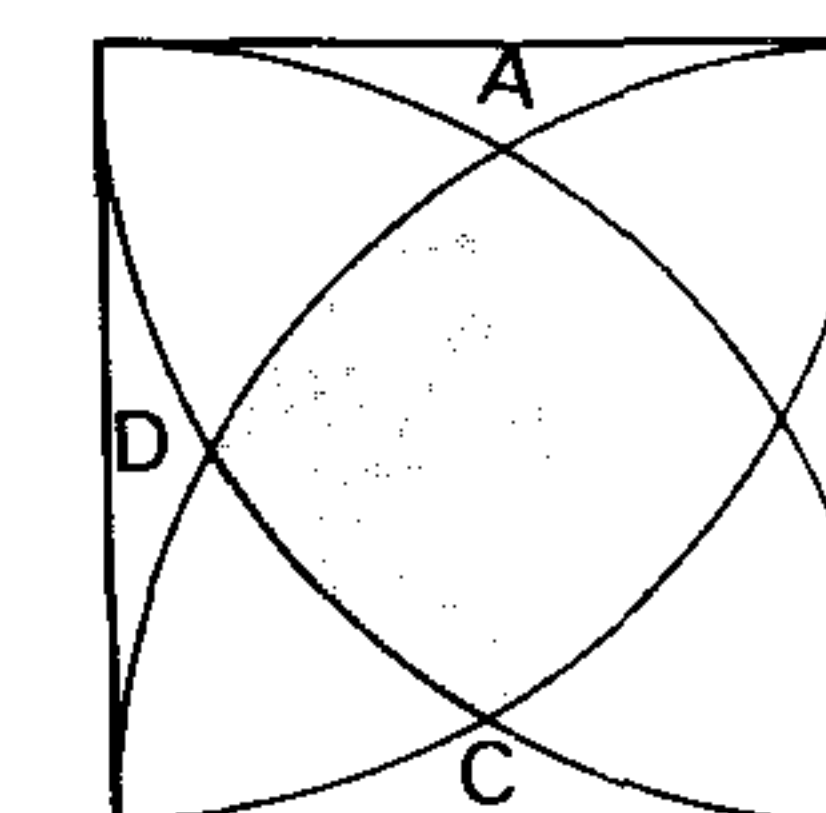
1004. No interior de um triângulo tomamos três circunferências de mesmo raio e tangentes entre si e aos lados do triângulo, como mostra a figura. Sendo o triângulo retângulo de catetos $BC = 3\ cm$ e $AC = 4\ cm$, determine o raio dessas circunferências.

1005. Determine a área de um trapézio, sabendo que seus lados paralelos são formados por duas cordas situadas num mesmo semicírculo de *8 cm* de diâmetro e que uma das cordas é o lado de um hexágono regular inscrito e a outra o lado de um triângulo equilátero inscrito no círculo.

1006. Os lados de um triângulo ABC são três números inteiros consecutivos. Determine as alturas relativas a esses lados, sabendo que o número que mede a área é o dobro do que mede o perímetro do triângulo.

1007. Inscreva num círculo um retângulo de área a^2. Procure justificar.

1008. A superfície de um triângulo retângulo é $120\ cm^2$ e sua hipotenusa vale $a\ cm$. Determine os catetos e o menor valor que a pode tomar.

1009. A soma das distâncias de um ponto da base de um triângulo isósceles aos lados iguais é constante.

1010. Na figura temos um setor circular de $60°$ e raio *18 m* e uma circunferência inscrita nele. Determine a área da região sombreada.

1011. Por um ponto P, interno de um triângulo, conduzimos retas paralelas aos lados. Se as áreas dos triângulos com um vértice em P, determinados por essas retas e os lados do triângulo, são A, B e C, determine a área do triângulo original.

1012. Na figura temos um quadrado de lado a. Os arcos têm centros nos vértices do quadrado. Determine a área da região sombreada.

Respostas dos Exercícios

Capítulo I

1. a) V b) V c) V d) V e) F
2. a) F b) V c) F d) V e) F
3. a) V b) V c) V d) V
4. 4 retas
5. a) V b) V c) V

Capítulo II

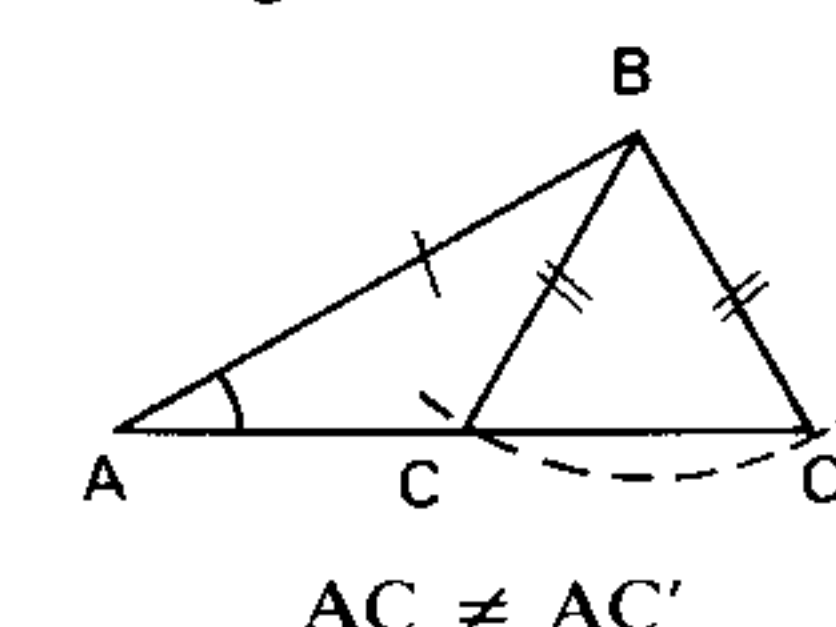
6. a) 10 cm b) 4 cm c) 7 cm d) 14 cm
7. a) 7 b) 6
8. a) 11 b) 32
9. a) 42 b) 24
10. 8
11. 3
12. Infinitos.
    Um único.
13. a) F b) F c) V d) F e) V f) F
14. 25
15. $\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{AB}$
17. AB = 24 cm
    BC = 8 cm
    CD = 4 cm
18. Sai por soma.
19. 8 cm ou 32 cm
20. AB = 35 cm e BC = 7 cm
21. (36 cm e 9 cm) ou (60 cm e 15 cm)
22. 36 cm ou 45 cm ou 20 cm
23. (BM = MC, AB + BM = AM,
    MC + CD = MD, AB = CD) $\Longrightarrow$ AM = MD
24. (AB = AC − BC, CD = BD − BC,
    AC = BD) $\Longrightarrow$ AB = CD
    (BM = MC, AB + BM = AM,
    MC + CD = MD, AB = CD) $\Longrightarrow$
    $\Longrightarrow$ AM = MD

Capítulo III

29. a) 31° 10′ b) 47° 30′ c) 65° 41′ 3″ d) 111° 3′ e) 31°
30. a) 46° 15′ b) 26° 5″
31. a) 15° 5′ 15″ b) 10° 55′ c) 44° 44′ 30″ d) 39° 29′ 15″
32. a) 21° 11′ 30″ b) 31° 17′ 30″
33. a) 23° 24′ 27″ b) 10° 30′ 55″ c) 10° 36′ 44,4″
34. a) 20° b) 55° c) 60° d) 23° e) 25°
35. São adjacentes e suplementares.
37. a) 25° b) 30°
38. a) 60° b) 120° c) 120°
39. a) 15° b) 10°
40. a) F b) V c) F d) F e) F
41. a) F b) F c) F d) F e) F
42. São complementares.
    Não são adjacentes.
43. 10°
44. 40° e 80°
45. a) 65° b) 43° c) 52° 35′
46. a) 108° b) 39° c) 86° 45′
47. a) $90° - x$
    b) $180° - x$
    c) $2\,(90° - x)$
    d) $\dfrac{180° - x}{2}$
    e) $3(180° - x)$
    f) $\dfrac{90° - x}{7}$
    g) $\dfrac{180° - x}{5}$
    h) $90° - \dfrac{x}{3}$
    i) $3\left(180° - \dfrac{x}{5}\right)$
48. 60°
49. 67° 30′
50. 72°
51. 36°
53. 123°
54. 55°
55. 30°
56. 111°
57. 30°
59. 80°
60. 15°
62. 50°
63. 135° e 45°
64. 60° e 120°
65. 50°
66. 40°
67. 54°
68. 70°
69. 40° e 140°
70. 156°
71. 36° e 54°
72. 135°
73. 16° e 16°
74. 108°
75. Duas semi-retas de mesma origem que formam um ângulo de 180° são opostas.
77. $a + a + b + b = 90° \Longrightarrow a + b = 45°$
78. 68°
79. 64° ou 144°

Capítulo IV

80. a) F b) V c) F d) F e) F f) V g) V h) F
81. a) F b) F c) F d) F e) F
82. 12
83. x = 8, y = 6
84. 18
85. 20°
86. 50°
87. x = 85, y = 50°
88. a) x = 4, y = 9
    b) x = 4, y = 3
89. 25 cm
90. 30 m e 30 m
91. a) 45 b) 39
92. 3 m, 6 m, 6 m
93. a) LAL
    b) LLL
    c) LAA_0
    d) LAA_0
    e) LAA_0
    f) LAL ou ALA ou LAA_0
    g) caso especial
94. $T_1 \equiv T_8$ (LAL)
    $T_2 \equiv T_7$ (LAL)
    $T_3 \equiv T_5$ (LAL)
    $T_4 \equiv T_{11}$ (ALA)
    $T_6 \equiv T_{10}$ (LLL)
    $T_9 \equiv T_{12}$ (LAA_0)
95. a) I ≡ II (LAL)
    b) I ≡ III (ALA)
    c) I ≡ III (caso especial)
96. a) △ABC ≡ △ADC (LAL)
    b) △ACB ≡ △ECD (LAA_0)
    c) △CAB ≡ △FDE (LAL)
    d) △EBA ≡ △ECD (LLL) ou
    △ECA ≡ △EBD (LLL)
97. Porque existem triângulos que têm ALL (ou LLA) e não são congruentes. Por exemplo, os triângulos ABC e ABC′ da figura abaixo:

B
A C C′

$\hat{A}$ é comum
$\overline{AB}$ é comum
$\overline{BC} \equiv \overline{BC'}$

AC ≠ AC′

98. $\alpha = 10°$; $\beta = 12°$

99. 16; 8, AD = CD = AC = 32

100. 14; 10; 1.

101. 10; 19; 1.

102. 60°; 9°

103. Use ALA.

104. Use ALA.

105. Use ALA.

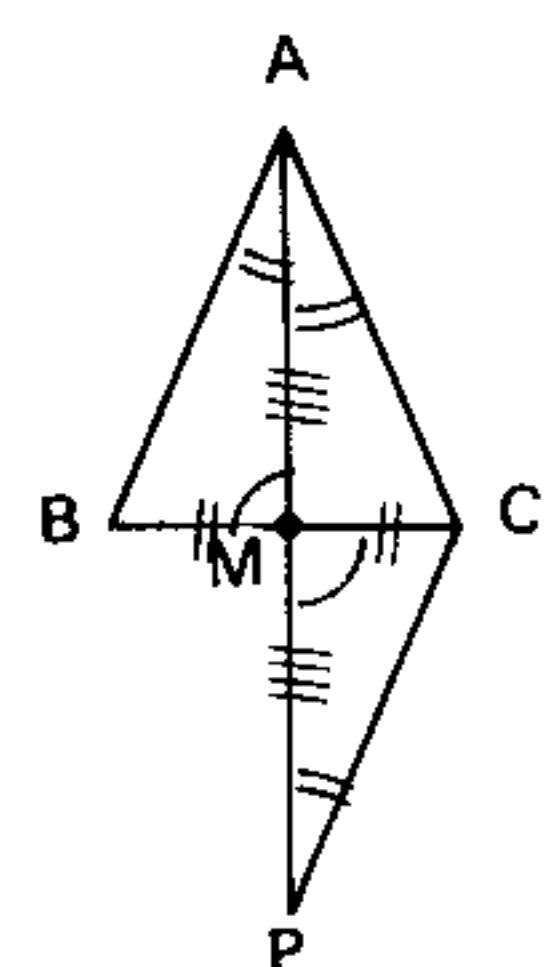
106. $\triangle CBA \equiv \triangle FDE$ (LAA_0)

107. $\triangle BAC \equiv \triangle EAD$ (ALA)

108. Use LLL.

109. Use LAL.

111. Use ALA.

112. H : $\begin{cases} \overline{AM} \text{ é bissetriz} \\ \overline{AM} \text{ é mediana} \end{cases}$ T : $\triangle ABC$ é isósceles

1) Tomemos P sobre a semi-reta $\overrightarrow{AM}$ com M entre A e P e $MP = AM$.
2) $\triangle AMB \equiv \triangle PMC$ pelo LAL.
   Desta congruência obtemos:
   $B\hat{A}M \equiv C\hat{P}M$ e $AB = PC$
3) De $B\hat{A}M \equiv C\hat{P}M$ e $\overline{AM}$ bissetriz, obtemos:
   $C\hat{P}M \equiv C\hat{A}M$, donde sai que $\triangle ACP$ é isósceles de base AP. Então: $AC = PC$.
4) De $AB = PC$ e $PC = AC$ obtemos $AB = AC$. Então o $\triangle ABC$ é isósceles.

113. Não, $|8 - 5| < 18 < 8 + 5$ é falso.

114. 18 cm ou 24 cm

115. $\frac{6}{5} < x < \frac{26}{3}$

116. 38 cm

117. 15 cm

119. Use o problema anterior e considere que ao maior ângulo está oposto o maior lado.

120. Do mesmo modo que o resolvido 118.

121. Use o anterior.

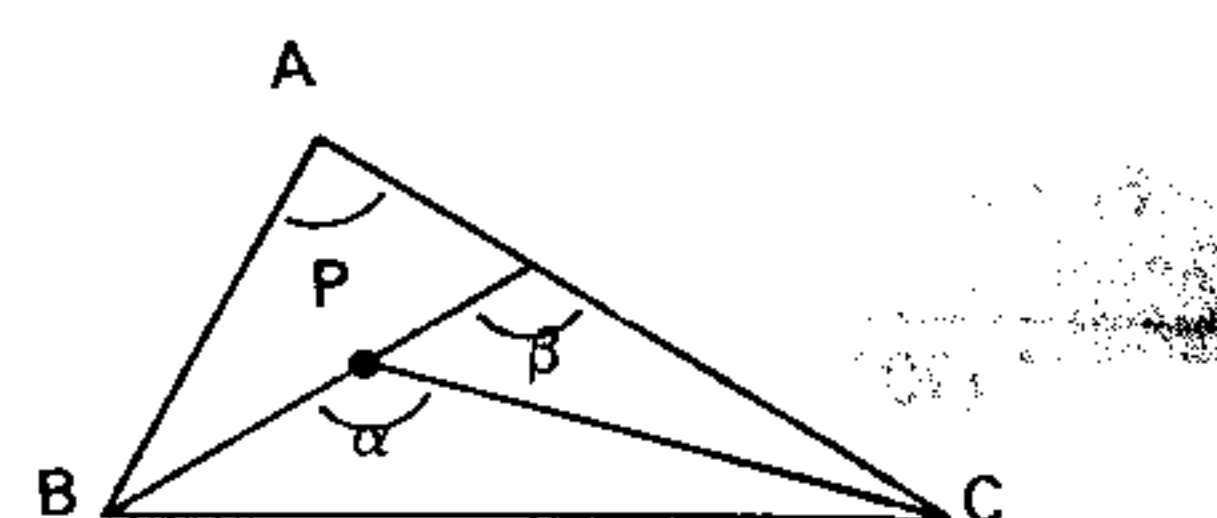
122. hip. > cat. $\Rightarrow \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow a > \frac{b + c}{2}$.

123. Use desigualdade triangular.

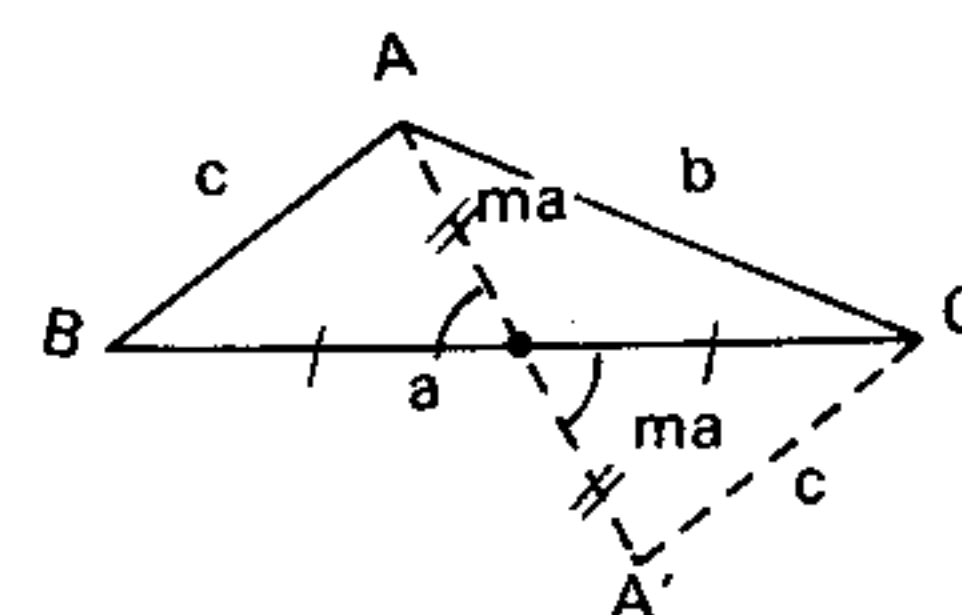
$\begin{cases} a < b + c \\ a = a \end{cases} \Rightarrow 2a < a + b + c \Rightarrow$

$\Rightarrow a < \frac{a + b + c}{2}$

124.

$\alpha > \beta, \beta > A \Rightarrow \beta > A$

126. Use o resolvido anterior.

127. Considere os triângulos APN; BPM; MNC.

128. Considere o $\triangle ACA'$ (vide figura).
$2ma < b + c$
$2ma > |b - c|$

129. Use o resultado do problema anterior.

Capítulo V

130. a) 50° b) 60°

131. a) 60° b) 70°

132. a) $x = 120°$, $y = 75°$
b) $x = 20$, $y = 50°$

133. 30°

134. 160°

135. 45°

136. 7° 12′

137. 20°, 30°

138. 140°

139. 180°

140. a) $x = 50°$, $y = 60°$, $z = 70°$
b) $x = 40°$, $y = z = 120°$

141. a) 50° b) 40°

142. a) 110° b) 120°

143. a) 60° b) 50°

144. a) $x = 30°$, $y = 40°$
b) $x = 30°$, $y = 30°$

145. a) 40°, 60°, 80°
b) 30°, 60°, 90°

146. a) 40° b) 45° c) 120° d) 105°

147. a) 360° b) 900°

148. a) 50° b) 36° c) 70°

149. a) 30° b) 55° c) 80° d) 36° e) 105° f) 25° g) $x = 30°$, $y = 40°$ h) $x = 15°$, $y = 40°$

151. $x = 10°$, $y = 150°$

152. 72°

153. 100°

154. 52°

155. 100°

156. 5°

157. 60°

158. 15°

159. 80°

160. 110°

161. 55°, 70°

162. 70°

163. 65°

164. 70°, 125°

165. 130°

166. 116°

167. 120°, 30° e 30°

168. 20°

169. 28

170. α é externo no $\triangle ABD$ e β é externo no $\triangle ACD$.

171. 20°

172. 2 m

174. 50°

175. 12°

176. a) 30°, 75°, 75°
b) 105°
c) 52°30′ e 127°30′

178. 48°, 72°, 60°

179. 66°, 38°, 76°

180. 36°, 72°, 72°

181. 90°

182. 6 m

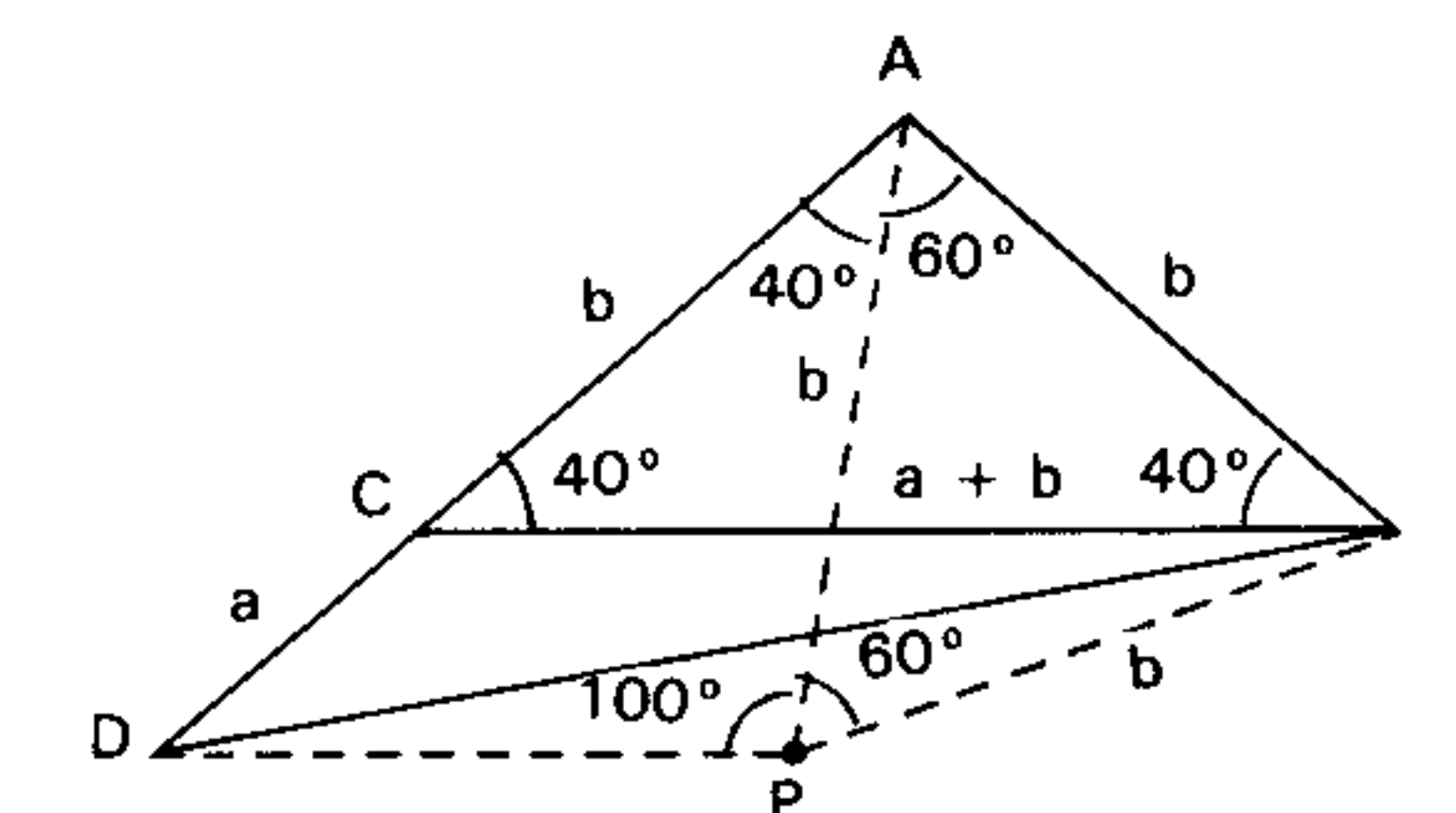
183. Faça como o 48.

184. 24°

185. 20°

186. 195°

187. 10 cm

188.

1) Indiquemos as medidas $AB = AC = b$ e $CD = a$, donde obtemos $BC = a + b$.
2) Tracemos $\overline{AP}$ com $AP = b$, de modo que $B\hat{A}P = 60°$. Obtemos desta forma o triângulo equilátero APB de lado b.
3) Consideremos agora os triângulos PAD e ABC. Note que eles são congruentes pelo caso LAL.
   Logo: $PD = AC = b$ e $A\hat{P}D = 100°$.
4) De $PD = b$ concluímos que o $\triangle PBD$ é isósceles. Note que neste triângulo PBD, como $\hat{P} = 160°$, concluímos que $\hat{B} = \hat{D} = 10°$.
5) Finalmente, de $A\hat{B}P = 60°$, $D\hat{B}P = 10°$ e $C\hat{B}A = 40°$, concluímos que $C\hat{B}D = 10°$.

Capítulo VI

189. a) 70°, 40° b) 60°, 40°

190. a) 65° b) 61°

191. 110°

192. 40°

193. a) 25° b) 145° c) 160° d) 40°

195. 80°

196. 70°

197. 40°, 50°, 40°

198. 20°

199. 36°, 72°, 72°

201. a) 25° b) 20°

202. $\frac{10}{3}$, 30

203. 50°

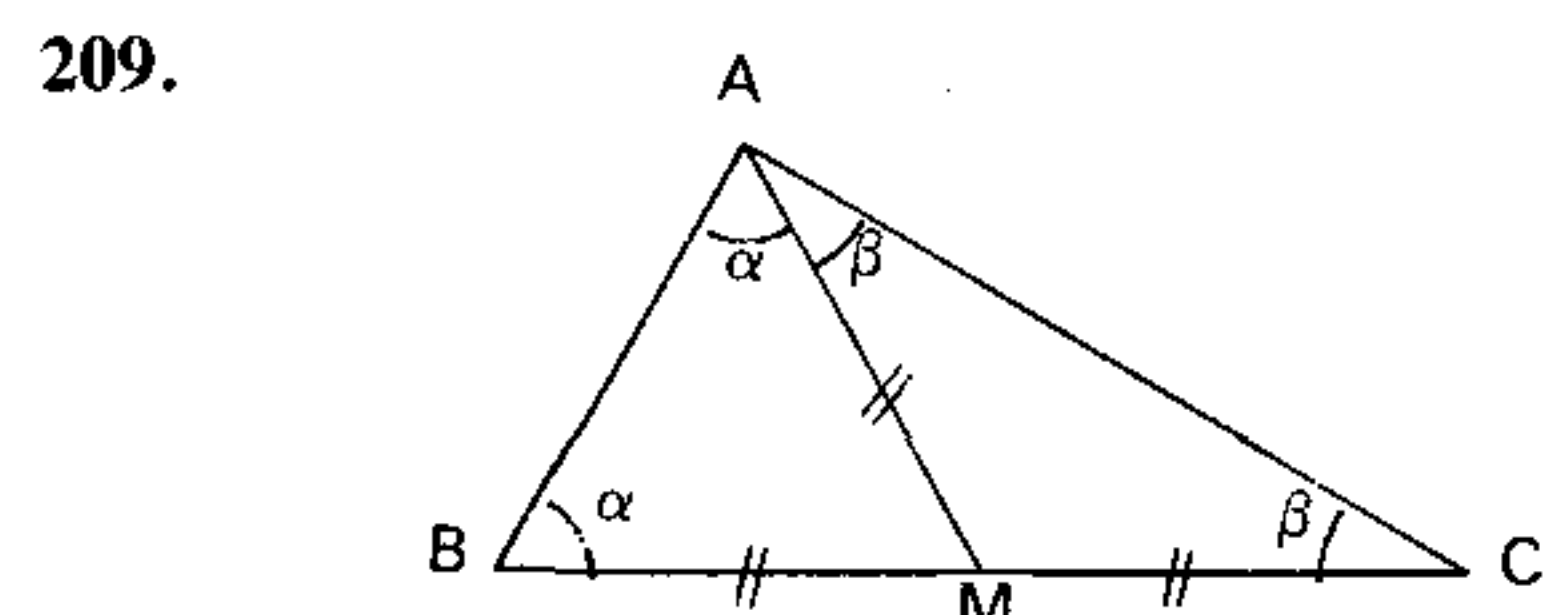
204. $\frac{3\hat{B}}{2}$

205. 56°, 34°

206. 80° e 10°

207. 52°

208. Considere que a mediana relativa à hipotenusa determina dois triângulos isósceles.

209.

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90° \implies \hat{A} = 90°$

211. Use LAA_0.

212. Use LAL.

213. Use ALA.

214. De fato, elas formam sempre ângulos de 45° e 135°.

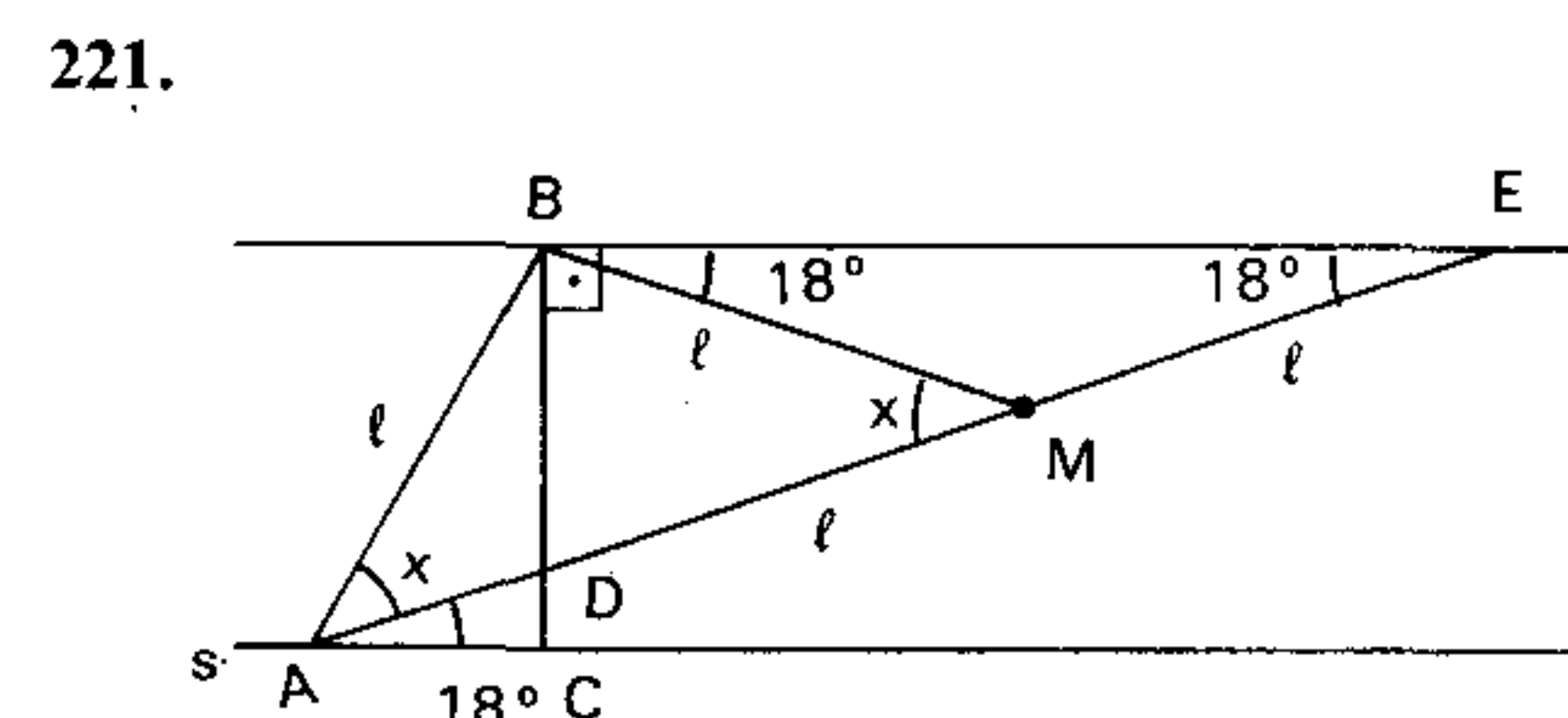
215. Use caso especial de congruência (△ retângulo).

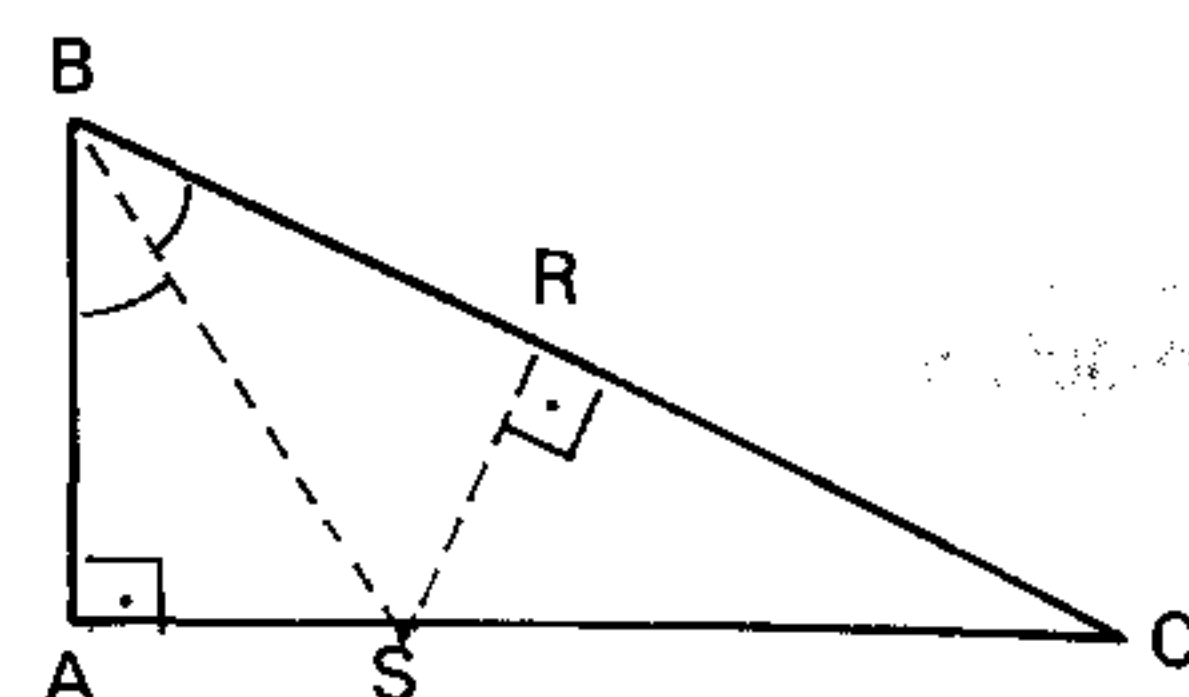
217. Não, pode ser paralela ao segmento.

218. Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, as retas são: paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, por P, e a reta $\overleftrightarrow{PM}$.

219. cateto < hipotenusa; ha < b; ha < c

220. 1ª parte: use o anterior
2ª parte: verifique que 2ha > b + c − a

221.

Sendo M o ponto médio de DE e indicando $AB = \ell$, temos $DM = EM = \ell$.
Note que também $BM = \ell$.
Desta forma concluímos que os triângulos ABM e BME são isósceles. Indicando os ângulos das bases, obtemos x = 36°.

222.

Pelo ponto S trace $\overline{SR}$ perpendicular a $\overline{BC}$ com R em $\overline{BC}$.

Note que os triângulos BAS e BRS são congruentes.
Donde vem AS = RS. (1)
No triângulo retângulo SRC, temos:
RS < SC (2)
De (1) e (2) vem: AS < SC.

223. 1º) Note que $\hat{B} = \hat{C} = 70°$. Logo $\overline{BP}$ é bissetriz de $\hat{B}$

2º) No $\triangle BPC$, temos $\hat{B} = 35°$, $\hat{C} = 55°$. Então, $\hat{P} = 90°$.

3º) No $\triangle CBE$, $\overline{BP}$ é bissetriz e altura. Então o $\triangle CBE$ é isósceles de base $\overline{CE}$. Logo, P é ponto médio de $\overline{EC}$.

4º) Agora, como no $\triangle DEC$, $\overline{DP}$ é mediana e altura, concluímos que ele é também isósceles de base $\overline{EC}$. Então $\hat{E} = 15°$ e x = 75°.

Capítulo VII

224. a) 120° b) 75°

225. a) 130°, 70°, 95°, 65°
b) 55°, 105°, 70°, 130°

226. a) 35° b) 70°

227. a) 70° b) 100°

228. a) 220° b) 125°

229. 180°

230. a) 80°, 105° b) 125°, 70°

231. 140°, 40°

232. 115°

233. 40°

234. 34 cm

235. 56 cm

236. a) V b) F c) V d) F e) F f) V

237. a) F b) V c) V d) V

238. a) F b) F c) V

239. a) F c) F e) V g) F i) V
b) F d) F f) V h) F j) V

240. 12 cm e 8 cm

241. 109 cm e 35 cm

242. 30 cm e 12 m

243. 50°, 130°, 50°, 130°

244. 70°, 110°, 70°, 110°

245. Se um triângulo tem dois ângulos complementares, então ele é triângulo retângulo.

246. 130°

247. 60°, 120°, 60°, 120°

248. 70°

249. 10 cm

250. 40°, 40°, 140°, 140°

251. 143°

252. 70°, 110°, 90°, 90°, 160°, 160°

253. $\frac{4}{3}$

254. a) 75° b) 15°

255. a) 5 b) x = 6, y = $\frac{19}{2}$

256. 17

257. 38 cm

259. losango: congruentes
retângulo: perpendiculares

260. congruentes e perpendiculares

262. 16 cm e 24 cm

263. 10 cm, 6 cm, 16 cm

264. a) 4
b) x = 3, y = 4
c) x + 10, y = 13, z = 19
d) x = 20, y = 6

265. Um triângulo retângulo que tem um ângulo de 45° é isósceles.

266. Cateto oposto a um ângulo de 30° é metade da hipotenusa (use triângulo equilátero).

267. Use o paralelogramo que elas determinam.

268. Use ângulos adjacentes e suplementares.

269. Use triângulo isósceles.

270. Use LAA_0.

271. Use base média do triângulo.

272. Use soma de ângulos de triângulo, soma dos ângulos de quadrilátero e ângulos correspondentes.

273. Una E com o ponto médio de $\overline{BC}$ e prolongue até encontrar $\overrightarrow{AB}$ e use congruência.

Capítulo VIII

274. a) V b) V c) V d) V e) F f) F g) F

275. a) equilátero
b) equilátero
c) retângulo
d) obtusângulo
e) obtusângulo
f) retângulo
g) acutângulo

276. a) 3 b) 7 c) 9

277. x = 7, y = 12, z = 5

278. Trace a diagonal $\overline{BD}$ e P é o baricentro do triângulo ABD, x = 8.

279. 30°

280. 25°, 25°, 130°

281. 70°

282. (50°, 50°, 80°) ou (65°, 65°, 50°)

283. a) x = 4, y = 6 b) 4

284. a) circuncentro e ortocentro
b) circuncentro
c) ortocentro

285. 60°

286. $\frac{13}{12}$ ou $\frac{12}{13}$

287. 120°

288. 5 cm

289. 10; note que P é baricentro do triângulo ACD.

290. 33 cm; note que os triângulos RBQ e SCQ são isósceles.

291. $90° + \frac{\hat{C}}{2}$; $90° + \frac{\hat{B}}{2}$; $90° + \frac{\hat{A}}{2}$

Capítulo IX

292. Use soma dos ângulos do triângulo, decompondo o pentágono e o hexágono.
a) 540° b) 720°

293. a) 70° b) 110° c) 90° d) 120° e) 120°

294. a) 110° b) 52° 30′ c) 50° d) 60°

295. a) 100° b) 150°

296. a) 60°, 120° c) 108°, 72°
b) 90°, 90° d) 120°, 60°

297. a) 66° b) 12°

298. a) x = 54°, y = 63°
b) x = 30°, y = 45°

299. 1 260°

300. 1 440°

301. 3 240°

302. dodecágono

303. 35

304. 170

305. eneágono

306. undecágono

307. hexágono

308. 150°

310. 17

311. 28

312. quadrilátero

313. Sim; quadrado.

314. 90

315. 20

316. 5

317. zero

318. 35

319. 12

320. 20

321. 36° ou 144°

322. 90

323. 14

324. 300°

325. 5

326. 6

328. heptágono

329. 8

330. 14 e 54

331. 8

333. dodecágono

334. 10

335. nenhuma

Capítulo X

336. 12

337. 9 cm

338. a) 6 b) 9

339. a) 125° b) 145°

340. 18 cm, 10 cm

341. 18 cm, 12 cm

342. 2 cm, 3 cm, 4 cm

343. a) 140° ($\triangle PAQ$ e $\triangle PBQ$ são isósceles e conhecemos a soma dos ângulos opostos às bases.)
b) 130° (Considere a tangente comum por Q e prolongue $\overline{BP}$, obtendo desta forma dois triângulos isósceles.)

344. a) 1 b) 0 c) 2

345. a) nenhuma b) 4 c) 2 d) 3 e) 1

346. Pode; a corda é um diâmetro.

347. Quando os raios estão na mesma reta.

348. É tangente a ambas.

349. Sim; quando esta corda é o diâmetro.

350. a) exteriores
b) tangentes exteriormente
c) tangentes interiormente
d) concêntricas
e) secantes

351. 24 cm e 42 cm

352. 8 cm e 3 cm

353. 12 cm ou 18 cm ou 24 cm ou 30 cm

354. 4 m, 8 m e 21 m

355. 4,5

357. 2 cm

358. 24

359. Vide ex. 356.

360. p−a; p−b; p−c

361. 20 cm

362. 12 r

363. 22 cm

364. 4 cm

365. 6 cm

366. $\dfrac{b + c - a}{2}$

367. p − r

369. 56 cm

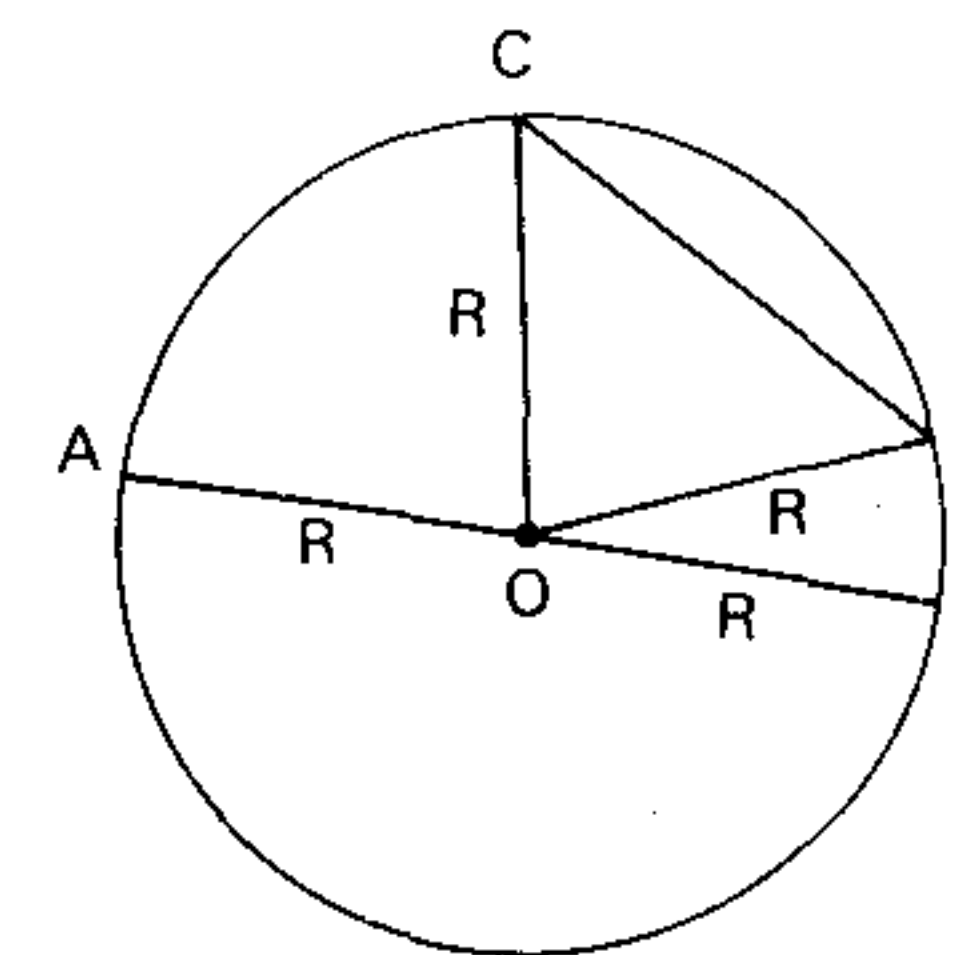
370. 6

371. 18 cm; 10 cm; 12 cm e 16 cm

372. 2 cm

373. 20 cm

374. Use a propriedade dos lados opostos de paralelogramo e quadrilátero circunscritível e a definição de losango.

375.

Sendo O o centro, $\overline{AB}$ o diâmetro e $\overline{CD}$ uma corda qualquer que não passa pelo centro, considerando o triângulo COD, vem:

$$CD < OC + OD \implies CD < R + R \implies$$
$$\implies CD < 2R \implies CD < AB$$

376. Use o caso especial de congruência de triângulos (cateto-hipotenusa).

Capítulo XI

377. a) 35° c) 60° e) 50°
b) 100° d) 25° f) 20°

378. a) 80° b) 30° c) 60°

379. a) 35° b) 10°

380. a) 65° b) 50°

381. a) 130° b) 245°

382. a) 70° b) 98° c) 150°

383. 80°

384. a) 65° b) 112°

385. 110°

386. 45°; 95°

387. 40°

388. a) 50° b) 20°

389. a) 50° b) 10°

390. 55°

391. 40°

392. 35°

393. 60°

394. a) 80° b) 90° c) 52°

395. a) 75° b) 72°

396. 60°, 60°

397. 70°, 60°, 50°

398. $\dfrac{2}{7}$

399. 80°

400. 30°

401. 76°

402. 30°

403. 105° e 55°

404. 60°

405. a) 160° b) 80°

407. Una pontos opostos e use ângulo inscrito.

408. Use exercícios 407 e 406.

409. Note que a hipotenusa é o diâmetro do círculo circunscrito.

410. Vide exercício 409.

412. $A\hat{B}H_2 \equiv A\hat{C}H_3$ (lados respectivamente perpendiculares)
$A\hat{B}H_2 \equiv A\hat{H}_1H_2$ (considerando o arco $\widehat{AH_2}$ na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$)
$A\hat{C}H_3 \equiv A\hat{H}_1H_3$ (considerando o arco $\widehat{AH_3}$ na circunferência de diâmetro $\overline{AC}$).

Capítulo XII

413. a) 3 b) 12 c) 15 d) 6

414. a) $\dfrac{10}{3}$ b) $\dfrac{25}{6}$ c) $\dfrac{10}{3}$; $\dfrac{18}{5}$

415. 25

416. 18

417. 24

418. $\dfrac{48}{5}$; 12; $\dfrac{72}{5}$; 18

419. 12; 18

421. $\dfrac{15}{2}$; 12; $\dfrac{33}{2}$; 24

422. 5 cm

423. $\dfrac{45}{4}$ cm

424. $\dfrac{90}{7}$ cm; $\dfrac{162}{7}$ cm; $\dfrac{80}{7}$ cm

425. 80 m, 60 m, 40 m

426. x = 15, y = 16

427. Considere $\overline{DE'}$, com E' em $\overline{AC}$, paralelo a $\overline{BC}$. Usando o teorema de Tales, prove que $CE' = CE$, donde obtém-se $E' = E$ e conseqüentemente $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{BC}$.

428. a) 4 b) 15 c) $\frac{20}{3}$

429. a) 12 b) 4

430. 30

431. 15

432. 5; 4

433. 8

434. a) 20 m ou 15 m b) 9 m

436. 30 cm

437. 42 m

438. 32 cm ou $\frac{81}{8}$ cm

439. 24 m, 36 m, 40 m

440. 15 cm, 36 cm, 45 cm

441. 40 cm

442. 40 cm

443. 15

444. BC = 5 cm;
AB = 6 cm;
AC = 4 cm;
CS = 10 cm

Capítulo XIII

445. a) 21; 18; 15 b) $\frac{3}{2}$

446. 16; 14

447. 28

448. $\frac{8}{3}$ cm; 6 cm; $\frac{16}{3}$ cm

449. a) 12 b) 40

450. 8 m, 10 m

452. 100 cm

453. 36 cm

454. 15 cm

455. $\frac{20}{3}$ cm; 8 cm; $\frac{16}{3}$ cm

456. 7,2 m

457. 21

458. 10 m, 12 m, 14 m

459. a) 5; 4 b) 12; 4

460. a) 9; $\frac{32}{3}$ b) 7; 10

461. a) 6; $\frac{10}{3}$ b) $\frac{15}{2}$; 5

462. a) 6 b) $\frac{24}{5}$

463. 12 cm

464. a) Use 1º caso de semelhança.
b) CD = 14

465. 4

466. $\frac{25}{3}$

467. $\frac{63}{5}$ cm

468. a) $\frac{8}{3}$
b) 21

469. $\frac{45}{4}$

470. $\frac{b^2}{a - b}$

471. 16

472. $\frac{12}{5}$

473. 3

474. 15 cm; 25 cm

475. 10 cm

476. 6; 10

477. $\frac{15}{2}$; $\frac{17}{2}$

478. 16 cm

479. 4 cm

480. 30 (2º caso de semelhança)

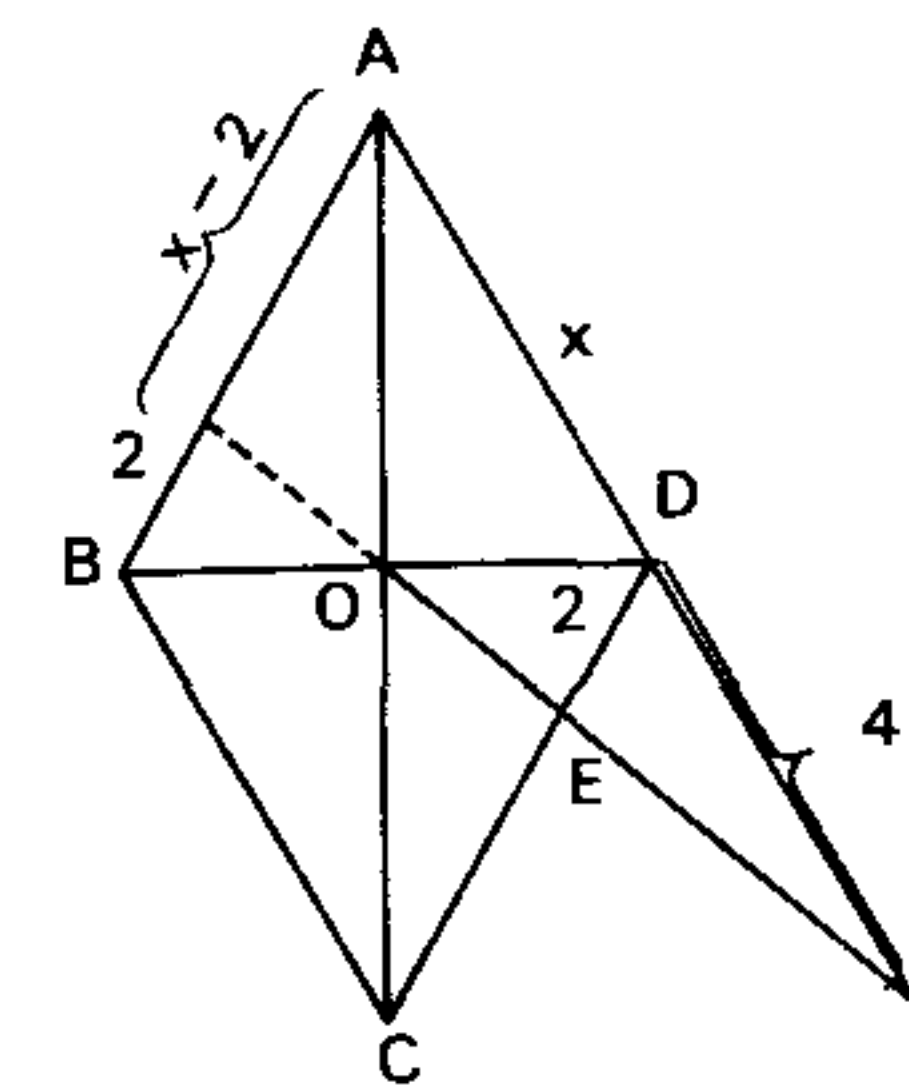
481. 21 cm

482. $\frac{65}{4}$ cm

483. $\triangle ADB \sim \triangle ACE \implies AD = 2$ cm

484. Trace o diâmetro $\overline{CD}$ e $\triangle ADC \sim \triangle HBA$:
R = 4.

485. $\frac{2Rr}{R + r}$

486. Prolongue $\overline{FO}$ e use semelhança: x = 8 m.

487. Trace a bissetriz interna $\overline{AS}$ do triângulo e use a semelhança entre $\triangle ACB$ e $\triangle SAB$.
$BC = 4\sqrt{6}$ m

488. Una A e B com Q. Dos quatro triângulos obtidos os opostos são semelhantes. Da semelhança obtém-se x = 6.

489. $AB = \sqrt{ab}$

490. Prove que $\triangle PST \sim \triangle RQP$.

491. a) 6 b) 9 c) 4 d) 4 e) 3 f) 3

492. a) $3\sqrt{17}$ b) 6

493. a) 65 b) 9

495. a) $2\sqrt{10}$ b) $2(1 + \sqrt{2})$

496. a) 16 b) 13

497. 20

500. 91

501. $6\sqrt{14}$ cm

502. $(\sqrt{2} - 1)R$

503. 2 cm ou 3 cm

504. 10 cm

505. $\hat{A}$ é comum aos triângulos e $A\hat{D}B \equiv A\hat{B}P$ (pois $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{AC}$).
Então são semelhantes pelo 1º caso.

Capítulo XIV

506. a) 5 b) 12 c) $\sqrt{7}$ d) $3\sqrt{3}$

507. a) $a\sqrt{3}$ b) $\frac{a}{2}$

508. a) 12 b) 24 c) 20 d) 8

509. a) $2\sqrt{29}$ b) 9

510. Não esqueça de
$b^2 + a^2 = n^2$,
$c^2 + a^2 = m^2$,
$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2}$.

511. a) 6 b) 3 c) 8 d) 9

512. $\frac{60}{13}$; $\frac{25}{13}$; $\frac{144}{13}$; 13

513. a) 10; $\frac{24}{5}$ b) 4; $4\sqrt{3}$

514. a) $3\sqrt{5}$ b) 2

515. 5; $\frac{144}{13}$; $\frac{25}{13}$; $\frac{60}{13}$

516. a) 9 b) 5 c) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$

517. a) 12 b) $5\sqrt{3}$

518. a) 13 b) $6\sqrt{2}$

519. a) $4\sqrt{2}$ b) 6

520. a) 6 b) 12 c) 5 ou 45 d) 17

521. a) 17 b) 10

522. a) 5 b) 10

523. $4\sqrt{3}$

524. a) 5 b) 4 c) $\frac{11}{4}$ d) 4

525. a) 6 b) 12 c) $2\sqrt{7}$

526. a) $2\sqrt{13}$ b) 7

527. a) 12 b) 12

528. a) 6 m b) 17 m

529. a) $\frac{48}{5}$ b) 12

530. a) 2 m b) $\frac{24}{5}$ m

531. a) $\frac{52}{5}$ b) 6

532. $5\sqrt{2}$ m

533. $2\sqrt{13}$ m

534. 24 m

535. $4\sqrt{3}$ m

536. $12\sqrt{3}$ m

537. 8 m

538. $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ m

539. $\frac{48}{5}$ m

540. 17 m

541. 5 m e 10 m

542. 10 m

543. 10 m

544. 30 m e 16 m

545. 8 m

546. $\frac{48}{5}$ cm, $\frac{36}{5}$ cm, $\frac{64}{5}$ cm

547. 5; $\frac{9}{5}$; $\frac{16}{5}$; $\frac{12}{5}$

548. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

549. 2 m

550. 20 m; 15 m

551. $\frac{16}{9}$

552. $30\sqrt{13}$ km

553. 3 m

554. 8

555. 3 cm

556. $2\sqrt{Rr}$

557. 10

558. 36 cm

559. 12 cm

560. 12 cm

561. 21 cm

562. 12 cm

563. $8\sqrt{15}$ cm

564. $8\sqrt{2}$ cm

565. $2\sqrt{xy}$

566. 5 cm

567. 12

568. $\sqrt{b^2 - 3}$, $b > \sqrt{3}$

569. 12 cm

570. 5 cm

571. $12\sqrt{3}$ cm ou $6\sqrt{7}$ cm

572. 10 m

573. $\frac{r}{3}$

574. 4

575. $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

576. $\frac{(3 - 2\sqrt{2})a}{2}$

577. $\frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$

578. 30 cm

579. (1) Considerando E entre as montanhas, obtém-se 3 478 m aproximadamente.
(2) Considerando a menor entre E e a maior, obtém-se aproximadamente 1 421 m.

580. 6 cm

581. $\frac{R}{5}$

582. $24(\sqrt{2} + 1)$ cm

583. $\frac{5\sqrt{2}\,a}{6}$

584. 3 m

585. $4(3 + \sqrt{3})$ cm

586. 48 cm, 50 cm, 64 cm, 36 cm, 14 cm, 100 cm

587. $\frac{2a^2r}{a^2 - 4r^2}$

588. $\frac{\sqrt{2}\,bc}{b + c}$

589. Use Pitágoras.

590. $\frac{2h}{a}(h + \sqrt{h^2 - a^2})$

591. Note que o $\triangle EOC$ é retângulo em O.

592. Use o teorema das bissetrizes.

593. Sendo O o ponto médio de $\overline{AB}$, o $\triangle EOD$ é retângulo em O.

594. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{5}$

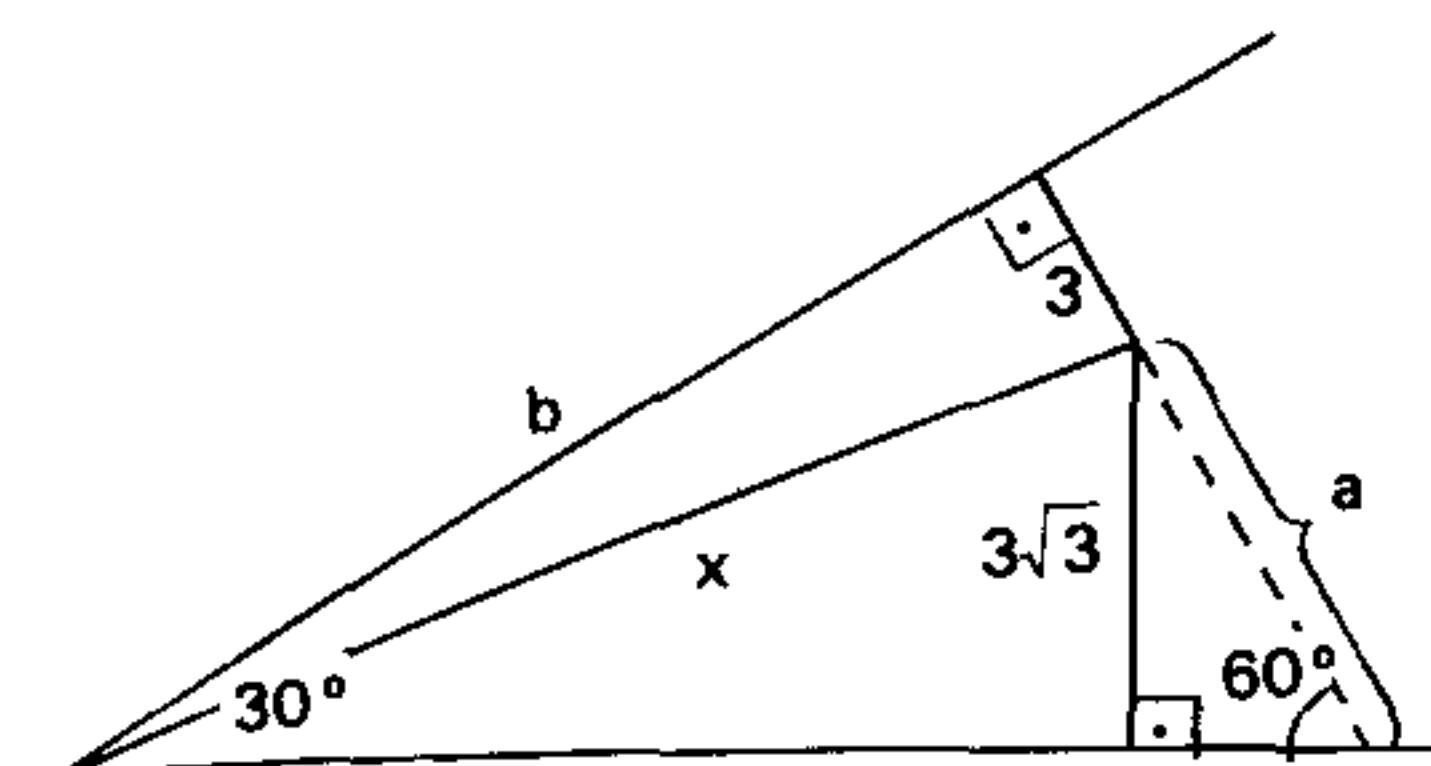
595. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{11}}{6}$

596. a) $\frac{4}{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{4}{3}$

597. a) 10 b) $3\sqrt{2}$ c) 10

598. a) $6\sqrt{2}$ c) 36
b) $2\sqrt{3}$ d) $16\sqrt{3}$

599. a) 6; $6\sqrt{3}$
b) 8; $4\sqrt{3}$
c) $6\sqrt{2}$; 6
d) 18; $6\sqrt{5}$
e) 12; 10

600. a)

Prolongando o segmento de 3, acha-se a, depois b e depois de $x^2 = b^2 + 3^2$ obtém-se $x = 6\sqrt{7}$.

b) Prolongando o segmento de $\sqrt{3}$ até encontrar os dois lados do ângulo de 60°, obtém-se um triângulo equilátero, donde $x = 6$.

601. $8\sqrt{3}$ m

602. $6\sqrt{3}$ m

603. $4\sqrt{5}$ m

604. $3\sqrt{2}$ m

605. $2\sqrt{5}$ m

606. $\sqrt{3}$ m

607. $2\sqrt{21}$ m

608. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m

609. 12 m

610. 45°

611. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

612. $15(3 + \sqrt{3})$ m

613. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}\,a$

614. $\sqrt{3}\,b$

615. $\frac{5\text{ m}}{2}$

616. 30°

617. $20\sqrt{3}$ cm e 240 cm

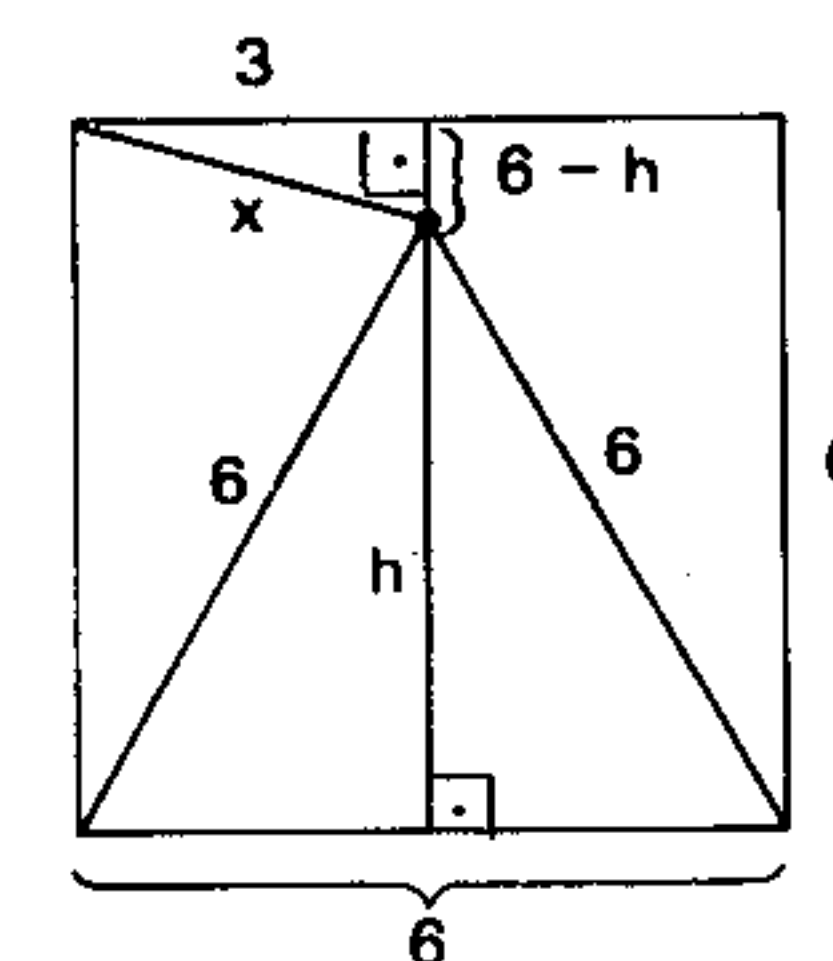
618. $\frac{1}{2}$

619. 2 dm

620. $\frac{9}{5}r$

621. $\frac{a}{2}(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha - 1)$

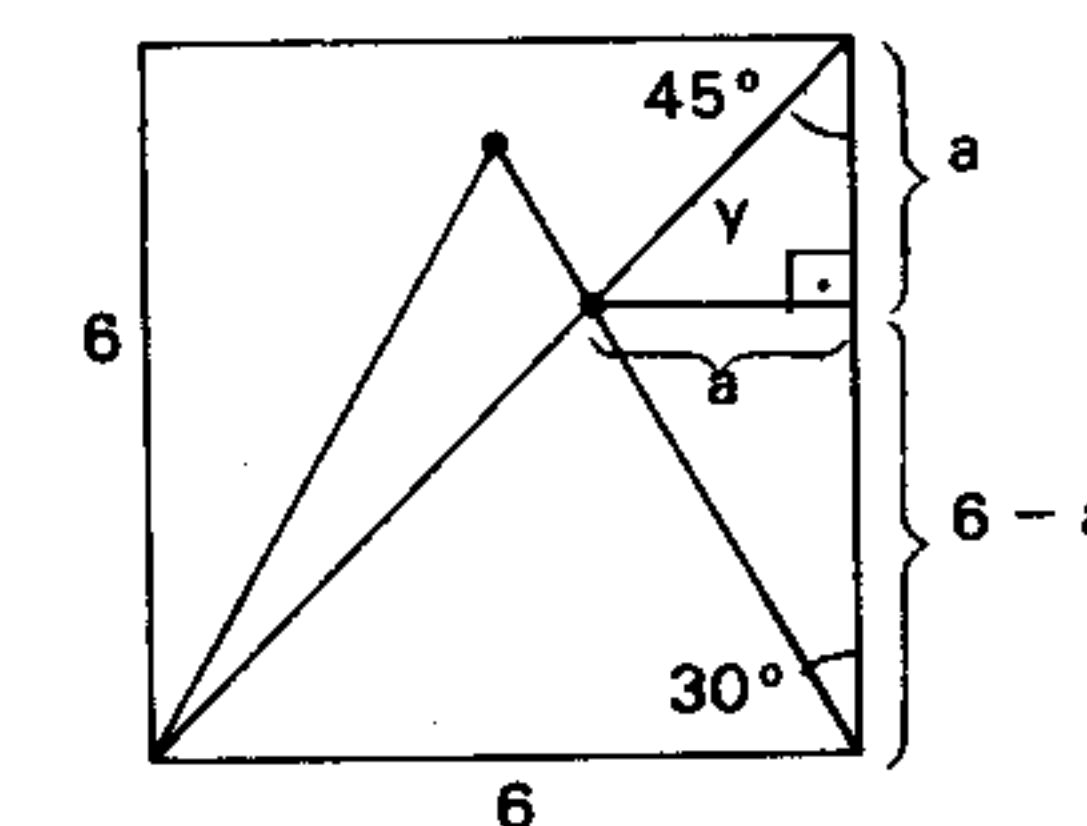
622. $2(\sqrt{3} + 1)$ cm

623. a) *Cálculo de x*

Considerando as medidas indicadas na figura, temos:

$$\begin{cases} h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \\ x^2 = 3^2 + (6 - h)^2 \end{cases}$$

Então: $x^2 = 9 + (6 - 3\sqrt{3})^2 \Longrightarrow$

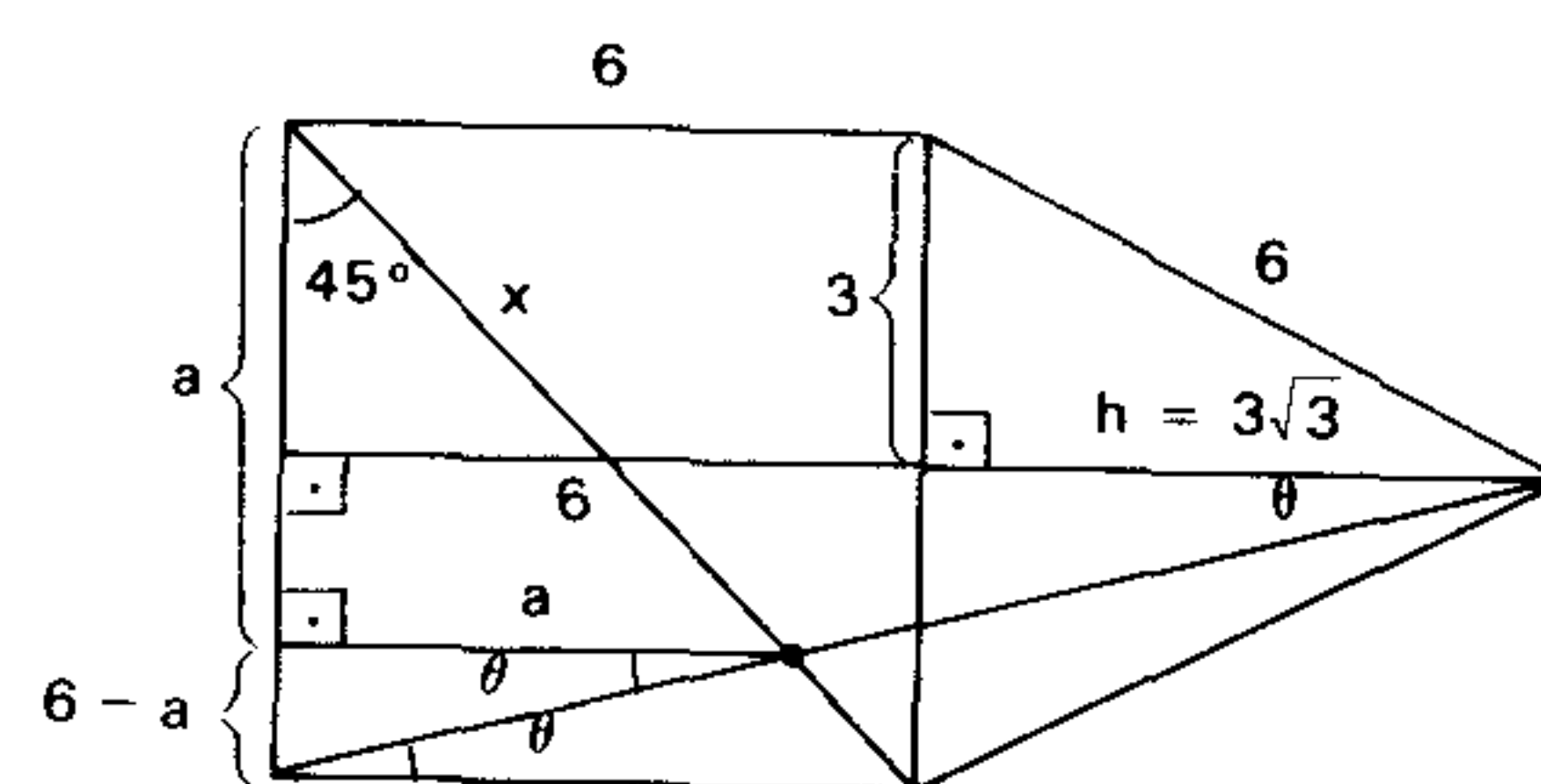
$\Longrightarrow x = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ou $x = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Cálculo de y

$\text{tg}\,30° = \frac{a}{6 - a} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{6 - a} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a = 3(\sqrt{3} - 1)$

$\text{sen}\,45° = \frac{a}{y} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{y} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y = a\sqrt{2} = y = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

b) Considerando as medidas indicadas na figura, temos:

$$\begin{cases} \text{tg } \theta = \dfrac{3}{6 + 3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ \text{tg } \theta = \dfrac{6 - a}{a} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{6-a}{a} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \Longrightarrow a = 3 + \sqrt{3}$$

Agora: $\text{sen } 45° = \dfrac{a}{x} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{x} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$

Capítulo XV

624. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

625. a) $6\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{6}$

626. a) $4\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{2}$

627. a) $6\sqrt{2}$ b) $12\sqrt{2}$

628. a) 105° b) 45° ou 135°

629. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm

630. $10\sqrt{3}$ cm

631. 30°

632. Lei dos senos e propriedade das proporções.

633. Lei dos senos e propriedade das proporções.

634. Lei dos senos e propriedade das proporções.

635. a) $\frac{17}{4}$ b) 3

636. a) 3; 4 b) 1; $2\sqrt{2}$

637. a) 3 b) $2\sqrt{3}$

638. a) 14 b) 5 c) 10 d) $2\sqrt{6\sqrt{3} + 13}$

639. a) 60° b) 120°

640. 14 cm e $2\sqrt{129}$ cm

641. a) acutângulo b) obtusângulo c) retângulo d) acutângulo e) obtusângulo

642. obtusângulo

643. 12 m

644. 6 m

645. 24 m

646. 8 cm

647. 6 cm

648. 12 cm

649. $\frac{8}{5}$ cm; $\frac{58}{5}$ cm

650. $\frac{19}{8}$ cm

651. Não, pois o triângulo teria dois ângulos obtusos.

652. 2

653. $\frac{11}{16}$

654. 20

655. $\frac{15}{2}$

656. zero

657. $\frac{\ell}{2}$

658. $13\sqrt{3}$

659. $5\sqrt{10}$ cm

660. $\sqrt{46}$ cm

661. $4\sqrt{7}$ m; $4\sqrt{19}$ m

662. $6\sqrt{7}$ cm; $6\sqrt{3}$ cm, 24 cm

663. Não, use a lei dos cossenos.

664. $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

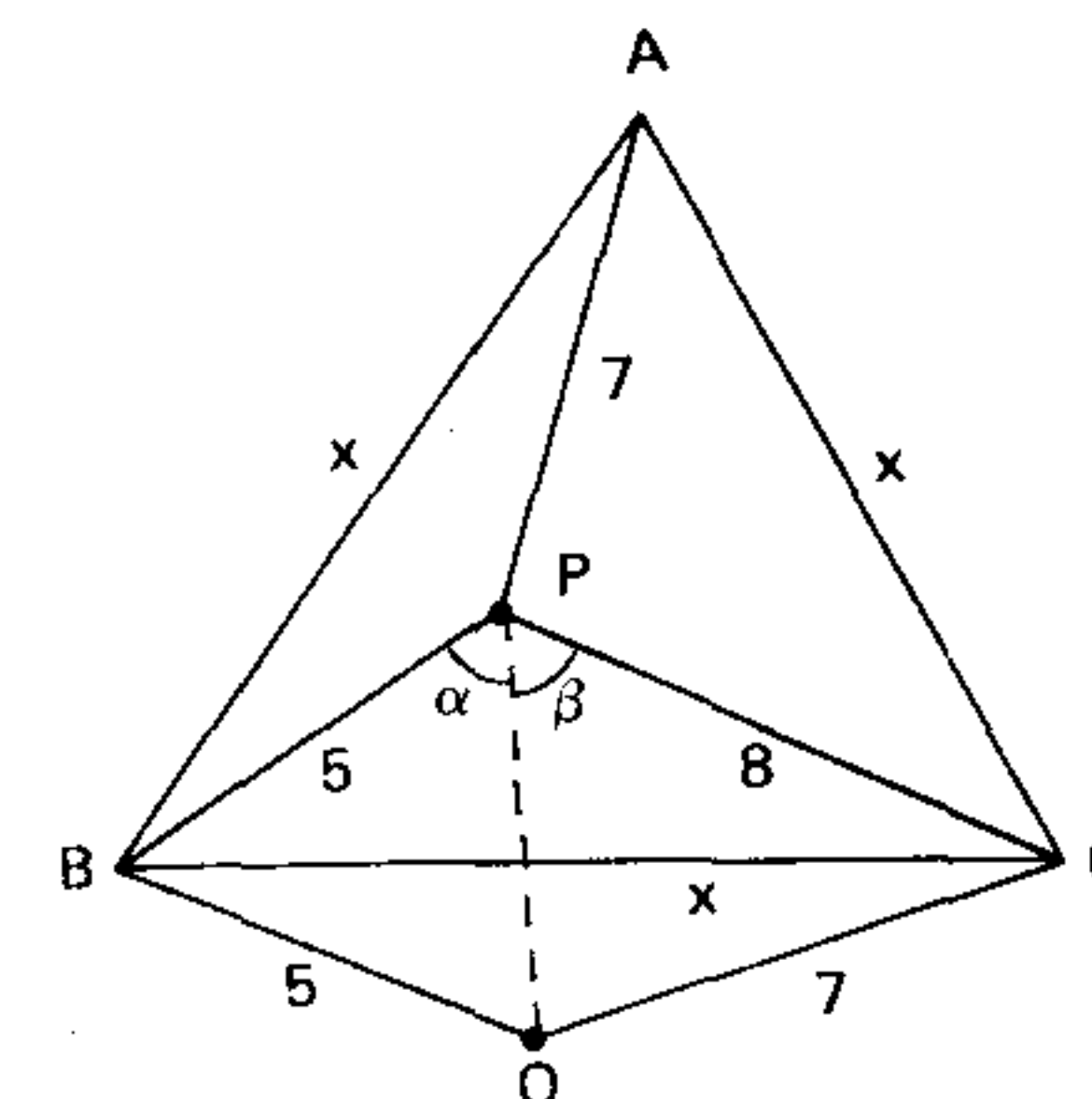
665. Vide teoria.

666. Vide teoria.

667. 60°

668. $3(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm;
$3\sqrt{4\sqrt{3} + 10}$ cm
$3\sqrt{4\sqrt{3} + 14}$ cm

669. Note que $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são suplementares. Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos *ABD* e *CBD*, obtém-se $BD = 14$ m.

670.

1) Considere um ponto Q externo ao triângulo $BQ = 5$ e $CQ = 7$. Note que $\triangle PBA \equiv \triangle QBC$ (*LLL*), donde obtém-se $P\hat{B}Q = 60°$. Então $\triangle PBQ$ é equilátero. Logo, $B\hat{P}Q = 60°$ ($\alpha = 60°$).
2) Aplique lei dos cossenos no $\triangle PQC$. Obtém-se $\beta = 60°$.
3) $\alpha = 60°$, $\beta = 60° \Longrightarrow B\hat{P}C = 120°$. Aplique lei dos cossenos no $\triangle BPC$. Obtém-se $x = \sqrt{129}$ cm.

671. $4\sqrt{2}$

672. $3\sqrt{2}$

673. $6\sqrt{6}$

674. a) 3 b) $\sqrt{19}$

675. $\frac{3}{4}$

676. $\frac{8\sqrt{14}}{3}$ m; $\frac{8\sqrt{14}}{5}$ m; $\frac{4\sqrt{14}}{3}$ m

677. $2\sqrt{6}$ cm; $\frac{\sqrt{105}}{2}$ cm; $12\sqrt{7}$ cm

678. $\dfrac{\sqrt{m^2c^2 + n^2b^2 + mn(b^2 + c^2 - a^2)}}{m + n}$

679. 6; 8

680. 18; 9

681. Ver teoria, item 206.

682. Ver teoria, item 207.

683. Ver teoria, item 209.

684. Ver teoria, item 210.

Capítulo XVI

685. a) 60°, 30°, 30° b) 36°, 72°, 108°

686. 15°

687. 9°

688. 360 lados

689. 24°

691. a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 2 f) 3 g) $\frac{n-2}{2}$ h) $\frac{n-3}{2}$

692. 2 160° ou 2 340°

693. 126

694. 1 800°

695. 18

696. 2 520°

697. 17

698. 54

699. 20 e 24

700. a) $3\sqrt{3}$ m b) $2\sqrt{3}$ m c) $\sqrt{3}$ m d) $\sqrt{3}$ m

701. a) $8\sqrt{2}$ m b) $4\sqrt{2}$ m c) 4 m d) 4 m

702. a) 12 m b) 6 m c) $3\sqrt{3}$ m d) $6\sqrt{3}$ m e) $3\sqrt{3}$ m

703. a) $6\sqrt{2}$ m b) 12 m c) $4\sqrt{3}$ m

704. a) $6\sqrt{2}$ m b) 6 m c) $6\sqrt{3}$ m

705. a) 3 m b) $3\sqrt{3}$ m c) $\sqrt{3}$ m

706. a) 12 m b) $4\sqrt{3}$ m c) $12\sqrt{3}$ m

707. a) $6\sqrt{2}$ cm b) $6\sqrt{3}$ m c) 6 m

708. a) $6\sqrt{2}$ m b) $4\sqrt{3}$ m c) 12 m

709. a) 2 cm b) $4\sqrt{3}$ cm c) 2 cm d) 4 cm

710. a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm   c) $5\sqrt{3}$ cm

b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

711. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

712. $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

713. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

714. $R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $\frac{R\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

715. $\frac{2}{3}$

716. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

717. $(\sqrt{5} - 1)$ m

718. Vide problema 4 da teoria.

719. Note que o apótema do decágono regular, o raio *R* da circunscrita e a metade do lado do decágono formam um triângulo retângulo com um ângulo agudo de 18°.

Obtém-se sen $18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

720. Vide problema 5 da teoria.

721. Note que a_5, $\frac{\ell_5}{2}$ e R formam um triângulo retângulo com um ângulo de 36°. Daí vem:

$\text{sen } 36° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$.

723. $\cos 72° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

$\cos 54° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

$\text{sen } 54° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

724. Use a lei dos senos, ℓ_5 e o resultado do problema anterior.

a) $\text{sen } 72° = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}$

b) $\cos 18° = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}$

725. O ângulo central ao qual ℓ_8 é oposto mede 45°. Então: $\ell = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

726. $R = \frac{\ell}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

727. $\ell\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$; $\ell(\sqrt{2} + 1)$; $\ell\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

728. a) $R = \frac{\ell}{2}(\sqrt{5} + 1)$

b) $AE = \ell\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

c) $AC = \ell_5 = \frac{\ell}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

d) $AD = \frac{\ell}{2}\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$

729. $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$

730. $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$

731. $d = \frac{\ell}{2}(\sqrt{5} + 1)$ [Use o problema anterior.]

732. a) Como os triângulos *A'AB*, *B'BC*, *C'CD*, *D'DE* e *E'EA* são congruentes e isósceles de bases $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$, concluímos que $\hat{A}' = \hat{B}' = \hat{C}' = \hat{D}' = \hat{E}'$ (1) e por diferença obtemos

$A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'$ (2).

De (1) e (2) decorre que *A'B'C'D'E'* é pentágono regular.

b) Aplique duas vezes o problema 728. Obtém-se $\frac{\ell}{2}(3 - \sqrt{5})$.

Capítulo XVII

733. a) 16π m   b) 26π cm   c) 12π m

734. a) 45π cm   b) 30π cm   c) 36π cm

735. a) 48π cm   b) 16π cm

736. a) 12π m   b) 32π m

737. 205π cm

738. 280π m

739. 8π cm

740. $\frac{5}{2}$ cm

741. 2 cm

742. $\frac{3}{2}$ cm

743. a) $\frac{\pi d}{12}$ e) $\frac{\pi d}{3}$

b) $\frac{\pi d}{8}$ f) $\frac{3\pi d}{8}$

c) $\frac{\pi d}{6}$ g) $\frac{5\pi d}{12}$

d) $\frac{\pi d}{4}$

744. 2π m

745. Aumenta em 4π m.
Aumenta em 6π m.
Aumenta em $2\pi a$ m.

746. $\frac{1}{2\pi}$

747. Duplica.

748. 180°

749. $\frac{5}{2\pi}$ m

750. 50%

751. 2 rad

752. Aumenta $2\pi k$.

753. $\frac{2\pi R}{G}$ rad

755. $\frac{150}{\pi}$ m

756. 10 350; 94

757. $\frac{5}{4}$ m; 200π m

758. π cm

759. Aproximadamente 314 m.

760. $\frac{300}{\pi}$ cm

761. 125 cm

762. Aproximadamente 95 m.

763. É igual.

764. Aproximadamente 15 900.

765. $\frac{45}{\pi}$ cm

766. $\frac{3}{\pi}$ cm

767. $\frac{4}{5}$ rad

768. 5π cm

769. $4\sqrt{2\pi}$ cm

770. 2

771. $5\sqrt{2\pi}$ cm

772. 4 cm; $16\sqrt{2}$ cm

773. $20(3 + \pi)$ cm

774. $4(3\sqrt{3} + 2\pi)$ cm

775. Use o teorema de Pitágoras.

Capítulo XVIII

776. a) I ≈ III
b) I ≈ II ≈ III
c) I ≈ II
d) I ≈ II ≈ III
e) I ≈ II

778. Mesma base e mesma altura.

779. Sim. Base horizontal igual a base vertical e alturas relativas iguais.

780. Não.

781. Não; a base do triângulo é o dobro mas a altura não é a mesma do quadrado (é $\frac{2}{3}$ dela).

782. Não; mesma base e alturas diferentes.

783. Dobrará.

784. A diagonal divide o paralelogramo em triângulos equivalentes. Por diferença concluímos que os retângulos sombreados são equivalentes.

785. Vide exercício anterior.

786. Sim; vide teoria.

787. Vide teoria.

788. Vide teoria.

789. Como os quadrados maiores são congruentes e os triângulos retângulos são congruentes obtemos: $P_1 \approx P_2 + P_3$.

790. $\left.\begin{array}{l}\triangle PAB \approx \triangle DAB \\ \triangle P'A'B' \approx \triangle D'A'B'\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle DAB \approx \triangle D'A'B'$

E como a diagonal do retângulo o divide em triângulos equivalentes, concluímos que os retângulos são equivalentes.

791. Considere os triângulos *CBG* e *ABE*. Pelo LAL eles são congruentes. Do problema anterior deduzimos que o quadrado e o retângulo sombreados são equivalentes.

792. Aplique duas vezes o exercício anterior. O resto sai por soma.

Capítulo XIX

793. a) $36\ m^2$ b) $40\ m^2$ c) $18\ m^2$ d) $24\ m^2$ e) $32\ m^2$ f) $40\ m^2$ g) $40\ m^2$ h) $12\ m^2$ i) $18\ m^2$ j) $15\ m^2$ k) $21\ m^2$ l) $24\ m^2$

794. a) 6 m b) 10 m c) 4 m d) 2 m e) 3 m f) 4 m

795. 6 m

796. a) $120\ m^2$ b) $48\sqrt{3}\ m^2$ c) $81\sqrt{3}\ m^2$

797. a) $28\ m^2$ b) $90\sqrt{3}\ m^2$ c) $24\ m^2$

798. a) $60\ m^2$ b) $48\ m^2$ c) $16\sqrt{3}\ m^2$ d) $9\sqrt{5}\ m^2$ e) $32\sqrt{3}\ m^2$ f) $18\sqrt{3}\ m^2$ g) $12\sqrt{3}\ m^2$ h) $72\sqrt{2}\ m^2$ i) $14\ m^2$

799. a) $120\ m^2$ b) $72\sqrt{2}\ m^2$ c) $96\sqrt{3}\ m^2$

800. a) $210\ m^2$ b) $180\ m^2$ c) $30\ m^2$ d) $32\sqrt{3}\ m^2$ e) $21\sqrt{3}\ m^2$ f) $30\sqrt{3}\ m^2$

801. $80\ m^2$

803. a) $20\ m^2$ b) $2(25\sqrt{3} + 48)\ m^2$

804. 4 cm

805. 4 cm; 6 cm

806. 12 cm; 6 cm

807. $24\ cm^2$

808. 10 cm; 6 cm

809. $112\ cm^2$

810. $135\ cm^2$

811. $864\ cm^2$

812. $\frac{25\sqrt{3}}{36}$

813. 8 cm

814. $\frac{729}{4}\ cm^2$

815. $\frac{17}{15}$

816. $\frac{2\sqrt{2}d^2}{9}$

817. $A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

818. a) $25\sqrt{3}\ m^2$ b) $12\sqrt{3}\ m^2$

819. a) $96\sqrt{3}\ m^2$ b) $24\sqrt{3}\ m^2$ c) $72\sqrt{3}\ m^2$

820. a) $2\sqrt{2}$ m b) 6 m c) $4\sqrt{3}$ m

821. a) $50\ m^2$ b) $24\sqrt{3}\ m^2$ c) $27\sqrt{3}\ m^2$ d) $64\ m^2$ e) $72\sqrt{3}\ m^2$ f) $75\sqrt{3}\ m^2$

822. a) $\sqrt{6}$ m b) $\sqrt{3}$ m c) $\sqrt{3}$ m

824. $36\ m^2$

825. $54\ m^2$

826. $100\ m^2$

827. $60\ m^2$

828. $108\ m^2$

829. $84\ m^2$

830. $33\sqrt{3}\ m^2$

831. $116\ m^2$

832. $96\ m^2$

833. $45\sqrt{5}\ m^2$

834. $256\ m^2$

835. $95\ m^2$

836. 24 m

837. $600\ m^2$

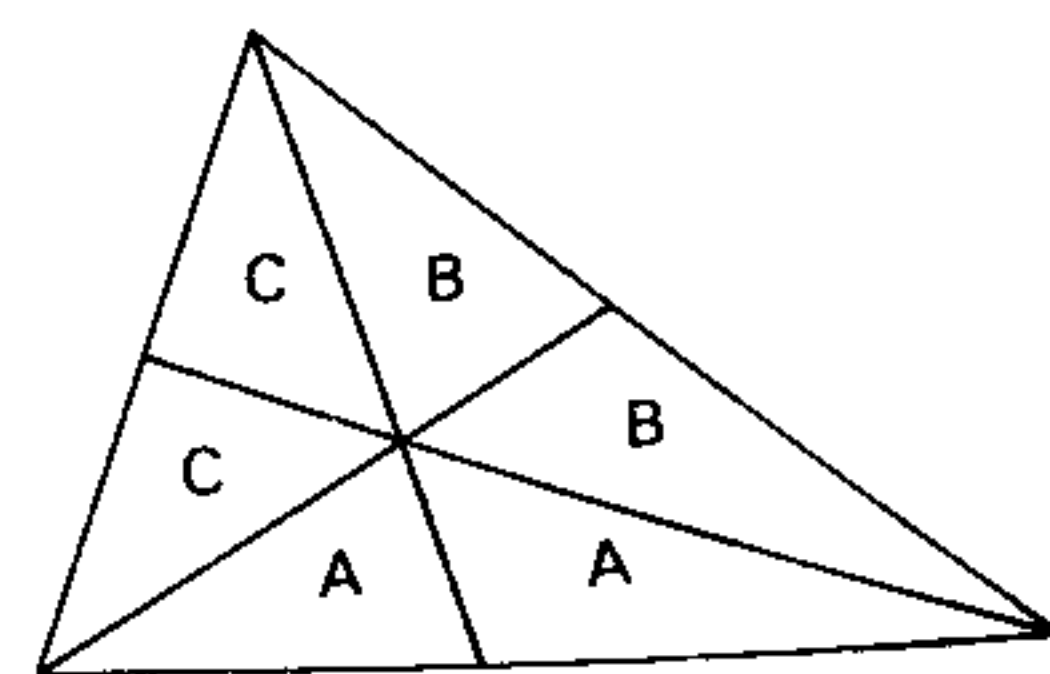
838. $96\ m^2$

839. 3 m; $15\ m^2$

840. $24\ m^2$

841. Cada triângulo lateral tem o dobro da área do triângulo dado.

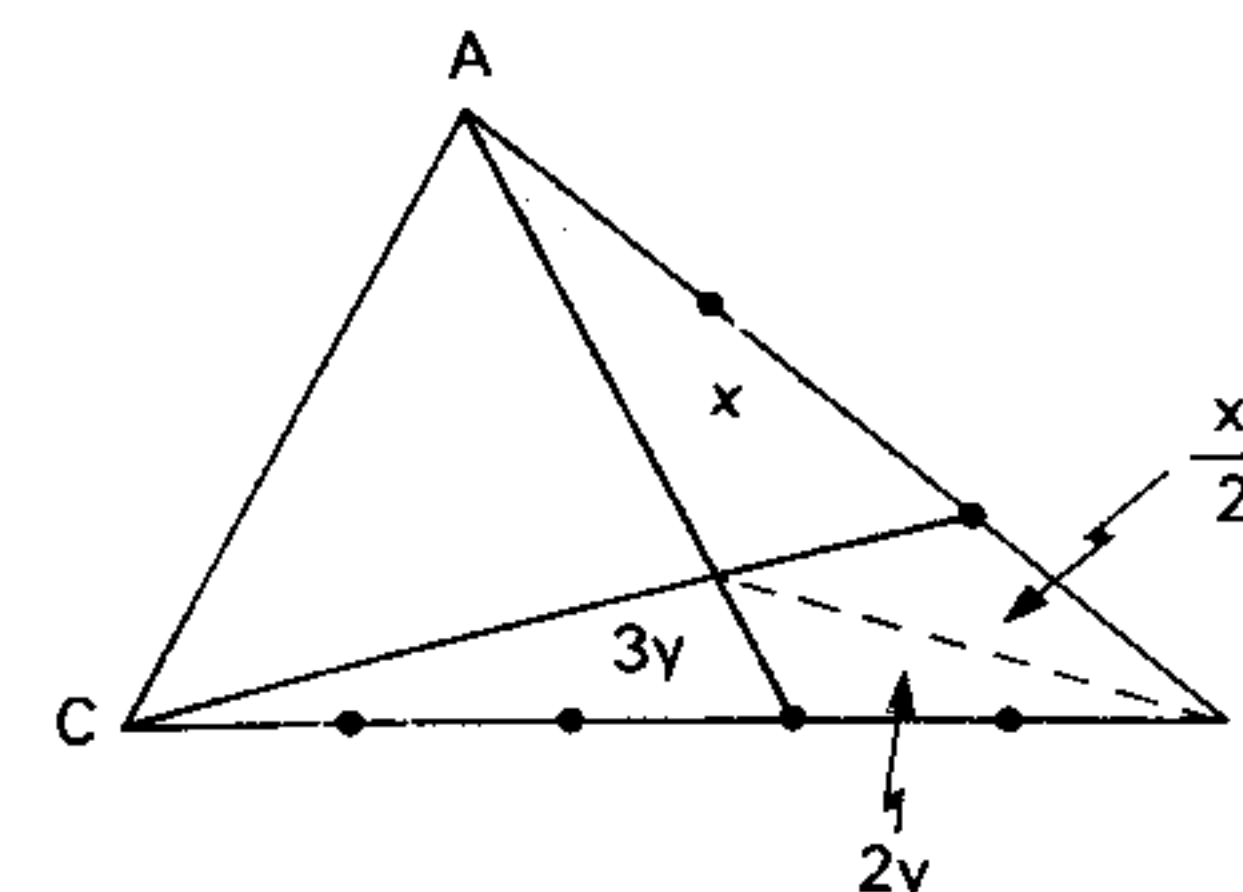
842. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} b \cdot h_1}{\frac{1}{2} b \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$

843.

As áreas indicadas por letras iguais são iguais porque os triângulos têm bases congruentes e alturas iguais.
Pela mesma razão, temos:
2B + A = 2C + A, donde B = C.
Analogamente obtém-se A = B.

844. a) $\frac{1}{3}$ k b) $\frac{2}{5}$ k c) $\frac{3}{8}$ k d) $\frac{11}{24}$ k

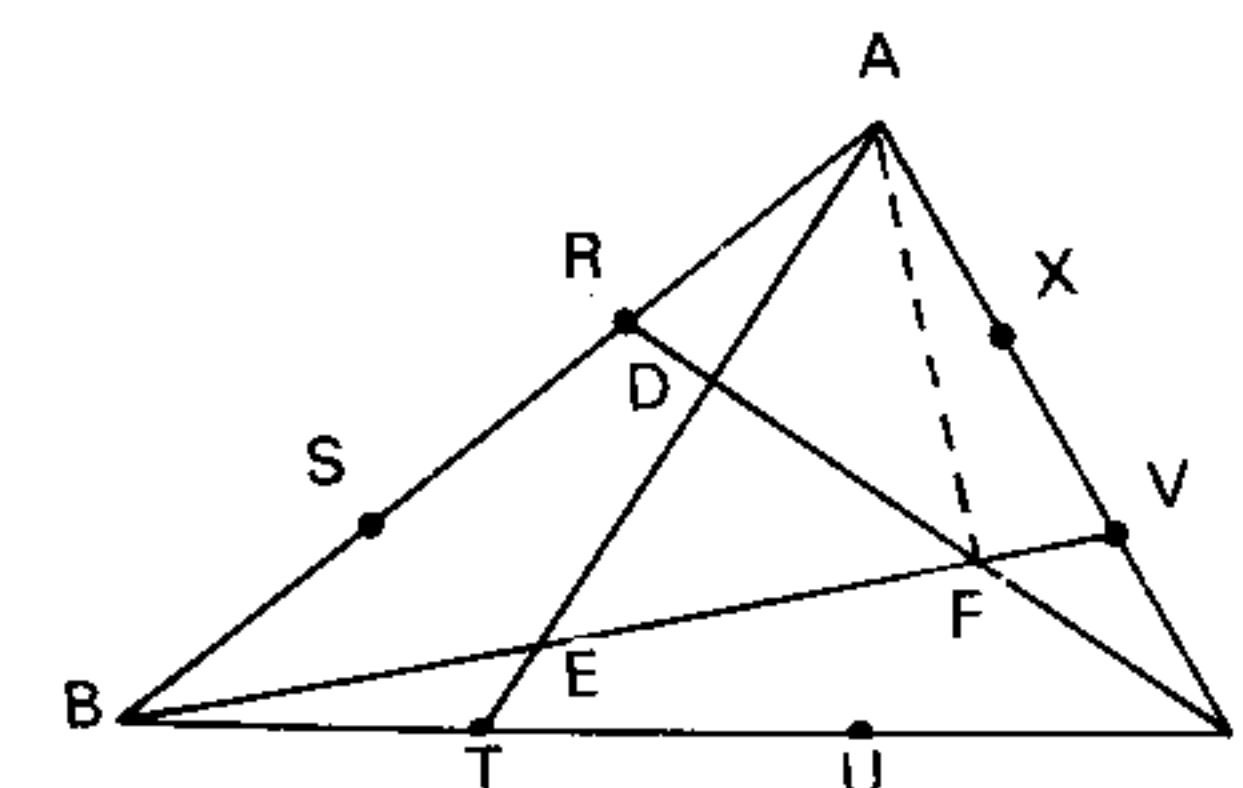
845. a) $\frac{17}{60}$ k b) $\frac{1}{3}$ k

846. Observe que o ponto *E* é baricentro do $\triangle$BDC.
Daí sai que área EMC = $\frac{1}{12}$ S.

847.

Observe as notações x, $\frac{x}{2}$, 3y e 2y na figura e ainda que:

$$\begin{cases} x + \frac{x}{2} + 2y = 2\frac{k}{5} \\ \frac{x}{2} + 5y = \frac{k}{3} \end{cases}$$

Daí conclui-se que $x = \frac{8}{39}$ k.

848.

Ligue *A* com *F*. Sendo *x* a área do $\triangle$FVC, a área do $\triangle$FVA será 2x.
Sendo *y* a área do $\triangle$FAR, a área do $\triangle$FBR será 2y.
Observe que:

$3x + y = \frac{1}{3}$ k e

$2x + 3y = \frac{2}{3}$ k

Daí sai $x = \frac{1}{21}$ k e $y = \frac{4}{21}$ k.

Use analogia e chegue à resposta, que é área DEF = $\frac{1}{7}$ k.

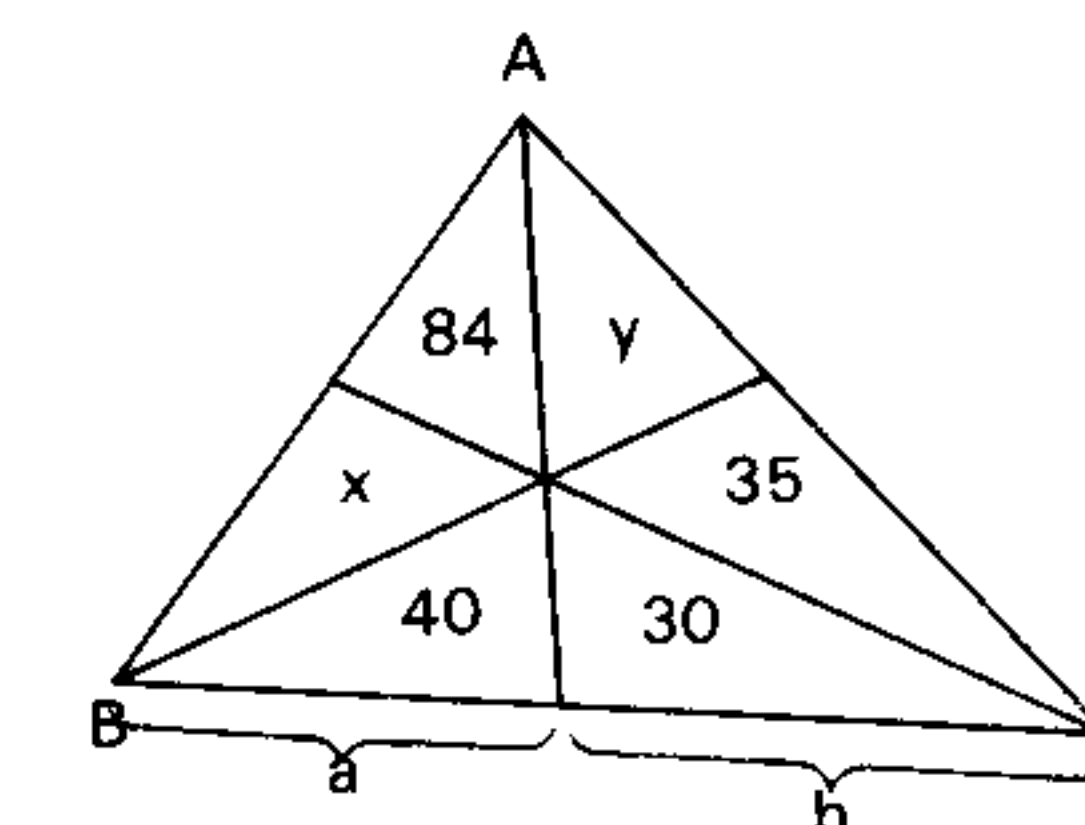
849. $2(\sqrt{2} + 1)\ \ell^2$

850. $\frac{5}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\ \ell^2$

851. $\frac{\ell^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$

852. $\frac{r^2}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

853. $r^2(2 - \sqrt{2})$

854.

Observe que:

$\frac{84 + x + 40}{y + 35 + 30} = \frac{a}{b}$ e $\frac{40}{30} = \frac{a}{b}$

Siga este caminho e ache x = 56 e y = 70.
Daí se deduz que a área pedida é 315.

855. a) $30\ m^2$ b) $12\sqrt{2}\ m^2$ c) $9\sqrt{3}\ m^2$

856. $S = 2A_\triangle = 2\left(\frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \alpha\right)$

$S = ab \operatorname{sen} \alpha$

857. a) $90\ m^2$ b) $36\sqrt{3}\ m^2$ c) $40\sqrt{2}\ m^2$ d) $96\sqrt{3}\ m^2$

858. $32\ m^2$

859. $162\ m^2$

860. Some as áreas dos quatro triângulos.

861. a) $10\sqrt{3}\ m^2$ b) $24\sqrt{6}\ m^2$ c) $8\sqrt{21}\ m^2$

862. a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{160\sqrt{231}}{231}$

863. a) $8\sqrt{14}\ m^2$ b) $\frac{4\sqrt{14}}{3}$ m c) $\frac{8\sqrt{14}}{3}$ m d) $\frac{4\sqrt{14}}{7}$ m e) $\frac{45\sqrt{14}}{28}$ m

864. $4\sqrt{3}$

865. $50\sqrt{3}\ cm^2$

866. $320\ cm^2$

867. $12\ a^2$

868. $48\ cm^2$

869. $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{3}$

870. $48\sqrt{3}\ cm^2$

871. $270\ cm^2$

872. $150\ cm^2$

873. $\dfrac{bc}{4}$

874. a^2

875. $2(\sqrt{3} + 1)\ cm^2$

876. $\dfrac{700\sqrt{3}}{11}\ m^2$

877. $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

878. $3\sqrt{3}\ r^2$

879. Use Pitágoras.

880. $\dfrac{9}{4}$

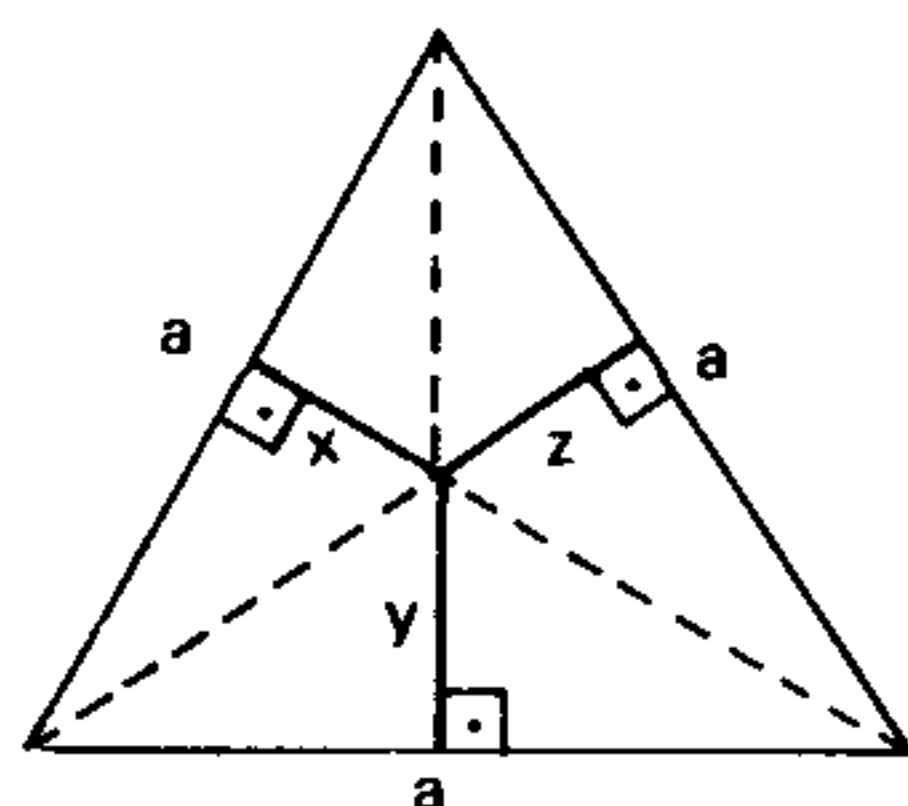
881. 3 cm

882. $\dfrac{25}{8}$ cm

883. $\dfrac{25}{12}$

884. $12(\sqrt{2} + 1)$ cm

885. $50\sqrt{3}\ m^2$

886.

$$\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{ah}{2}$$

$x + y + z = h$

887. $\dfrac{\sqrt{2}\ ab}{4}$

888. a) Ligue B com D e some as áreas dos triângulos:

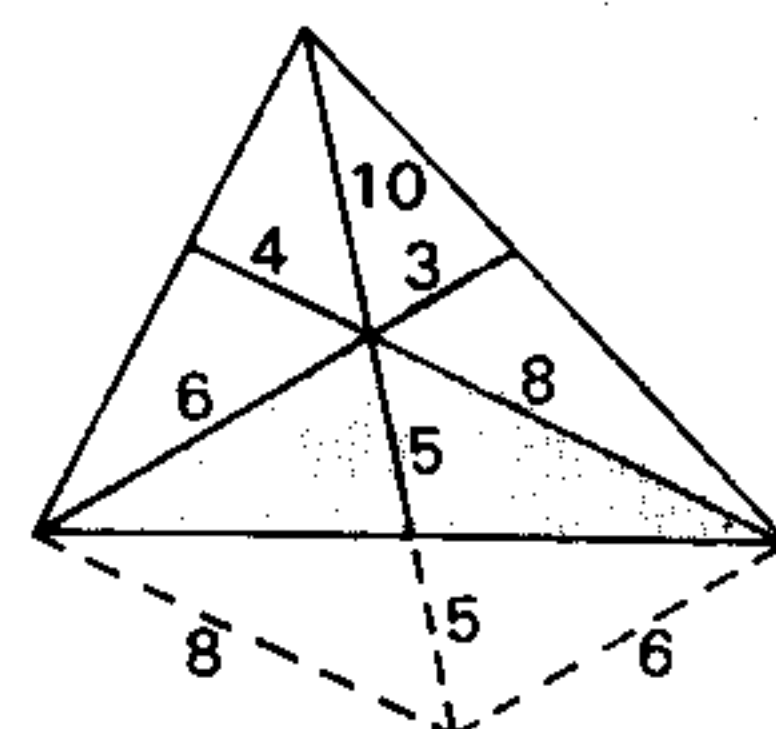
$16\sqrt{3}\ m^2$

b) Prolongue $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e subtraia as áreas dos triângulos:

$46\sqrt{3}\ m^2$

889. Prolongue os lados de modo a obter triângulos equiláteros:

$52\sqrt{3}\ m^2$

890.

A área pedida é 3 vezes a área do triângulo sombreado:
72 m^2

891. Obtenha 2 triângulos: um de altura $2a$ e outro de altura $2b$:

$\dfrac{4ab}{\text{sen}\ \alpha}$

892. a) $25\pi\ m^2$; 10π m
b) $36\pi\ m^2$; 12π m
c) $\dfrac{\pi d^2}{4}$; πd
d) $52\pi\ m^2$; $4\sqrt{13}\ \pi$ m
e) $36\pi\ m^2$; 12π m
f) $81\pi\ m^2$; 18π m
g) $81\pi\ m^2$; 18π m

893. a) $100\pi\ m^2$ b) $289\pi\ m^2$

894. a) $84\pi\ m^2$ c) $48\pi\ m^2$
b) $25\pi\ m^2$

895. a) $4\pi\ m^2$ c) $30\ m^2$
b) $7\pi\ m^2$ d) $18\ m^2$

896. a) $900\pi\ cm^2$ d) $1\,200\pi\ cm^2$
b) $600\pi\ cm^2$ e) $170\pi\ cm^2$
c) $450\pi\ cm^2$ f) $\dfrac{105}{2}\ \pi\ cm^2$

897. a) $\dfrac{9}{2}(\pi - 2\sqrt{2})\ m^2$
b) $3(\pi - 3)\ m^2$
c) $3(4\pi - 3\sqrt{3})\ m^2$

898. a) $12(2\pi - 3\sqrt{3})\ m^2$
b) $36(\pi - 2)\ m^2$
c) $18(3\pi - 2\sqrt{2})\ m^2$
d) $12(5\pi - 3)\ m^2$

899. $16\pi\ cm^2$

900. a) $\dfrac{\pi r^2}{12}$ e) $\dfrac{\pi r^2}{3}$
b) $\dfrac{\pi r^2}{8}$ f) $\dfrac{3\pi r^2}{8}$
c) $\dfrac{\pi r^2}{6}$ g) $\dfrac{5\pi r^2}{12}$
d) $\dfrac{\pi r^2}{4}$

901. a) $\dfrac{(\pi - 3)R^2}{12}$
b) $\dfrac{(\pi - 2\sqrt{2})R^2}{8}$
c) $\dfrac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$
d) $\dfrac{(\pi - 2)R^2}{4}$
e) $\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\ R^2$
f) $\dfrac{3\pi - 2\sqrt{2}}{8}\ R^2$
g) $\dfrac{5\pi - 3}{12}\ R^2$

902. $81\pi\ cm^2$

903. a) $8(\pi - 2)\ m^2$
b) $3(2\pi - 3\sqrt{3})\ m^2$
c) $4(4\pi - 3\sqrt{3})\ m^2$
d) $4(4 - \pi)\ m^2$
e) $18(2\sqrt{3} - \pi)\ m^2$
f) $(3\sqrt{3} - \pi)\ m^2$

904. $4(\pi - 2)$

905. $(3\sqrt{3} - \pi)\ r^2$

906. $50(2\pi - 3\sqrt{3})\ cm^2$

907. $3(4\pi - 3\sqrt{3})\ cm^2$

908. a) $\dfrac{4 - \pi}{4}\ a^2$ c) $\dfrac{4 - \pi}{4}\ a^2$
b) $\dfrac{(\pi - 2)}{2}\ a^2$

909. a) $\dfrac{\pi - 2}{4}\ a^2$ c) $\dfrac{\pi - 2}{2}\ a^2$
b) $\dfrac{4 - \pi}{2}\ a^2$

910. a) $8(4 - \pi)\ cm^2$ b) $4(4 - \pi)\ cm^2$

911. a) $\dfrac{8 - \pi}{2}\ cm^2$ c) $(4 - \pi)\ cm^2$
b) $2(\pi - 2)\ cm^2$

912. $\dfrac{4 - \pi}{8}\ a^2$

913. a) $\dfrac{(3 - 2\sqrt{2})\pi\ a^2}{16}$
b) $100(4 - \pi)$
c) $\dfrac{25}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$
d) $12(2\pi - 3\sqrt{3})$
e) $\dfrac{16}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$

914. $25(2\sqrt{3} - \pi)\ cm^2$

915. a) $64\pi\ cm^2$
b) $192\pi\ cm^2$

916. 25π

917. a) $25\pi\ cm^2$
b) $\dfrac{125\pi}{4}\ cm^2$

918. $98\ cm^2$

919. a) $18(\pi + 2\sqrt{3})$
b) $\dfrac{\pi R^2}{3}$

920. πr^2

921. $\dfrac{\pi r^2}{4}$

922. $\dfrac{\pi + 14}{8}\ a^2$

923. $(2\pi - 3\sqrt{3})\ cm^2$

924. $\dfrac{3\pi}{4}(12 + 4m - m^2)$, $0 < m < 6$

925. πr^2

926. $2(4 - \pi)\ cm^2$

927. a) $\frac{a^2}{2}$

b) $\frac{\pi a^2}{9}$

c) $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{72}\ a^2$

928. r^2

929. $\frac{4}{9}\ (13\pi - 12\sqrt{3})\ cm^2$

930. $\frac{25}{6}\ (2\pi - 3\sqrt{3})\ m^2$

931. $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\ a^2$

932. $\frac{338(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}\ cm^2$

933. $\frac{25}{4}\ (2\sqrt{3} - \pi)\ cm^2$

934. $\frac{25}{2}\ (2 + \sqrt{2}\pi - 2\pi)\ cm^2$

$\frac{5}{2}\ (4\sqrt{2} + \pi - 4)\ cm$

935. $\frac{(4\pi + 3\sqrt{3})}{24}\ R^2$

936. $(3 + 2\sqrt{2} - \pi)\ r^2$

937. $9\pi\ cm^2$; $49\pi\ cm^2$; $121\pi\ cm^2$

938. 2

939. $\frac{25\pi}{24}$

940. $\frac{3}{4}$

941. $3(2\pi - 3\sqrt{3})\ cm^2$

942. $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$

943. $(5\pi - 6\sqrt{3})\ \frac{r^2}{6}$

944. $2(3\sqrt{3} - \pi)$

945. Use área do setor.

946. $S_1 = S_2 + S_3$

947. $\frac{(24\sqrt{3} - 11\pi)}{54}\ R^2$

948. $\frac{9\pi}{25}\ cm^2$

949. Trace um quadrado pela interseção das duas semicircunferências.

950. Trace o triângulo retângulo *APB*.

951. $\frac{\pi t^2}{8}$

952. Mostre que $A = B = C = D = \frac{a^2}{4}$.

953. $\frac{abc}{4(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$

954. $\frac{507}{40}\ cm$, $\frac{117}{5}\ cm$

955. 3

956. Use área do triângulo.

957. $25\sqrt{3}\ cm^2$

958. $\frac{9r^2}{16}$

959. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

960. Sim.

961. $\frac{h}{2}$

962. $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\ h$

963. 9 m

964. 17 m

965. $324\ m^2$

966. 10 cm

967. $100(3 - \sqrt{5})\ cm^2$

968. $\frac{r^2}{2}$

969. $2r^2$; $4r^2$

970. $\sqrt{5} - 1$

971. $200(1 + \sqrt{2})\ cm^2$

972. $72\sqrt{2}\ cm^2$

973. $2(\sqrt{3} - 1)\ R^2$

974. $289\sqrt{3}\ cm^2$

975. $2d^2$

976. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

977. 30° ou 150°

978. $3(\sqrt{3} + 2)\ R^2$

979. Use área do círculo ex-inscrito.

980. $\frac{(2\sqrt{3} - 1)}{44}\ a^2$

981. $9(2 - \sqrt{3})^2\ R^2$

982. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

983. $\frac{24r^2}{25}$

984. $\frac{4}{25}$

985. $\frac{2(3 + 2\sqrt{3})}{3}$

986. πr

987. $\sqrt{13}\ cm$

988. $\frac{2(2\sqrt{3} - 1)\ \pi r^2}{3}$

989. $6(4\pi - 3\sqrt{3})\ cm^2$

990. $\frac{(19\pi - 12\sqrt{3})}{3}\ a^2$

991. $3\sqrt{7}\ cm$

992. $\frac{2\sqrt{3} - 3(2 - \sqrt{3})\ \pi}{8}\ a^2$

993. 12 cm

994. $144\pi\ cm^2$

995. $\sqrt{3}\ cm^2$

996. $(2\sqrt{3} - 3)\ a^2$

997. $\frac{27\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

998. 3

999. $\frac{1\ 728}{13}\ cm^2$

1000. É o isósceles.

1001. 16 por 13,5

1002. Use semelhança de triângulos

1003. $5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\ cm^2$

1004. $\frac{1}{2}\ cm$

1005. $8\ cm^2$

1006. 12; $\frac{56}{5}$; $\frac{168}{13}$

1007. As dimensões do retângulo são:

$\frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$ e

$\frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$

onde *d* é o diâmetro do círculo.

$d \geq |a|\sqrt{2}$ (Se $d = a\sqrt{2}$ temos o quadrado.)

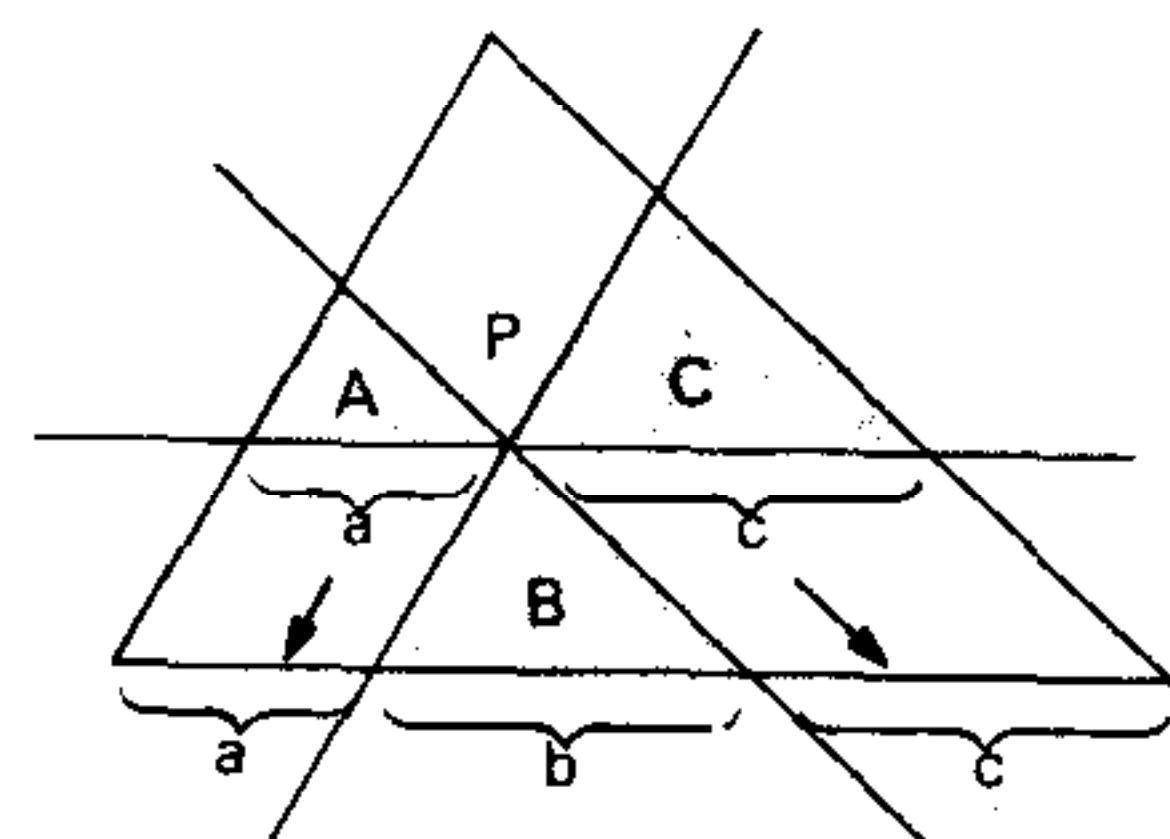
1008. $\frac{\sqrt{a^2 + 480} + \sqrt{a^2 - 480}}{2}$

$\frac{\sqrt{a^2 + 480} - \sqrt{a^2 - 480}}{2}$

$4\sqrt{30}\ cm$

1009. Use área do triângulo.

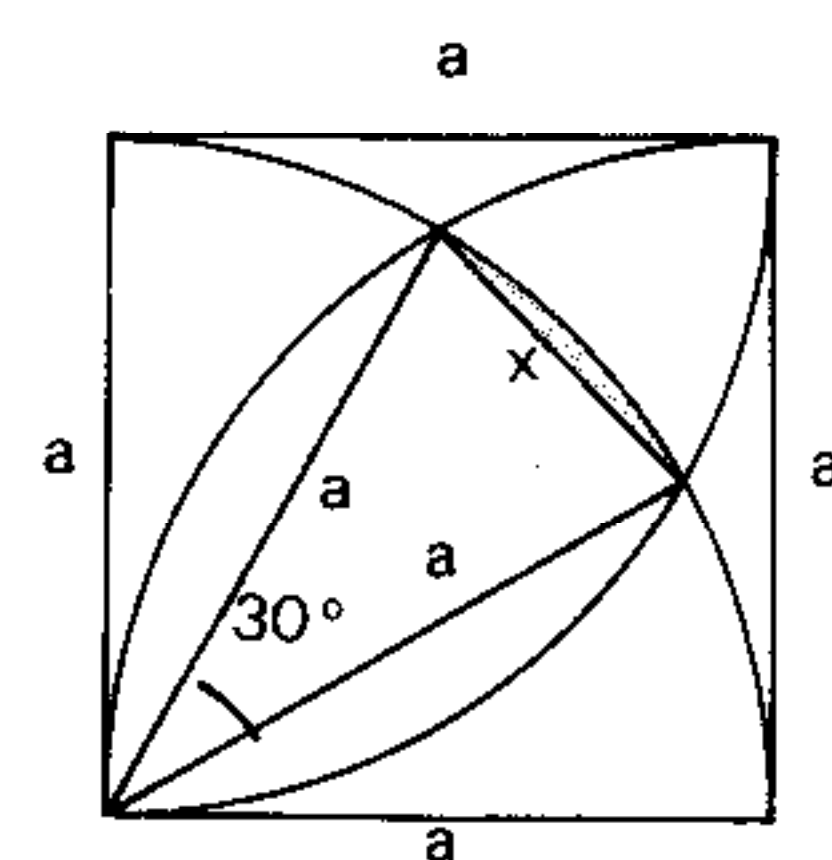
1010. $3(5\pi - 6\sqrt{3})\ m^2$

1011.

Note que o triângulo original e os triângulos de áreas A, B e C são semelhantes. Sendo S a área do triângulo original, temos:

$$\frac{S}{(a+b+c)^2} = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

$$\frac{\sqrt{S}}{a+b+c} = \frac{\sqrt{A}}{a} = \frac{\sqrt{B}}{b} = \frac{\sqrt{C}}{c}$$

$$S = (\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})^2$$

1012. A área procurada é igual à área de um quadrado de lado x mais 4 vezes a área do segmento circular sombreado nesta figura.

1º) Cálculo de x^2

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 30^\circ$$

$$x^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = (2 - \sqrt{3})\,a^2$$

2º) Cálculo da área do segmento circular

$$A_{seg.} = A_{setor} - A_{\triangle} = \frac{1}{12}\pi a^2 - \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \text{sen } 30^\circ = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2}{4} = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) a^2$$

3º) Área da região sombreada

$$A_s = x^2 + 4[A_{seg.}] = (2 - \sqrt{3})a^2 + 4\left[\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right] a^2$$

$$A_s = \left(2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - 1\right) a^2 = \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right) a^2$$

$$A_s = \frac{(\pi + 3 - 3\sqrt{3})\,a^2}{3}$$

Testes de Vestibulares

Noções e proposições primitivas — Segmento de reta — Ângulo — Triângulos — Paralelismo — Perpendicularidade

1. (CESGRANRIO-85) Numa carpintaria, empilham-se *50* tábuas, umas de *2 cm* e outras de *5 cm* de espessura. A altura da pilha é de *154 cm*. A diferença entre o número de tábuas de cada espessura é:

a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 25

2. (U.F.MG-92) Os pontos A, B, C, D são colineares e tais que $AB = 6\ cm$, $BC = 2\ cm$, $AC = 8\ cm$ e $BD = 1\ cm$. Nessas condições, uma possível disposição desses pontos é:

a) A D B C
b) A B C D
c) A C B D
d) B A C D
e) B C D A

3. (U.E.CE-81) O ângulo igual a $\frac{5}{4}$ do seu suplemento mede:

a) 100° b) 144° c) 36° d) 80°

4. (U.F.UBERLÂNDIA-82) Dois ângulos consecutivos são complementares. Então o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos é:

a) 20° b) 30° c) 35° d) 40° e) 45°

5. (U.F.ES-82) O triplo do complemento de um ângulo é igual à terça parte do suplemento deste ângulo. Este ângulo mede:

a) $\frac{7\pi}{8}$ rd b) $\frac{5\pi}{16}$ rd c) $\frac{7\pi}{4}$ rd d) $\frac{7\pi}{16}$ rd e) $\frac{5\pi}{8}$ rd

6. (PUC-SP-80) Dados os triângulos ABC e ADC, com $AB = CD$ e $AD = BC$, podemos concluir que o ângulo $A\hat{B}C$ é congruente ao ângulo:

a) $B\hat{A}C$ b) $A\hat{B}D$ c) $A\hat{C}D$ d) $C\hat{D}A$ e) $D\hat{C}B$

7. (U.F.MG-81) O recíproco do teorema: "Num triângulo isósceles os ângulos da base são iguais" é:

a) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
b) Se os ângulos da base de um triângulo são iguais, então o triângulo é isósceles.
c) Num triângulo isósceles os ângulos da base não são iguais.
d) Se os ângulos da base de um triângulo não são iguais, o triângulo não é isósceles.
e) Nenhuma das anteriores.

8. (U.F.GO-84) Se dois lados de um triângulo medem respectivamente *3 dm* e *4 dm*, podemos afirmar que a medida do terceiro lado é:

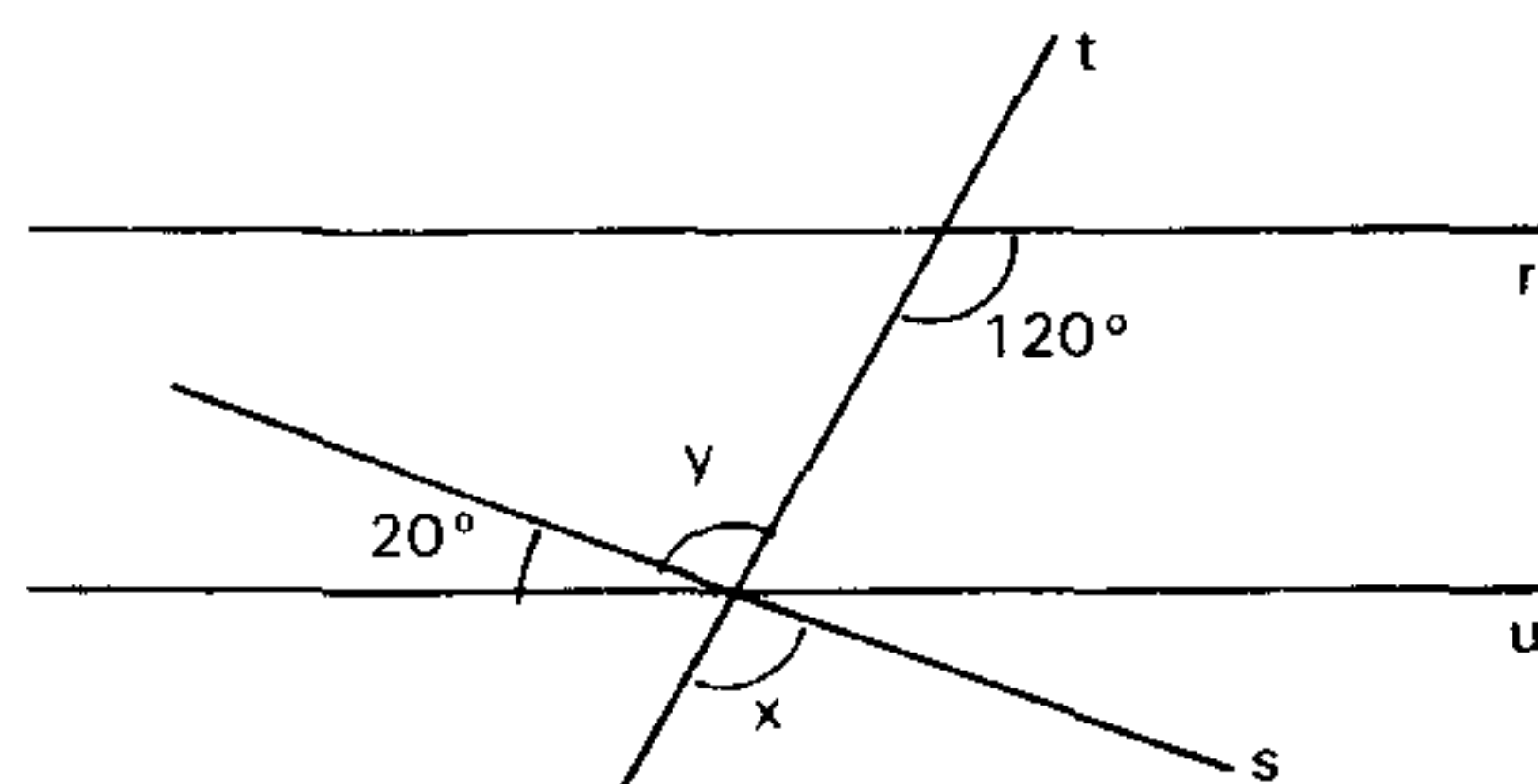
a) igual a *5 dm*.
b) igual a *1 dm*.
c) igual a $\sqrt{7}$ *dm*.
d) menor que *7 dm*.
e) maior que *7 dm*.

9. (U.F.MG-89) Sobre geometria plana, a única afirmativa correta é:

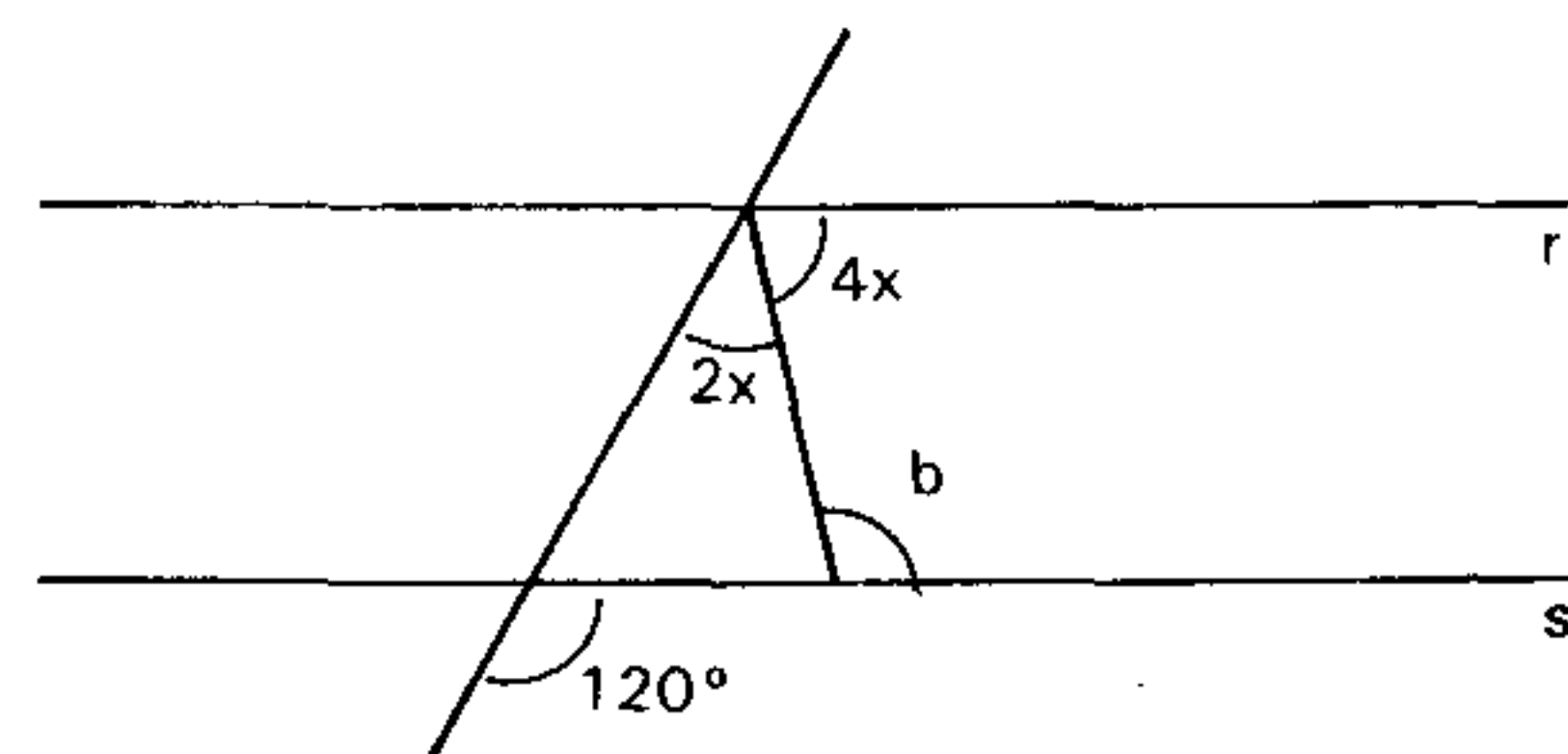
a) Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\hat{C} = \hat{C}'$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ são sempre congruentes.
b) Se dois ângulos de um triângulo ABC são agudos, então ABC é um triângulo retângulo.
c) Três pontos distintos sempre determinam um plano.
d) Se dois triângulos têm os três ângulos congruentes, eles são congruentes.
e) Se a reta m é paralela às retas r e s, então r e s são paralelas ou coincidentes.

10. (FGV-74) Considere as retas r, s, t, u, todas num mesmo plano, com $r//u$. O valor em graus de $(2x + 3y)$ é:

a) 64°
b) 500°
c) 520°
d) 660°
e) 580°

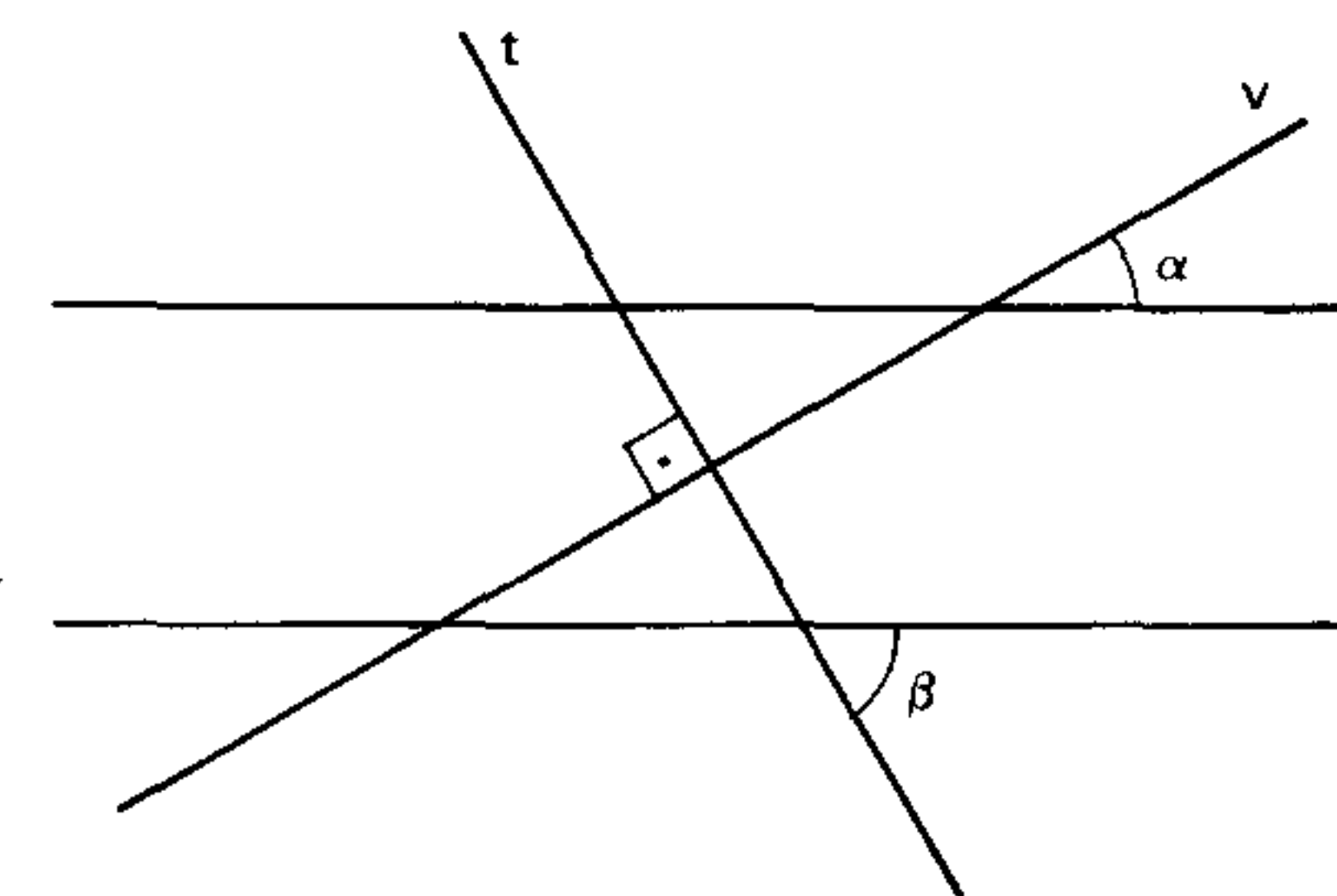
t
120°
r
y
20°
u
x
s

11. (U.F.GO-80) Na figura abaixo as retas r e s são paralelas. A medida do ângulo b é:

a) 100°
b) 120°
c) 110°
d) 140°
e) 130°

4x
r
2x
b
s
120°

12. (PUC-SP-83) Considere a sentença:
"Num plano, se duas retas são ...., então toda reta .... a uma delas é .... à outra.
A alternativa que preenche corretamente as lacunas é:

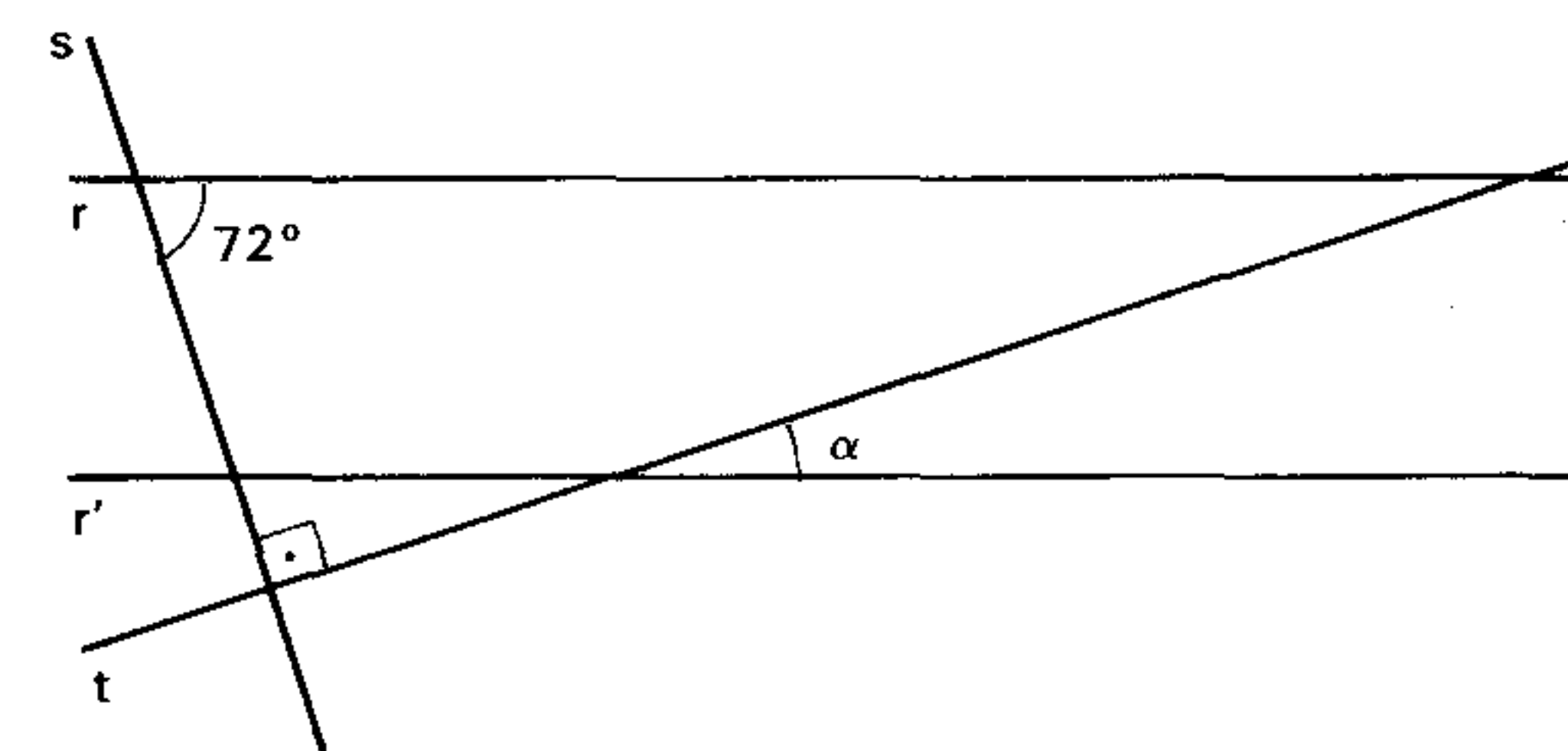
a) paralelas — perpendicular — paralela
b) perpendiculares — paralela — paralela
c) perpendiculares — perpendicular — perpendicular
d) paralelas — paralela — perpendicular
e) perpendiculares — paralela — perpendicular

13. (CESESP-86) Na figura abaixo as retas r e s são paralelas e as retas t e v são perpendiculares.

t
v
α
r
β
s

Assinale, então, dentre as alternativas abaixo, a única que completa corretamente a sentença: "os ângulos distintos α e β são ...

a) opostos pelo vértice".
b) adjacentes".
c) suplementares".
d) complementares".
e) sempre congruentes".

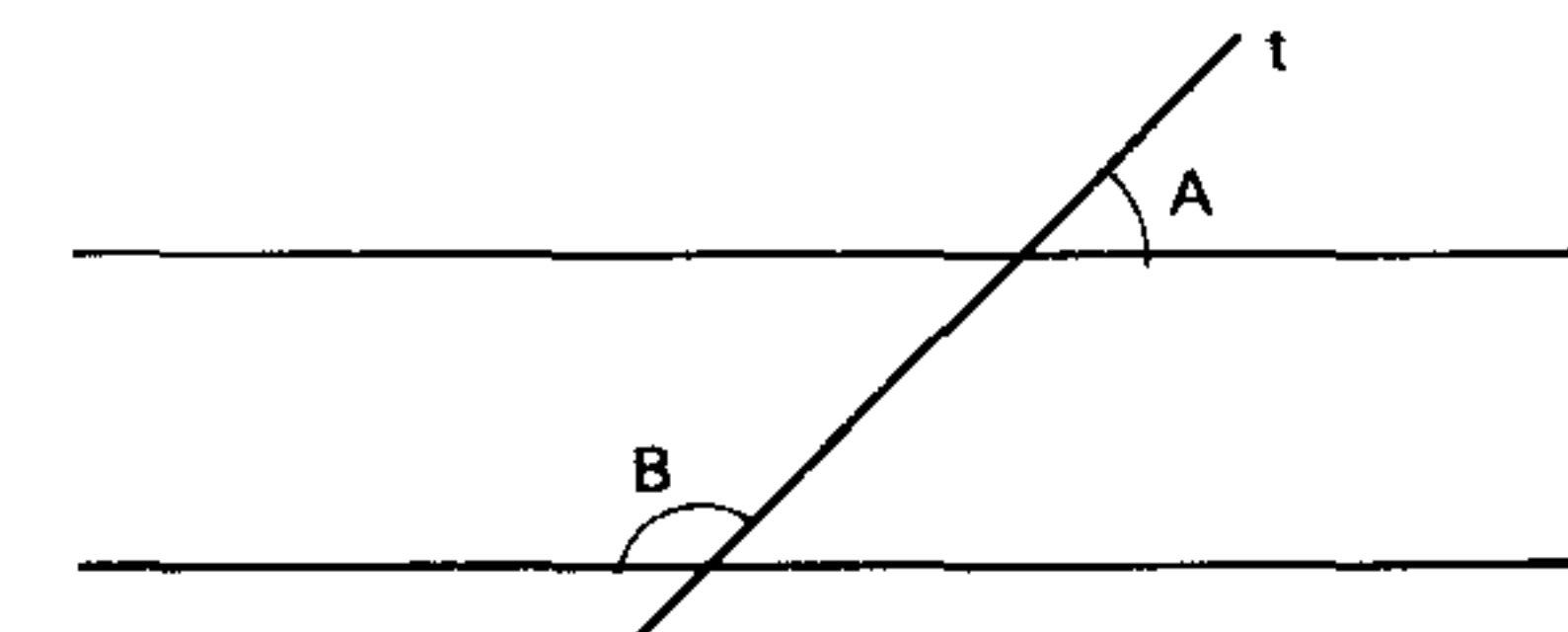
14. (CESGRANRIO-89) Na figura, as retas r e r' são paralelas, e a reta s é perpendicular a t. Se o menor ângulo entre r e s mede *72°*, então o ângulo α da figura mede:

s
r
72°
α
r'
t

a) 36° b) 32° c) 24° d) 20° e) 18°

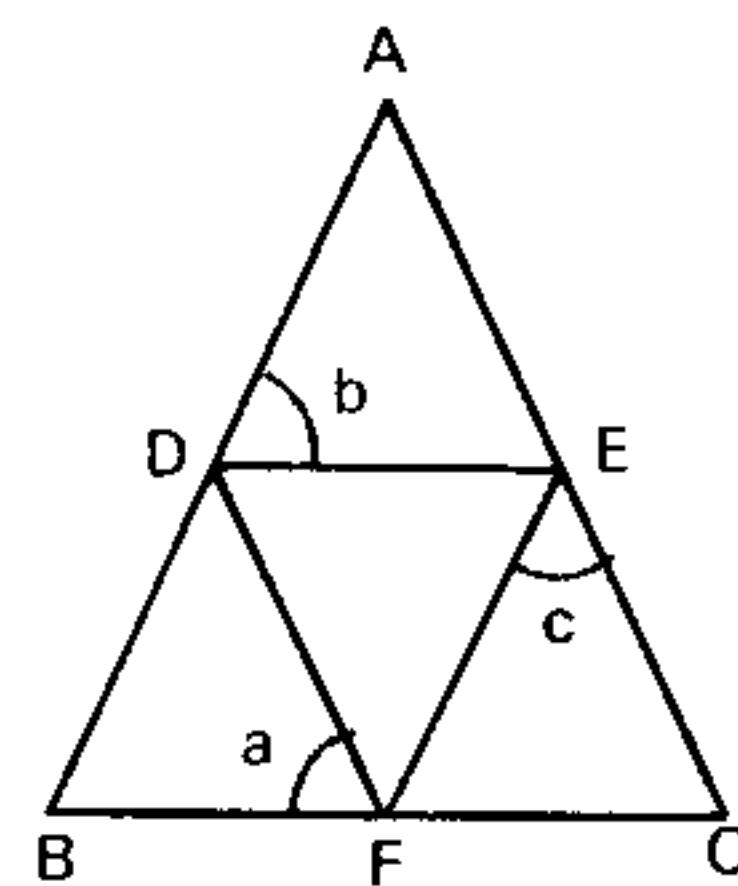
15. (CESGRANRIO-90) Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma de dois dos ângulos agudos formados vale *72°*. Então, qualquer dos ângulos obtusos formados mede:

a) 142° b) 144° c) 148° d) 150° e) 152°

16. (CESGRANRIO-91) As retas r e s da figura são paralelas cortadas pela transversal t. Se o ângulo B é o triplo de A, então $B - A$ vale:

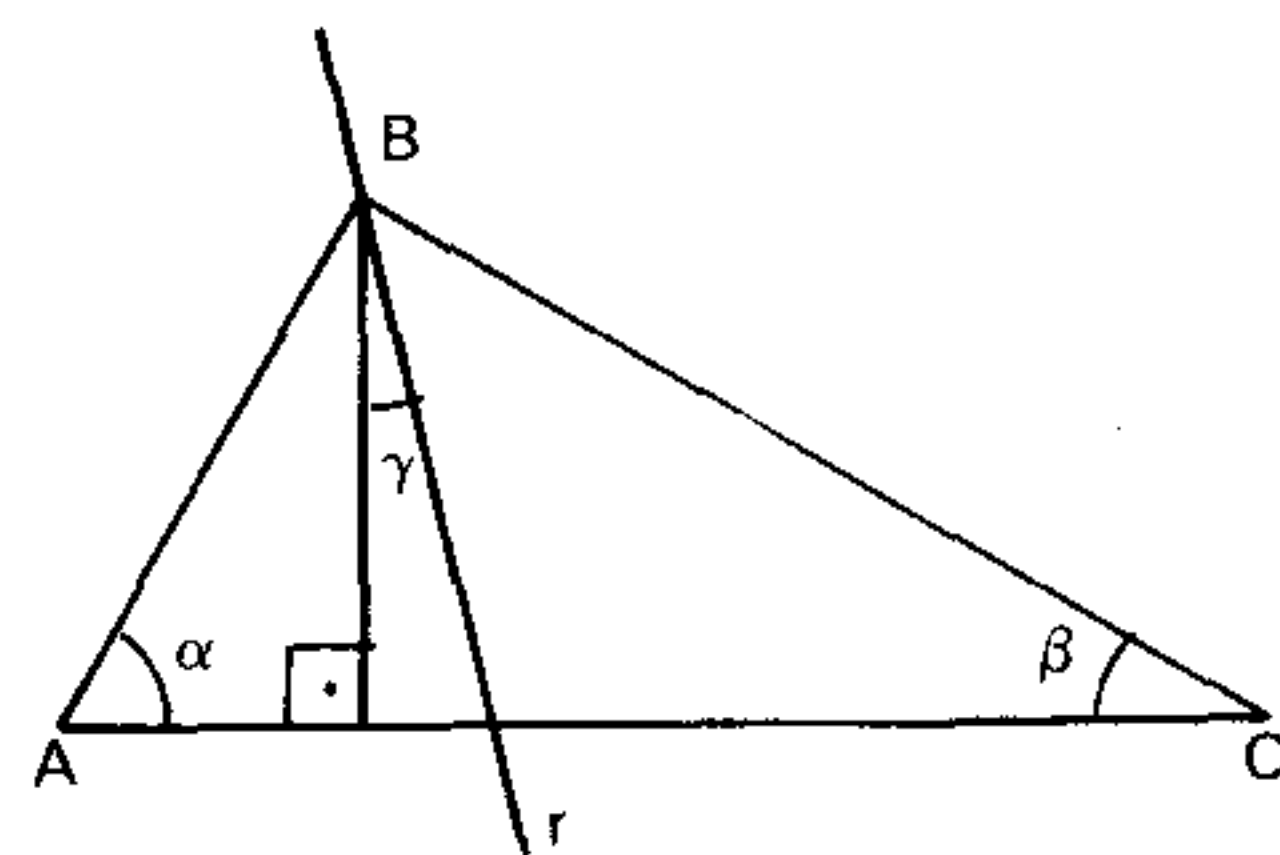
t
A
r
B
s

a) 90° b) 85° c) 80° d) 75° e) 60°

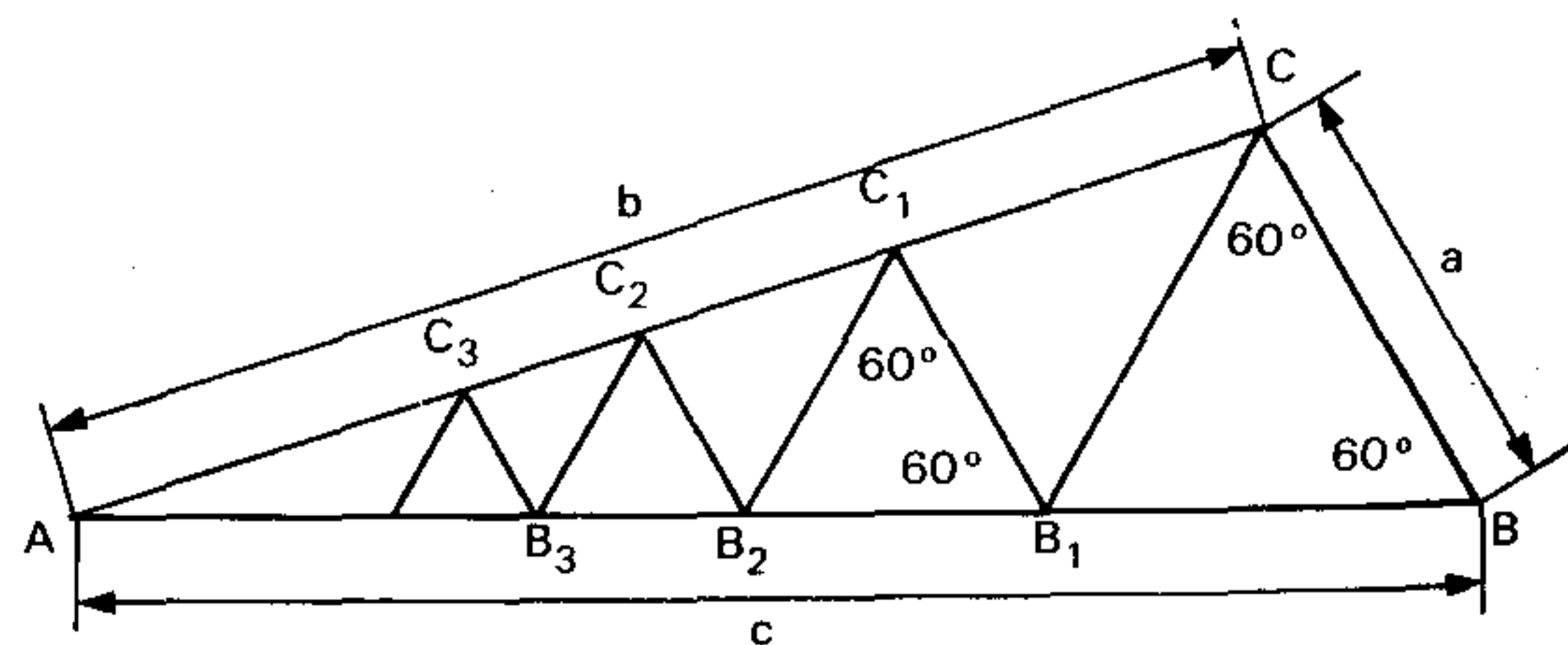
17. (STO. ANDRÉ-73) O triângulo ABC é isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Nele, está inscrito um triângulo DEF equilátero. Designando ângulo $B\hat{F}D$ por a, o ângulo $A\hat{D}E$ por b, e o ângulo $F\hat{E}C$ por c, temos:

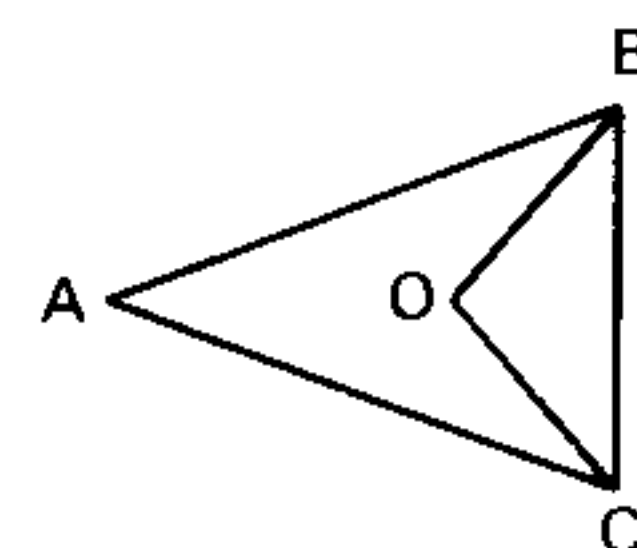
a) $b = \frac{a + c}{2}$
b) $b = \frac{a - c}{2}$
c) $a = \frac{b - c}{2}$
d) $c = \frac{a + b}{2}$
e) $a = \frac{b + c}{2}$

18. (FUVEST-77) Num triângulo ABC, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem $50°$ e $70°$, respectivamente. A bissetriz relativa ao vértice A forma com a reta $\overleftrightarrow{BC}$ ângulos proporcionais a:

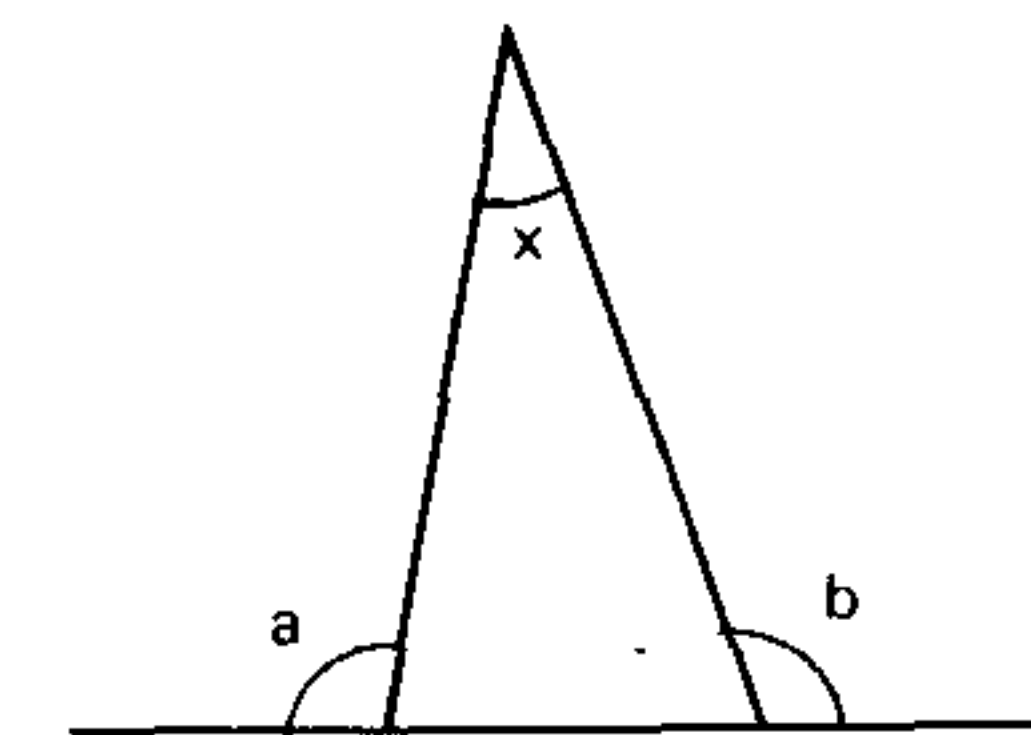
a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 4 d) 4 e 5 e) 5 e 6

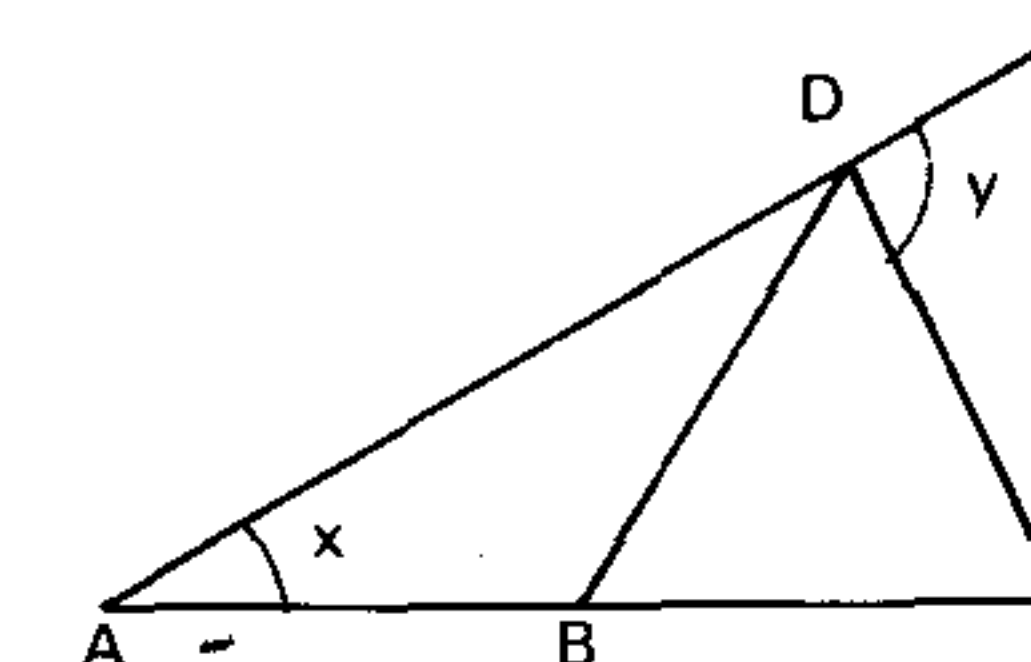
19. (FATEC-78) Na figura abaixo, r é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Se $\alpha = 40°$ e $\beta = 30°$, então:

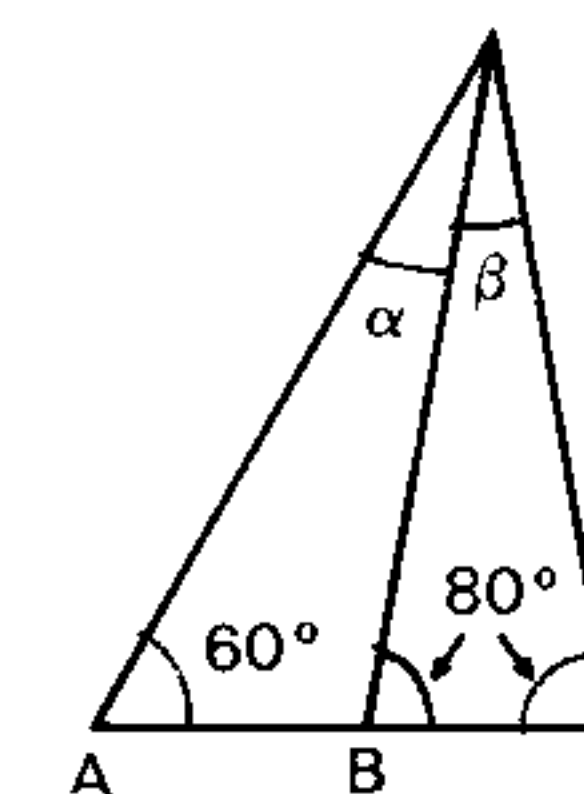
a) $\gamma = 0°$
b) $\gamma = 5°$
c) $\gamma = 35°$
d) $\gamma = 15°$
e) os dados são insuficientes para a determinação de γ

20. (FATEC-78) Dado o triângulo ABC, abaixo indicado, construímos a poligonal $L = BCB_1C_1B_2C_2B_3C_3\ldots$ O comprimento de L é:

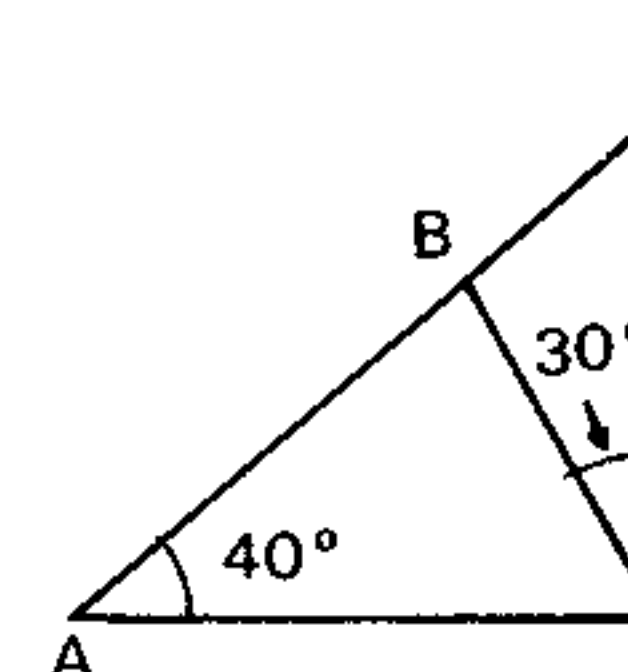
a) $2c$
b) $a + b + c$
c) $2(a + b)$
d) $2(a + c)$
e) $\frac{a + b}{2} + c$

21. (FUVEST-79) Na figura abaixo, $\overline{AB} = \overline{AC}$, O é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC, e o ângulo $B\hat{O}C$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$. Então a medida de $\hat{A}$ é:

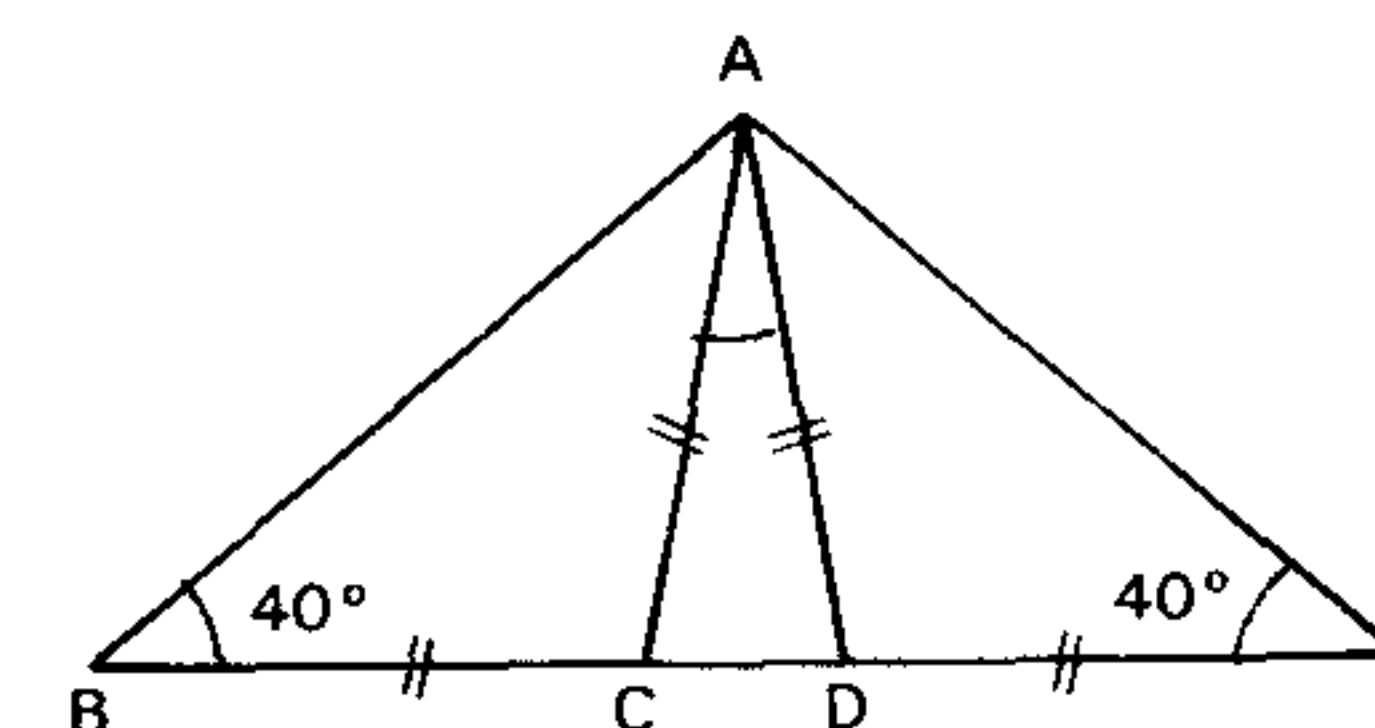
a) 18°
b) 12°
c) 24°
d) 36°
e) 15°

22. (PUC-SP-80) Na figura abaixo $a = 100°$ e $b = 110°$. Quanto mede o ângulo x?

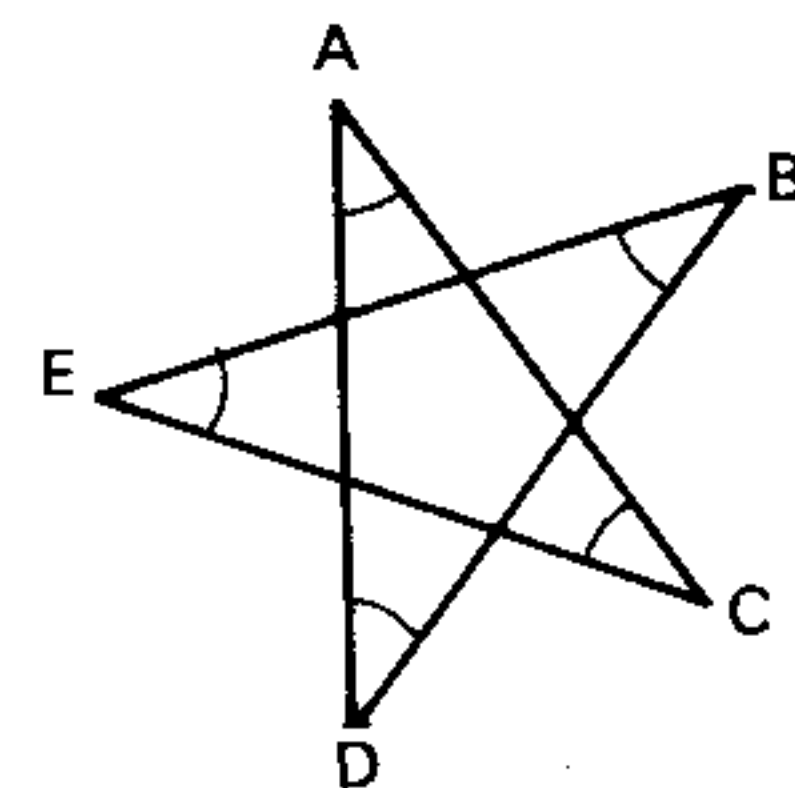
a) 30°
b) 50°
c) 80°
d) 100°
e) 220°

23. (FUVEST-81) Na figura $AB = BD = CD$. Então:

a) $y = 3x$
b) $y = 2x$
c) $x + y = 180°$
d) $x = y$
e) $3x = 2y$

24. (U.F.MG-81) Os ângulos α e β da figura medem:

a) $\alpha = 20°$, $\beta = 30°$
b) $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$
c) $\alpha = 60°$, $\beta = 20°$
d) $\alpha = 20°$, $\beta = 20°$
e) $\alpha = 10°$, $\beta = 20°$

25. (U.C.MG-82) Na figura ao lado, o ângulo $A\hat{D}C$ é reto. O valor, em graus, do ângulo $C\hat{B}D$ é de:

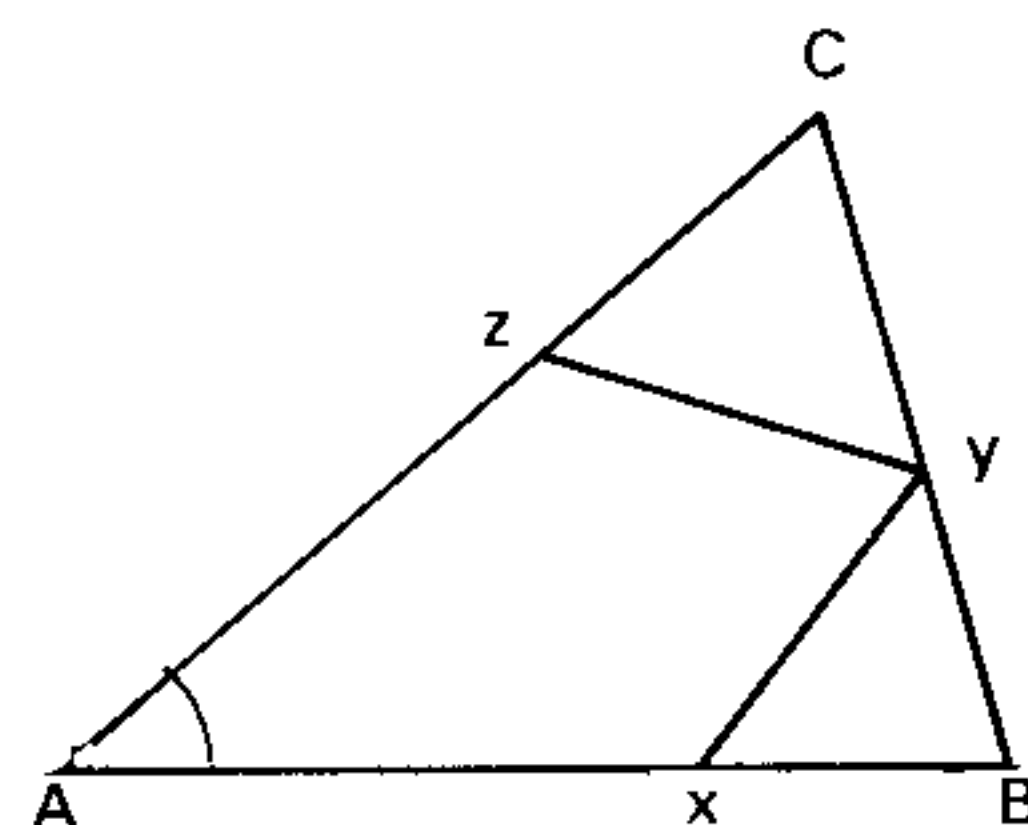
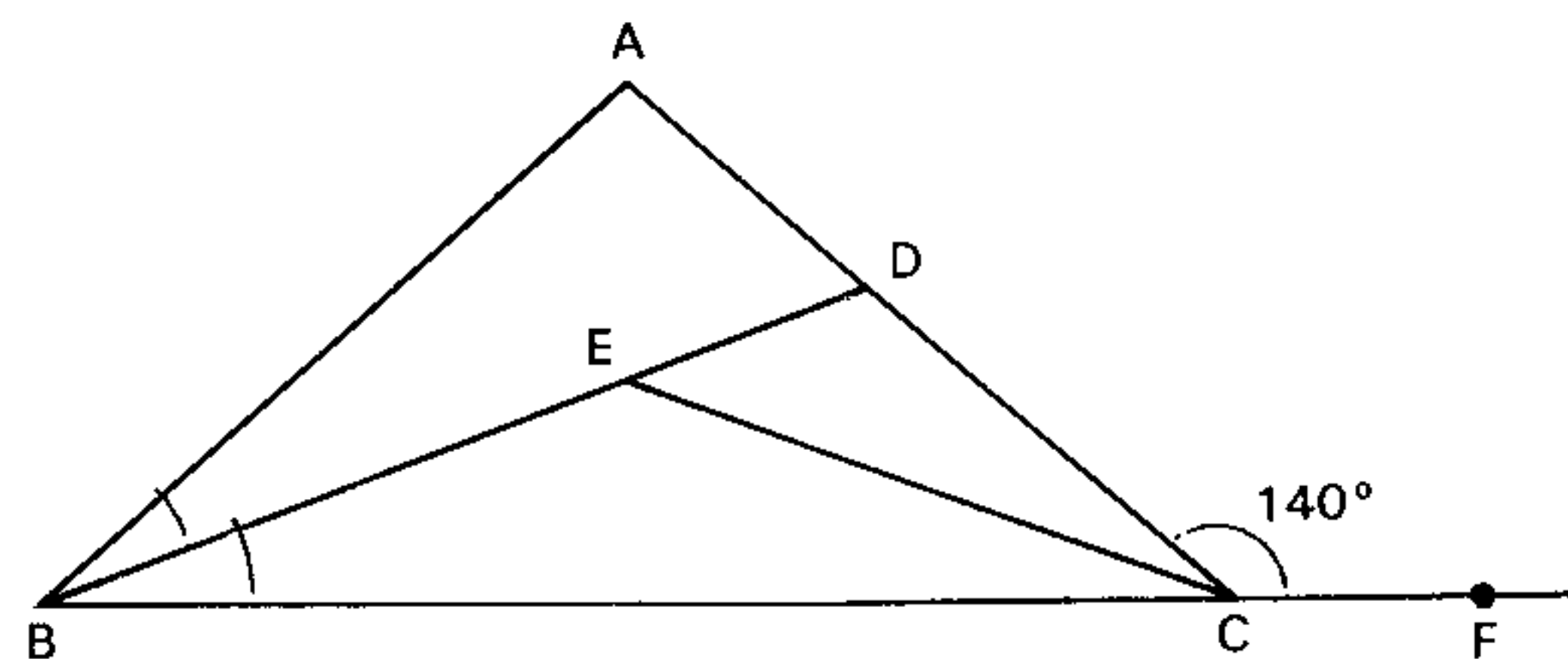
a) 95
b) 100
c) 105
d) 110
e) 120

26. (PUC-SP-84) Na figura $BC = CA = AD = DE$. O ângulo $C\hat{A}D$ mede:

a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 60°

27. (PUC-SP-84) A soma $A + B + C + D + E$ das medidas dos ângulos:

a) é 60°.
b) é 120°.
c) é 180°.
d) é 360°.
e) varia de "estrela" para "estrela".

28. (PUC-SP-84) Em um triângulo isósceles a média aritmética das medidas de dois de seus ângulos é *50°*. A medida de um dos ângulos do triângulo pode ser:

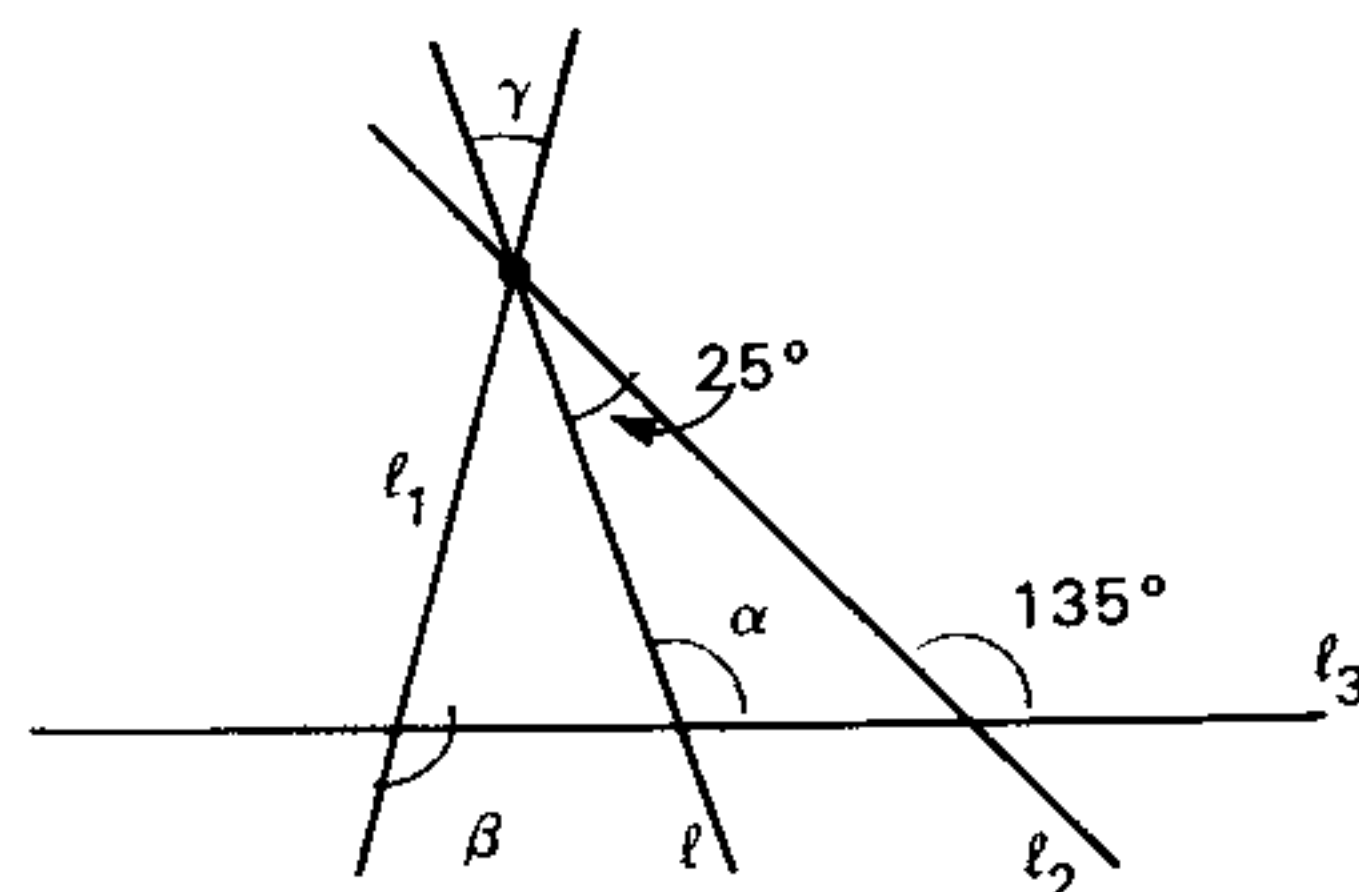
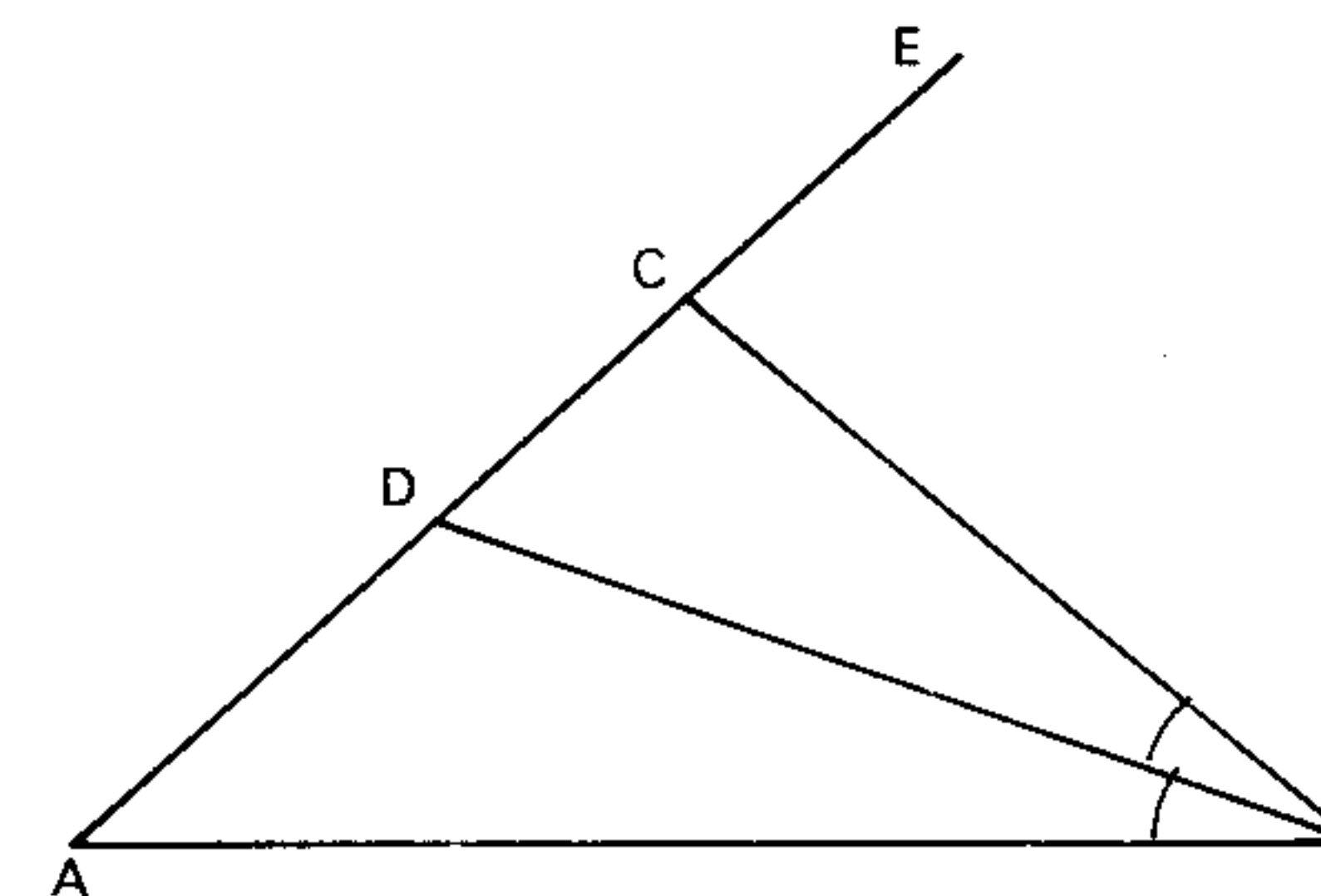
a) 100° b) 90° c) 60° d) 30° e) 20°

29. (FUVEST-91) Na figura, $AB = AC$, $BX = BY$ e $CZ = CY$. Se o ângulo A mede *40°*, então o ângulo XYZ mede:

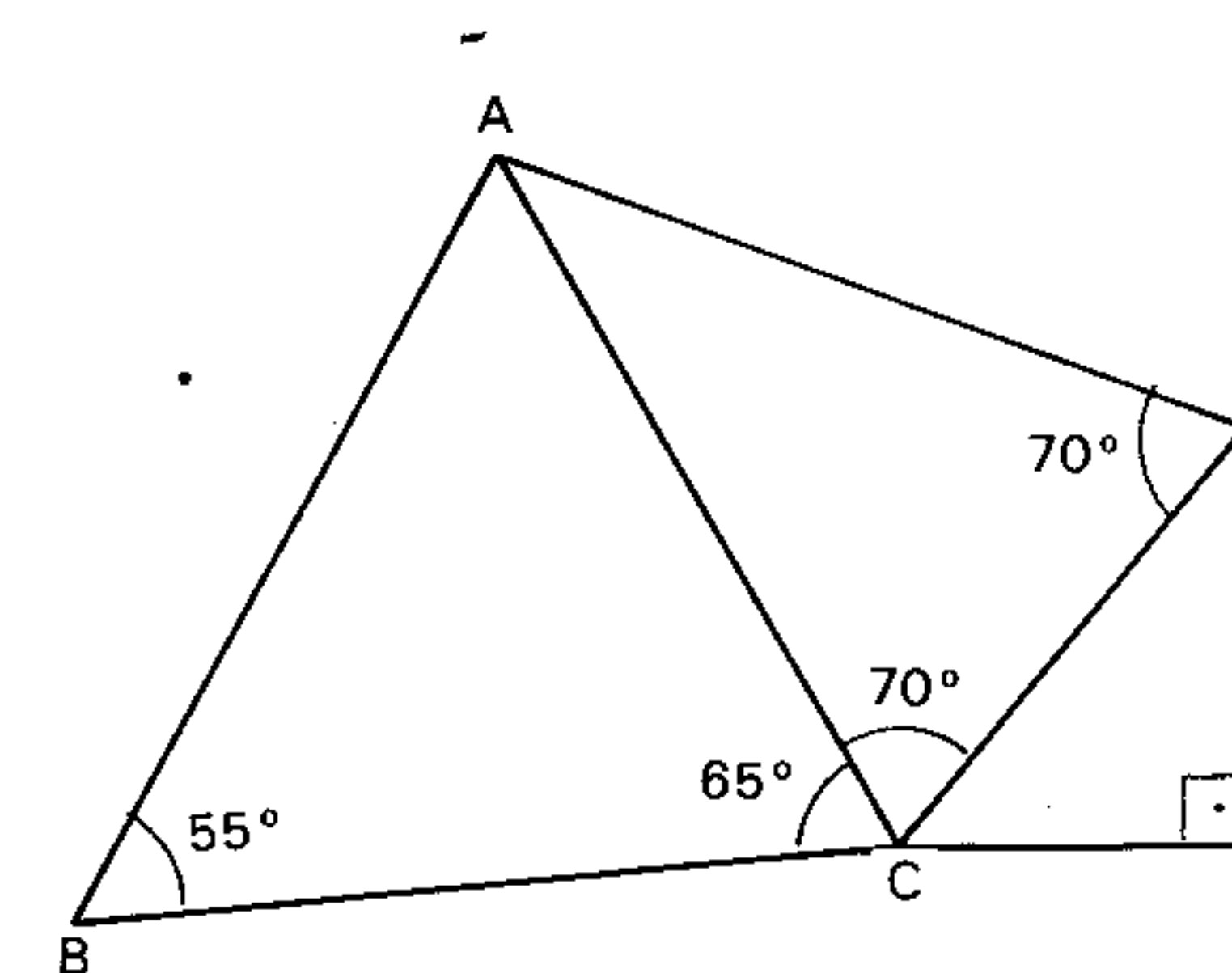
a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 90°

30. (U.F.MG-92) Observe a figura.

Nessa figura, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BD}$ bissetriz de $A\hat{B}C$, $\overline{CE}$ bissetriz de $B\hat{C}D$ e a medida do ângulo $A\hat{C}F$ é 140°. A medida do ângulo $D\hat{E}C$, em graus, é:

a) 20 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

31. (U.F.R.PE-91) Observe que, na figura abaixo, a reta ℓ faz ângulos idênticos com as retas ℓ_1 e ℓ_2. A soma $\alpha + \beta + \gamma$ vale:

a) 180°
b) 215°
c) 230°
d) 250°
e) 255°

32. (U.F.MG-92) Observe a figura.

BD é bissetriz de $A\hat{B}C$, $E\hat{C}B = 2(E\hat{A}B)$ e a medida do ângulo $E\hat{C}B$ é 80°. A medida do ângulo CDB é:

a) 40° b) 50° c) 55° d) 60° e) 65°

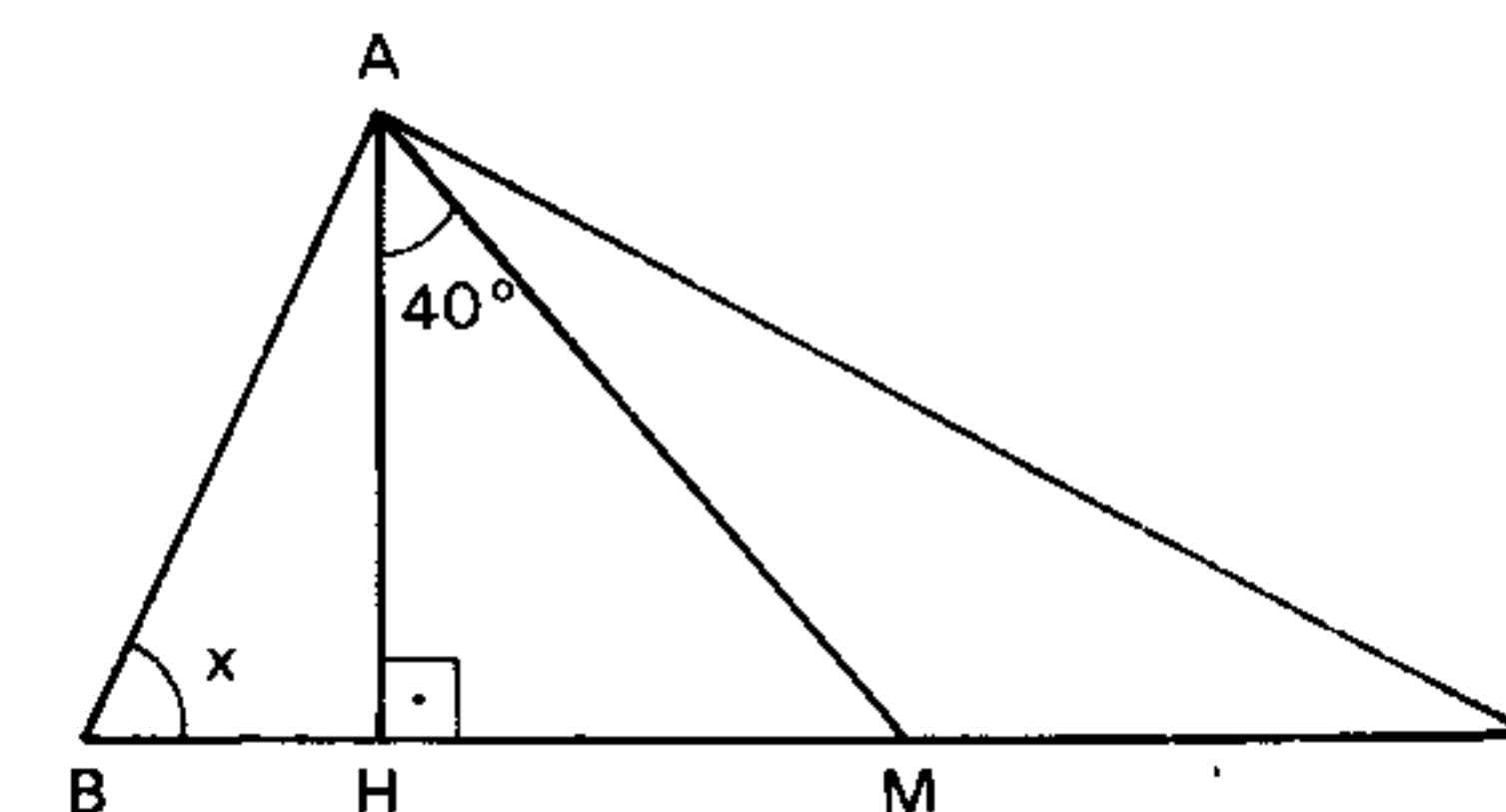
33. (U.F.MG-92) Observe a figura.

Com base nos dados dessa figura, pode-se afirmar que o maior segmento é:

a) $\overline{AB}$ b) $\overline{AE}$ c) $\overline{EC}$ d) $\overline{BC}$ e) $\overline{ED}$

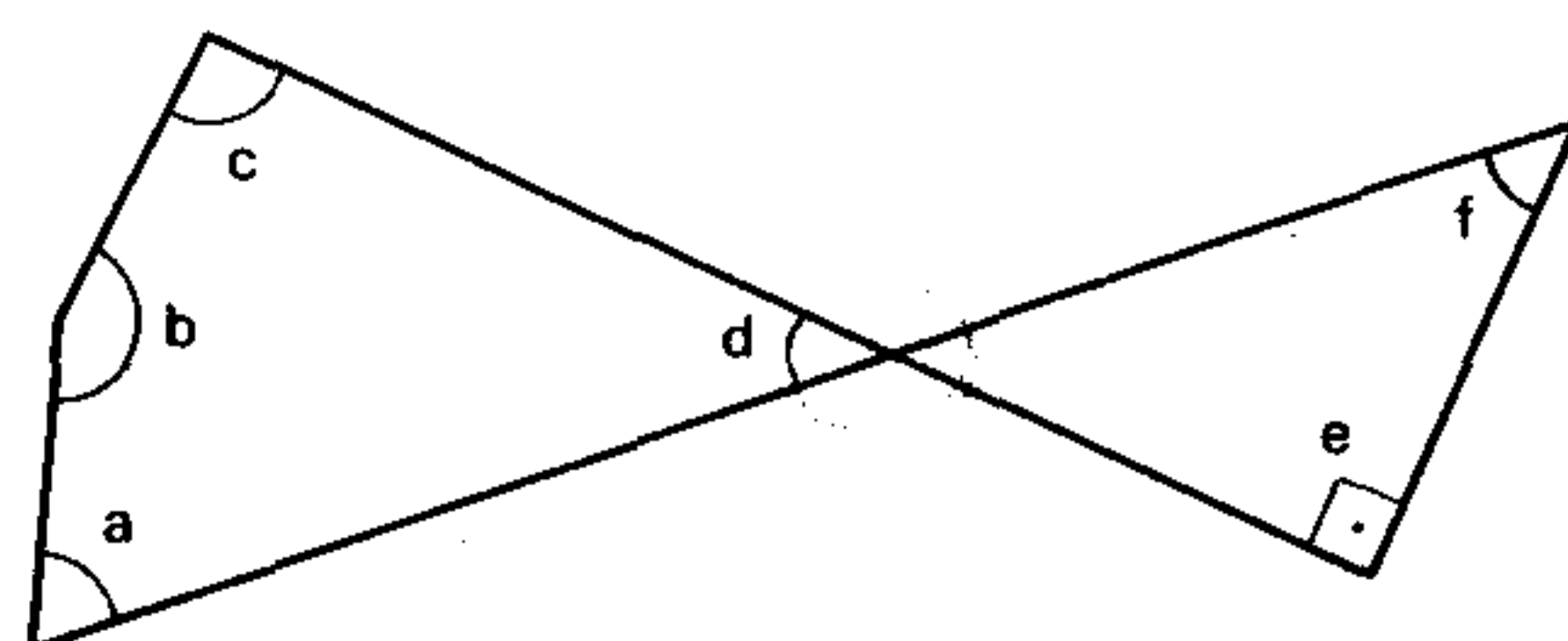
34. (CESGRANRIO-88) Seja ABC um triângulo retângulo, onde D é o ponto médio da hipotenusa BC. Se $AD = AB$, então o ângulo $A\hat{B}C$ mede:

a) 67°30'
b) 60°
c) 55°
d) 52°30'
e) 45°

35. (U.C.SALVADOR-91) No triângulo retângulo ABC, representado na figura abaixo, $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa e $\overline{AM}$ é mediana. Nestas condições, a medida x do ângulo assinalado é:

a) 55°
b) 65°
c) 70°
d) 75°
e) 80°

Quadriláteros notáveis — Pontos notáveis do triângulo — Polígonos

36. (FUVEST-78) Na figura abaixo os ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ medem, respectivamente, $\frac{x}{2}$, $2x$, $\frac{3x}{2}$ e x. O ângulo e é reto. Qual a medida do ângulo f?

a) 16°
b) 18°
c) 20°
d) 22°
e) 24°

37. (PUC-CAMP-80) Considere as afirmações:

I — Todo retângulo é um paralelogramo.
II — Todo quadrado é um retângulo.
III — Todo losango é um quadrado.

e associe a cada uma delas a letra *V*, se for verdadeira, ou *F* caso seja falsa. Na ordem apresentada temos.

a) F, F, F b) F, F, V c) V, F, F d) V, V, F e) n.d.a.

38. (U.F.UBERLÂNDIA-82) Num quadrilátero *ABCD*, o ângulo $\hat{C}$ é igual a *1/3* do ângulo $\hat{B}$, o ângulo $\hat{A}$ mede o quíntuplo do ângulo $\hat{C}$ e o ângulo $\hat{D}$ vale *45°*. Pode-se dizer que $\hat{A} - \hat{B}$ vale:

a) 50° b) 60° c) 70° d) 80° e) 90°

39. (CESGRANRIO-82) As bases *MQ* e *NP* de um trapézio medem *42 cm* e *112 cm* respectivamente. Se o ângulo $M\hat{Q}P$ é o dobro do ângulo $P\hat{N}M$, então o lado *PQ* mede:

a) 154 cm
b) 133 cm
c) 91 cm
d) 77 cm
e) 70 cm

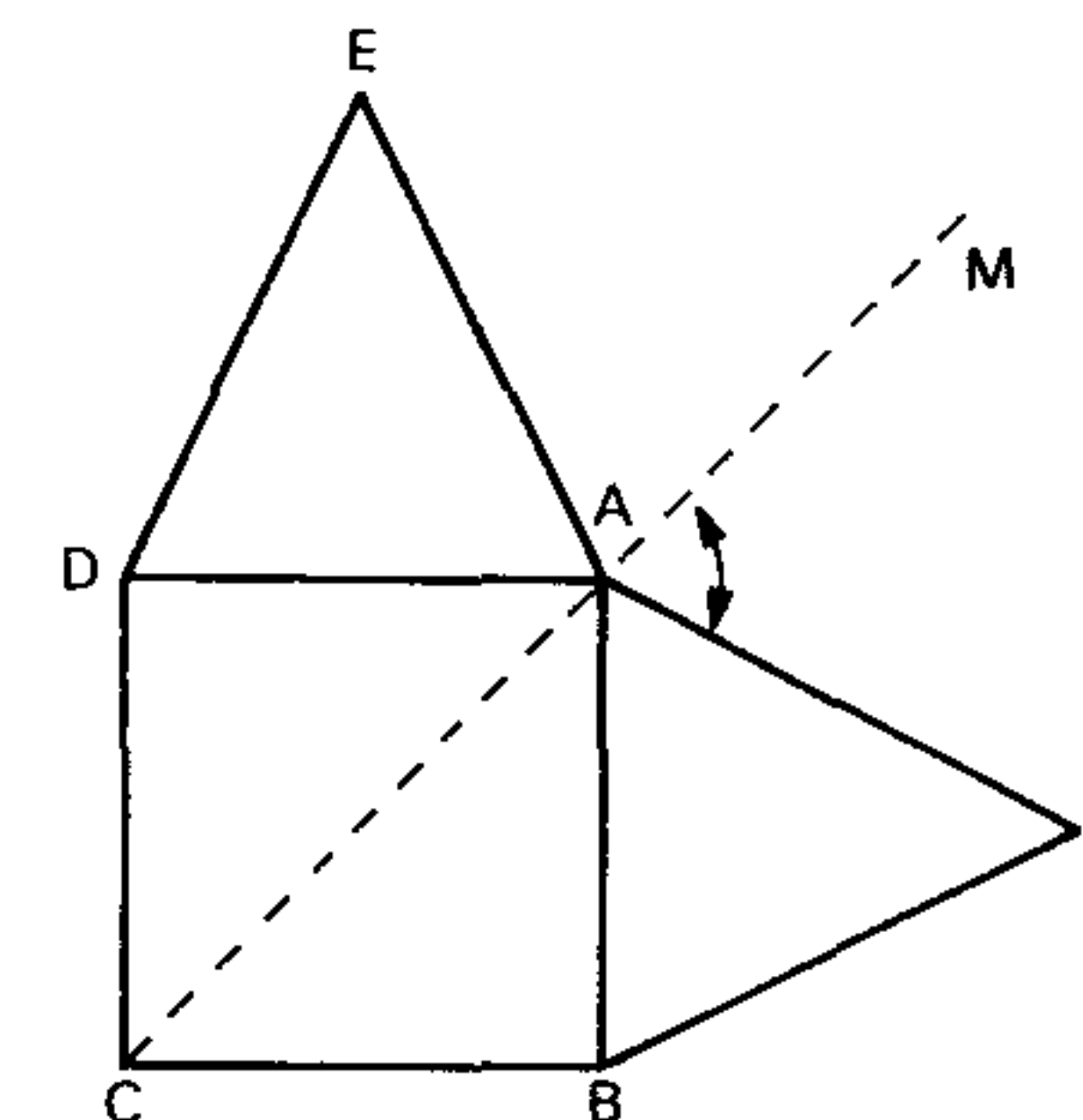
40. (U.F.ES-82) Seja *ABCD* um trapézio retângulo. O ângulo formado pelas bissetrizes do seu ângulo reto e do ângulo consecutivo da base maior mede *92°*. Os ângulos agudo e obtuso deste trapézio medem respectivamente:

a) 88°, 92°
b) 86°, 94°
c) 84°, 96°
d) 82°, 98°
e) 79°, 101°

41. (VUNESP-85) A afirmação *falsa* é:

a) Todo quadrado é um losango.
b) Existem retângulos que não são losangos.
c) Todo paralelogramo é um quadrilátero.
d) Todo quadrado é um retângulo.
e) Um losango pode não ser um paralelogramo.

42. (CESGRANRIO-85) Na figura, *ABCD* é um quadrado, *ADE* e *ABF* são triângulos equiláteros. Se os pontos *C*, *A* e *M* são colineares, então o ângulo $F\hat{A}M$ mede:

a) 75°
b) 80°
c) 82°30′
d) 85°
e) 87°30′

43. (CESGRANRIO-86) Assinale a alternativa que contém a propriedade diferenciadora do quadrado em relação aos demais quadriláteros.

a) Todos os ângulos são retos.
b) Os lados são todos iguais.
c) As diagonais são iguais e perpendiculares entre si.
d) As diagonais se cortam ao meio.
e) Os lados opostos são paralelos e iguais.

44. (CESGRANRIO-88) Em um trapézio retângulo, o menor ângulo mede *35°*. O maior ângulo desse polígono mede:

a) 155° b) 150° c) 145° d) 142° e) 140°

45. (VUNESP-89) Considere as seguinte proposições:

— todo quadrado é um losango;
— todo quadrado é um retângulo;
— todo retângulo é um paralelogramo;
— todo triângulo equilátero é isósceles.

Pode-se afirmar que:

a) só uma é verdadeira.
b) todas são verdadeiras.
c) só uma é falsa.
d) duas são verdadeiras e duas são falsas.
e) todas são falsas.

46. (ITA-89) Considere um quadrilátero *ABCD* cujas diagonais *AC* e *BD* medem, respectivamente, *5 cm* e *6 cm*. Se *R*, *S*, *T* e *U* são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero *RSTU* vale:

a) 22 cm b) 5,5 cm c) 8,5 cm d) 11 cm e) 13 cm

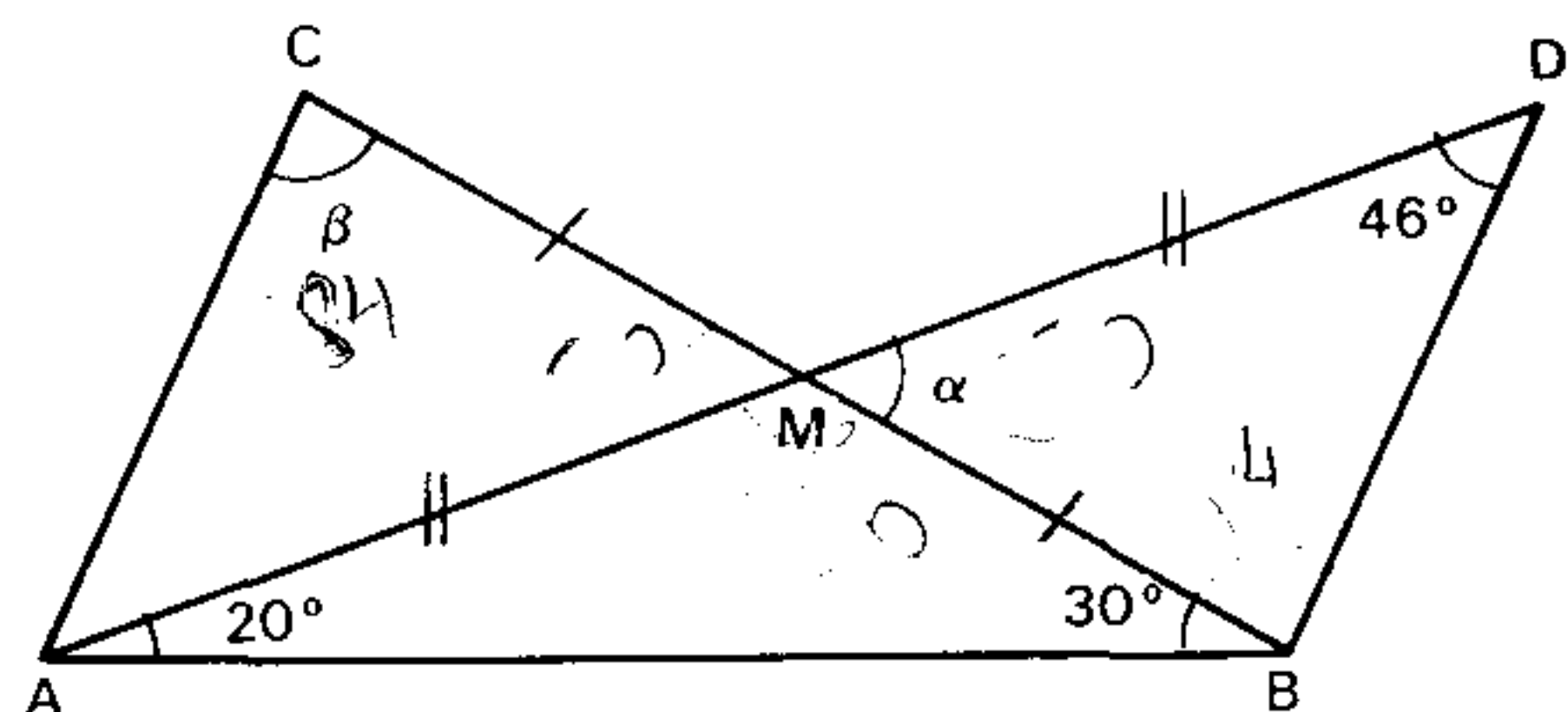
47. (ITA-89) Dadas as afirmações:

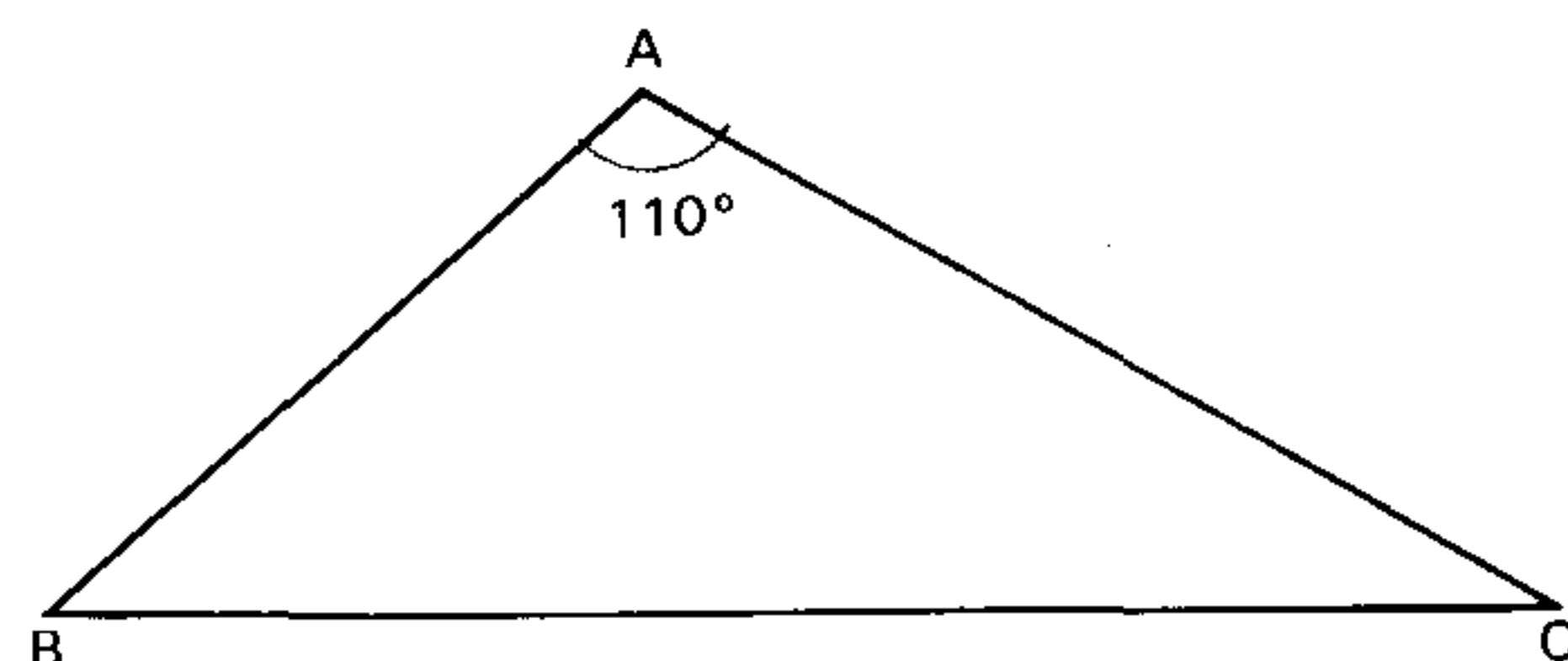
I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.
II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.
III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então este paralelogramo é um losango.

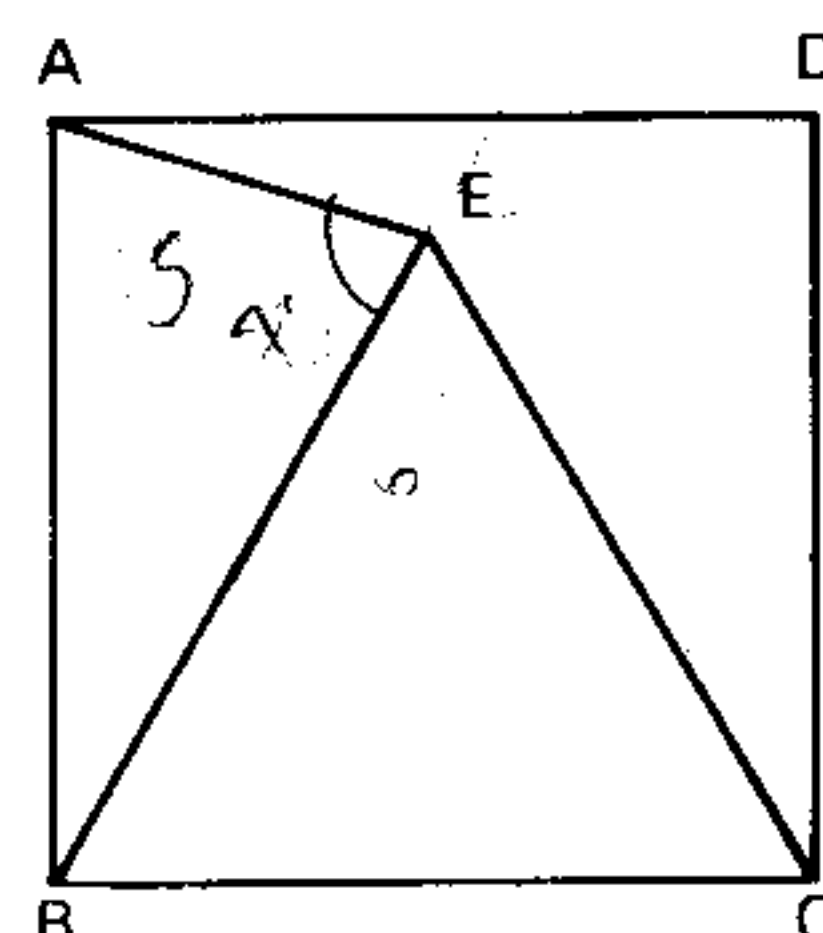
Podemos garantir que:

a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas I e II são verdadeiras.
c) Apenas II e III são verdadeiras.
d) Apenas II é verdadeira.
e) Apenas III é verdadeira.

48. (COVEST-89) Na figura abaixo $AM = MD$ e $CM = MB$. Assinale as medidas de α e β, respectivamente.

a) 50° e 80°
b) 54° e 80°
c) 50° e 84°
d) 54° e 84°
e) 50° e 76°

49. (COVEST-90) No triângulo ABC, o ângulo A mede $110°$. Qual a medida do ângulo agudo formado pelas retas que fornecem as alturas relativas aos vértices B e C?

a) 60°
b) 80°
c) 70°
d) 75°
e) 65°

50. (U.F.MG-90) Na figura, $ABCD$ é um quadrado e BCE é um triângulo equilátero. A medida do ângulo AEB, em graus, é:

a) 30
b) 49
c) 60
d) 75
e) 90

51. (U.F.MG-90) Num triângulo equilátero ABC, de 8 cm de lado, traça-se MN paralelo ao lado BC, de modo que ele se decomponha num trapézio e num novo triângulo.
O valor de MN para o qual o perímetro do trapézio seja igual ao do triângulo AMN é:

a) 2 cm b) 3 cm c) 4 cm d) 5 cm e) 6 cm

52. (U.F.VIÇOSA-90) Num trapézio isósceles de bases diferentes, uma diagonal é também bissetriz de um ângulo adjacente à base maior. Isto significa que:

a) os ângulos adjacentes à base menor não são congruentes.
b) a base menor tem medida igual à dos lados oblíquos.
c) as diagonais se interceptam formando ângulo reto.
d) a base maior tem medida igual à dos lados oblíquos.
e) as duas diagonais se interceptam no seu ponto médio.

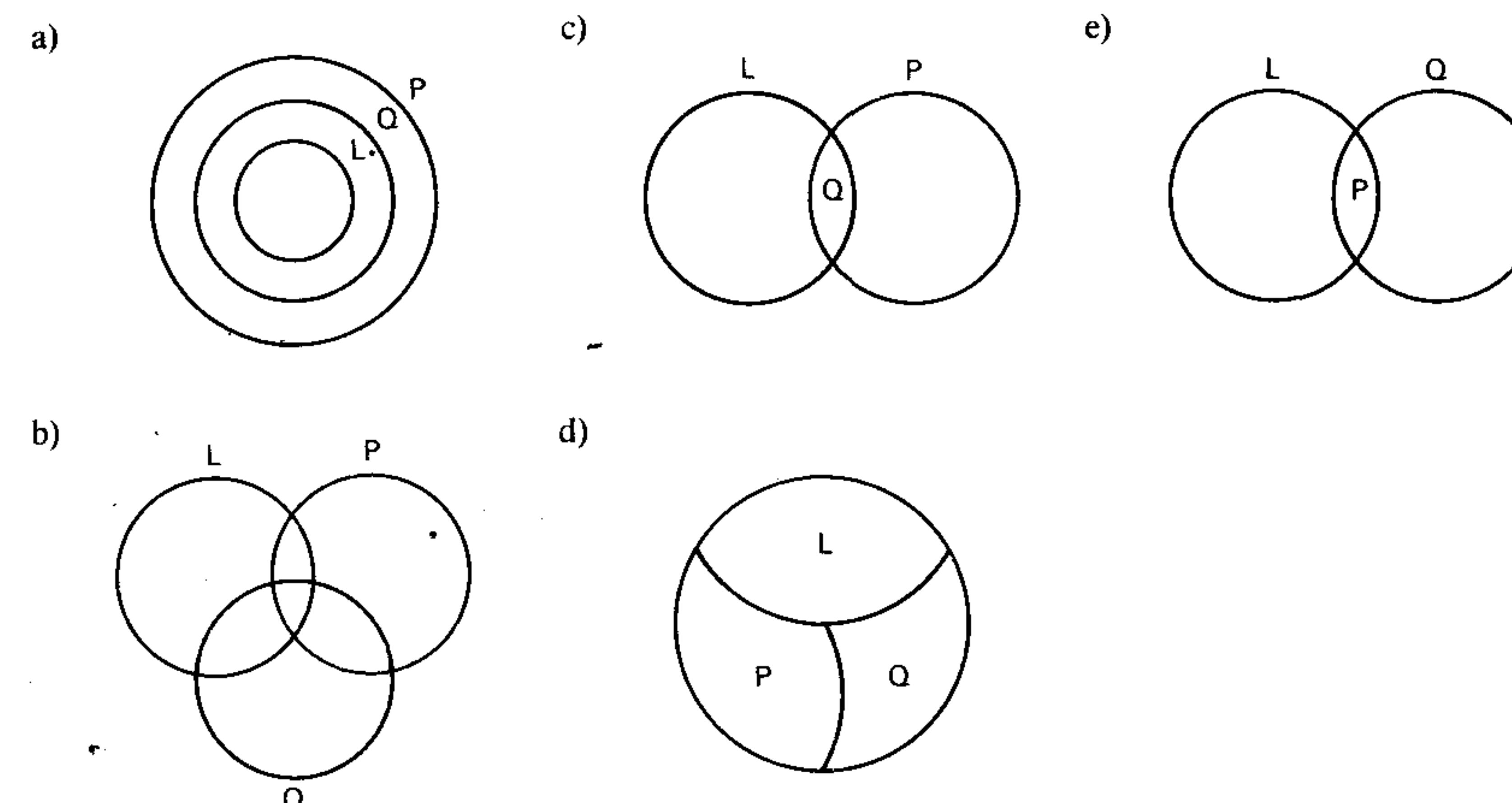
53. (U.F.MG-92) Sobre figuras planas, é correto afirmar-se que:

a) um quadrilátero convexo é um retângulo se os lados opostos têm comprimentos iguais.
b) um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares é um quadrado.
c) um trapézio que tem dois ângulos consecutivos congruentes é isósceles.
d) um triângulo equilátero é também isósceles.
e) um triângulo retângulo é aquele cujos ângulos são retos.

54. (U.C.SALVADOR-92) Sejam:

P: o conjunto dos retângulos
Q: o conjunto dos quadrados
L: o conjunto dos losangos

A figura que melhor representa as relações existentes entre eles é:

a) b) c) d) e)

55. (U.MACK-77) A medida em graus do ângulo interno de um polígono regular é um número inteiro. O número de polígonos não semelhantes que possuem essa propriedade é:

a) 24 b) 22 c) 20 d) 18 e) não sei

(A medida em graus do ângulo interno de um polígono regular de n lados é: $180 - \frac{360}{n}$.)

56. (PUC-SP-80) Cada ângulo interno de um decágono regular mede:

a) 36° b) 60° c) 72° d) 120° e) 144°

57. (UNICAMP-87) O polígono convexo cuja soma dos ângulos internos mede 1 440° tem, exatamente:

a) *15* diagonais
b) *20* diagonais
c) *25* diagonais
d) *30* diagonais
e) *35* diagonais

58. (CESGRANRIO-87) Se um polígono convexo de n lados tem *54* diagonais, então n é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

59. (CESESP-86) Dentre os quatro centros principais de um triângulo qualquer, há dois deles que podem se situar no seu exterior, conforme o tipo do triângulo. Assinale a alternativa em que os mesmos são citados.

a) O baricentro e o ortocentro.
b) O baricentro e o incentro.
c) O circuncentro e o incentro.
d) O circuncentro e o ortocentro.
e) O incentro e o ortocentro.

Circunferência e círculo — Ângulos na circunferência

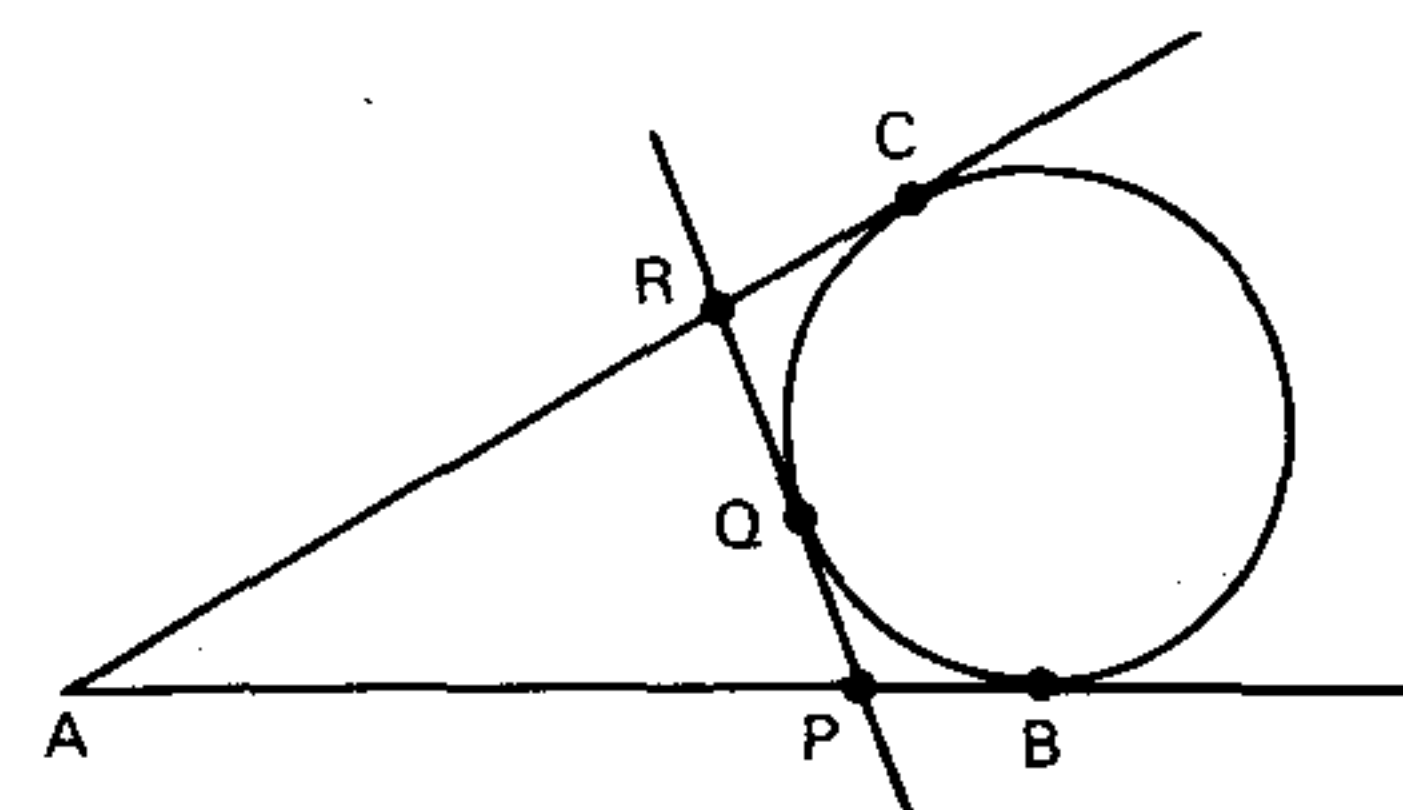
60. (EPUSP-66) As bases de um trapézio isósceles circunscrito a uma circunferência medem *9 m* e *6 m*. Cada um dos outros dois lados do trapézio mede:

a) 4,5 m b) 6 m c) 7,5 m d) 8 m e) n.r.a.

61. (FUVEST-80) Em um plano é dada uma circunferência e um ponto A pertencente a ela. O lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistantes da circunferência e do ponto A é uma:

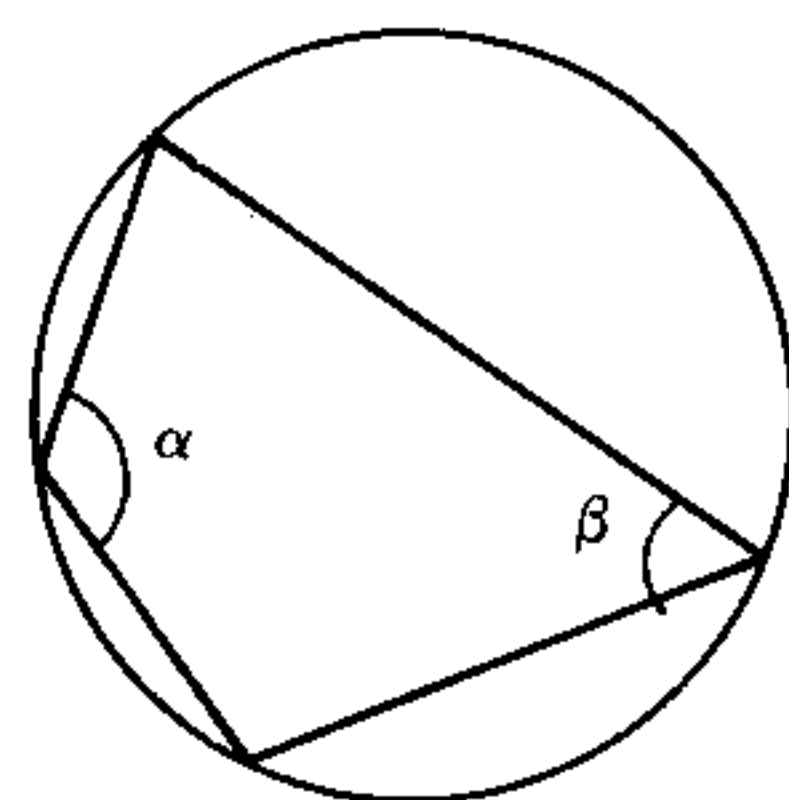
a) reta.
b) circunferência.
c) elipse.
d) semi-reta.
e) parábola.

62. (U.F.CE-91) Duas tangentes são traçadas a um círculo de um ponto exterior A e tocam o círculo nos pontos B e C, respectivamente. Uma terceira tangente intercepta o segmento AB em P e AC em R e toca o círculo em Q. Se $AB = 20\ cm$, então o perímetro do triângulo APR, em cm, é igual a:

a) 39,5
b) 40
c) 40,5
d) 41
e) 41,5

63. (U.MACK-77) $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência; $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ são retas tangentes à circunferência e tais que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam num ponto E da circunferência. Sabendo que os comprimentos de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não são necessariamente iguais, assinale a sentença *falsa*:

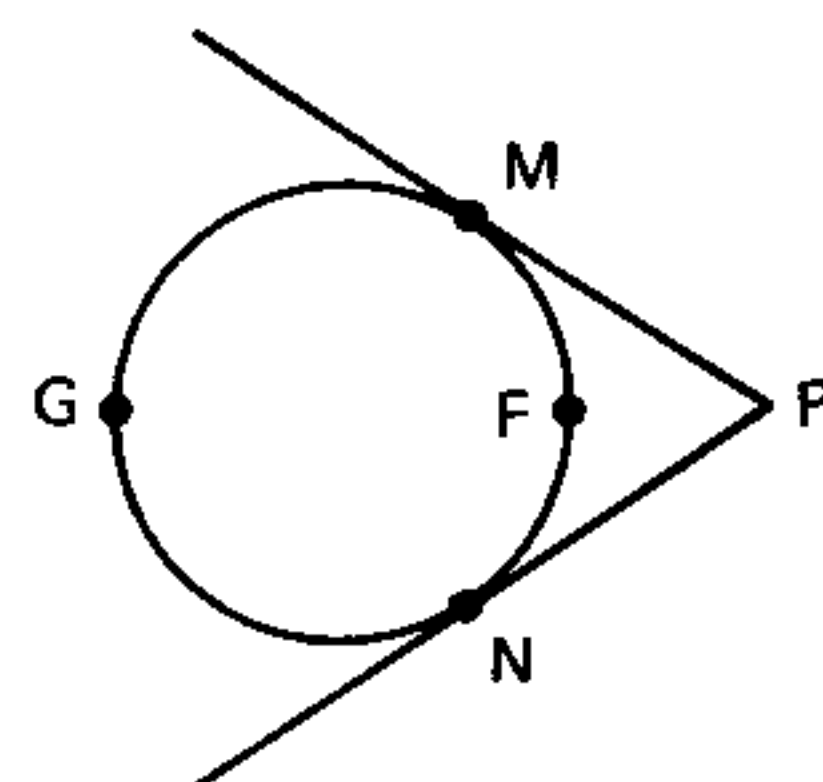
a) $D\hat{A}C = A\hat{C}B$
b) $D\hat{B}A = A\hat{C}B$
c) $A\hat{D}B = A\hat{C}B$
d) $A\hat{D}B = D\hat{B}C$
e) não sei

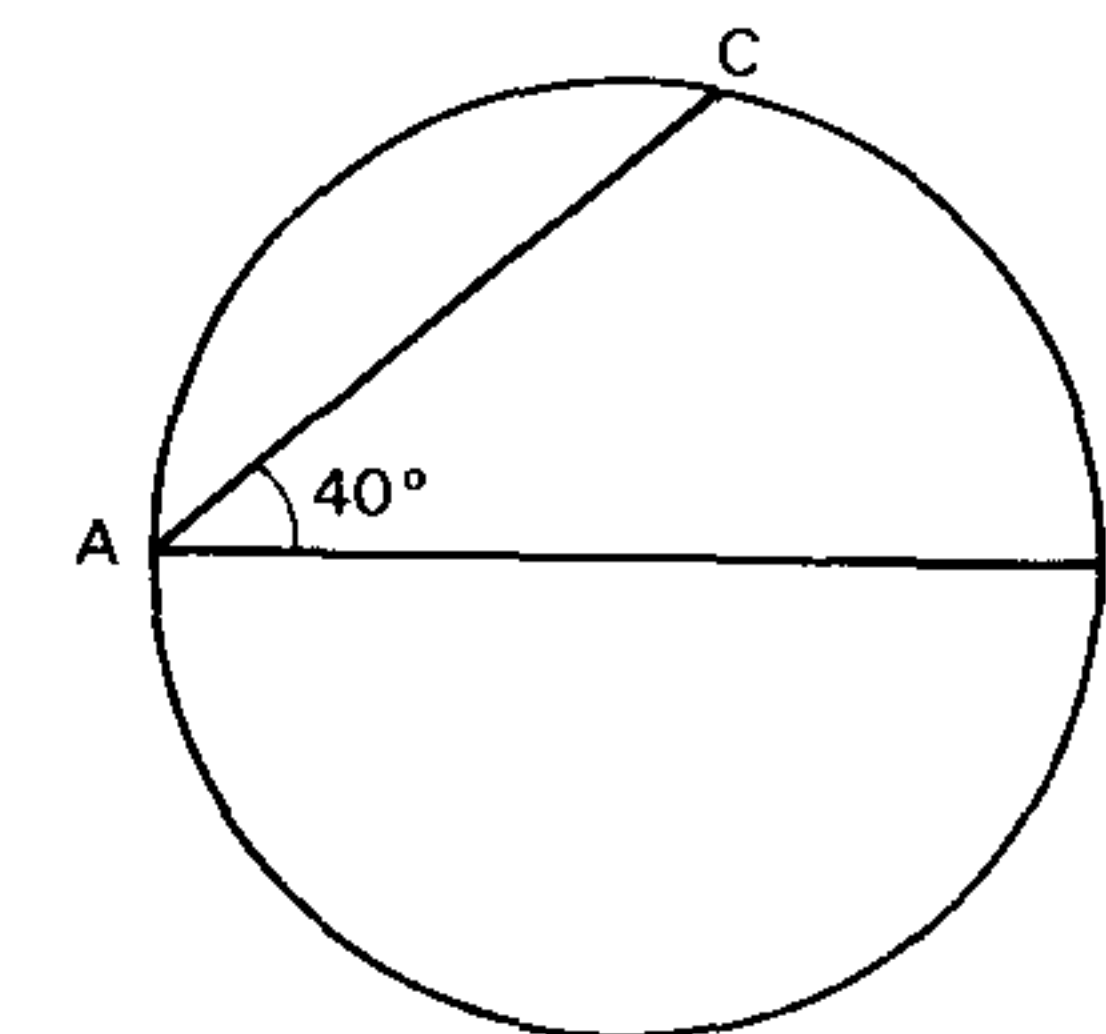
64. (CESGRANRIO-80) Um quadrilátero convexo está inscrito em um círculo. A soma, em radianos, dos ângulos α e β mostrados na figura é:

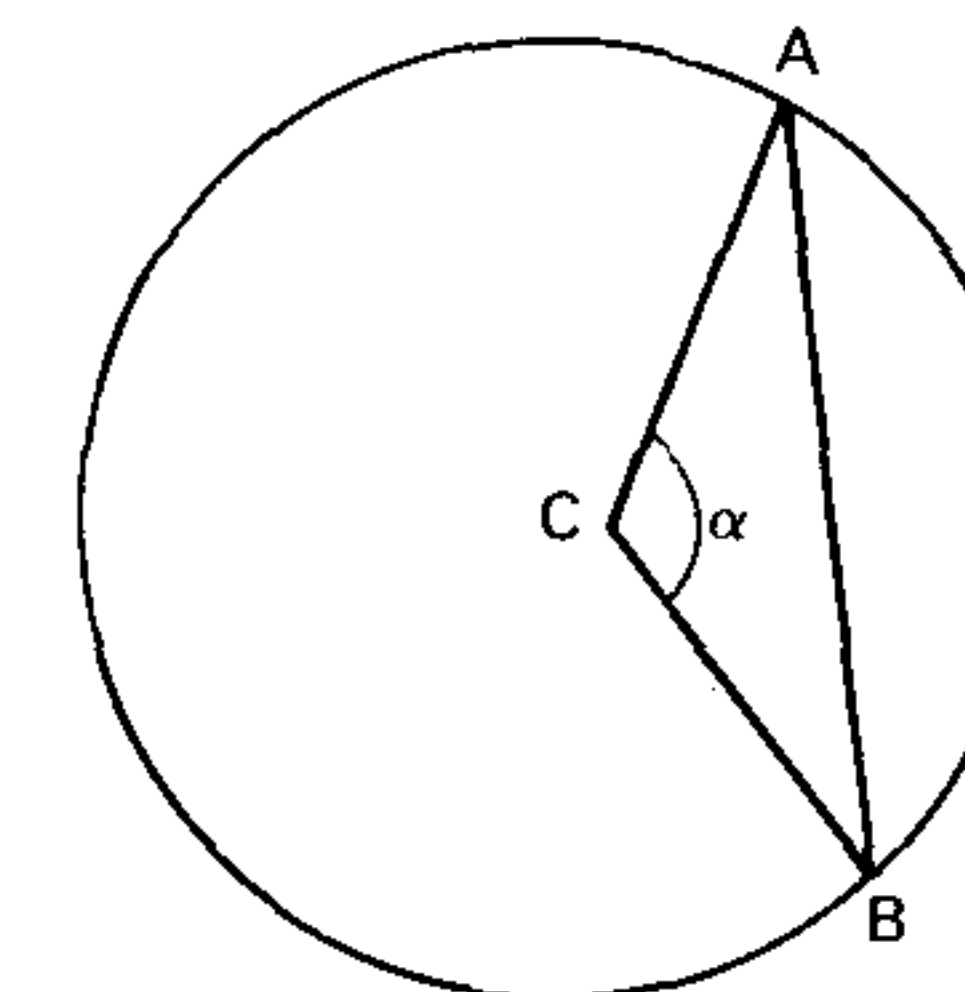
a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{2}$
c) π
d) $\frac{3\pi}{2}$
e) 2π

65. (U.F.UBERLÂNDIA-80) Em um dado triângulo retângulo inscrevemos uma circunferência de diâmetro d e circunscrevemos outra de diâmetro D. O perímetro do triângulo vale:

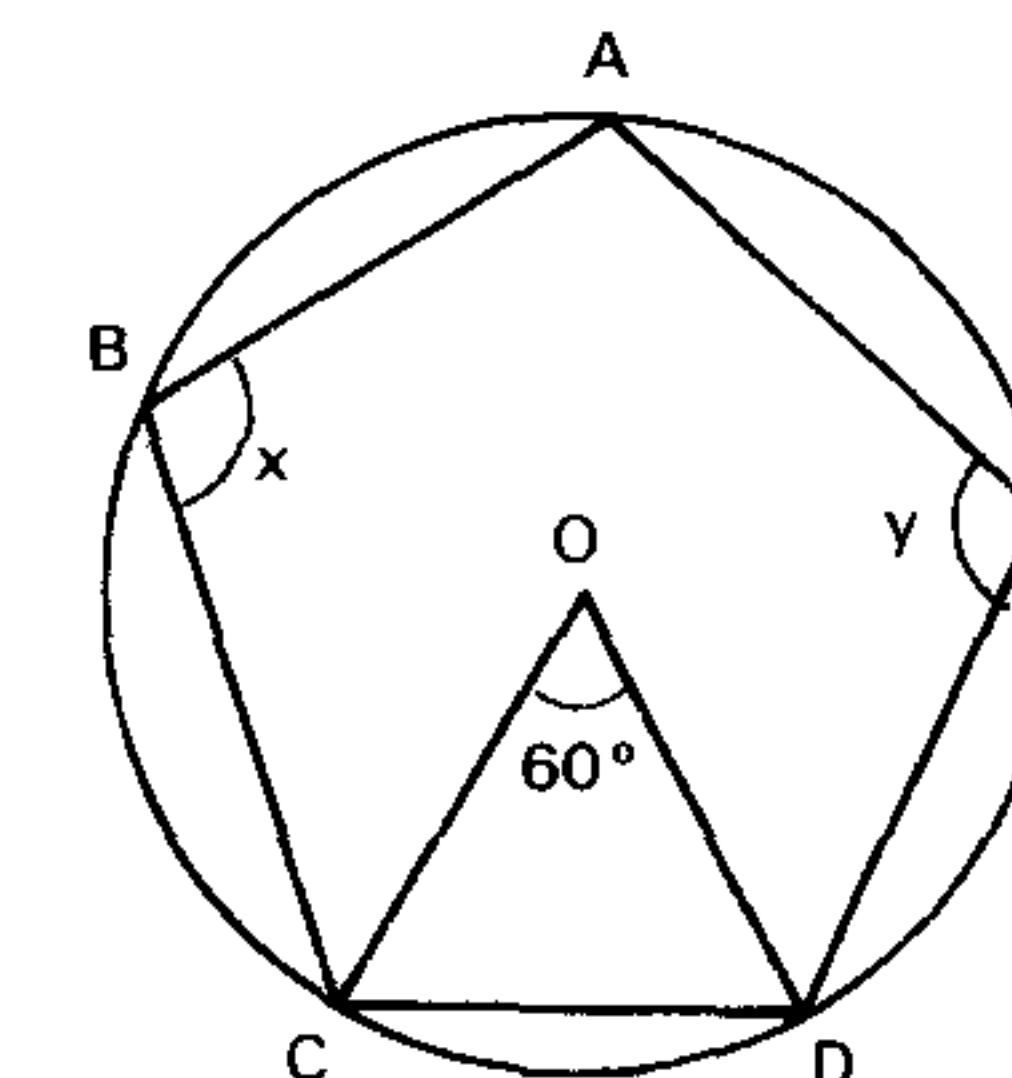
a) d + D b) 2d + D c) d + 2D d) 3/2(d + D) e) 2(d + D)

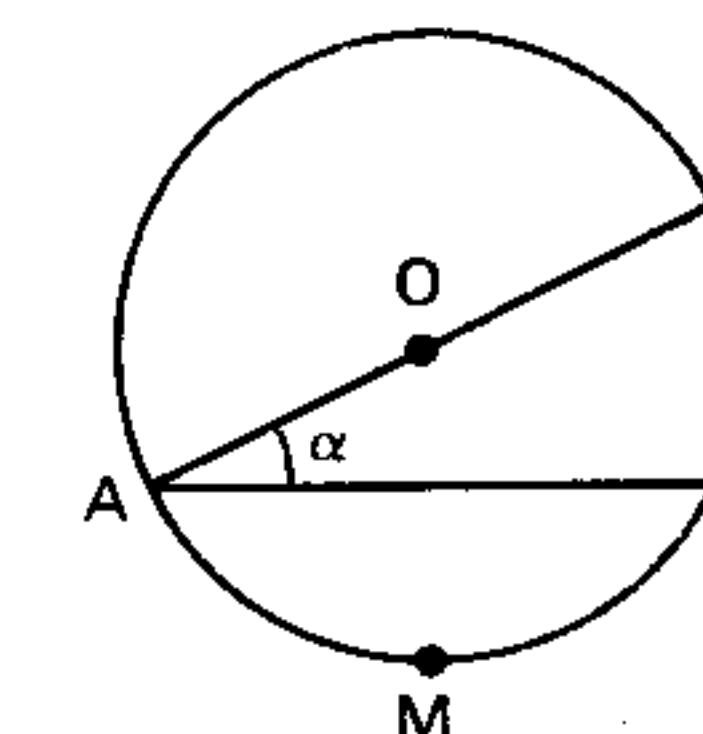
66. (CESGRANRIO-82) As semi-retas PM e PN são tangentes ao círculo da figura e o comprimento do arco $\widehat{MGN}$ é *4* vezes o do arco $\widehat{MFN}$.
O ângulo $M\hat{P}N$ vale:

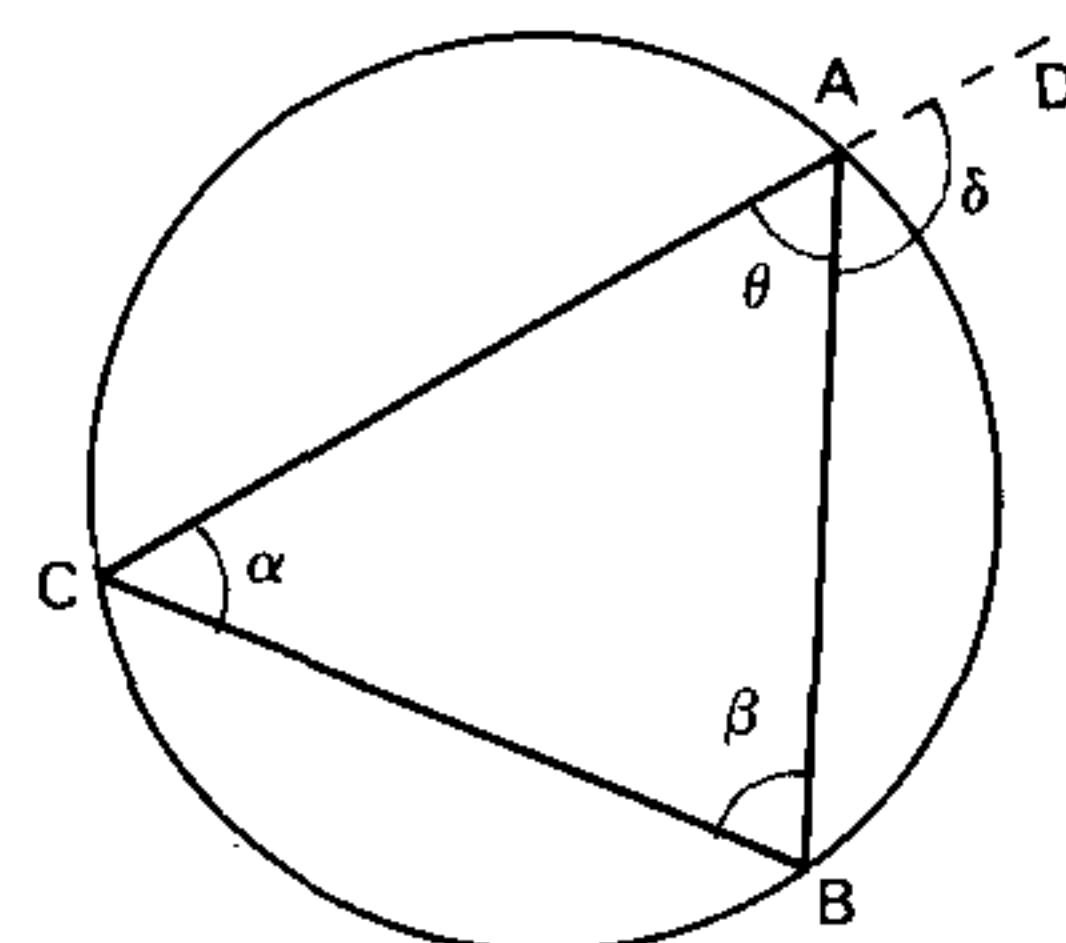
a) 76°
b) 80°
c) 90°
d) 108°
e) 120°

67. (PUC-SP-82) Na figura, AB é diâmetro da circunferência. O menor dos arcos (AC) mede:

a) 100°
b) 120°
c) 140°
d) 150°
e) 160°

68. (U.F.GO-84) Se a corda AB da figura é um lado de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro em C, a medida do ângulo α, em radianos, é:

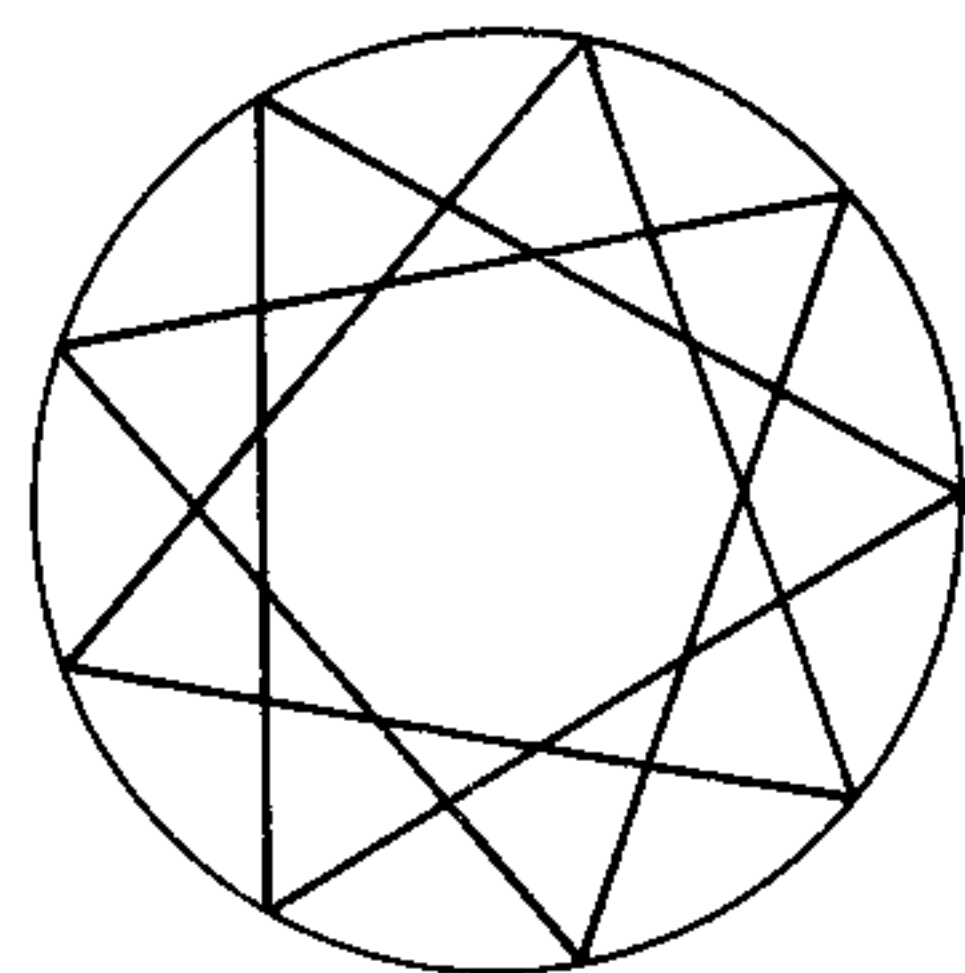
a) $\frac{2\pi}{3}$
b) $\frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{3\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{6}$

69. (PUC-SP-84) O pentágono $ABCDE$ ao lado está inscrito em um círculo de centro O. O ângulo central $C\hat{O}D$ mede *60°*. Então $x + y$ é igual a:

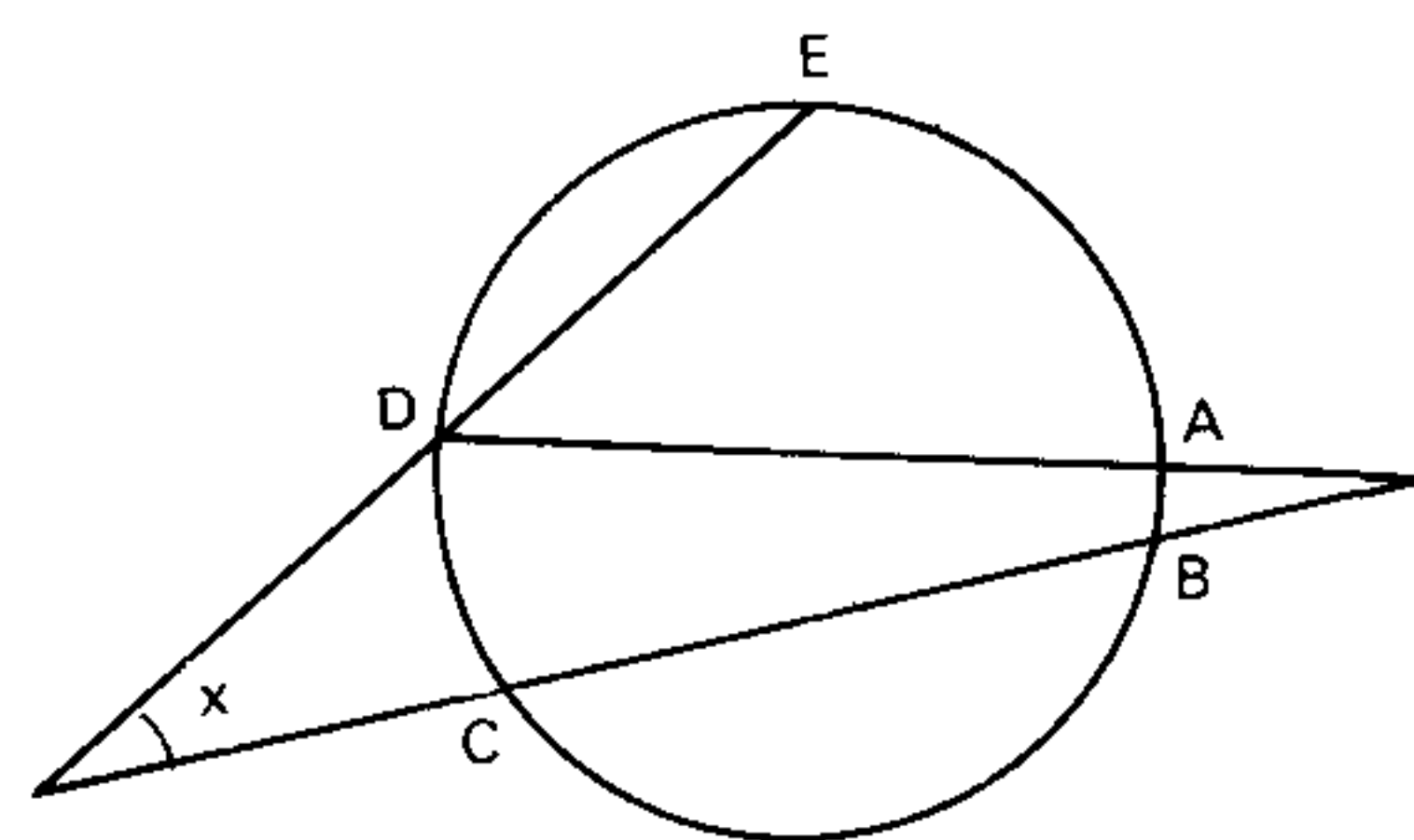
a) 180°
b) 185°
c) 190°
d) 210°
e) 250°

70. (CESGRANRIO-84) Em um círculo de centro O, está inscrito o ângulo α (ver figura). Se o arco $\widehat{AMB}$ mede *130°*, o ângulo α mede:

a) 25°
b) 30°
c) 40°
d) 45°
e) 50°

71. (U.F.PE-84) Considere a seguinte figura. Assinale a alternativa correta:

a) A medida do ângulo δ é igual à metade da soma das medidas dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$.
b) A medida do ângulo δ é igual ao dobro da medida do arco $\widehat{CB}$.
c) A medida do ângulo δ é igual à soma das medidas dos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$.
d) A medida do ângulo δ é igual à medida do arco $\widehat{CB}$.
e) A medida do ângulo δ e a do arco $\widehat{AC}$ são iguais.

72. (FUVEST-85) Os pontos A, B e C pertencem a uma circunferência de centro O. Sabe-se que OA é perpendicular a OB e forma com BC um ângulo de $70°$. Então, a tangente à circunferência no ponto C forma com a reta OA um ângulo de:

a) 10° b) 20° c) 30° d) 40° e) 50°

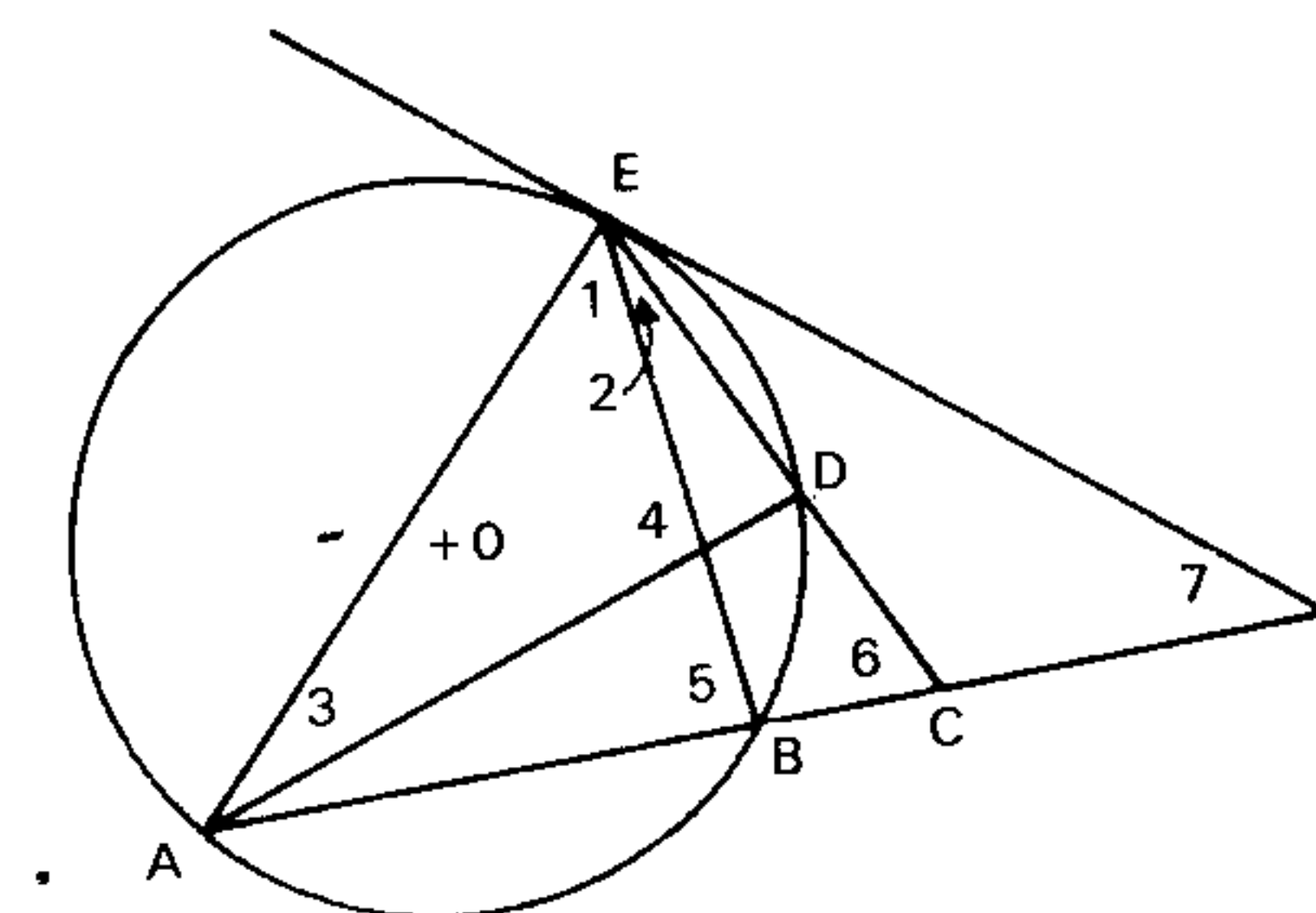
73. (CESESP-86) No eneágono regular estrelado da figura abaixo, um dos ângulos abaixo não pode ser medido entre seus lados ou seus prolongamentos. Assinale-o.

a) 20° b) 30° c) 40° d) 60° e) 80°

74. (CESGRANRIO-87)

Se, na figura, $\widehat{AB} = 20°$, $\widehat{BC} = 124°$, $\widehat{CD} = 36°$ e $\widehat{DE} = 90°$, então o ângulo x mede:

a) 34° b) 35°30′ c) 37° d) 38°30′ e) 40°

75. (ITA-89) Numa circunferência de centro 0, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero. Seja D um quarto ponto da circunferência, não coincidente com os demais. Sobre a medida x do ângulo $A\hat{D}C$ podemos afirmar que:

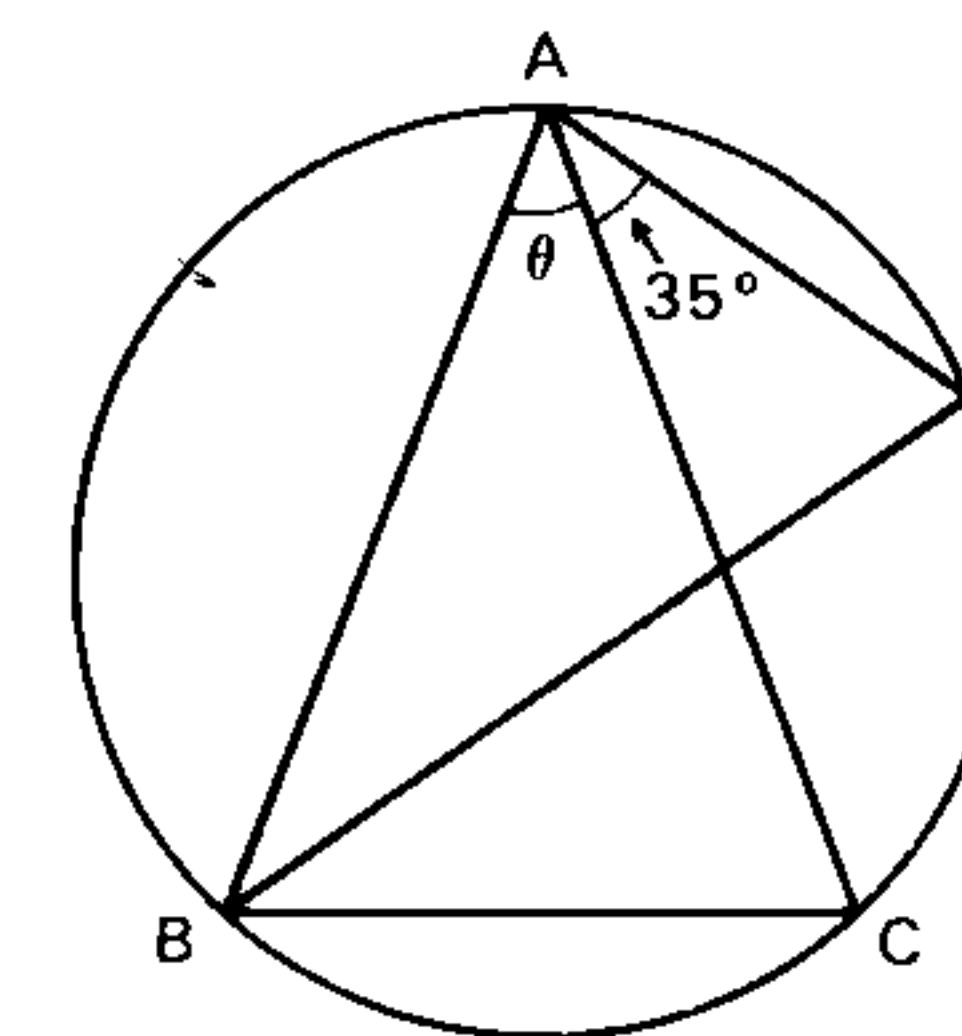
a) $0° < x < 30°$ ou $60° < x < 120°$
b) $x = 60°$ ou $x = 120°$
c) $x = 45°$ ou $x = 150°$
d) $x = 240°$ para qualquer posição de D na circunferência.
e) $x = 30°$ para qualquer posição de D na circunferência.

76. (ITA-90) Na figura abaixo 0 é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por E e F é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos 1, 2 e 3 é dada, respectivamente, por $49°$, $18°$, $34°$, determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e 7. Nas alternativas abaixo considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente.

a) 97°, 78°, 61°, 26°
b) 102°, 79°, 58°, 23°
c) 92°, 79°, 61°, 30°
d) 97°, 79°, 61°, 27°
e) 97°, 80°, 62°, 29°

77. (CESGRANRIO-90) Em um círculo de raio 5 está inscrito um quadrilátero $ABCD$. Sobre a soma dos ângulos opostos $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$, podemos afirmar que vale:

a) 5 × 180°
b) 3 × 180°
c) 2 × 180°
d) 180°
e) 90°

78. (U.C.SALVADOR-92) Na figura abaixo, o triângulo ABC é isósceles e $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo de vértice B. A medida θ, do ângulo assinalado, é:

a) 55°
b) 50°
c) 45°
d) 40°
e) 35°

Teorema de Tales — Semelhança de triângulos e potência de ponto — Triângulos retângulos

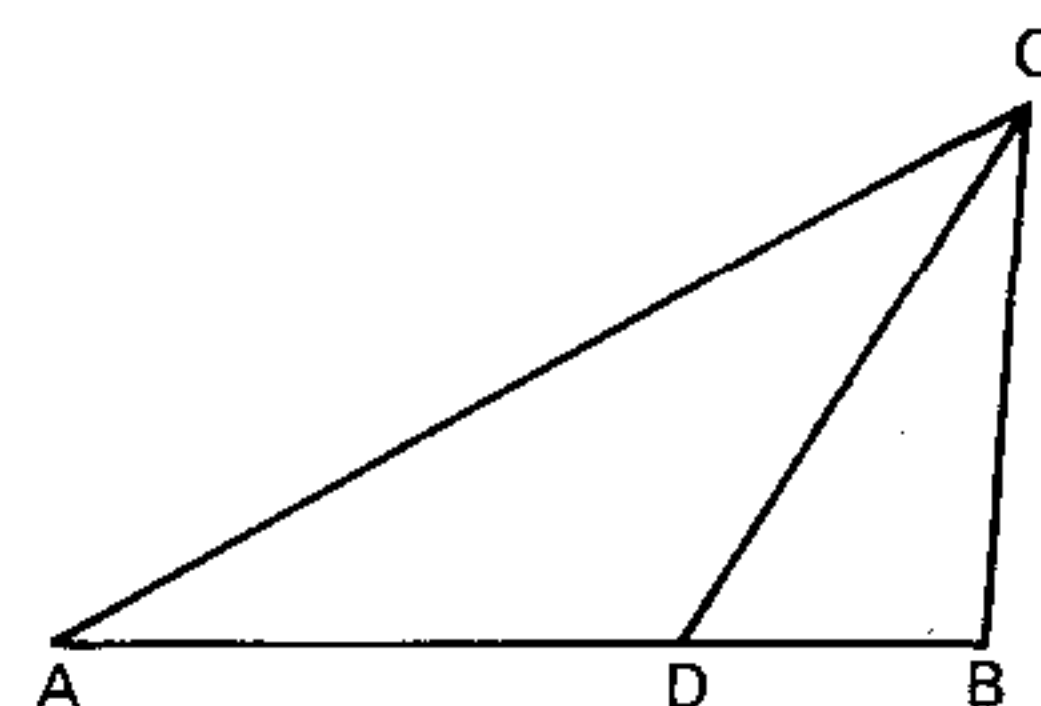
79. (CESGRANRIO-80) No triângulo ABC da figura, CD é a bissetriz do ângulo interno em C. Se $AD = 3\ cm$, $DB = 2\ cm$ e $AC = 4\ cm$, então o lado BC mede:

a) 3 cm

b) $\frac{5}{2}$ cm

c) $\frac{7}{2}$ cm

d) $\frac{8}{3}$ cm

e) 4 cm

80. (PUC-SP-84) O segmento AB mede 10. Chama-se segmento áureo de AB o segmento AP, P em AB, de medida x, tal que $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$. O valor de x é:

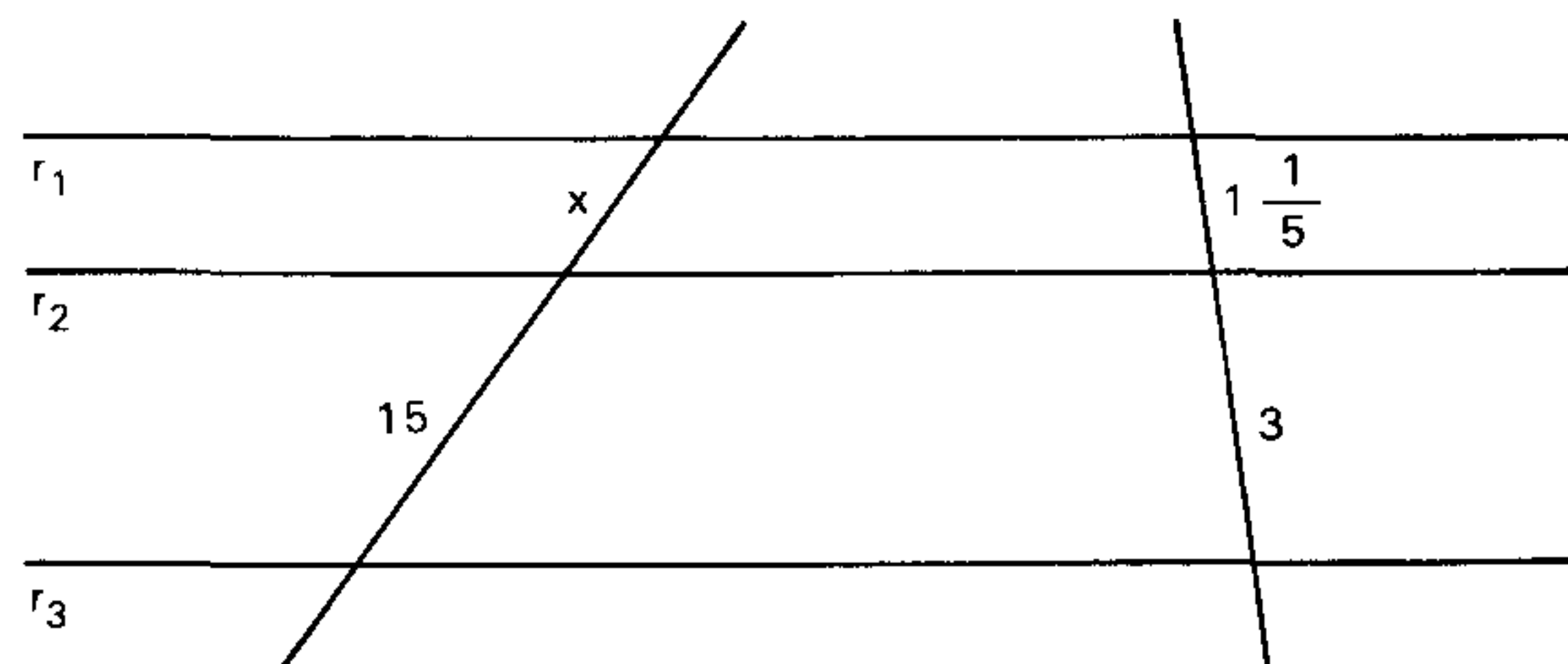
a) $5\sqrt{5} - 5$

b) $5\sqrt{3} - 5$

c) $5\sqrt{5} + 5$

d) $5\sqrt{3} + 5$

e) 5

81. (CESGRANRIO-84)

As retas r_1, r_2 e r_3 são paralelas e os comprimentos dos segmentos de transversais são os indicados na figura. Então x é igual a:

a) $4\frac{1}{5}$ b) $\frac{15}{2}$ c) 5 d) $\frac{8}{5}$ e) 6

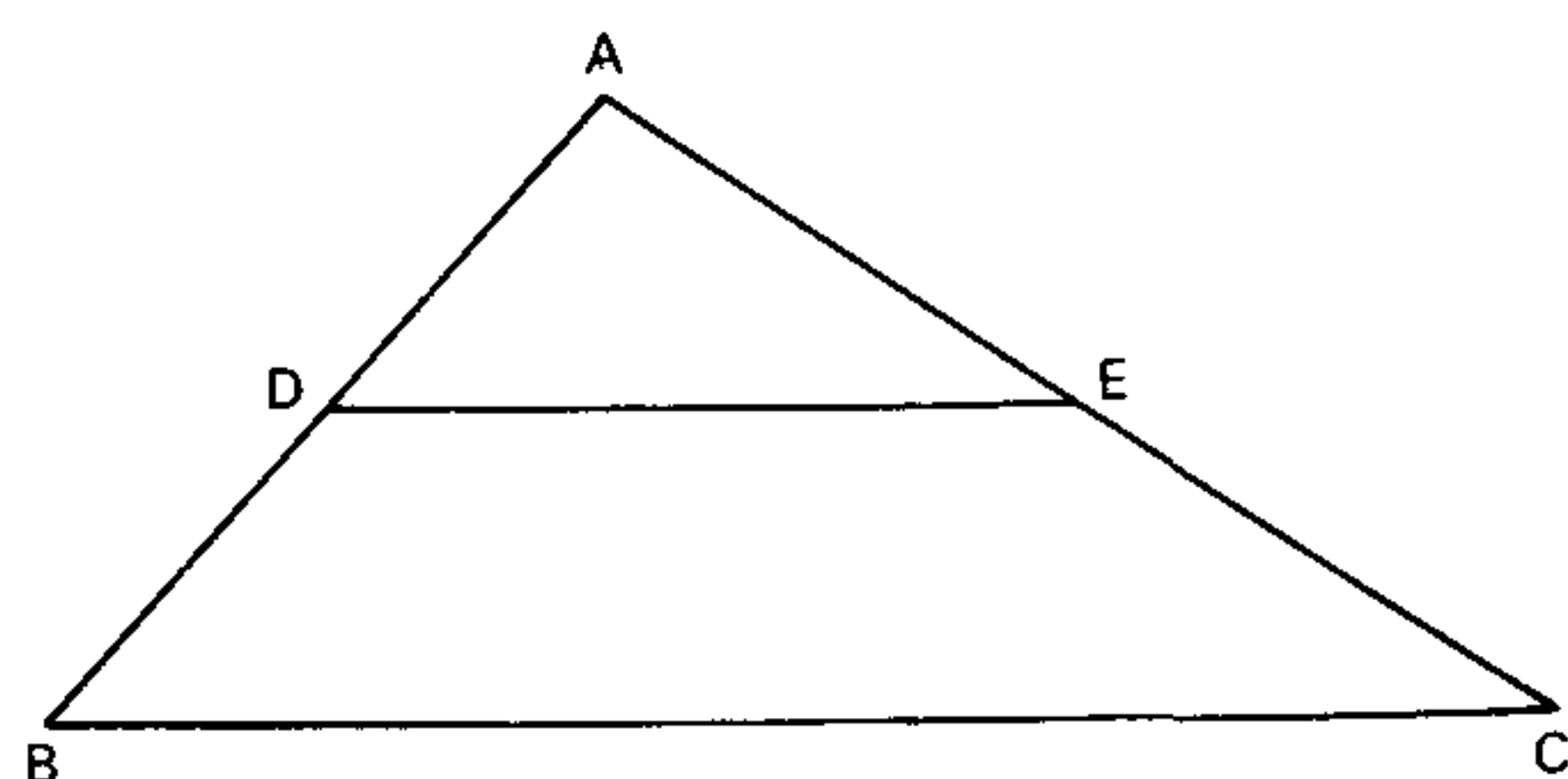
82. (U.F.MG-89) Na figura, os segmentos BC e DE são paralelos, $\overline{AB} = 15\ m$, $\overline{AD} = 5\ m$ e $\overline{AE} = 6\ m$. A medida do segmento CE é, em metros:

a) 5

b) 6

c) 10

d) 12

e) 18

83. (FUVEST-77) Dados:

$M\hat{B}C = B\hat{A}C$

$\overline{AB} = 3$

$\overline{BC} = 2$

$\overline{AC} = 4$

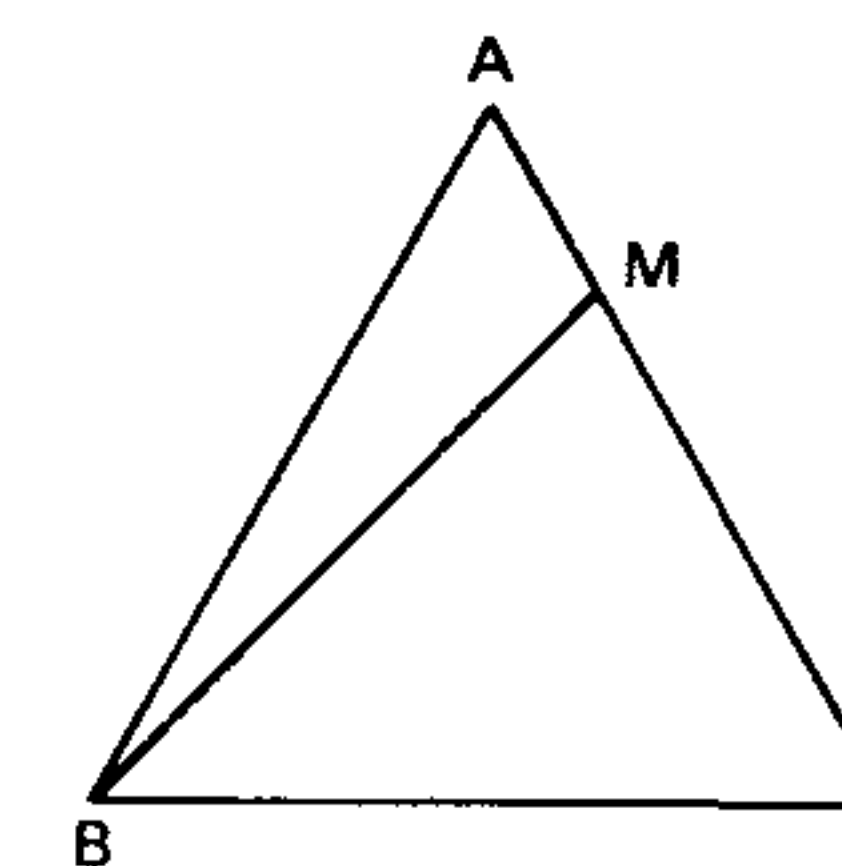
Então $\overline{MC}$ é igual a:

a) 3,5

b) 2

c) 1,5

d) 1

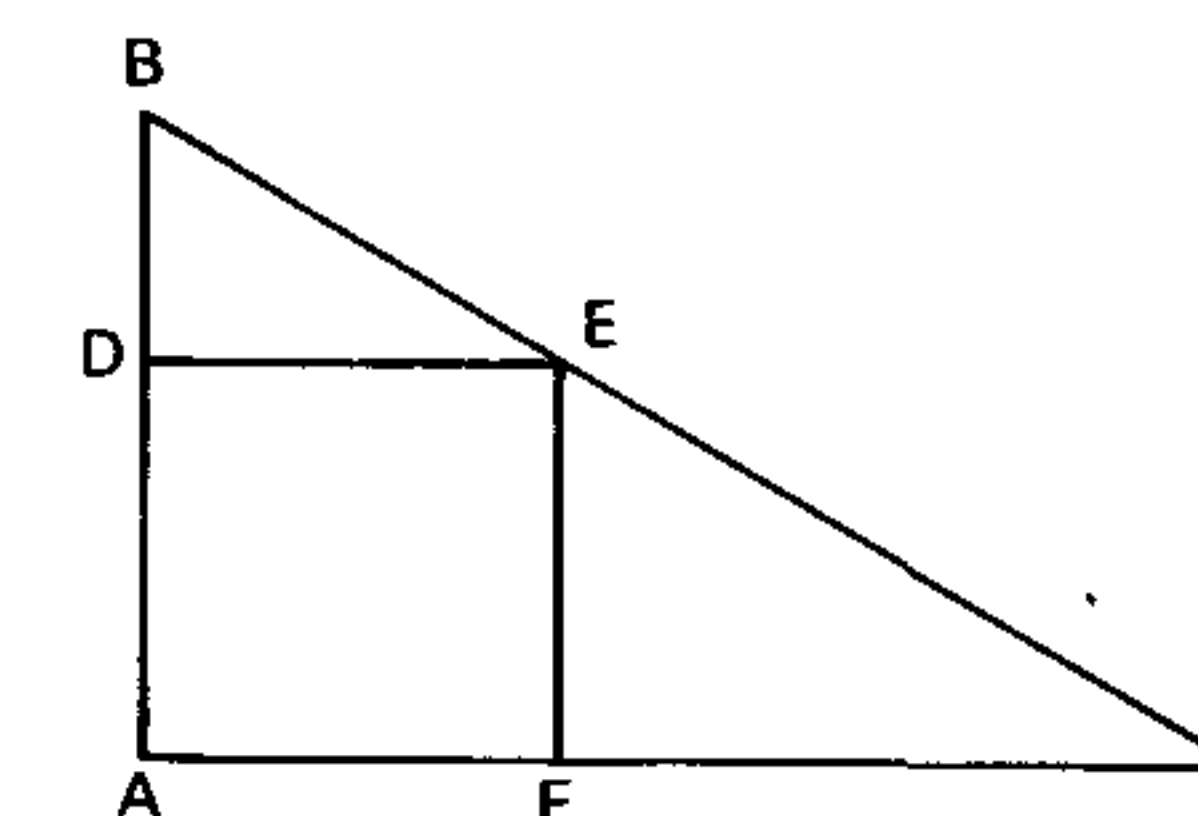
e) 0,5

84. (FUVEST-79) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, $ADEF$ é um quadrado, $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AC} = 3$. Quanto mede o lado do quadrado?

a) 0,70

b) 0,75

c) 0,80

d) 0,85

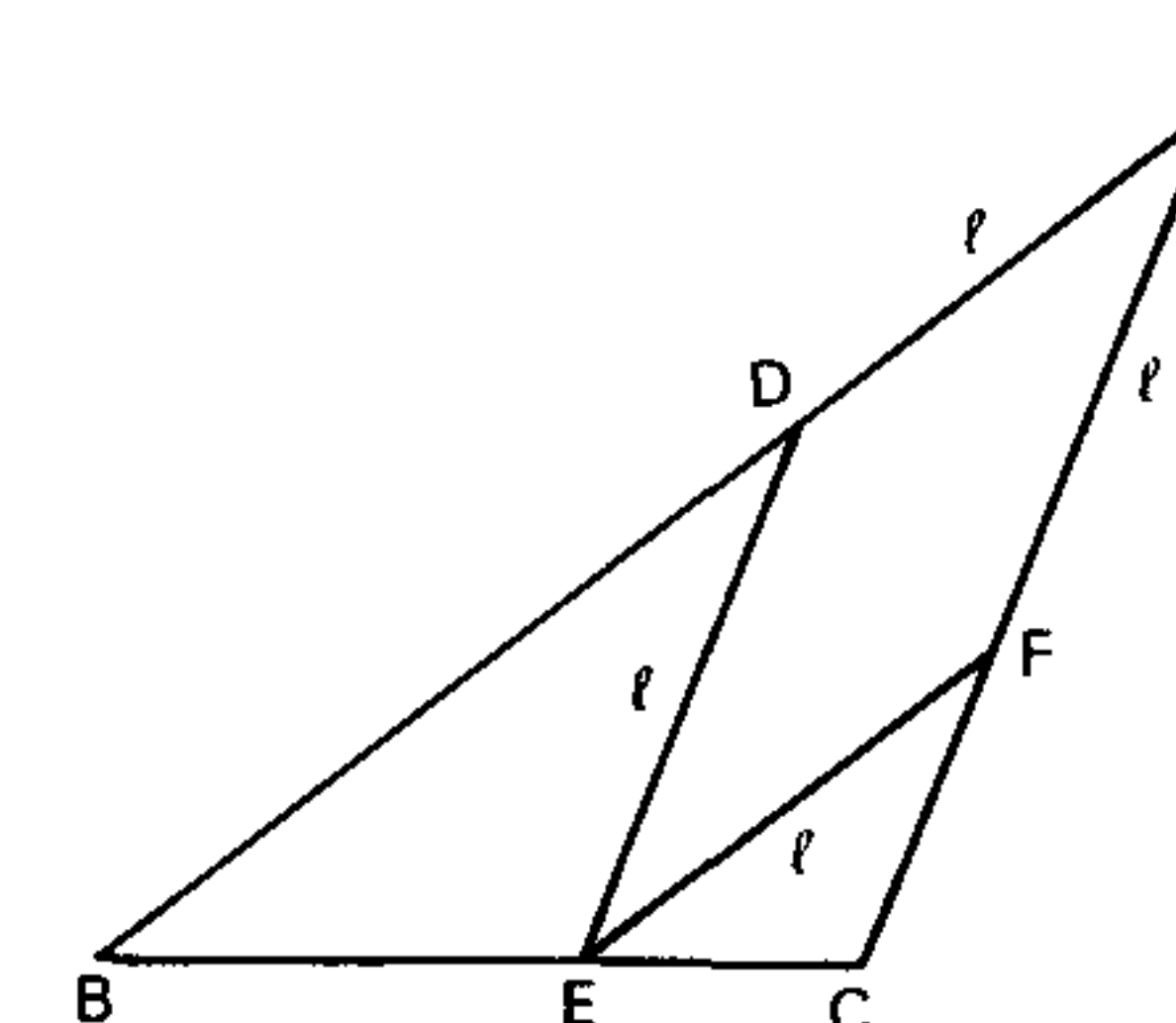
e) 0,90

85. (CESGRANRIO-79) O losango $ADEF$ está inscrito no triângulo ABC, como mostra a figura. Se $\overline{AB} = 12\ m$, $\overline{BC} = 8\ m$ e $\overline{AC} = 6\ m$, o lado ℓ do losango mede:

a) 5 m

b) 3 m

c) 2 m

d) 4 m

e) 8 m

86. (FATEC-79) Num trapézio isóceles $ABCD$ as bases são dadas, respectivamente, por $\overline{AD} = 2\ cm$ e $\overline{BC} = 5\ cm$. Em tal trapézio traça-se $\overline{MN}$ paralelo a AD e tal que $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Então o comprimento do segmento $\overline{MN}$ é:

a) 3 cm b) $\frac{1}{3}$ cm c) $\frac{5}{2}$ cm d) $\frac{7}{2}$ cm e) $\frac{5}{3}$ cm

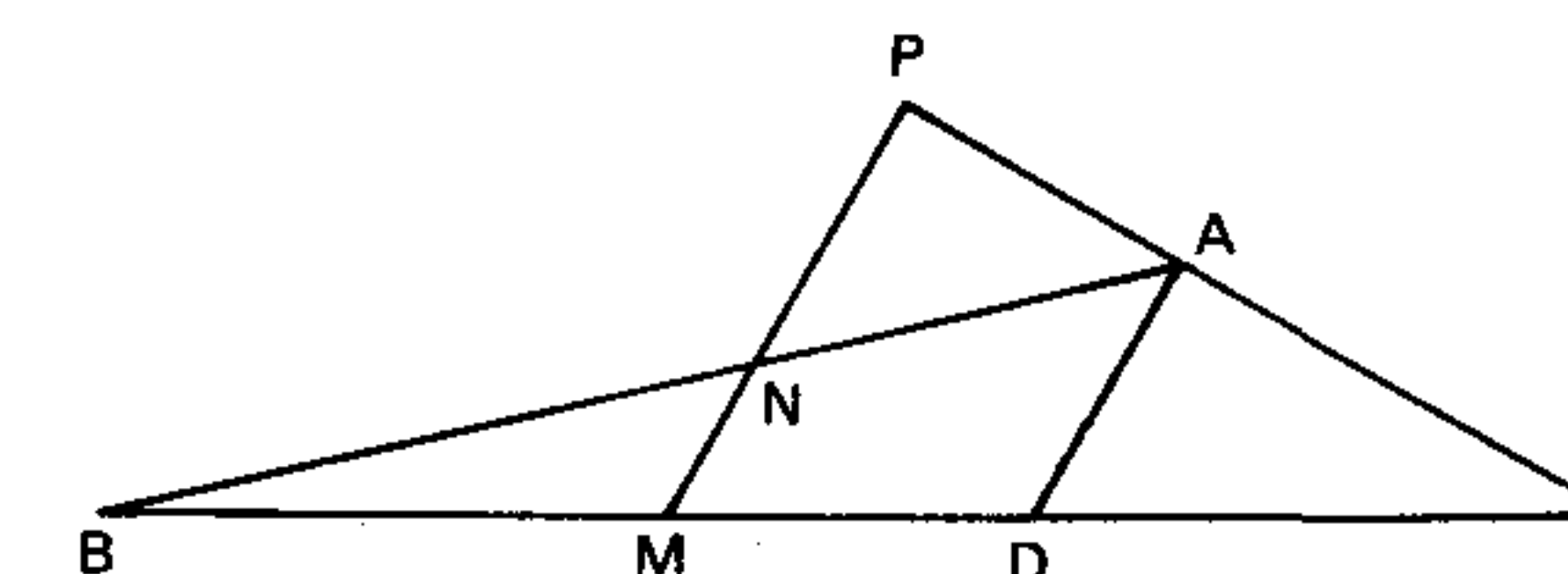
87. (ITA-79) Considere o triângulo ABC, onde $\overline{AD}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$. Por um ponto arbitrário M do segmento $\overline{BD}$, tracemos o segmento $\overline{MP}$ paralelo a $\overline{AD}$, onde P é o ponto de interseção desta paralela com o prolongamento do lado $\overline{AC}$ (figura). Se N é o ponto de interseção de $\overline{AB}$ com $\overline{MP}$, podemos afirmar que:

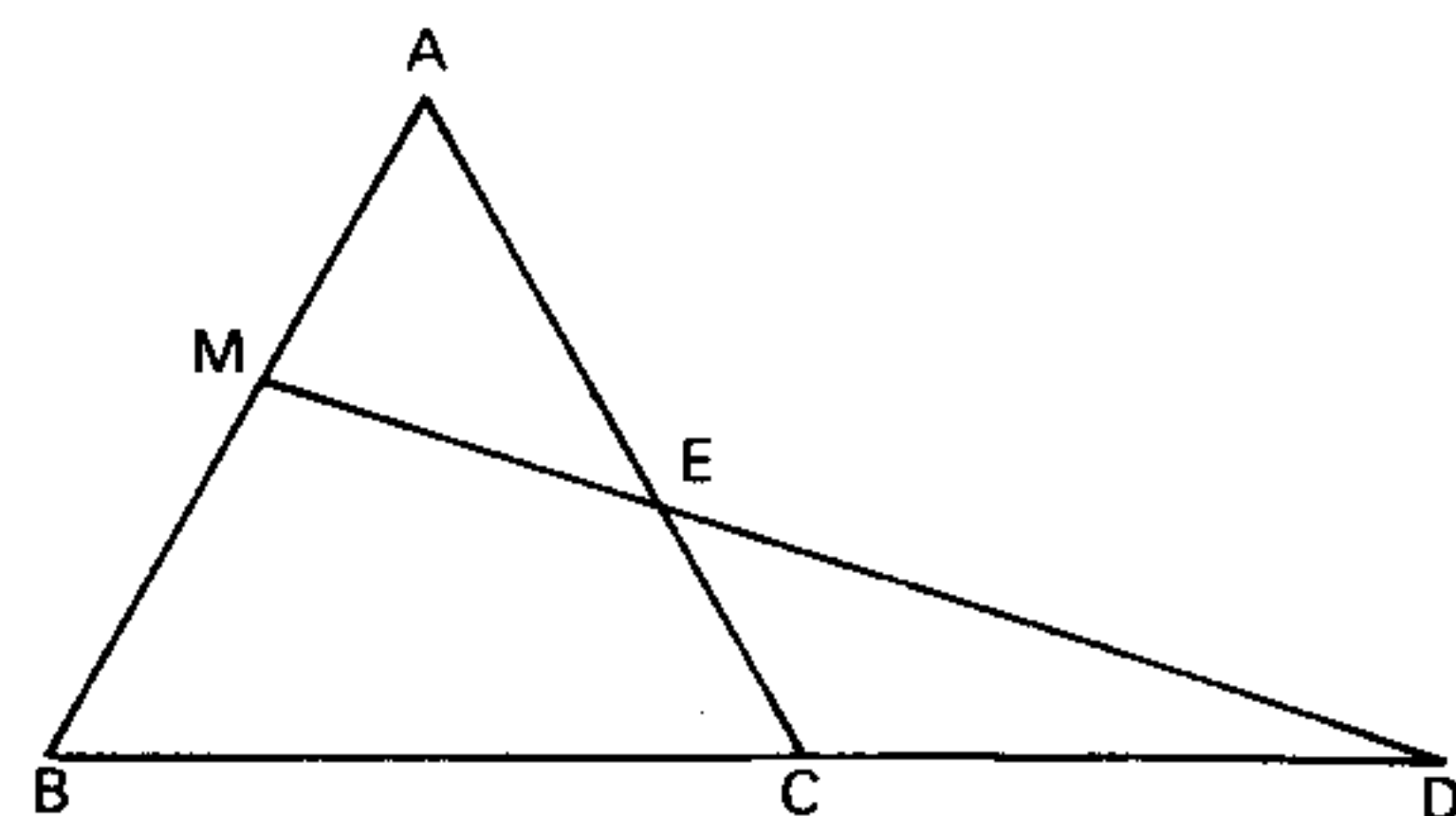
a) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{BM}$

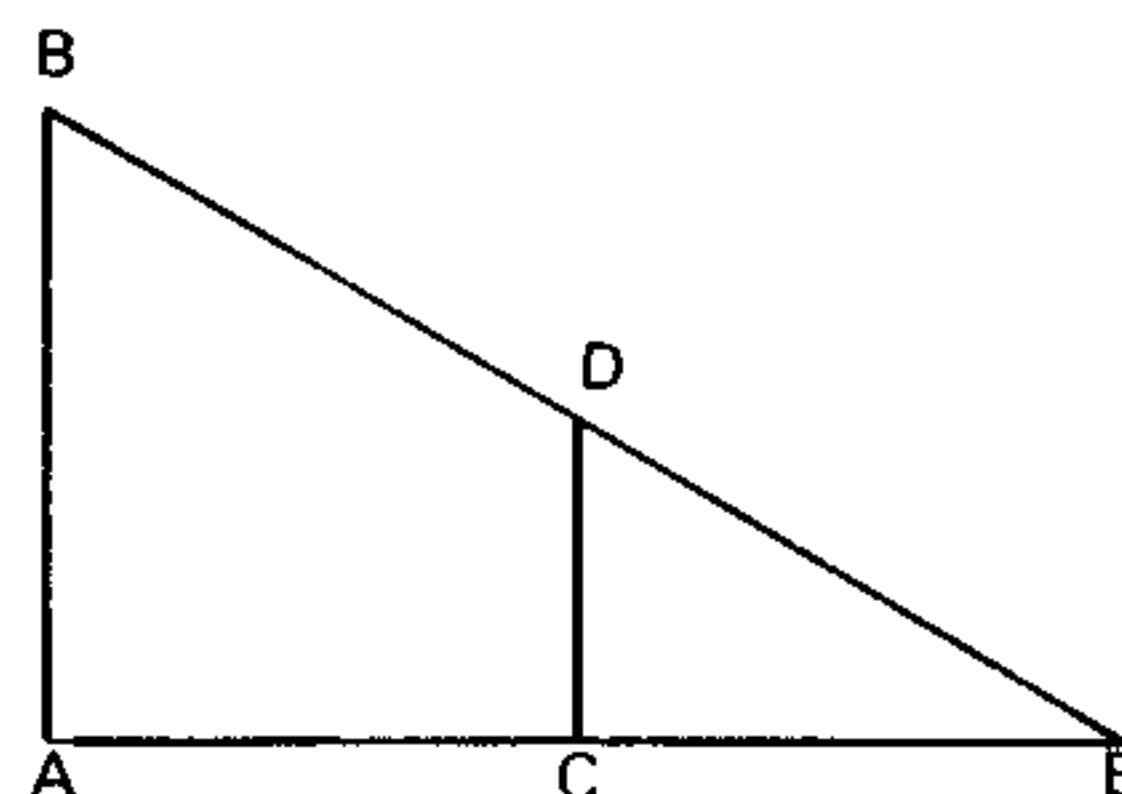
b) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{CM}$

c) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{AB}$

d) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{AD}$

e) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{AC}$

88. (U.MACK.-80) O triângulo ABC da figura é equilátero. $AM = MB = 5$ e $CD = 6$. O valor de AE é:

a) $\frac{76}{11}$
b) $\frac{77}{11}$
c) $\frac{78}{11}$
d) $\frac{79}{11}$
e) $\frac{80}{11}$

89. (PUC-SP-80) Na figura ao lado as retas AB e CD são paralelas. $AB = 136$, $CE = 75$ e $CD = 50$. Quanto mede o segmento AE?

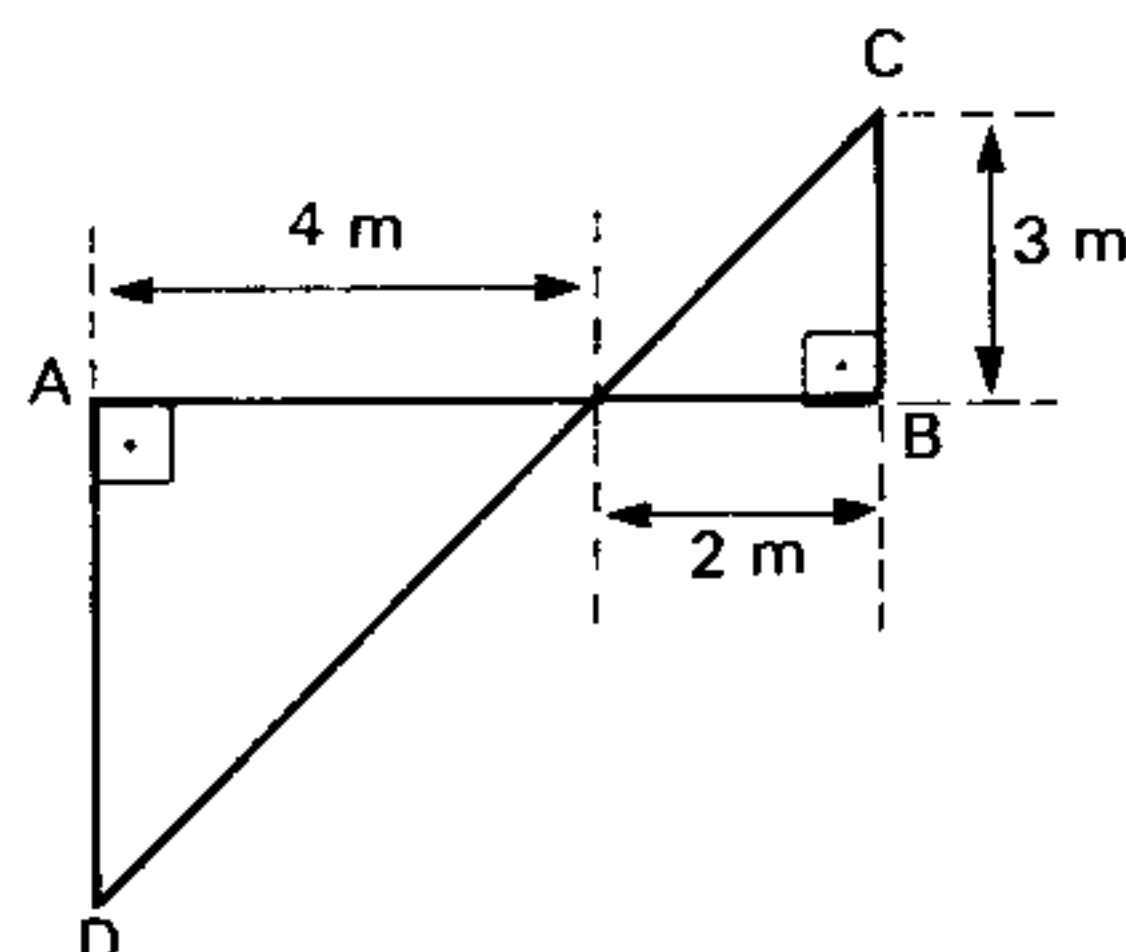
a) 136
b) 306
c) 204
d) 163
e) 122

90. (PUC-SP-81) Os lados paralelos de um trapézio são AB e CD. O ponto comum a suas diagonais é M. Então necessariamente são semelhantes os triângulos:

a) AMC e BMD
b) AMB e CMD
c) ABC e ABD
d) BCD e ACD
e) BCM e ADC

91. (FUVEST-82) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede *12 m*. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de *1 m* de altura mede *0,6 m*. A altura do poste é:

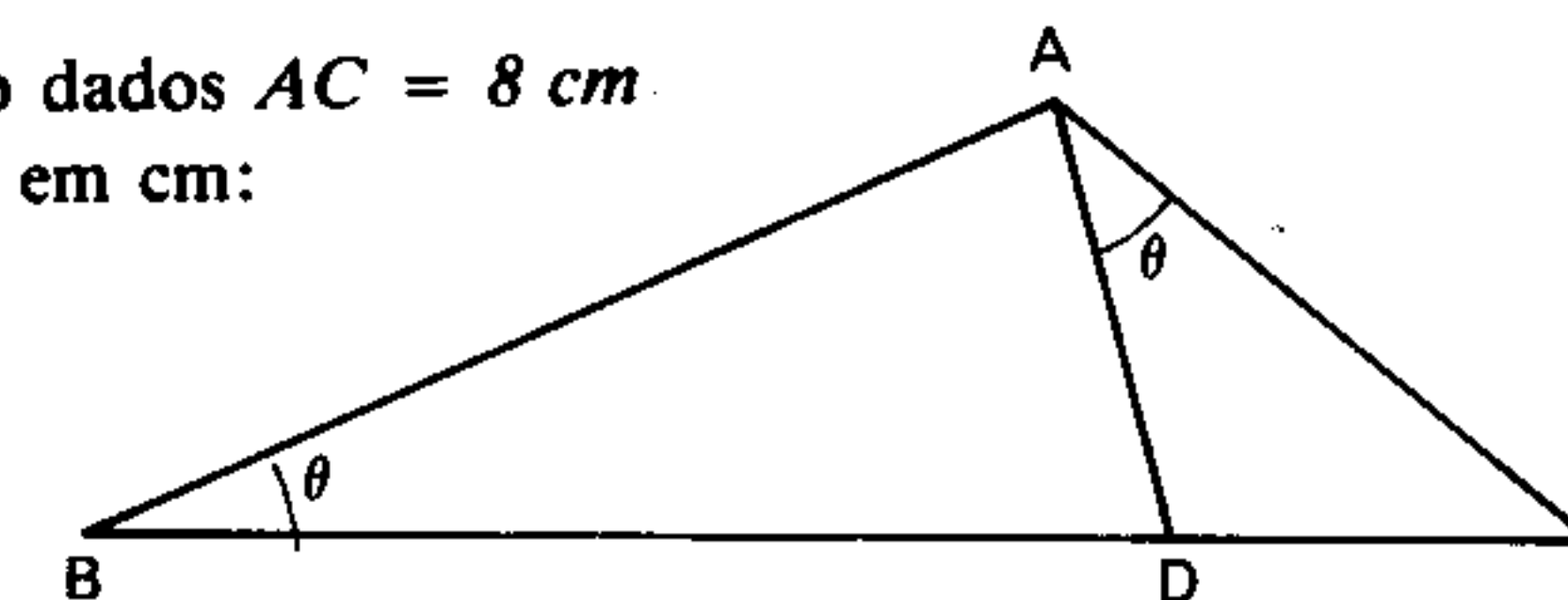
a) 6 m b) 7,2 m c) 12 m d) 20 m e) 72 m

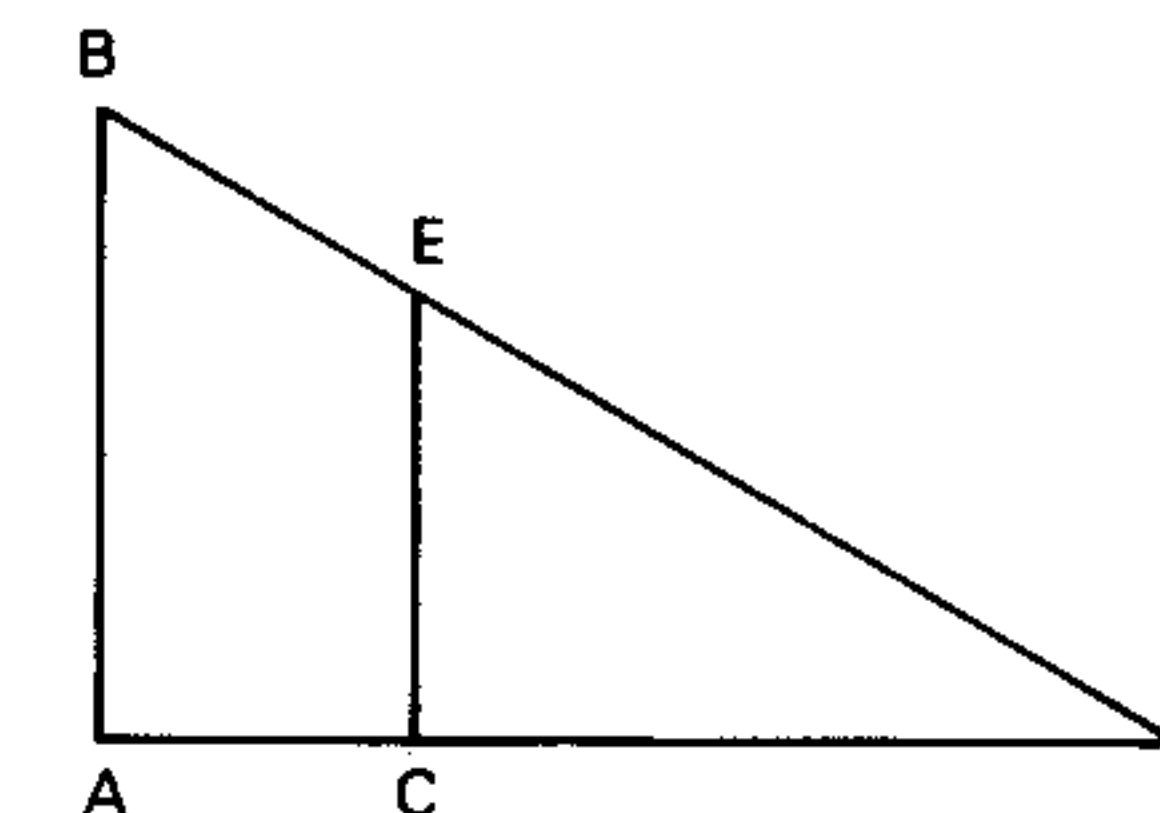
92. (U.C.MG-82) A medida, em metros, do segmento AD da figura ao lado é de:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 8
e) 10

93. (U.F.RS-84) Num trapézio, cujos lados paralelos medem *4* e *6*, as diagonais interceptam-se de tal modo que os menores segmentos determinados em cada uma delas medem *2* e *3*. A medida da menor diagonal é:

a) 3 b) 4 c) 9/2 d) 3 e) 15/2

94. (U.F.SE-84) Na figura ao lado, são dados $AC = 8\ cm$ e $CD = 4\ cm$. A medida de $\overline{BD}$ é, em cm:

a) 9
b) 10
c) 12
d) 15
e) 16

95. (U.F.PA-84) Na figura ao lado, $\overline{AB} = 15$, $\overline{AD} = 12$ e $\overline{CD} = 4$. Sendo $\overline{EC}$ paralela a $\overline{AB}$, qual o valor de $\overline{EC}$?

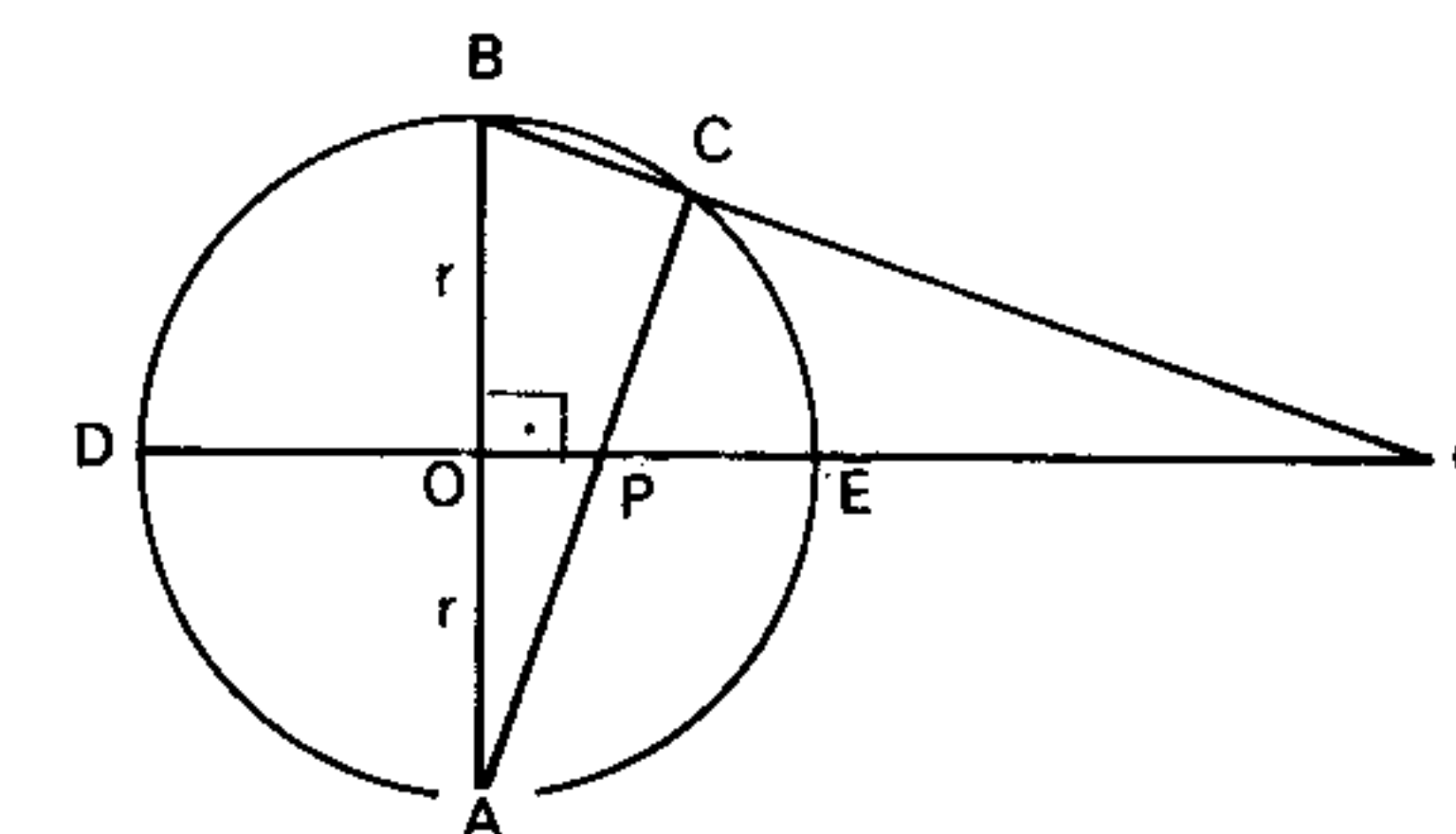
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

96. (FATEC-87) Sejam ABC e DEF triângulos retângulos, sendo A e D os vértices dos ângulos retos. Das sentenças abaixo, a *falsa* é:

a) Se $\hat{B} \cong \hat{E}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
b) Se $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
c) Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\hat{B} \cong \hat{F}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
d) Se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
e) Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

97. (U.MACK.-75) O ponto P está no interior de uma circunferência de *13 cm* de raio e dista *5 cm* do centro da mesma. Pelo ponto P traça-se a corda $\overline{AB}$ de *25 cm*. Os comprimentos dos segmentos que P determina sobre a corda $\overline{AB}$ são:

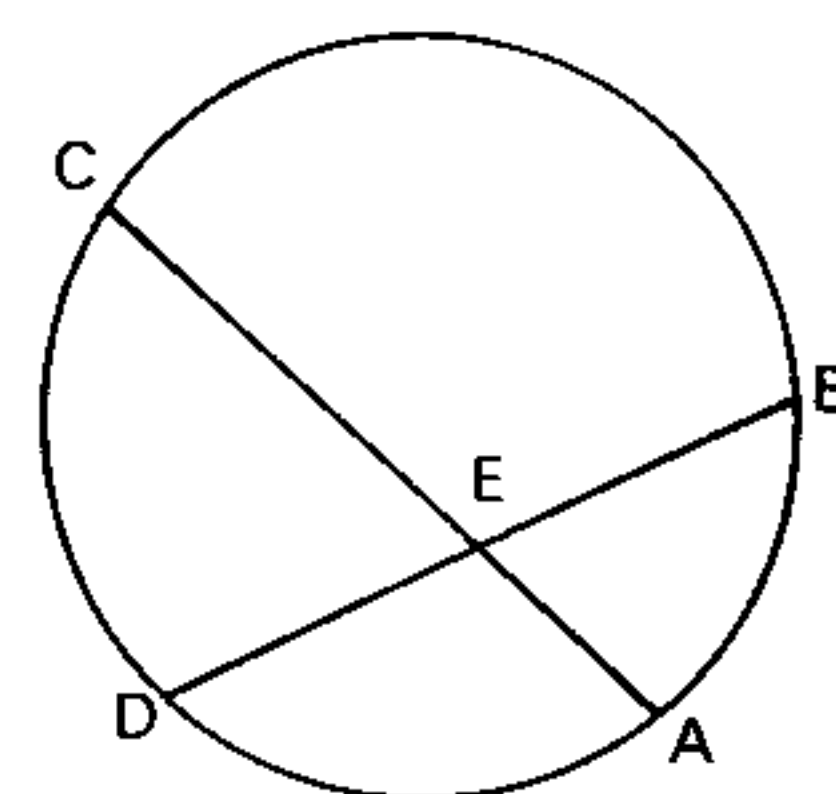
a) 11 cm e 14 cm
b) 7 cm e 18 cm
c) 16 cm e 9 cm
d) 5 cm e 20 cm
e) 8 cm e 17 cm

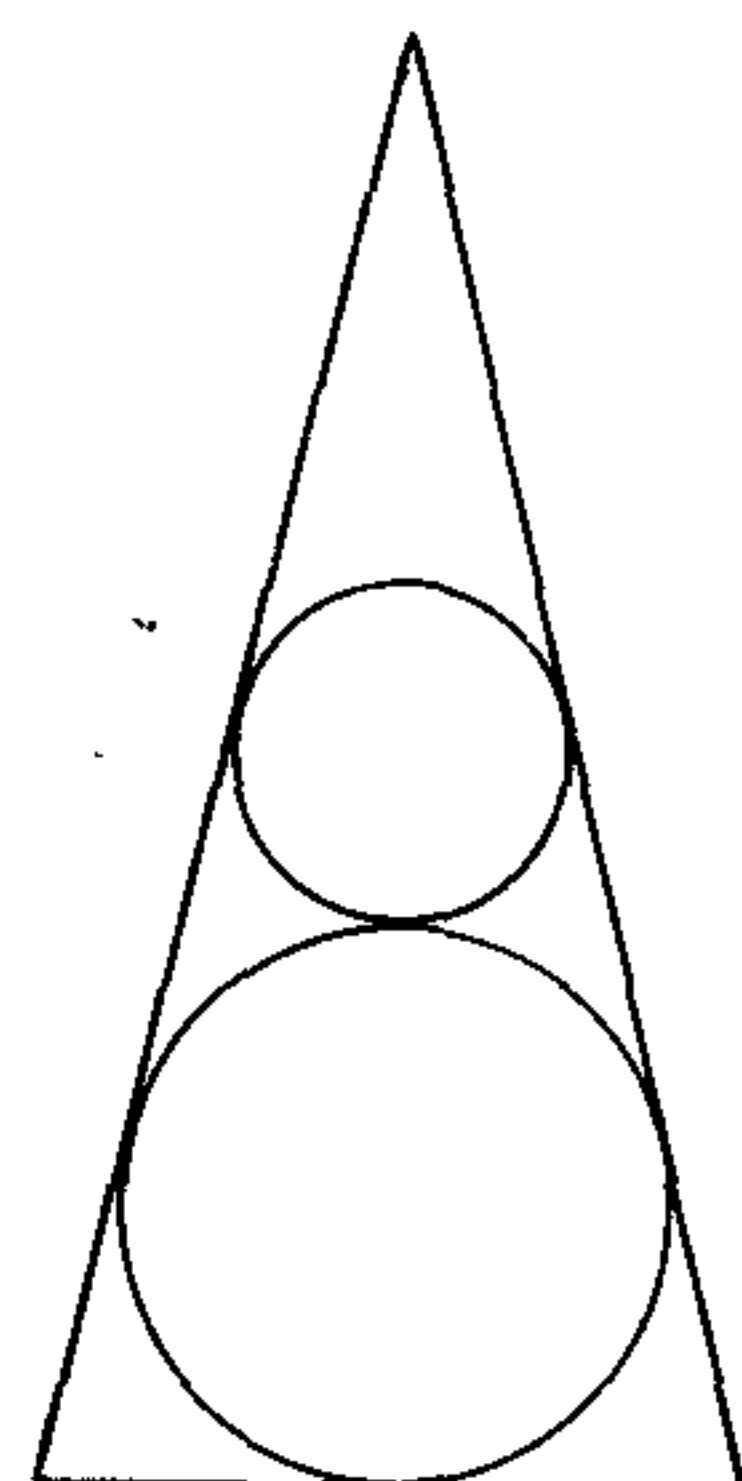
98. (U.MACK.-81) Na figura ao lado vale sempre que:

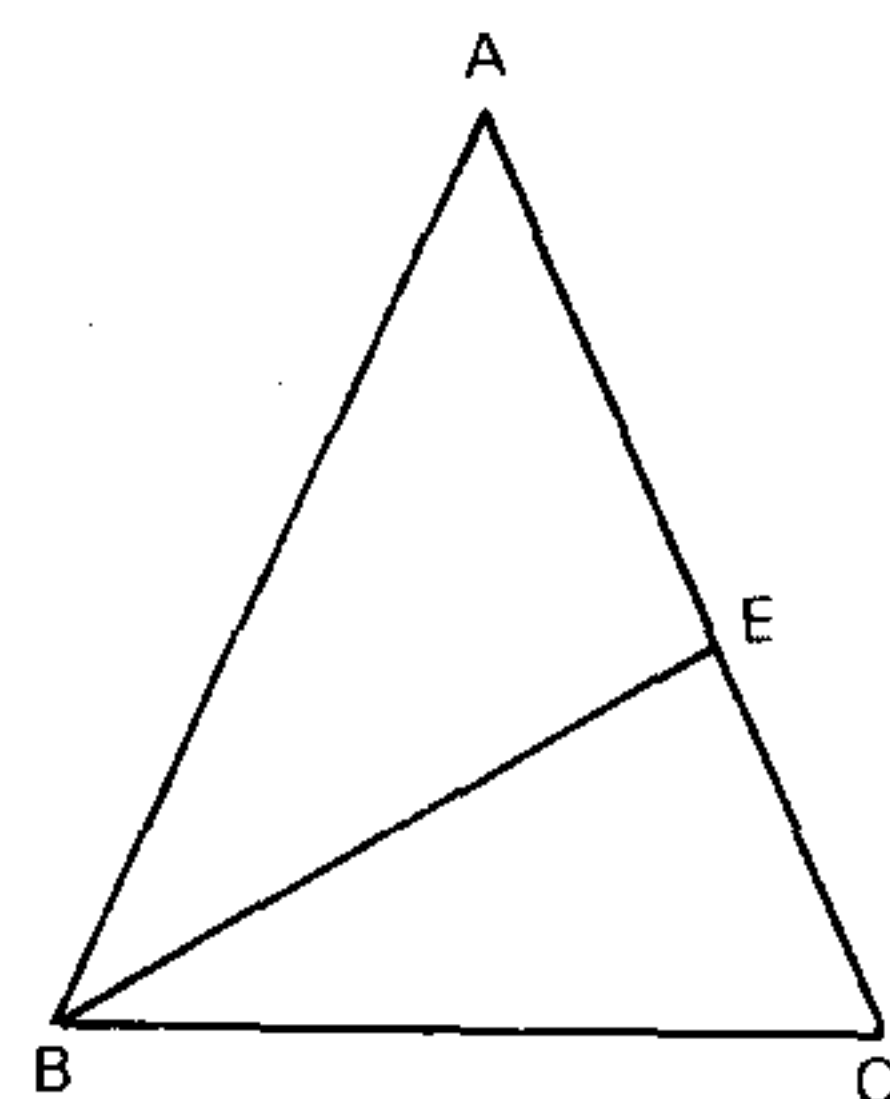
a) $OA \cdot OB = OE \cdot OP$
b) $OP \cdot OQ = r^2$
c) $AP \cdot OQ = (OA)^2$
d) $OA \cdot BQ = (OQ)^2$
e) $OP \cdot OE = r^2$

99. (U.F.MG-82) Num círculo, a corda $\overline{CD}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$ no ponto E. Se $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = 3$, a medida de $\overline{CD}$ é:

a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 3 e) 6

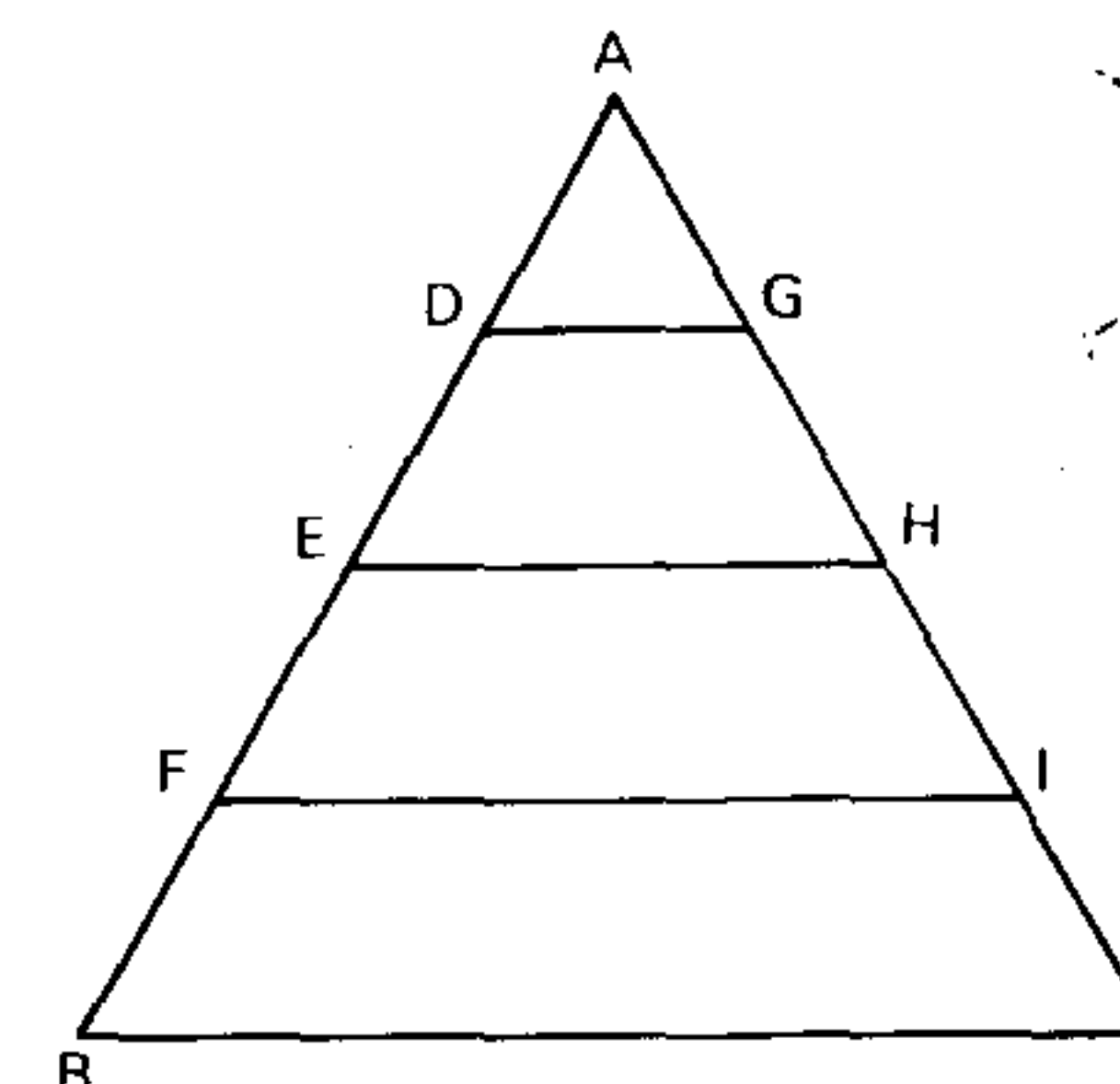
100. (U.E.BA-84) Na figura ao lado são dados $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$, $BE = 8\ cm$ e $ED = 6\ cm$. O comprimento de $\overline{AC}$, em cm, é:

a) 10
b) 12
c) 16
d) 18
e) 20

101. (U.F.MG-87) Dois círculos de raios $6\ cm$ e $4\ cm$ têm centro na altura relativa à base do triângulo isósceles da figura e são tangentes exteriormente. A altura do triângulo relativa à base, em metros, é:

a) 25
b) 26
c) 30
d) 32
e) 36

102. (U.F.MG-89) Na figura, o triângulo ABC é isósceles; BC é base e BE, altura relativa ao lado AC. Se $\overline{AC} = 3\ cm$ e $\overline{CE} = 1\ cm$, então a medida do segmento BC é, em centímetros:

a) 1
b) 2
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{6}$
e) 3

103. (VUNESP-91) Seja $ABCD$ um retângulo cujos lados têm as seguintes medidas: $\overline{AB} = \overline{CD} = 6\ cm$ e $\overline{AC} = \overline{BD} = 1{,}2\ cm$. Se M é o ponto médio de AB, então o raio da circunferência determinada pelos pontos C, M e D mede:

a) 4,35 cm
b) 5,35 cm
c) 3,35 cm
d) 5,34 cm
e) 4,45 cm

104. (U.F.MG-92) Observe a figura.

O triângulo ABC é equilátero, $\overline{AD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FB}$, $\overline{DG} // \overline{EH} // \overline{FI} // \overline{BC}$, $\overline{DG} + \overline{EH} + \overline{FI} = 18$. O perímetro do triângulo ABC é:

a) 12 b) 24 c) 36 d) 48 e) 54

105. (PUC-MG-92) Um prédio projeta uma sombra de $6\ m$ no mesmo instante em que uma baliza de $1\ m$ projeta uma sombra de $40\ cm$. Se cada andar desse prédio tem $3\ m$ de altura, então o número de andares é:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

106. (ITA-73) Suponhamos que p e q são os catetos de um triângulo retângulo e h a altura relativa à hipotenusa do mesmo. Nestas condições, podemos afirmar que a equação:

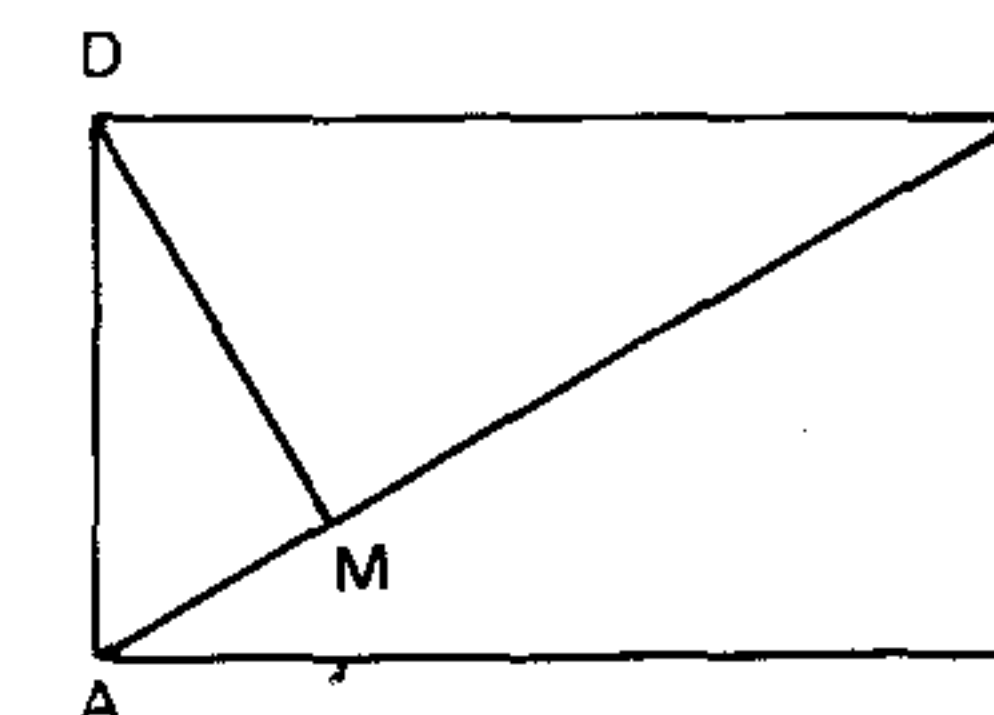
$$\frac{2}{p}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{q} = 0$$ (IR é o conjunto dos números reais)

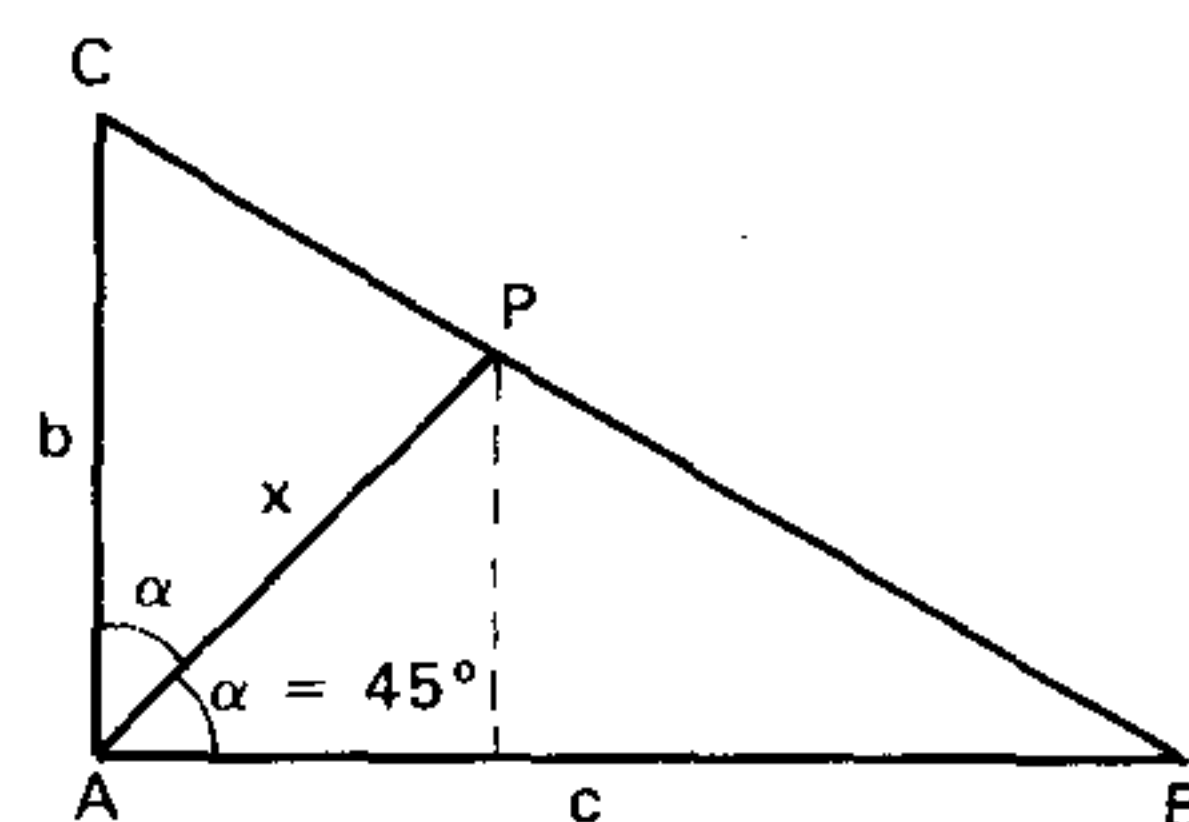
a) não admite raízes reais.
b) admite uma raiz da forma $m\sqrt{-1}$, onde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.
c) admite sempre raízes reais.
d) admite uma raiz da forma $-m\sqrt{-1}$, onde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.
e) n.d.a.

107. (U.MACK.-75) Num triângulo a base mede $60\ cm$, a altura e a mediana em relação a essa base medem, respectivamente, $12\ cm$ e $13\ cm$. As medidas dos outros dois lados do triângulo são:

a) $\sqrt{761}$ cm e $\sqrt{1\,320}$ cm
b) $\sqrt{769}$ cm e $\sqrt{1\,369}$ cm
c) $\sqrt{513}$ cm e $\sqrt{819}$ cm
d) 5 cm e 7 cm
e) 14 cm e 19 cm

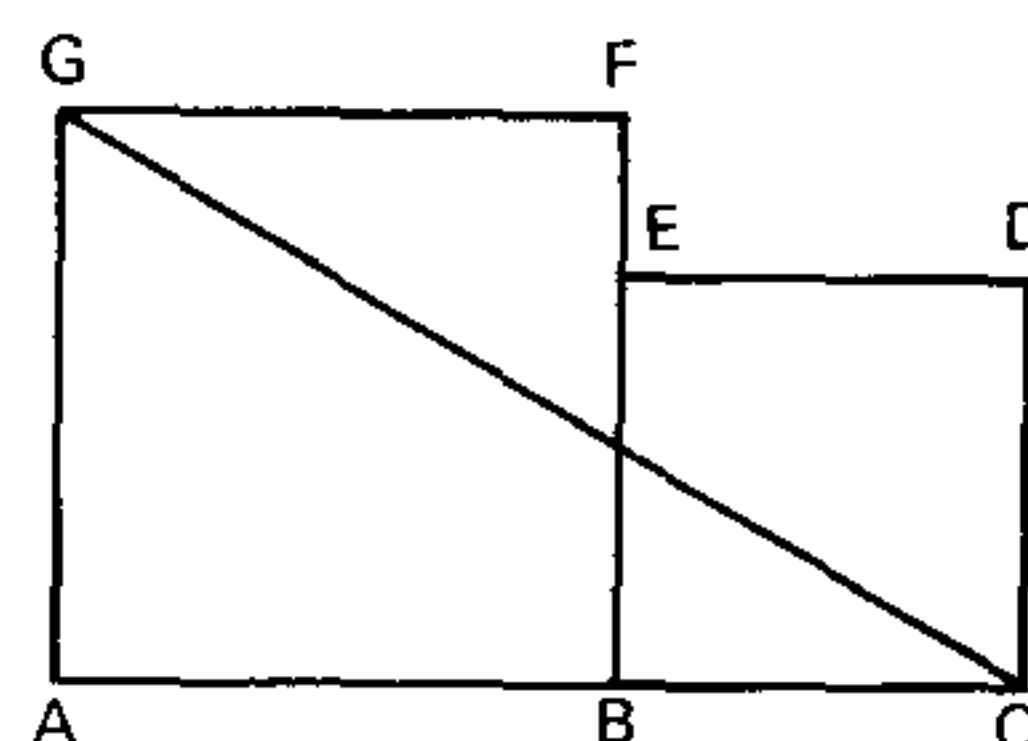
108. (CESGRANRIO-77) No retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 3$, o segmento $\overline{DM}$ é perpendicular à diagonal $\overline{AC}$. O segmento $\overline{AM}$ mede:

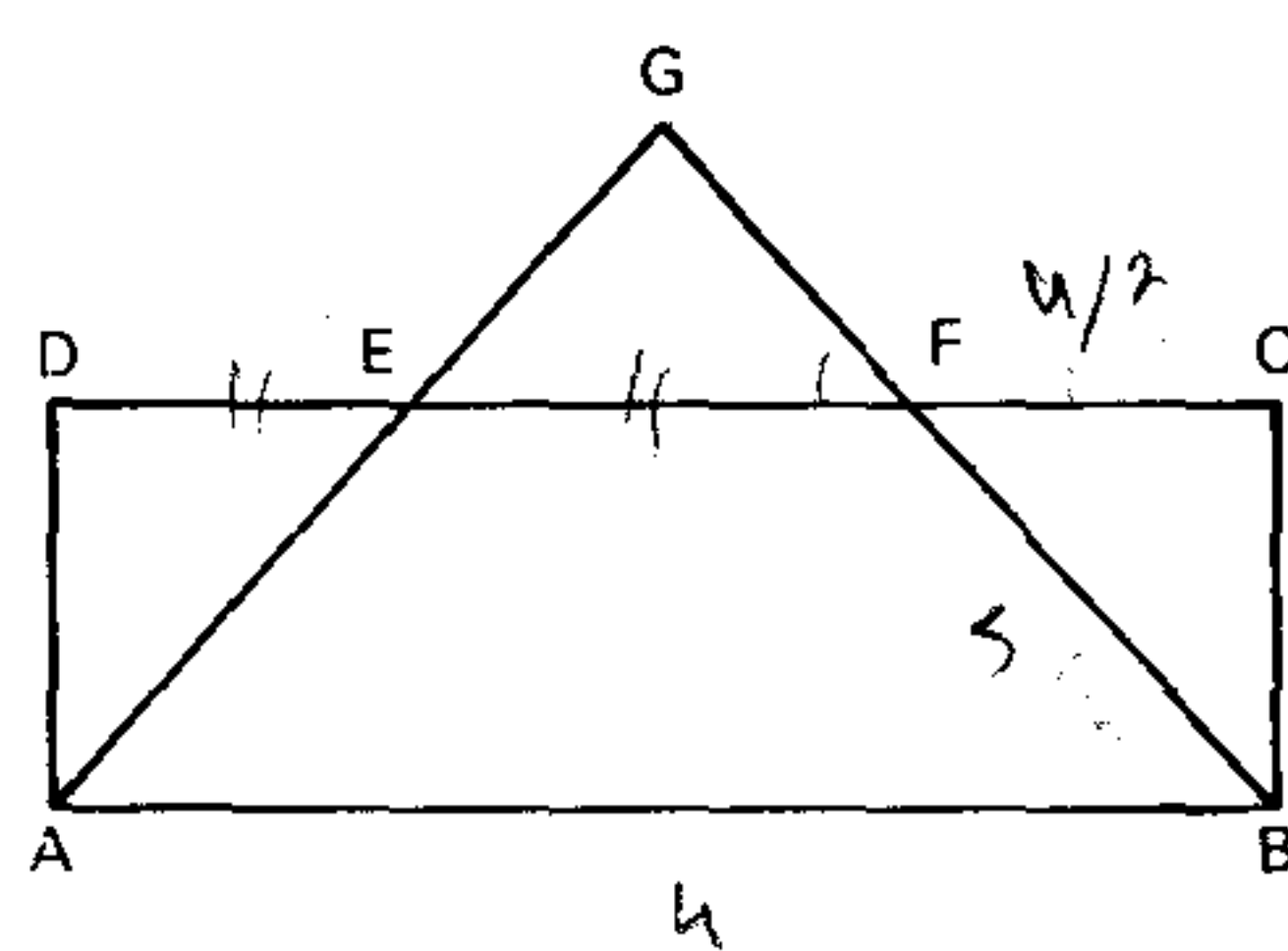
a) 3/2
b) 12/5
c) 5/2
d) 9/5
e) 2

109. (U.MACK.-79) No triângulo retângulo ABC da figura, $b = 1$ e $c = 2$. Então, x vale:

a) $\sqrt{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

110. (FATEC-79) Se os catetos de um triângulo retângulo T medem, respectivamente, *12 cm* e *5 cm*, então a altura de T relativa à hipotenusa é:

a) $\frac{12}{5}$ cm b) $\frac{5}{13}$ cm c) $\frac{12}{13}$ cm d) $\frac{25}{13}$ cm e) $\frac{60}{13}$ cm

111. (FATEC-79) Na figura abaixo, $ABFG$ e $BCDE$ são dois quadrados com lados, respectivamente, de medida a e b. Se $\overline{AG} = \overline{CD} + 2$ e o perímetro do triângulo ACG é *12*, então, simultaneamente, a e b pertencem ao intervalo:

a)]1; 5[
b)]0; 4[
c)]2; 6[
d)]3; 7[
e)]4; 8[

112. (FATEC-79) Na figura, $ABCD$ é um retângulo. $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 1$ e $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FC}$. Então $\overline{BG}$ é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{9}{4}$
d) $\frac{11}{4}$
e) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

113. (PUC-SP-80) Num triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$, a hipotenusa mede:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{9}$ e) $\sqrt{12}$

114. (PUC-CAMP-80) Os lados paralelos de um trapézio retângulo medem *6 cm* e *8 cm*, e a altura mede *4 cm*. A distância entre o ponto de interseção das retas suporte dos lados não paralelos e o ponto médio da maior base é:

a) $5\sqrt{15}$ cm
b) $2\sqrt{19}$ cm
c) $3\sqrt{21}$ cm
d) $4\sqrt{17}$ cm
e) n.d.a.

115. (U.F.UBERLÂNDIA-80) Num triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ é reto. A altura h_A divide a hipotenusa a em dois segmentos m e n ($m > n$). Sabendo-se que o cateto b é o dobro do cateto c, podemos afirmar que $\frac{m}{n}$:

a) 4 b) 3 c) 2 d) 7/2 e) 5

116. (U.F.GO-80) O perímetro de um triângulo isósceles de *3 cm* de altura é *18 cm*. Os lados deste triângulo, em *cm*, são:

a) 7, 7, 4
b) 5, 5, 8
c) 6, 6, 6
d) 4, 4, 10
e) 3, 3, 12

117. (U.E.CE-81) Num retângulo sua diagonal mede *25 cm*. A diferença entre sua base e sua altura é igual a *5 cm*. O perímetro do retângulo mede em *cm*:

a) 50 b) 60 c) 70 d) 80

118. (U.C.MG-81) Num triângulo retângulo de catetos *1* e $\sqrt{3}$ *cm*, a altura relativa à hipotenusa mede, em *cm:*

a) 2 b) 3 c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

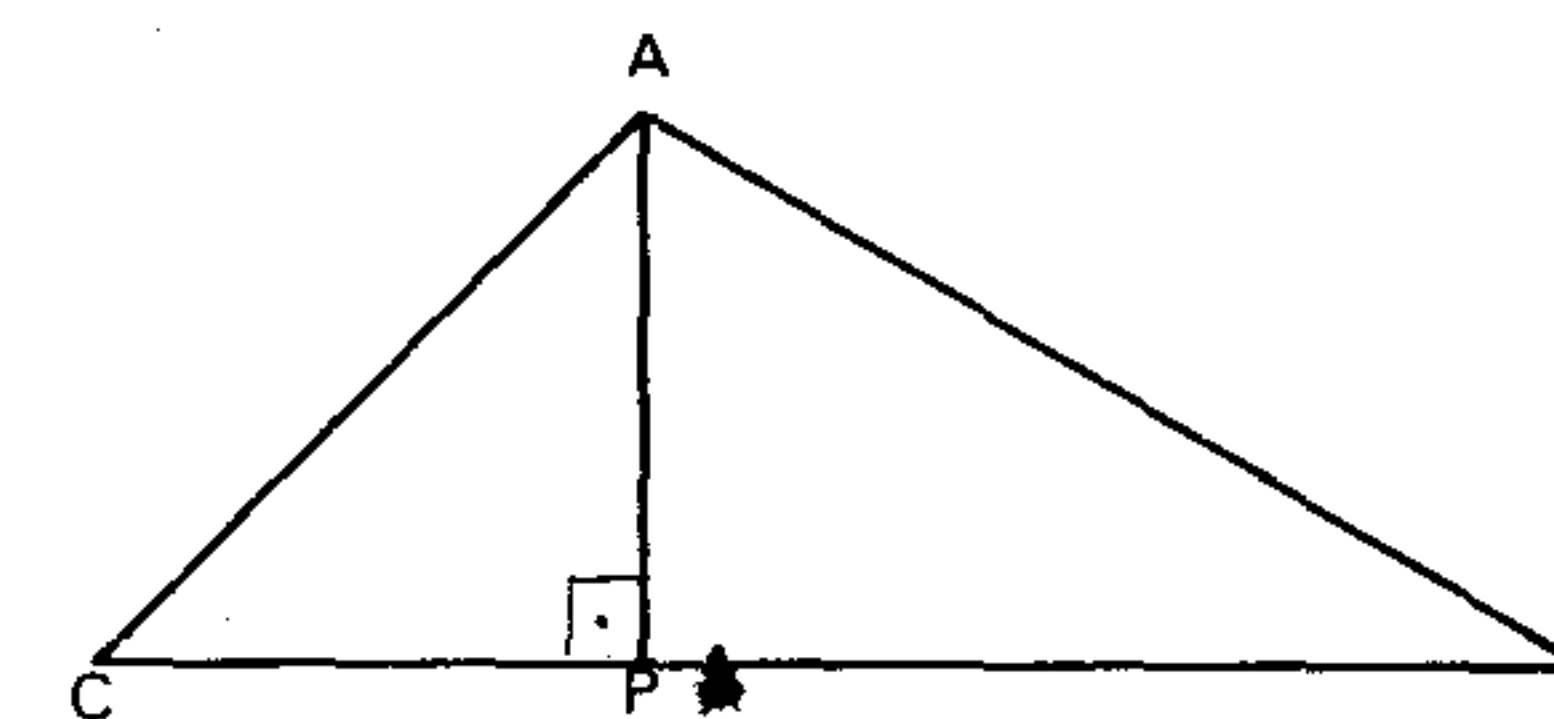
119. (VUNESP-81) Num triângulo retângulo a medida de um cateto é a metade da medida da hipotenusa. O quociente da medida do outro cateto pela medida da hipotenusa é:

a) $3 \cdot 3^{1/2}$
b) $3^{1/2}$
c) $2 \cdot 3^{1/2}$
d) $3 \cdot (2 \cdot 3^{1/2})^{-1}$
e) $2 \cdot 3^{-1/2}$

120. (U.C.MG-82) A diagonal de um retângulo mede *10 cm*, e os lados formam uma proporção com os números *3* e *4*. O perímetro do retângulo, em *cm*, é de:

a) 14 b) 16 c) 28 d) 34 e) 40

121. (U.F.RS-82) Na figura, ABC é um triângulo retângulo, $\overline{AP} \perp \overline{CB}$, $\overline{CP}$ mede *1,8* e $\overline{PB}$ mede *3,2*. O perímetro de ABC é:

a) 6
b) 8
c) 9
d) 10
e) 12

122. (PUC-SP-82) A soma dos quadrados dos três lados de um triângulo retângulo é igual a *32*. Quanto mede a hipotenusa do triângulo?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

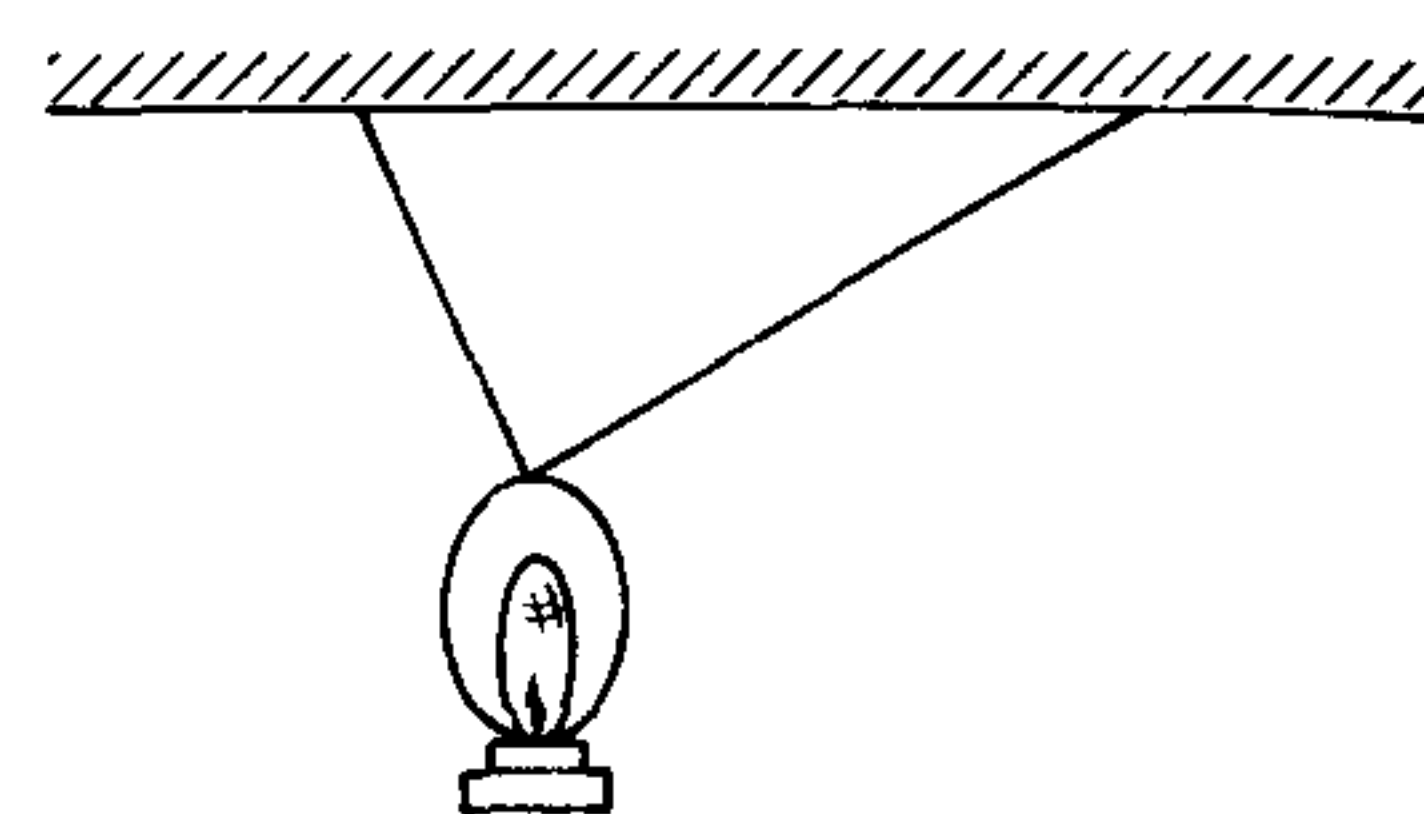
123. (F.C.M.STA.CASA-82) Seja um triângulo ABC, retângulo em A, tal que $AB = 30$ *cm* e $\overline{BC} = 50$ *cm*. Se um ponto D é marcado no lado $\overline{AC}$, de modo que $BD = DC$, então o segmento DC mede:

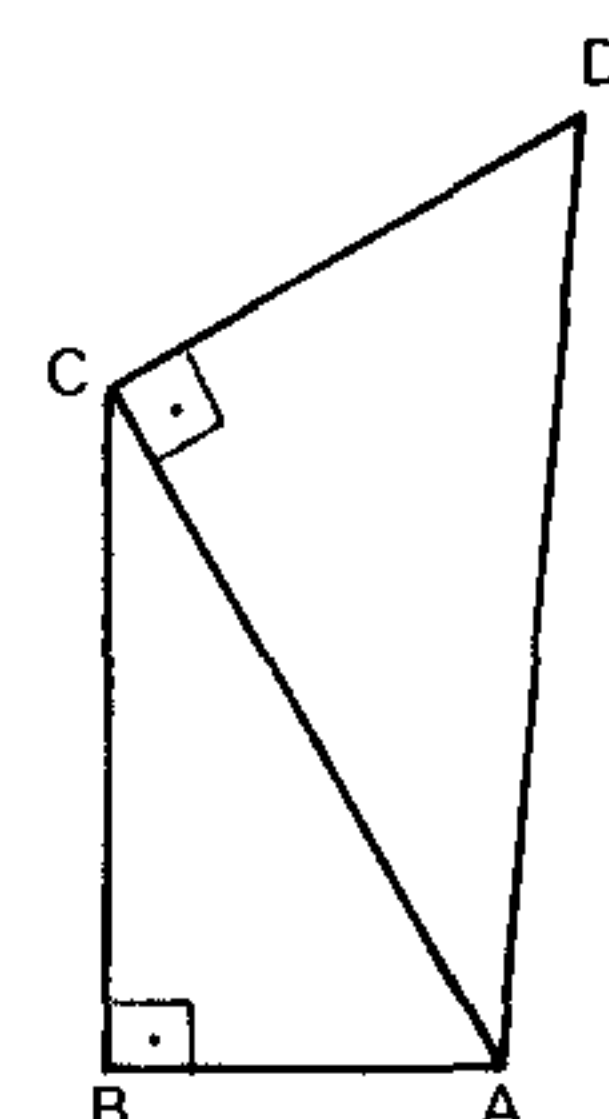
a) 31,25 cm b) 31,5 cm c) 31,75 cm d) 32 cm e) 32,25 cm

124. (U.E.LONDRINA-84) Em um triângulo retângulo ABC, as medidas das projeções dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sobre a hipotenusa são, respectivamente, m e n. Se a razão entre AB e BC, nesta ordem, é $\frac{1}{2}$, então $m:n$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ e) $\frac{1}{4}$

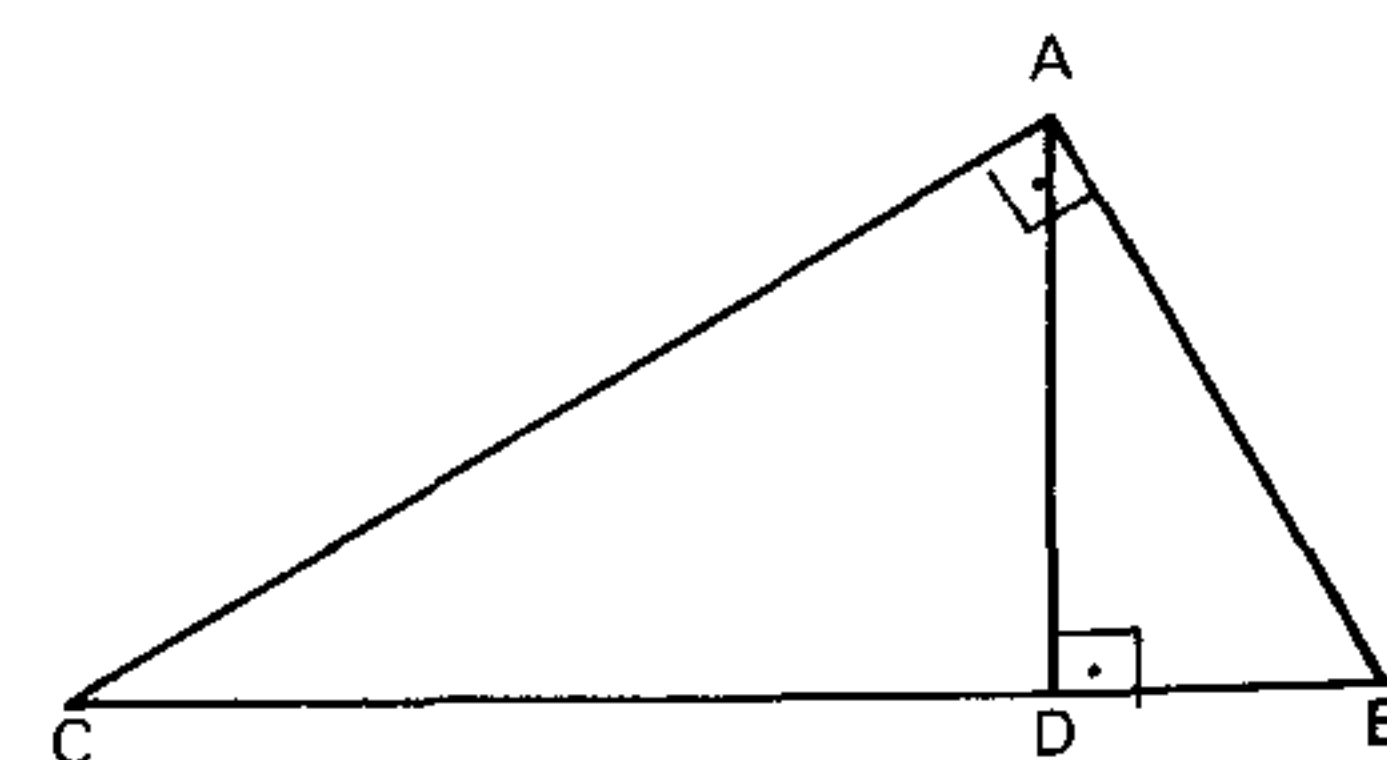
125. (U.F.RS-84) O lampião, representado na figura, está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto. Sabendo que essas cordas medem $1/2$ e $6/5$, a distância do lampião ao teto é:

a) 1,69
b) 1,3
c) 0,6
d) 1/2
e) 6/13

126. (U.F.SE-84) Se nos triângulos retângulos, representados na figura ao lado, têm-se $AB = 1$, $BC = 2$ e $AD = 3$, então CD é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

127. (VUNESP-84) Entre os triângulos retângulos cuja soma dos catetos é uma certa constante, o de menor perímetro é:

a) aquele cujos catetos são iguais.
b) aquele em que um dos catetos é o dobro do outro.
c) aquele em que um dos catetos é o triplo do outro.
d) aquele em que um dos catetos é duas vezes e meia o outro.
e) aquele em que um dos catetos é uma vez e meia o outro.

128. (U.F.SE-84) No triângulo retângulo, representado na figura ao lado, $BC = 10$ e $AD = 4$. A medida de $\overline{CD}$, em *cm*, pode ser:

a) 7
b) 5
c) 4
d) 2
e) 1

129. (U.F.PA-85) Num triângulo retângulo, um cateto é dobro do outro, e a hipotenusa mede $10\ m$. A soma dos catetos mede:

a) $4\sqrt{5}$ cm
b) $6\sqrt{5}$ cm
c) $8\sqrt{5}$ cm
d) $10\sqrt{5}$ cm
e) $12\sqrt{5}$ cm

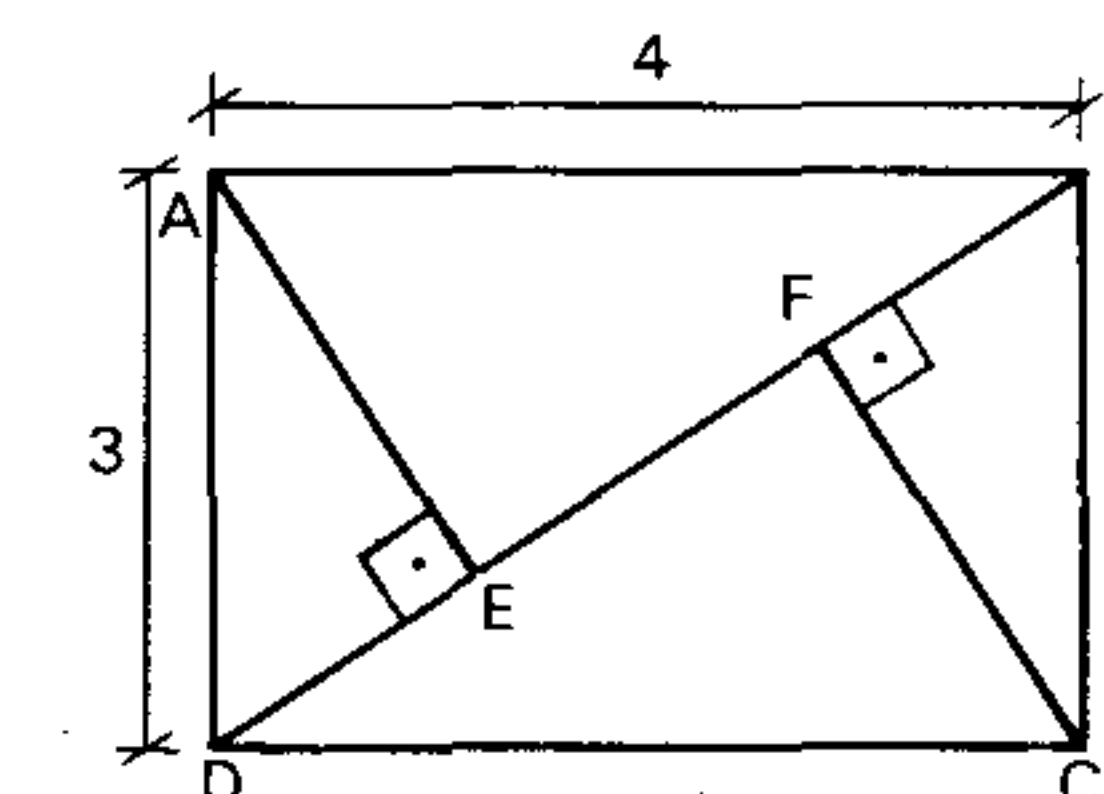
130. (CESGRANRIO-87) Se os dois catetos de um triângulo retângulo medem, respectivamente, 3 e 4, então a altura relativa à hipotenusa mede:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ c) 2,2 d) 2,3 e) 2,4

131. (UNICAP-87) Seja x um número real positivo tal que x, $x + 1$ e $x + 2$ sejam medidas dos lados de um triângulo retângulo. Assinale, entre as alternativas abaixo, aquela que contém o perímetro deste triângulo (na mesma unidade de comprimento que os lados).

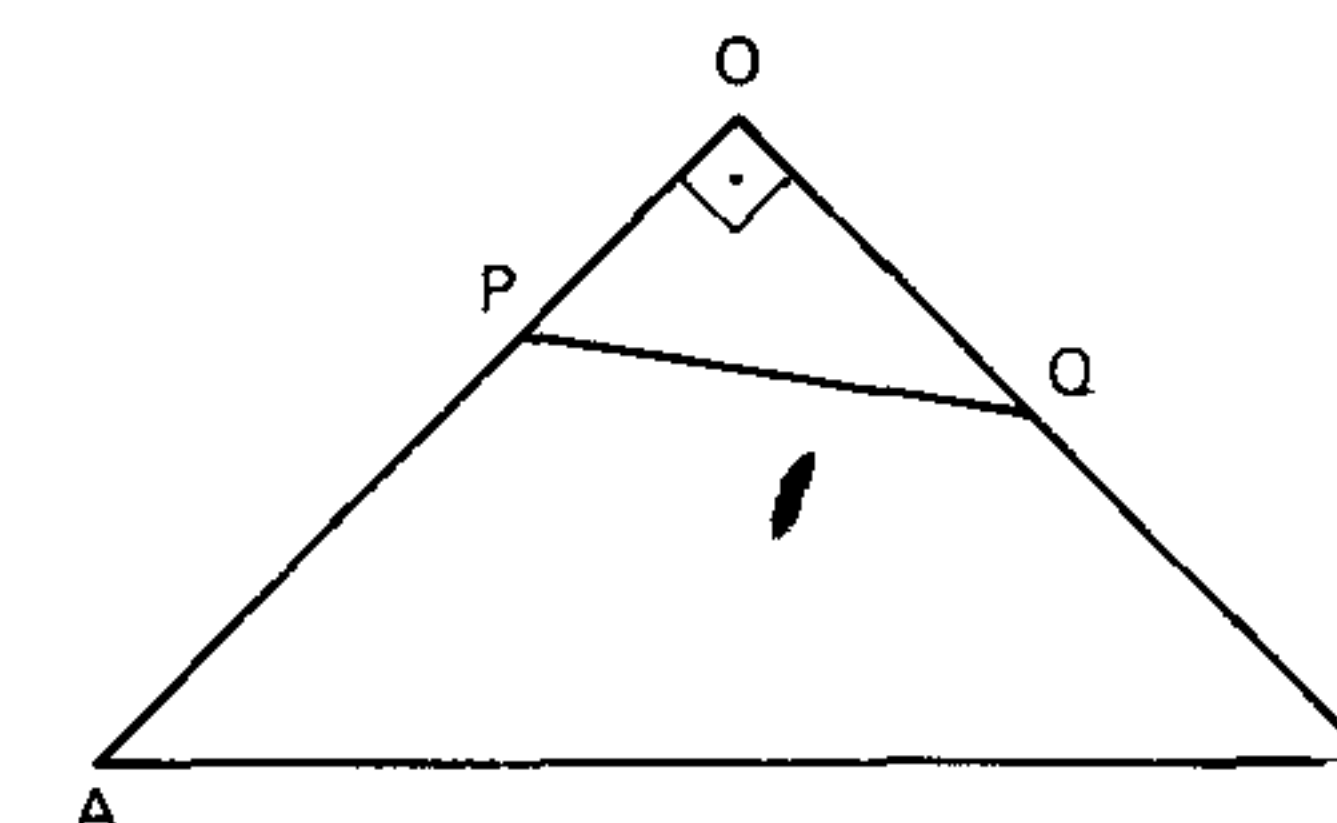
a) 10 b) 12 c) 11 d) 13 e) 15

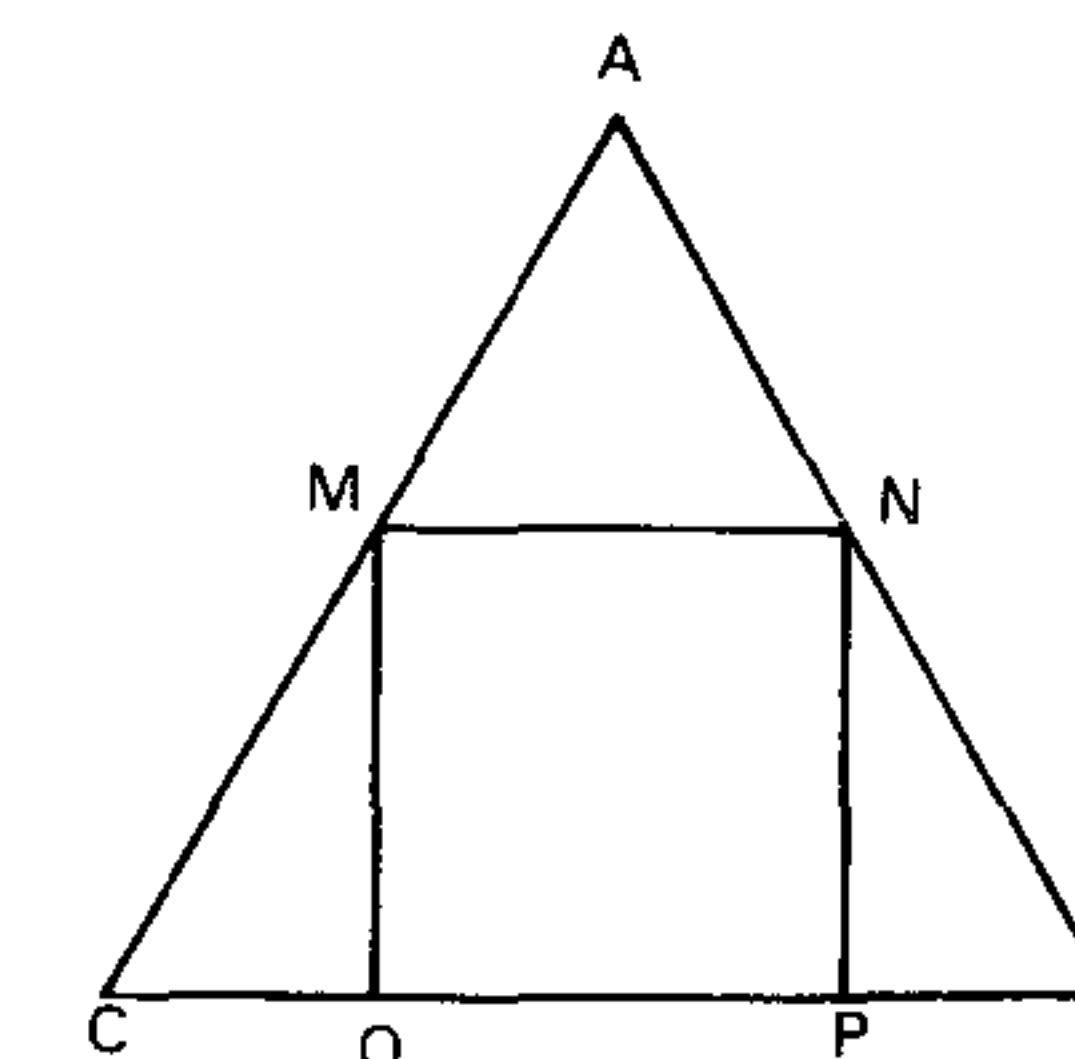
132. (FATEC-87) Na figura ao lado, $ABCD$ é um retângulo. A medida do segmento $\overline{EF}$ é:

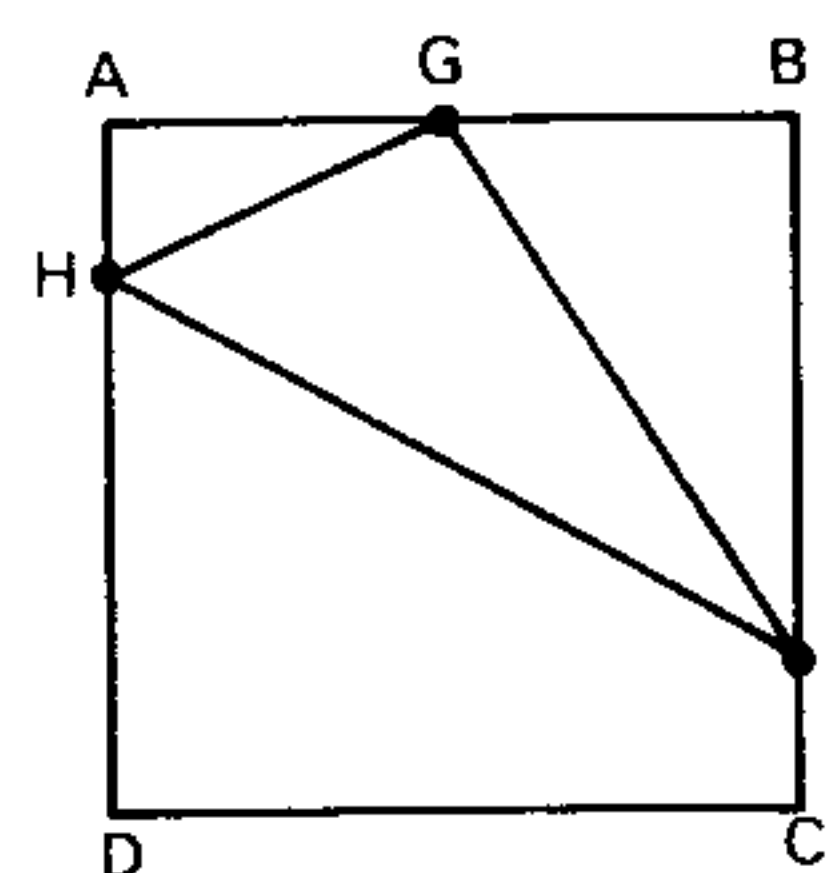
a) 0,8
b) 1,4
c) 2,6
d) 3,2
e) 3,8

133. (VUNESP-88) Considere um quadrado de lado ℓ, diagonal d e perímetro p. A função que define a diagonal em termos do perímetro do quadrado é dada pela expressão:

a) $d(p) = \frac{\sqrt{2p}}{4}$
b) $d(p) = \frac{p}{2}$
c) $d(p) = \frac{p\sqrt{2}}{4}$
d) $d(p) = \frac{p\sqrt{2}}{2}$
e) $d(p) = \frac{p^2\sqrt{2}}{4}$

134. (FUVEST-88) Em um triângulo retângulo OAB, retângulo em O, com $OA = a$ e $OB = b$, são dados os pontos P em OA e Q em OB de tal maneira que $AP = PQ = QB = x$. Nestas condições o valor de x é:

a) $\sqrt{ab} - a - b$
b) $a + b - \sqrt{2ab}$
c) $\sqrt{a^2 + b^2}$
d) $a + b + \sqrt{2ab}$
e) $\sqrt{ab} + a + b$

135. (CESGRANRIO-88) O quadrado $MNPQ$ está inscrito no triângulo equilátero ABC, como se vê na figura. Se o perímetro do quadrado é 8, então o perímetro do triângulo ABC é:

a) 12
b) $10 + 2\sqrt{3}$
c) $6 + 4\sqrt{3}$
d) $6 + 5\sqrt{2}$
e) 16

136. (CESGRANRIO-88) No quadrado $ABCD$ da figura, tem-se $AB = 4$, $AH = CI = 1$ e $AG = 2$. Então, HI mede:

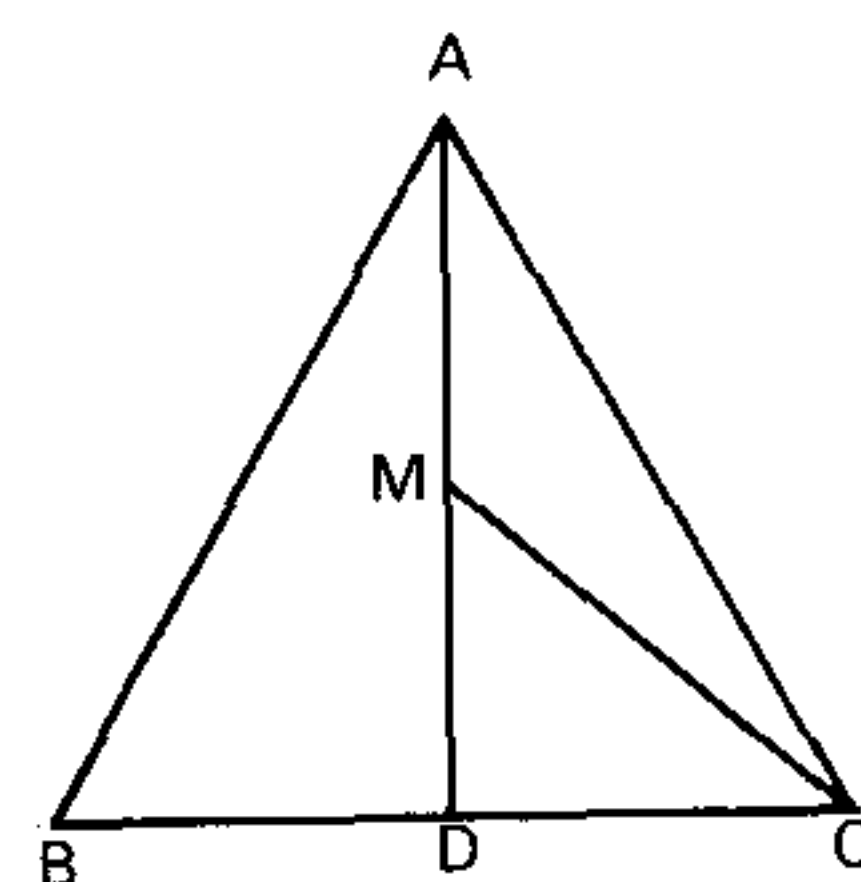
a) $\sqrt{5}$
b) 5
c) $\frac{16}{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{5}$

137. (U.F.MG-89) Se as medidas, em metros, das diagonais de um losango são a e b, então a medida do raio do círculo inscrito nesse losango é, em metros:

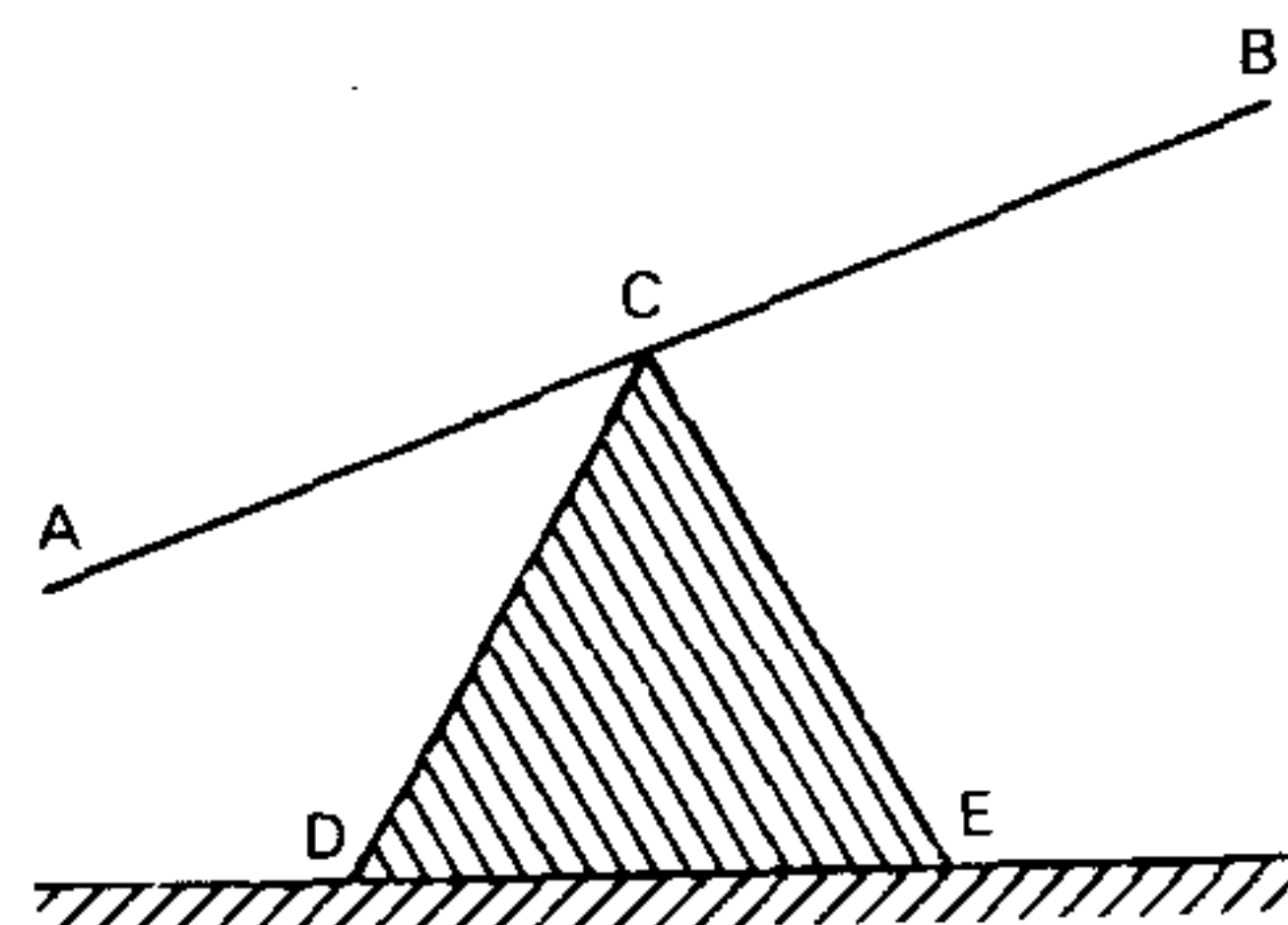
a) $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$
b) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
c) $\frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
d) $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
e) $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

138. (U.F.VIÇOSA-89) Depois de andar $5\ m$ numa escada rolante, uma pessoa percebeu que se deslocou $4\ m$ em relação à horizontal. Tendo andado $10\ m$ na mesma escada, de quantos metros terá se deslocado em relação à vertical?

a) 5 b) 8 c) 9 d) 6 e) 7

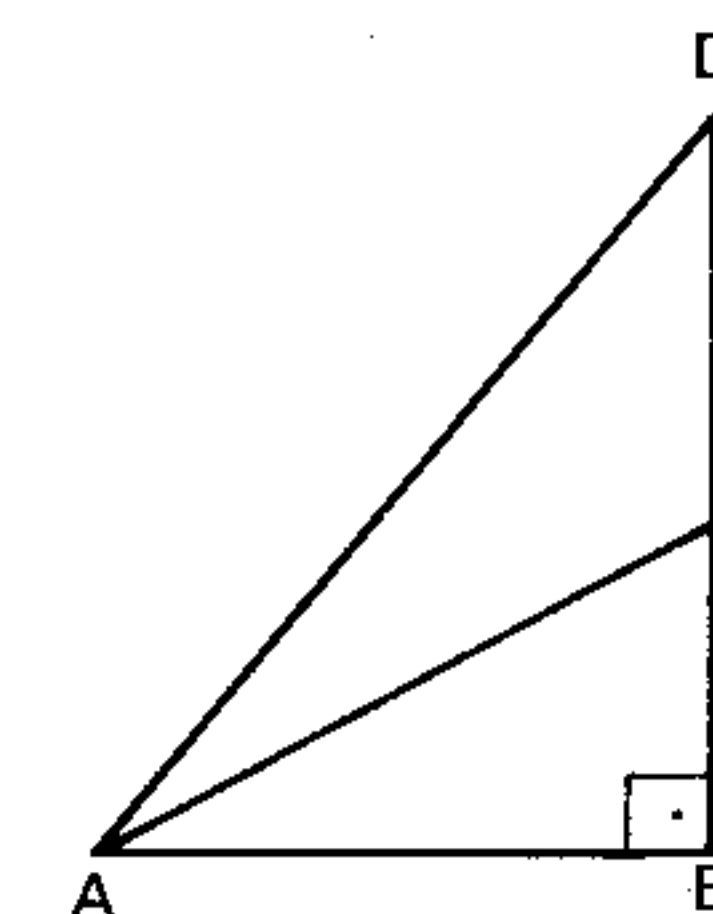
139. (COVEST-89) Na figura abaixo o triângulo ABC é equilátero, cada um de seus lados medindo $8\ cm$. Se $\overline{AD}$ é uma altura do triângulo ABC e M é o ponto médio de $\overline{AD}$, então a medida de $\overline{CM}$, em centímetros, é:

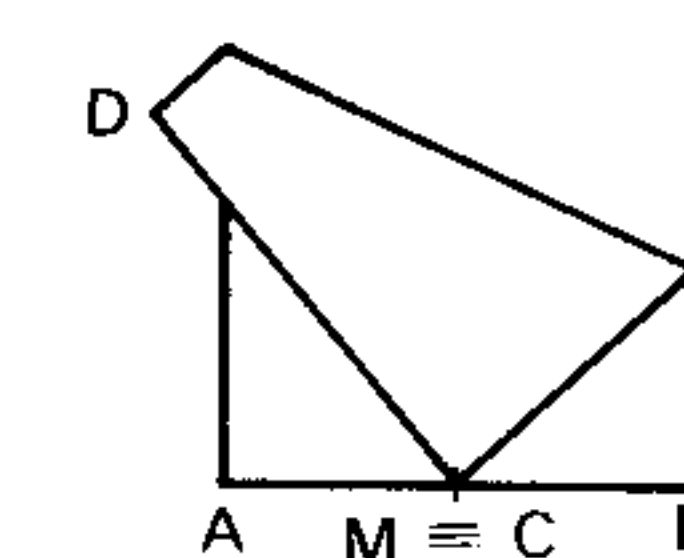
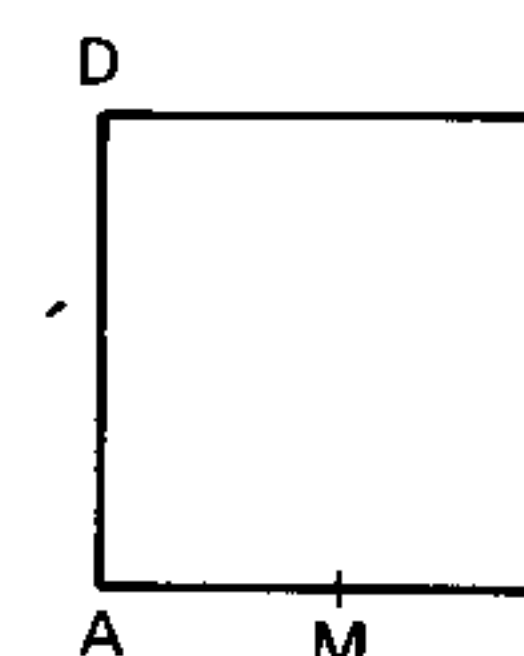
a) $\frac{1}{2}$ cm
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
c) $\sqrt{7}$ cm
d) $2\sqrt{7}$ cm
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

140. (VUNESP-90) Uma gangorra é formada por uma haste rígida AB, apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto C, como na figura. As dimensões são: $\overline{AC} = 1,2\ m$, $\overline{CB} = 1,8\ m$, $\overline{DC} = \overline{CE} = \overline{DE} = 1\ m$. Quando a extremidade B da haste toca o chão, a altura da extremidade A em relação ao chão é:

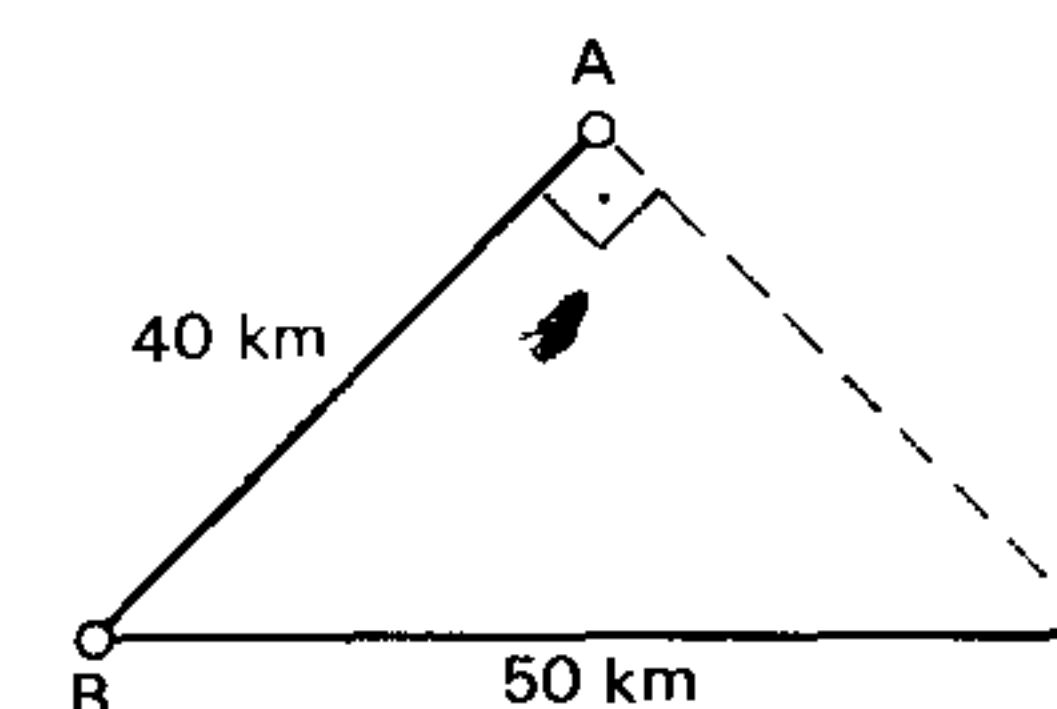
a) $\sqrt{3}$ m
b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ m
c) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ m
d) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ m
e) $2\sqrt{2}$ m

141. (CESGRANRIO-90) Os catetos b e c de um triângulo retângulo ABC medem 6 e 8, respectivamente. A menor altura desse triângulo mede:

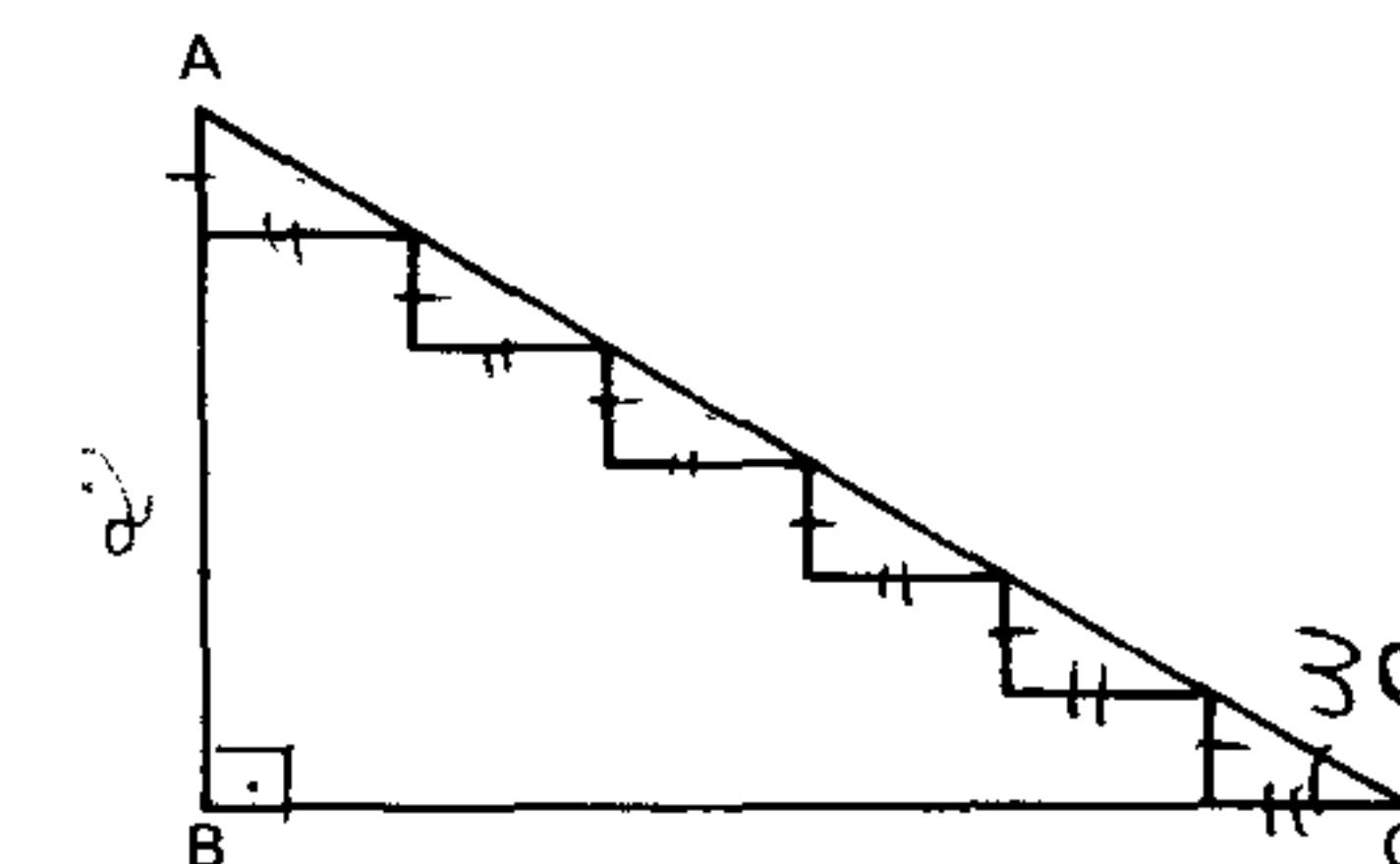
a) 4,0 b) 4,5 c) 4,6 d) 4,8 e) 5,0

142. (VUNESP-91) Na figura o triângulo ABD é reto em B, e AC é a bissetriz de $B\hat{A}D$. Se $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$, fazendo $\overline{BC} = b$ e $\overline{CD} = d$, então:

a) $d = b$
b) $d = \left(\frac{5}{2}\right) b$
c) $d = \left(\frac{5}{3}\right) b$
d) $d = \left(\frac{6}{5}\right) b$
e) $d = \left(\frac{5}{4}\right) b$

143. (CESGRANRIO-91) Uma folha quadrada de papel $ABCD$ é dobrada de modo que o vértice C coincide com o ponto M médio de AB. Se o lado de $ABCD$ é 1, o comprimento BP é:

a) 0,300
b) 0,325
c) 0,375
d) 0,450
e) 0,500

144. (U.C.SALVADOR-91) Na situação do mapa abaixo, deseja-se construir uma estrada que ligue a cidade A à estrada BC, com o menor comprimento possível. Essa estrada medirá, em quilômetros:

a) 24
b) 28
c) 30
d) 32
e) 40

145. (VUNESP-92) A figura representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além de mesma altura. Se $\overline{AB} = 2\ m$ e $B\hat{C}A$ mede $30°$, então a medida da extensão de cada degrau é:

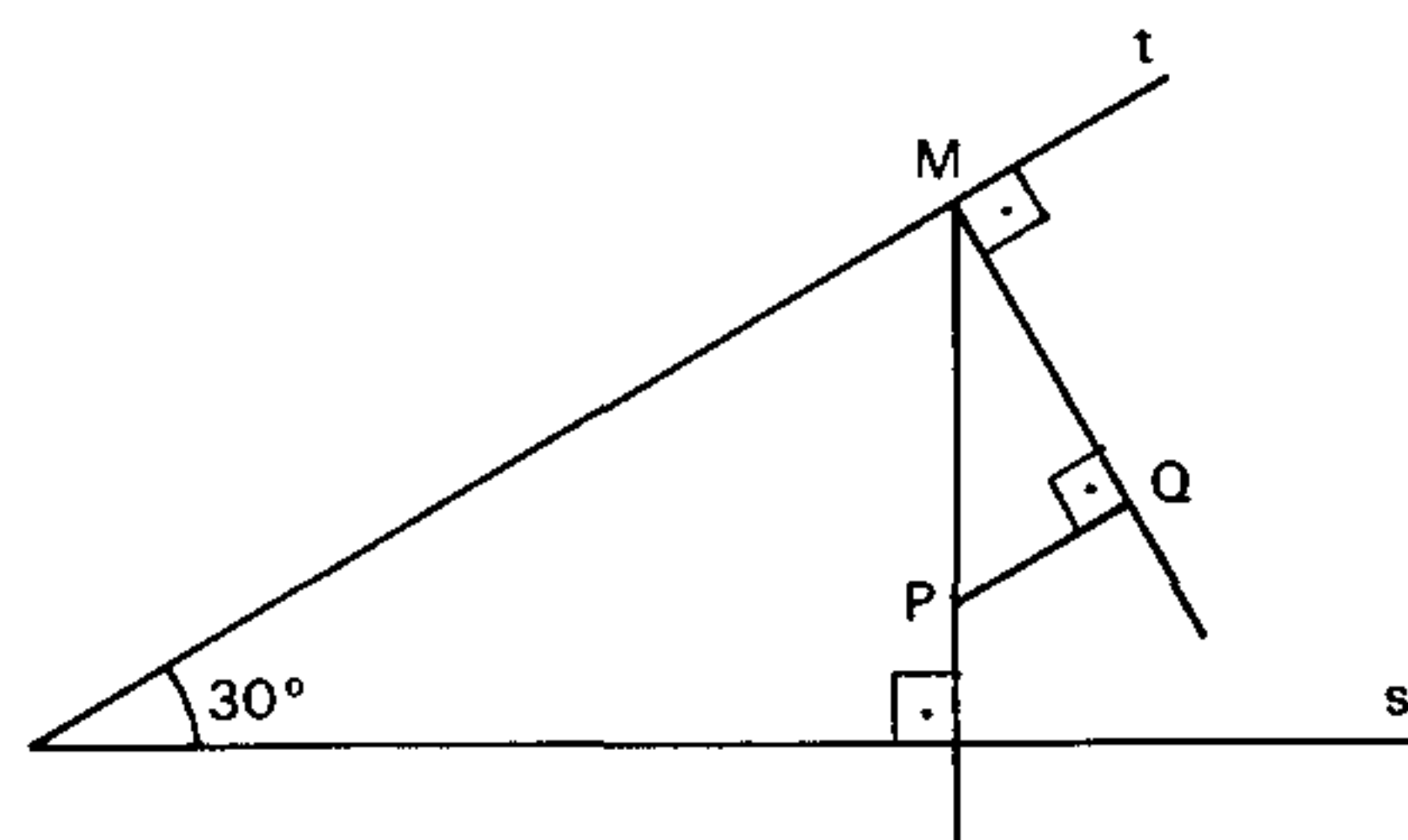
a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m
b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ m
c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ m
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m
e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

146. (PUC-MG-92) A razão entre as medidas dos catetos de um triângulo retângulo é $\frac{4}{3}$. Se a hipotenusa mede *30 m*, então o perímetro do triângulo, em *m*, é igual a:

a) 60 b) 64 c) 70 d) 72 e) 80

147. (FUVEST-77) Dados:

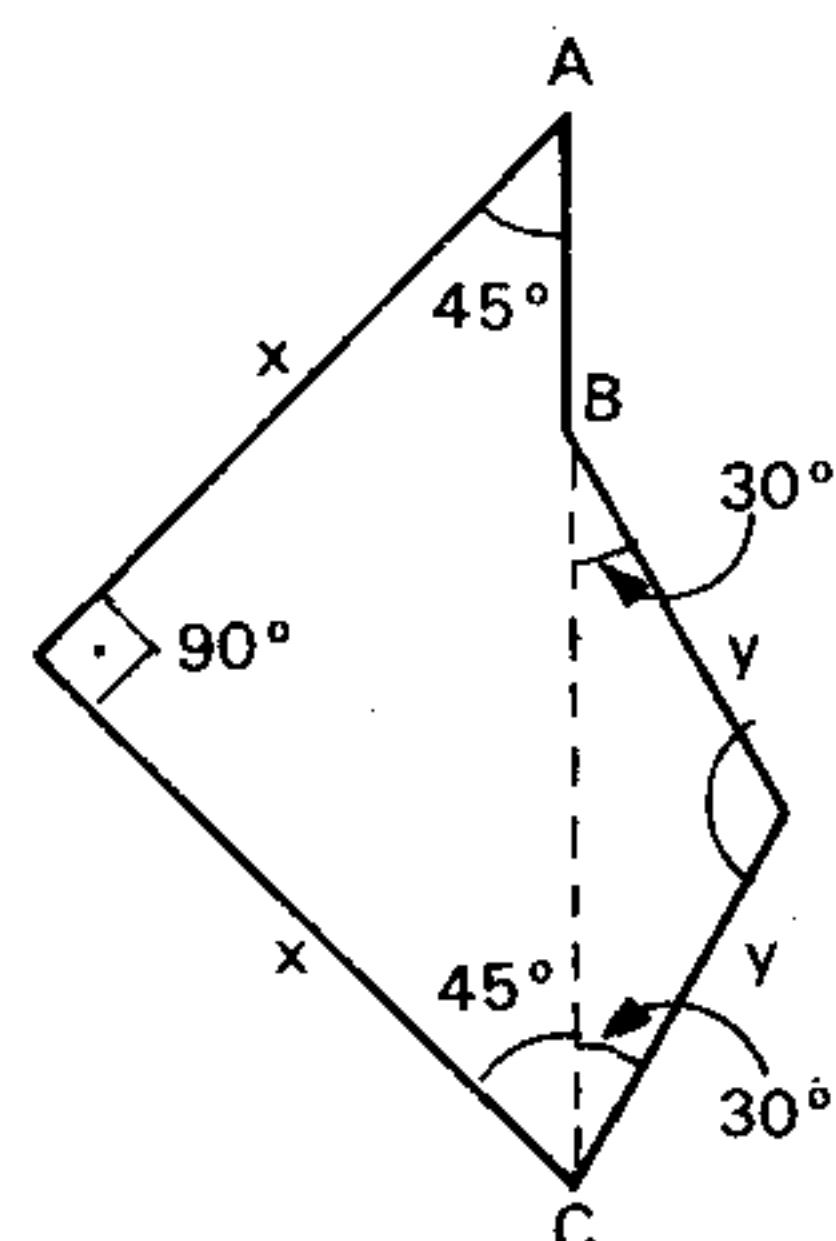
$\overline{MP} \perp s$; $\overline{MQ} \perp t$; $\overline{MQ} \perp \overline{PQ}$; $\overline{MP} = 6$

Então $\overline{PQ}$ é igual a:

a) $3\sqrt{3}$
b) 3
c) $6\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{3}$

148. (CESCEM-77) Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem *a* e *3a*, respectivamente, então a tangente do ângulo oposto ao menor lado é:

a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $2\sqrt{2}$

149. (FGV-78) O perímetro da figura abaixo é:

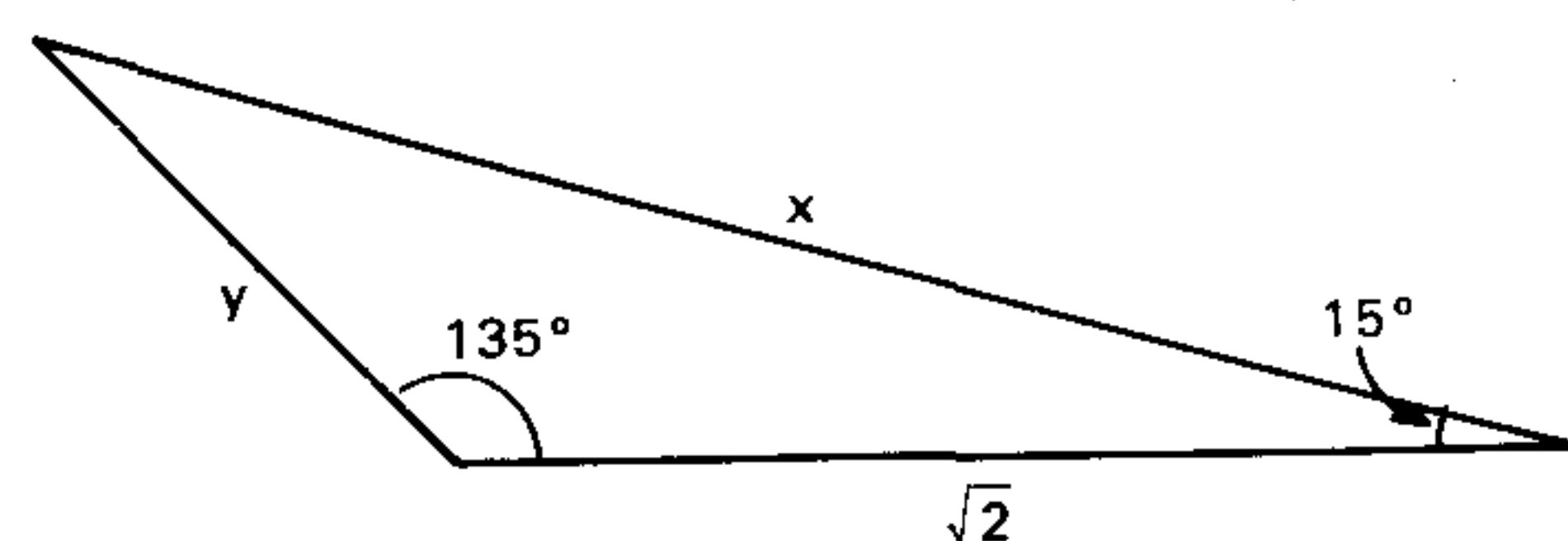
a) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$
c) $4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$
d) $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{6}$
e) 5

$AB = \sqrt{2}$

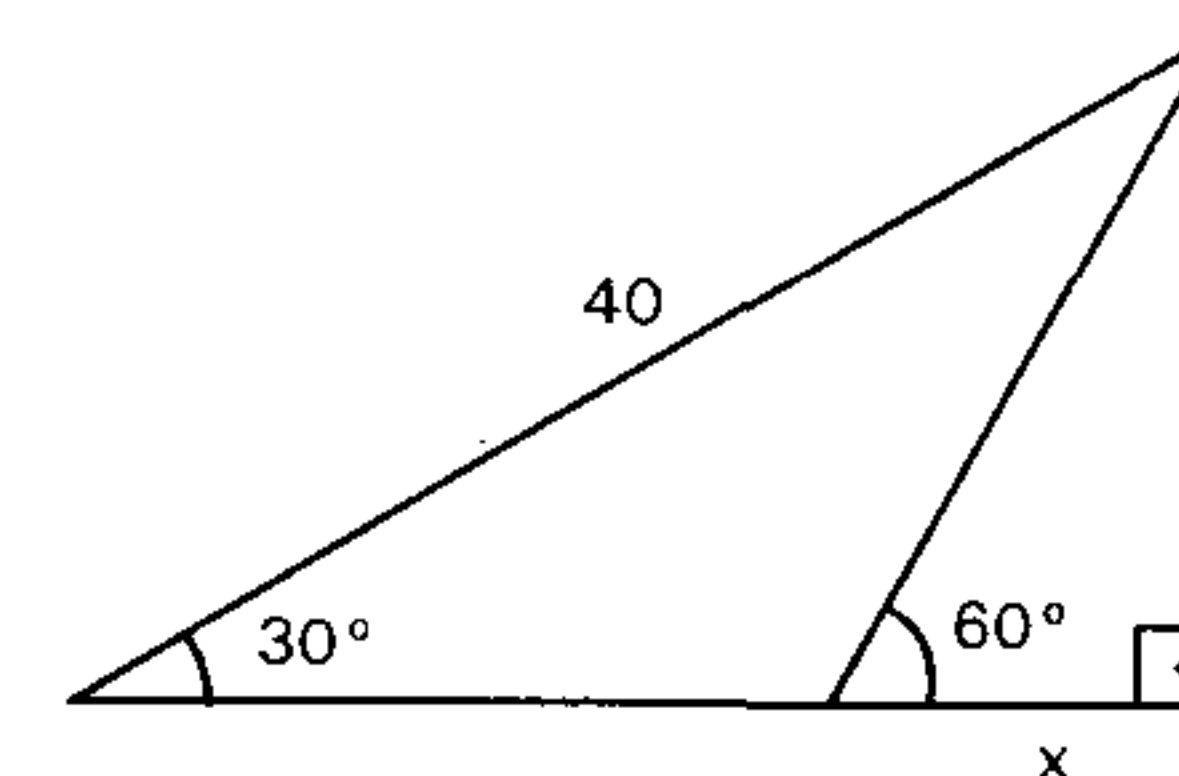
$BC = \sqrt{3}$

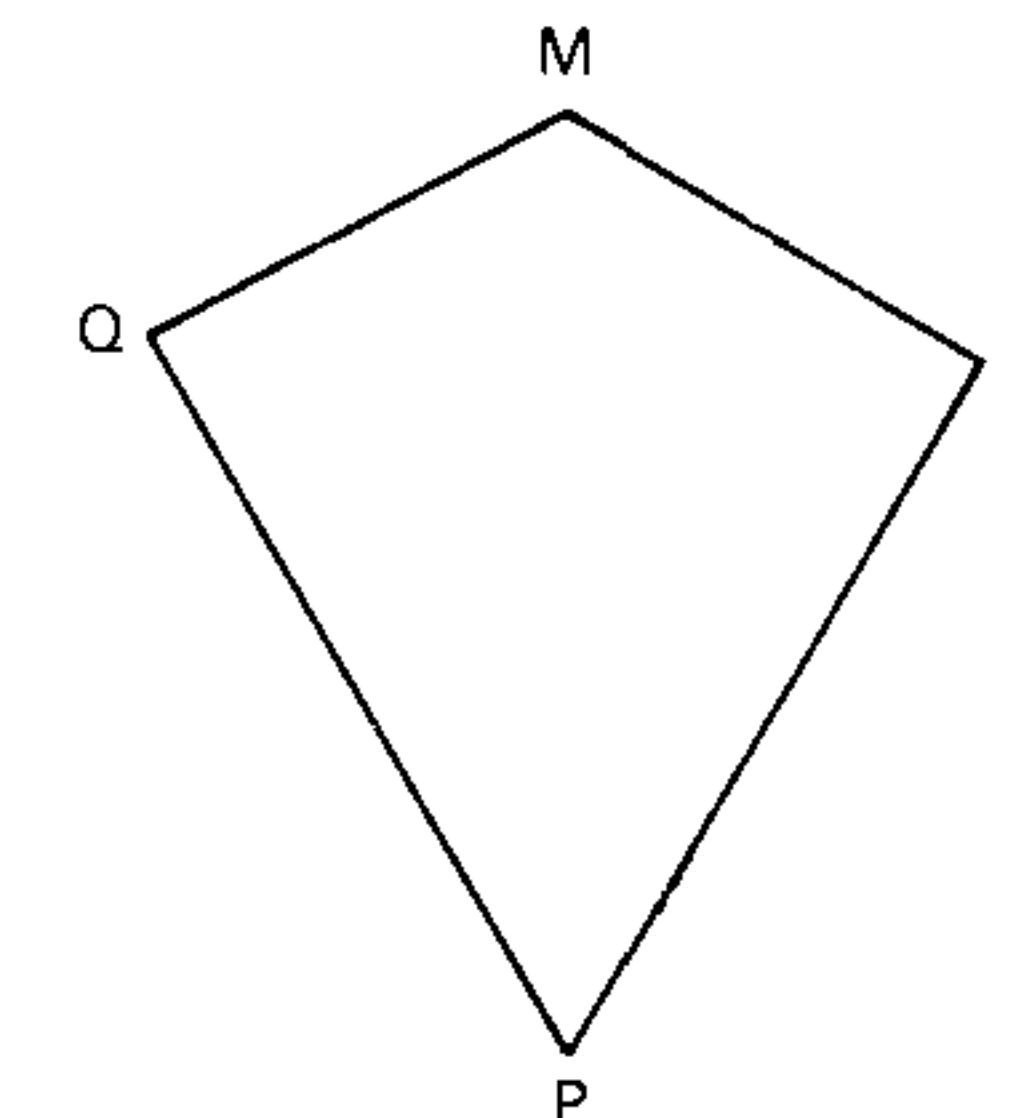
150. (CESGRANRIO-80) Um dos ângulos internos de um paralelogramo de lados *3* e *4* mede *120°*. A maior diagonal deste paralelogramo mede:

a) 5 b) 6 c) $\sqrt{40}$ d) $\sqrt{37}$ e) 6,5

151. (U.F.GO-80) No triângulo abaixo, os valores de *x* e *y*, nesta ordem, são:

a) 2 e $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{3} - 1$ e 2
c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3}$ e $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
e) 2 e $\sqrt{3} - 1$

152. (PUC-SP-81) Qual é o valor de *x* na figura ao lado?

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$
e) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

153. (CESGRANRIO-81) O quadrilátero convexo *MNPQ* é inscritível num círculo de diâmetro *MP*. Os lados *MN* e *MQ* têm o mesmo comprimento ℓ e o ângulo $N\hat{M}Q$ é de *120°*. O comprimento do lado *NP* é:

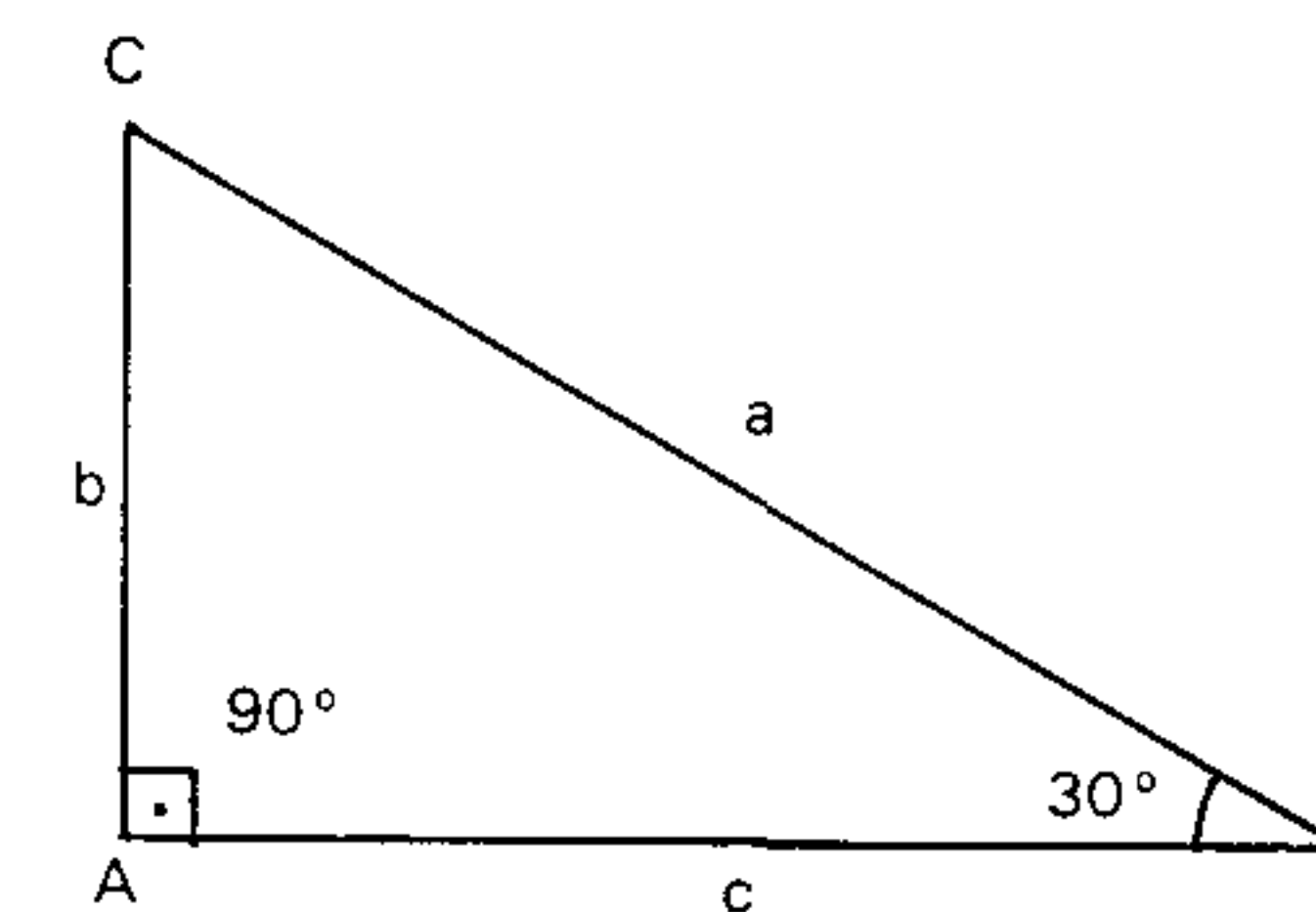
a) $\ell\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
b) $\ell(\sqrt{3} - 1)$
c) $\ell(1 + \sqrt{3})$
d) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
e) $\ell\sqrt{3}$

154. (U.F.MG-82) Um dos ângulos de um losango de *4 m* de lado mede *120°*. Sua maior diagonal, em *m*, mede:

a) 4 b) 5 c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$

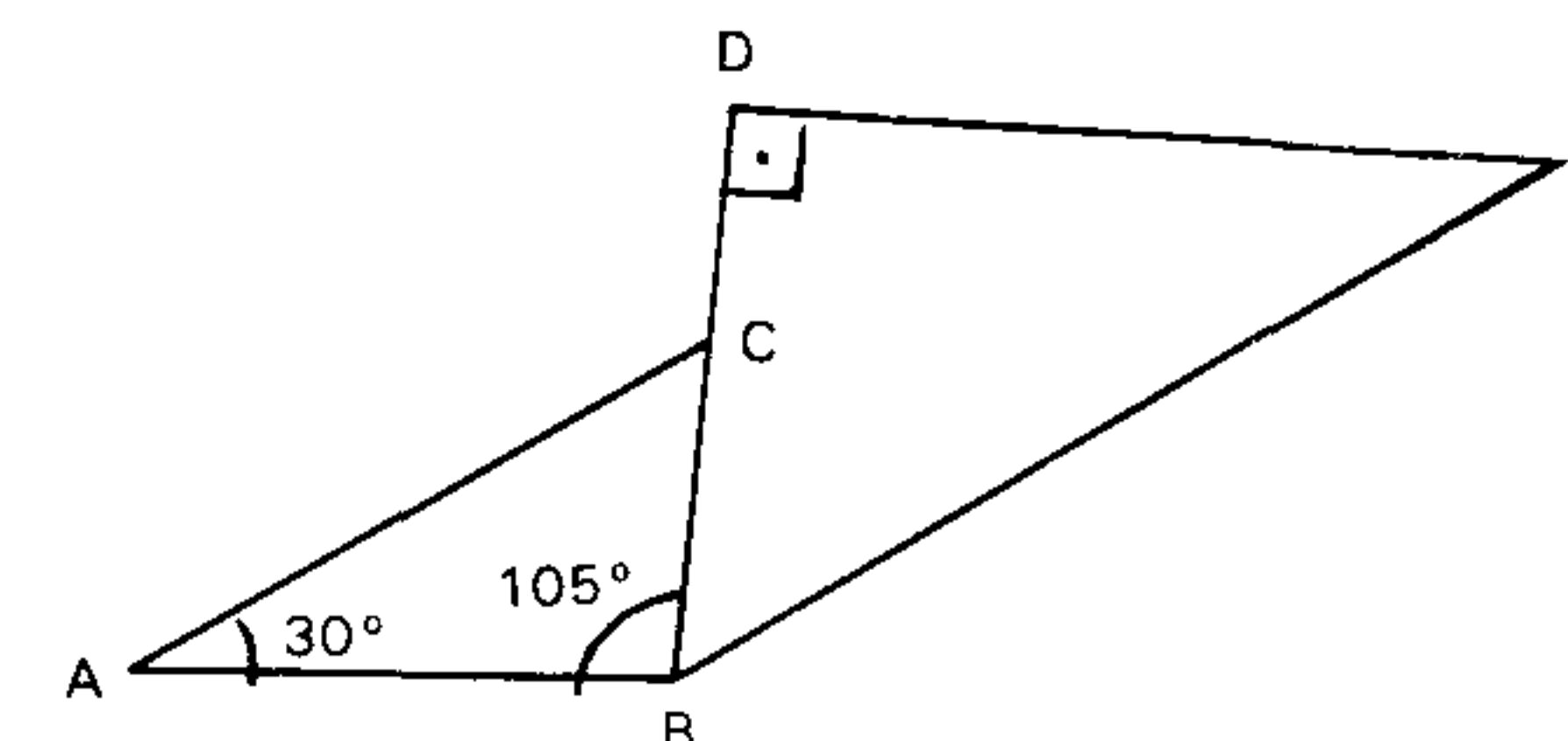
155. (VASSOURAS-82) Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é o dobro do produto dos catetos. Então um dos ângulos agudos do triângulo vale:

a) 30° b) 60° c) 45° d) 15° e) 10°

156. (CESESP-85) Considere o triângulo ao lado, onde *a*, *b* e *c* são, respectivamente, as medidas dos seguintes segmentos *CB*, *CA* e *AB* e *a* mede *1 cm*. Assinale a alternativa falsa.

a) $2b > c$
b) $2c > a$
c) $2b = a$
d) $3b > 2c$
e) $b + c > a$

157. (FATEC-87) Na figura ao lado, $\overline{AC}$ e $\overline{BE}$ são paralelos e $BE = 8\sqrt{2}$.

O perímetro do triângulo *BDE* é:

a) $16\sqrt{2}$
b) $18\sqrt{2}$
c) $24\sqrt{2}$
d) $8(2 + \sqrt{2})$
e) $2(5 + 4\sqrt{2})$

158. (FUVEST-87) Em um plano tem-se um quadrado de lado a, uma reta r paralela a um lado do quadrado e uma reta t que forma com r um ângulo agudo θ. Projeta-se o quadrado sobre r paralelamente a t e obtém-se um segmento de comprimento $3a$. Determine $tg\ \theta$.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

159. (ITA-88) Num triângulo ABC, $\overline{BC} = 4\ cm$, o ângulo C mede $30°$ e a projeção do lado AB sobre BC mede $2{,}5\ cm$. O comprimento da mediana que sai do vértice A mede:

a) 1 cm b) $\sqrt{2}$ cm c) 0,9 cm d) $\sqrt{3}$ cm e) 2 cm

160. (FUVEST-88) Dois pontos A e B estão situados na margem de um rio e distantes $40\ m$ um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo $C\hat{A}B$ mede $75°$ e o ângulo $A\hat{C}B$ mede $75°$. Determine a largura do rio.

a) 40 m b) 20 m c) $20\sqrt{3}$ m d) 30 m e) 25 m

161. (COVEST-91) A 100 metros da base, um observador avista a extremidade de uma torre sob um ângulo de $60°$ com a horizontal. Qual a altura desta torre?

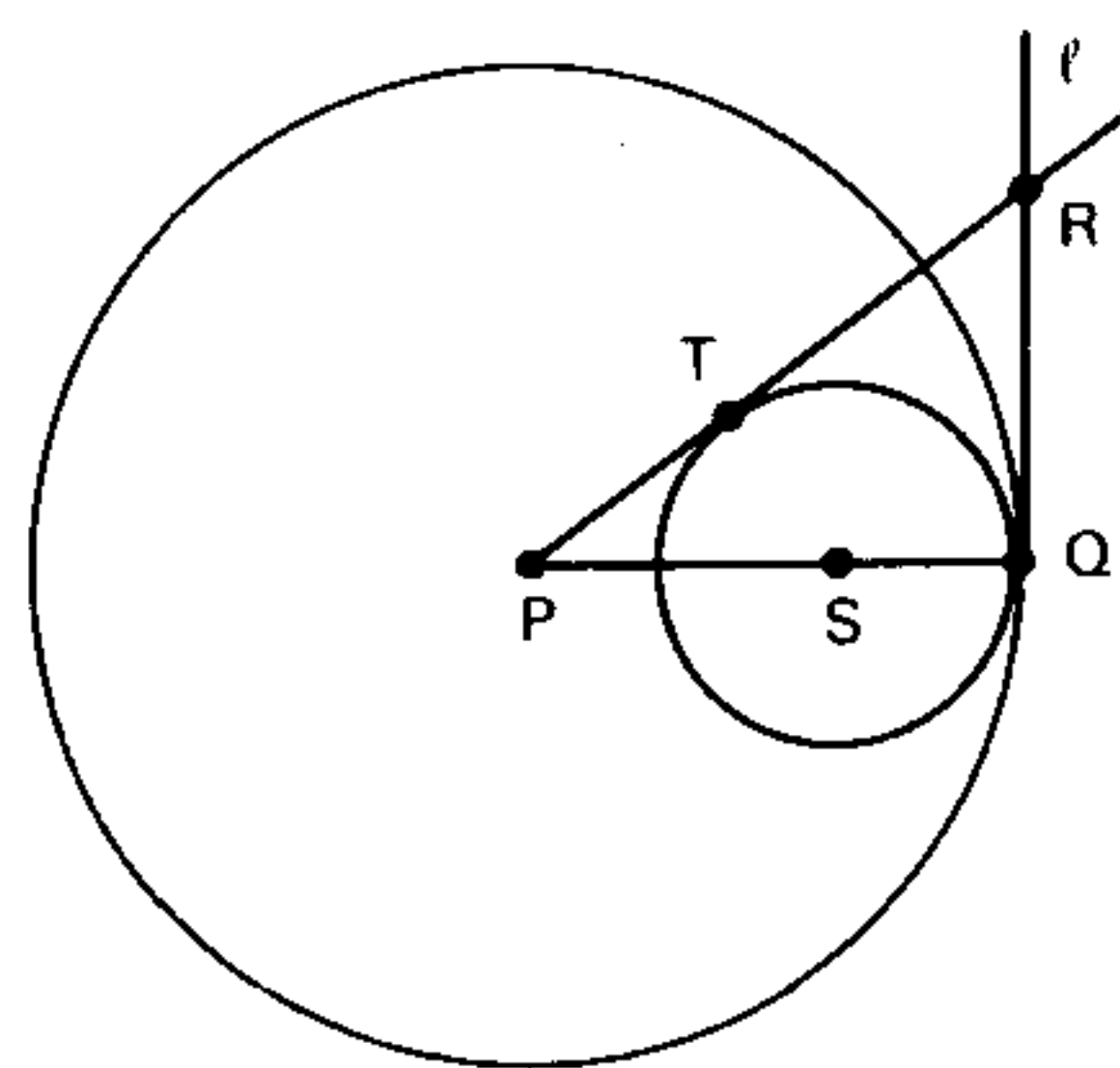
a) $60\sqrt{3}$ m
b) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m
c) $100\sqrt{3}$ m
d) $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ m
e) $\frac{100\sqrt{2}}{2}$ m

162. (U.C.SALVADOR-91) Um triângulo isósceles é tal que um de seus ângulos internos mede $120°$ e o maior dos lados mede $12\ cm$. O perímetro desse triângulo, em centímetros, é:

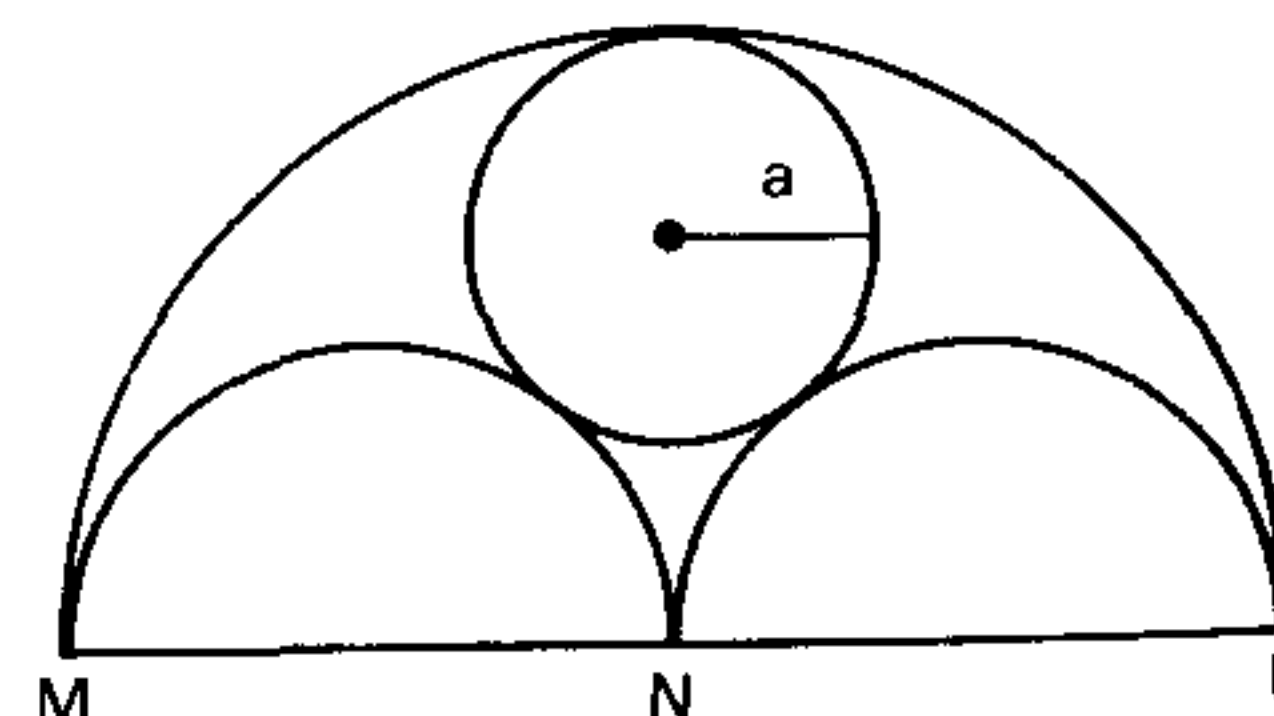
a) 36
b) 18
c) $4(2\sqrt{3} + 3)$
d) $4(\sqrt{3} + 12)$
e) $2(\sqrt{3} + 6)$

163. (CESGRANRIO-COMCITEC-73) Na figura dada, as circunferências de centros P e S são ambas tangentes à reta ℓ no mesmo ponto Q e a reta que passa por P e R tangencia a circunferência menor no ponto T. Sendo os raios das circunferências respectivamente $8\ m$ e $3\ m$, a medida do segmento $\overline{QR}$ é:

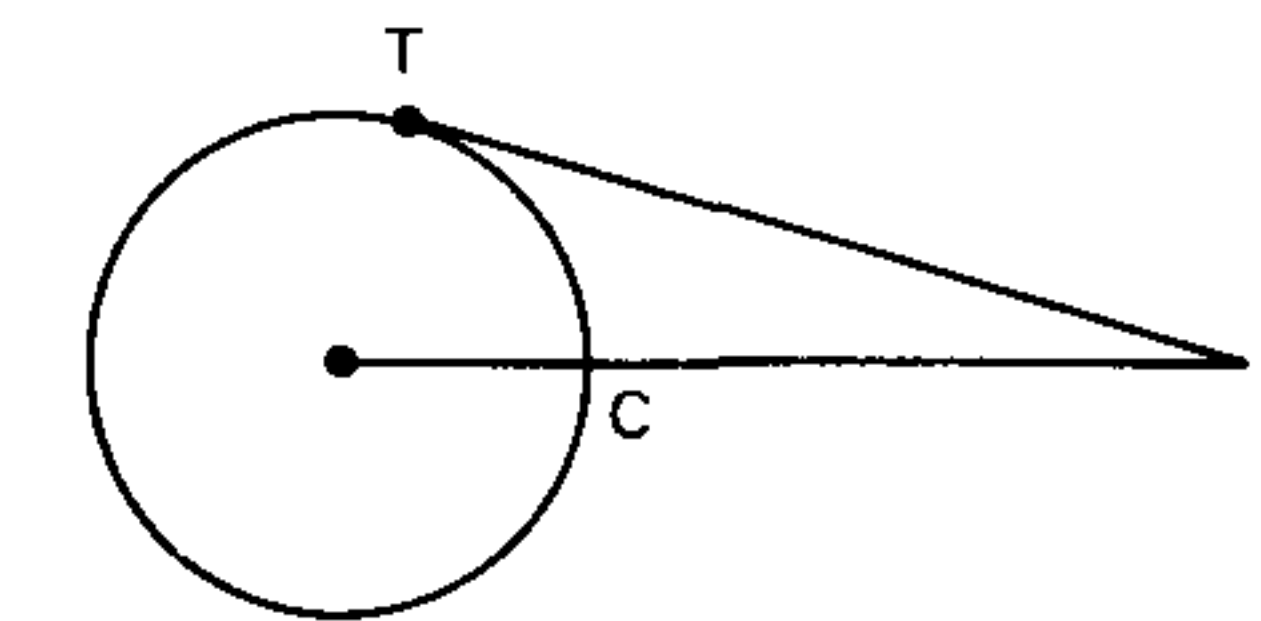
a) 4 m
b) 6 m
c) 8 m
d) 2 m
e) diferente dos quatro valores anteriores

ℓ R T Q P S

164. (U.MACK.-74) A circunferência de raio a é tangente às duas semicircunferências menores e à semicircunferência maior. Se $\overline{MN} = \overline{NP} = R$, então a é igual a:

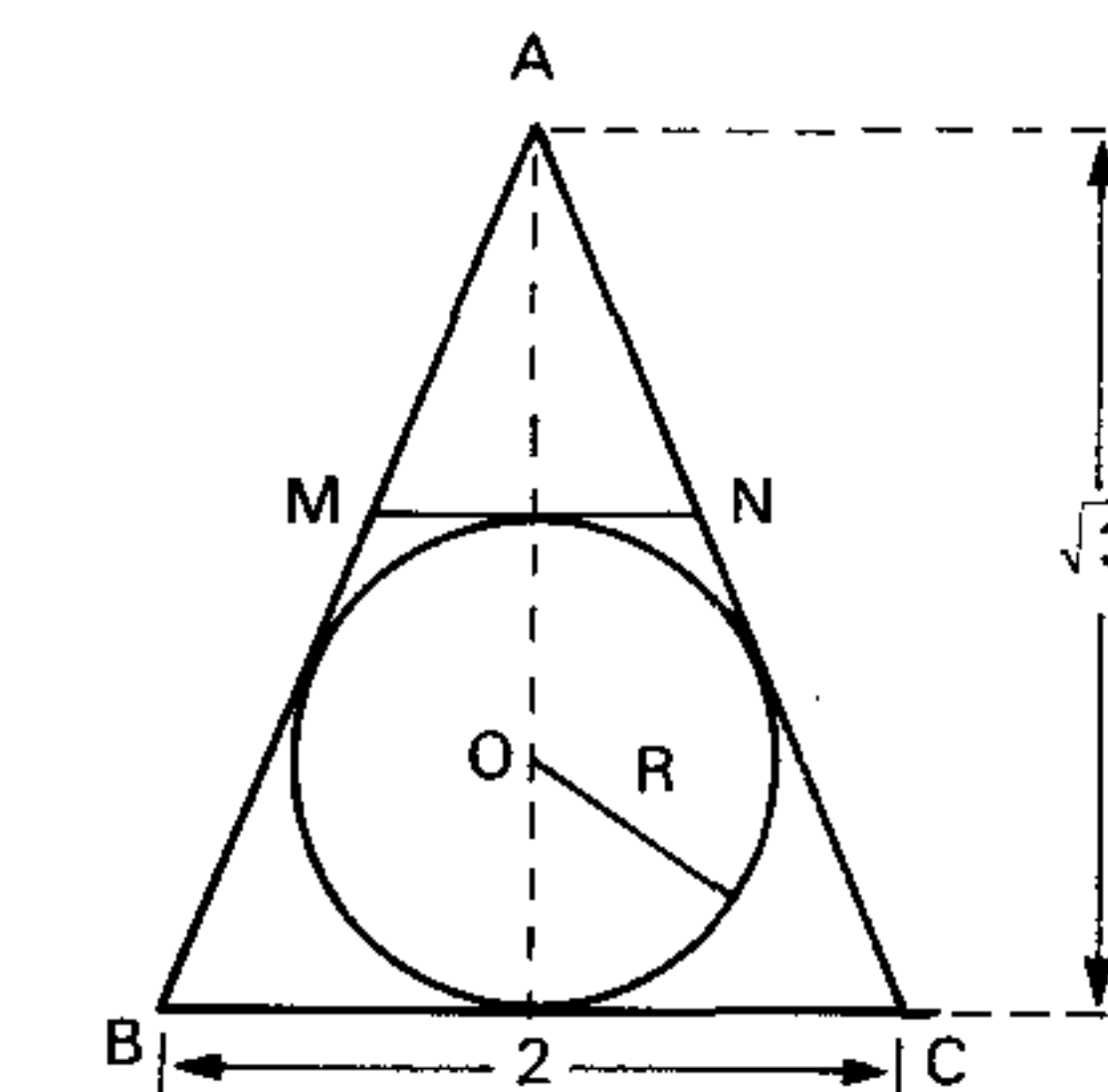
a) $R\sqrt{2}/2$
b) $R\sqrt{3}/2$
c) $R/4$
d) $R/3$
e) $R/2$

a M N P

165. (CESCEA-75) Na figura ao lado $\overline{AT}$ é tangente à circunferência de raio r.
Sabendo-se que $\overline{AT} = 2r$, então o valor de $\overline{AC}$ é:

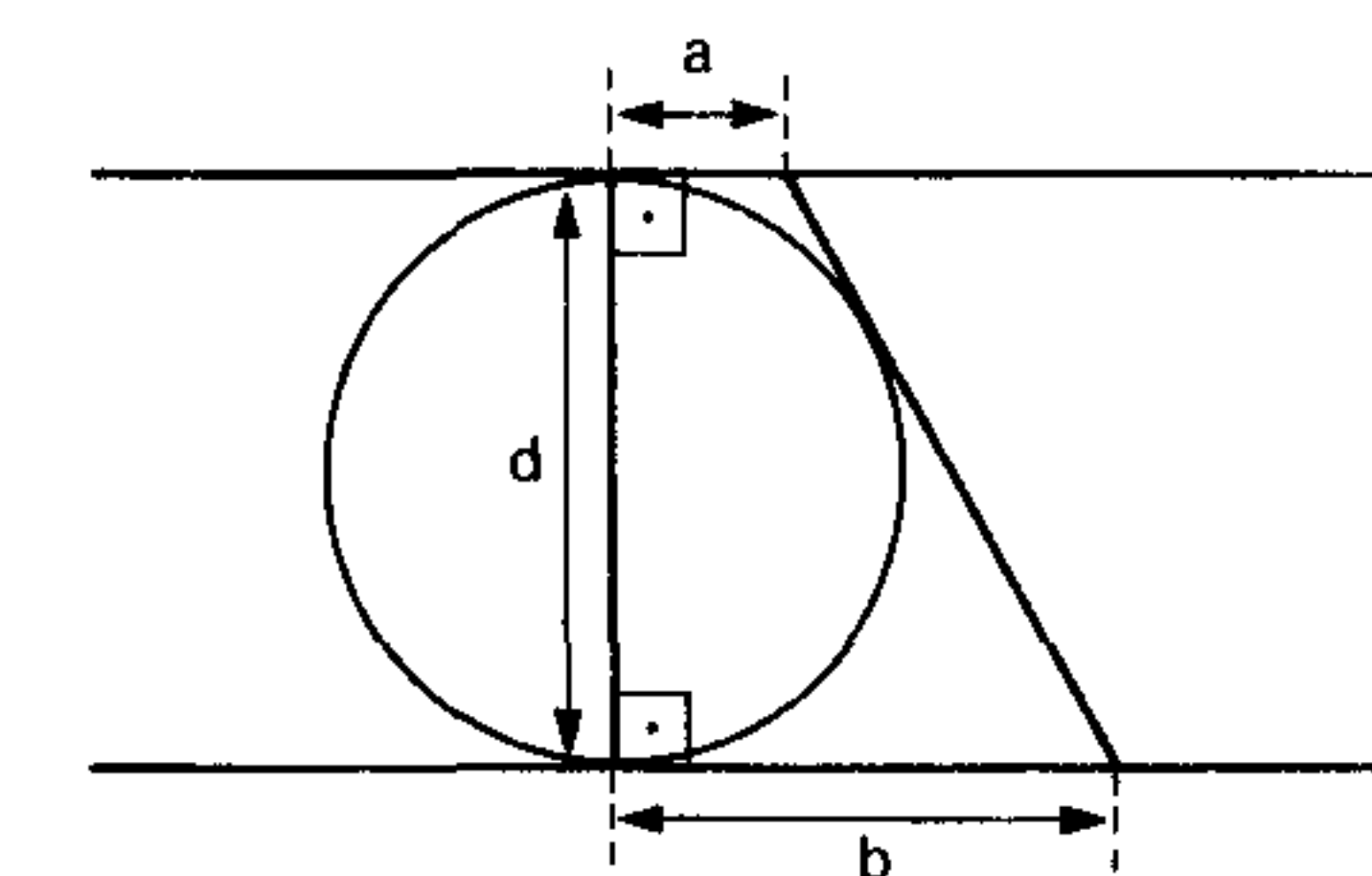
a) $(\sqrt{5} + 1)r$
b) $1 + 2r$
c) r^2
d) $\sqrt{5}r$
e) $(\sqrt{5} - 1)r$

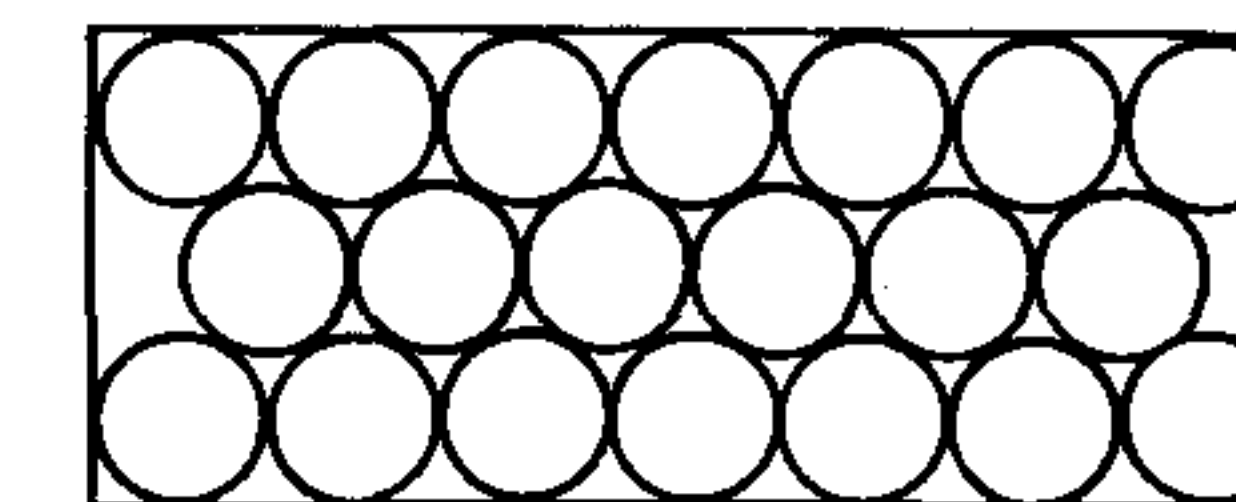
T A C

166. (U.MACK.-75) Na figura o triângulo ABC é isósceles e o segmento $\overline{MN}$ é paralelo à base $\overline{BC}$. O comprimento do segmento $\overline{MN}$ é igual a:

a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{5}{6}$
d) $\frac{3}{8}$
e) $\frac{1}{2}$

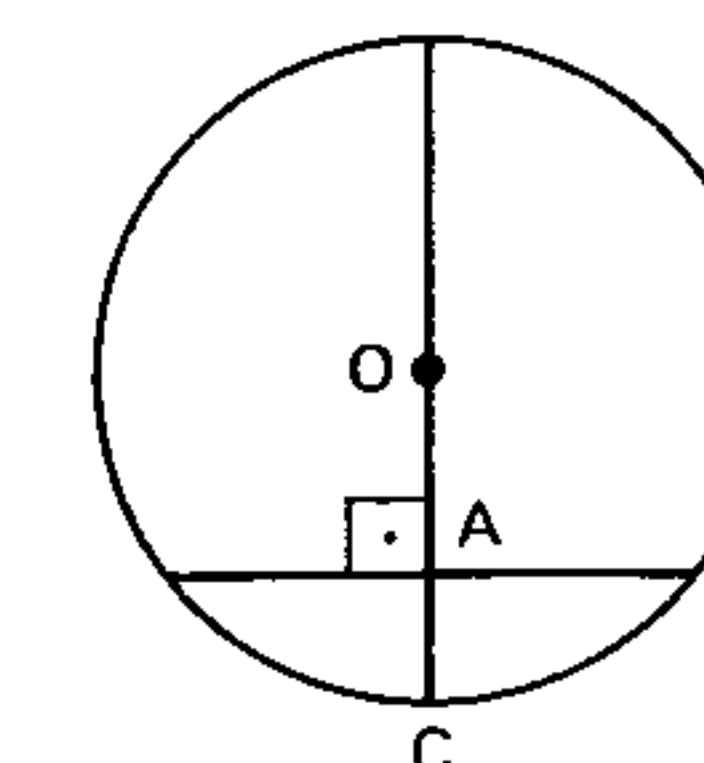
A M N $\sqrt{3}$ O R B 2 C

167. (F.C.M.STA.CASA-77) Na figura abaixo, o valor de d é:

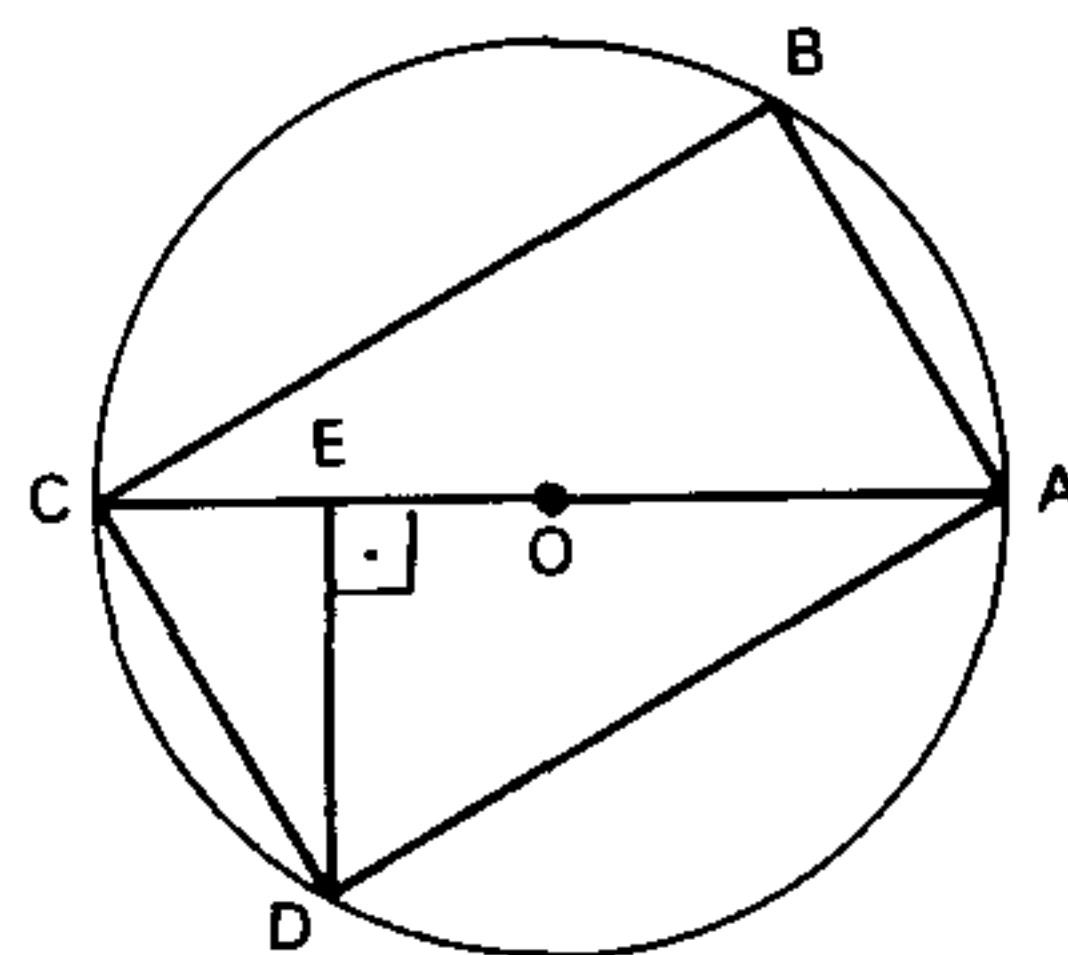
a) $\sqrt{b + a}$
b) $\sqrt{2ab}$
c) $2\sqrt{ab}$
d) $2a\sqrt{b + a}$
e) $2\sqrt{ab + 2a}$

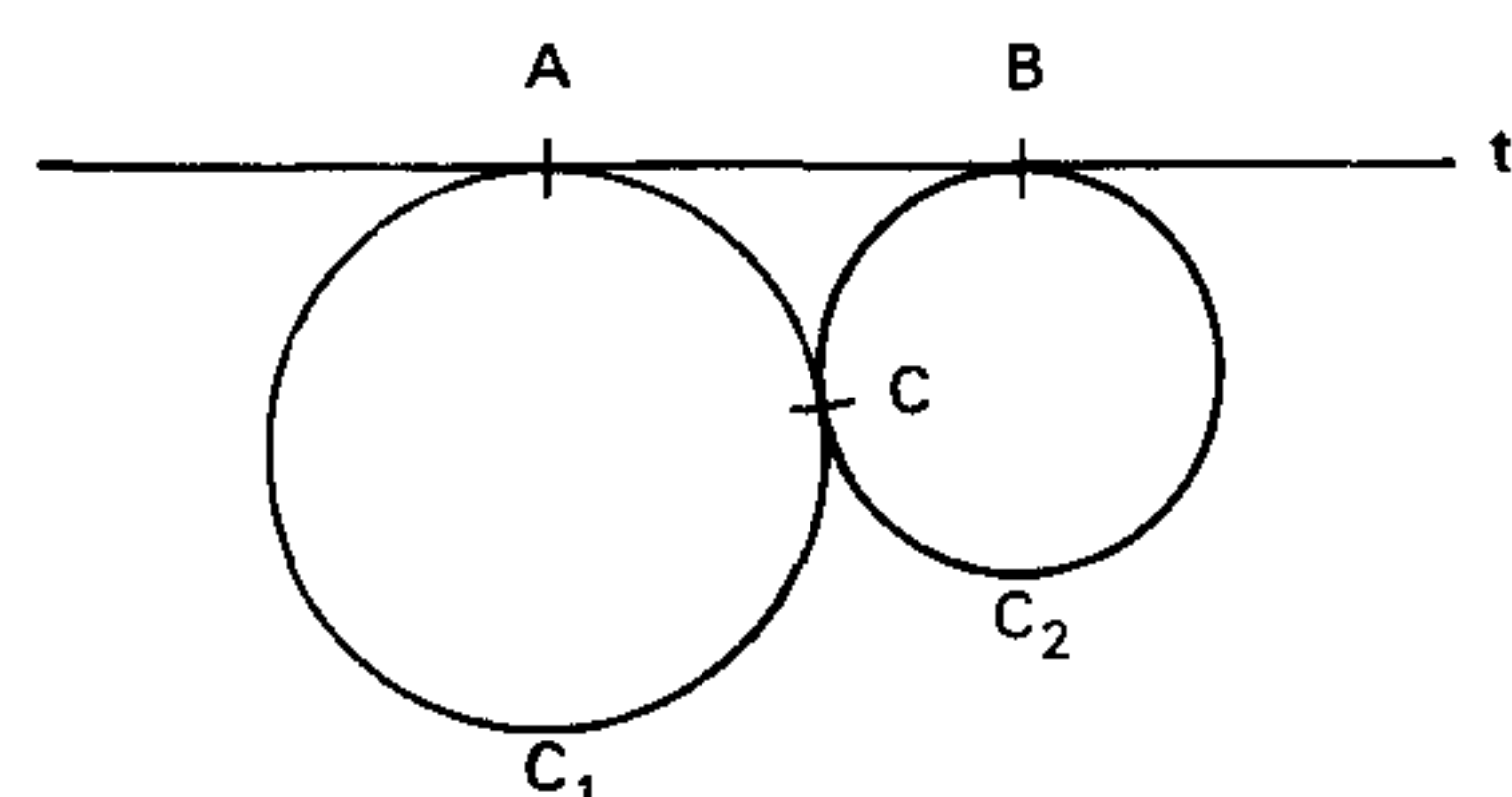
a d b

168. (FUVEST-77) A secção transversal de um maço de cigarros é um retângulo que acomoda exatamente os cigarros como na figura. Se o raio dos cigarros é r, as dimensões do retângulo são:

a) $14r$ e $2r(1 + \sqrt{3})$
b) $7r$ e $3r$
c) $14r$ e $6r$
d) $14r$ e $3r$
e) $(2 + 3\sqrt{3})r$ e $2r\sqrt{3}$

169. (U.MACK.-78) Na figura O é o centro da circunferência; $\overline{AB} = a$; $\overline{AC} = b$ e $\overline{OA} = x$. O valor de x, em função de a e b, é:

a) $\frac{a + b}{2}$
b) $a - b$
c) $2\sqrt{a^2 - b^2}$
d) $\frac{a^2}{2b} - \frac{b}{2}$
e) impossível de ser calculado por falta de dados

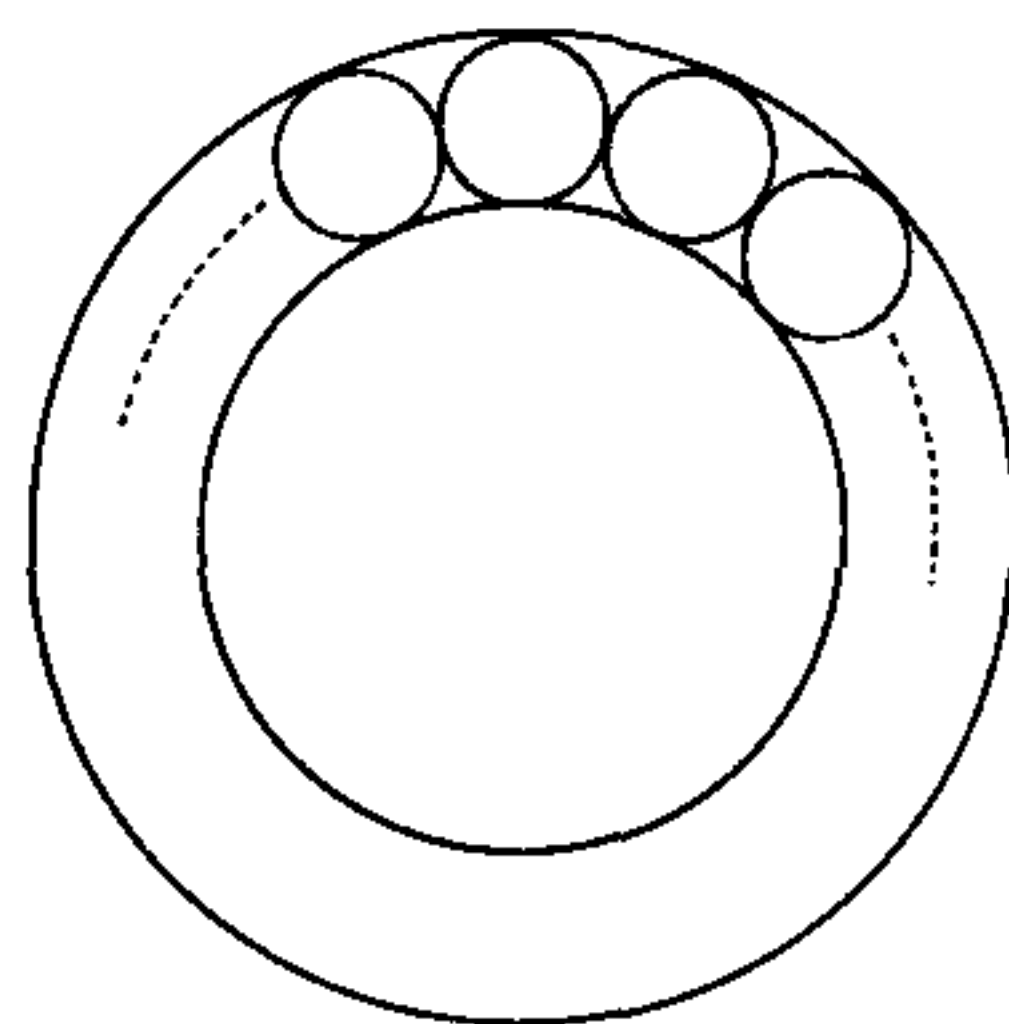
O A B C

170. (U.MACK.-78) Na figura $AB = 30; BC = 40; CD = 20$; O é o centro da circunferência; $m(D\hat{E}A) = 90°$. O valor de CE é:

a) 12,5
b) 10
c) 8
d) 5
e) impossível de ser calculado por falta de dados

171. (FATEC-78) Na figura abaixo, as circunferências C_1 e C_2 tangenciam-se em C, e a reta t tangencia C_1 e C_2, respectivamente, em A e B. Se o raio de C_1 é $8\ cm$ e o raio de C_2 é $2\ cm$, então:

a) $\overline{AB} = 8$ cm
b) $\overline{AB} = 13$ cm
c) $\overline{AB} = 10$ cm
d) $\overline{AB} = 12$ cm
e) n.d.a.

172. (FATEC-78) Uma circunferência de raio R circunscreve um triângulo retângulo com catetos, respectivamente, de medidas 9 e 6. Então:

a) $R = 7{,}5$
b) $R = \frac{3\sqrt{13}}{2}$
c) $R = \sqrt{117}$
d) $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$
e) n.d.a.

173. (FATEC-78) Em uma coroa circular (conforme figura abaixo) estão inscritas n circunferências, cada uma tangente às duas vizinhas. Se o raio da circunferência interna da coroa mede 1, então o raio da circunferência externa da coroa mede:

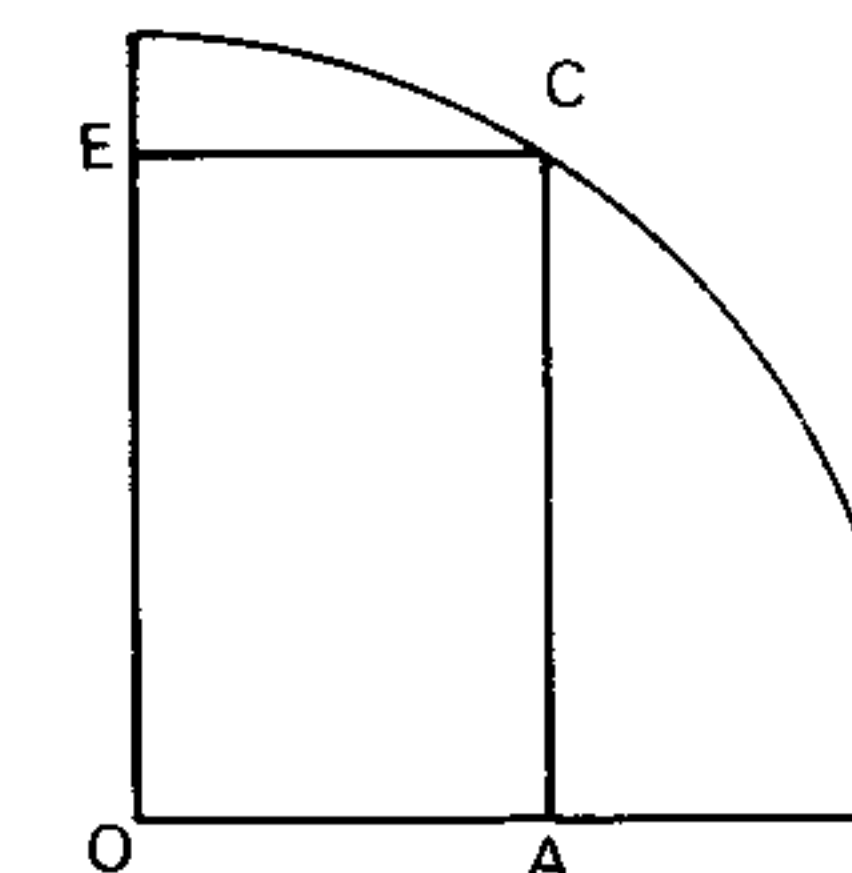
a) $\frac{1 + \text{sen}\ \pi/n}{1 - \text{sen}\ \pi/n}$
b) $\frac{1 + \cos \pi/n}{1 - \text{sen}\ \pi/n}$
c) $\frac{1 + \text{sen}\ 2\pi/n}{1 - \text{sen}\ 2\pi/n}$
d) $\frac{1 + \cos 2\pi/n}{1 - \cos 2\pi/n}$
e) $\frac{1 + \cos 2\pi/n}{1 - \text{sen}\ 2\pi/n}$

174. (U.F.GO-80) Uma corda AB de um círculo mede $6\ cm$ e a distância desta corda ao centro do círculo é de $3\ cm$. O raio do círculo, em cm, é:

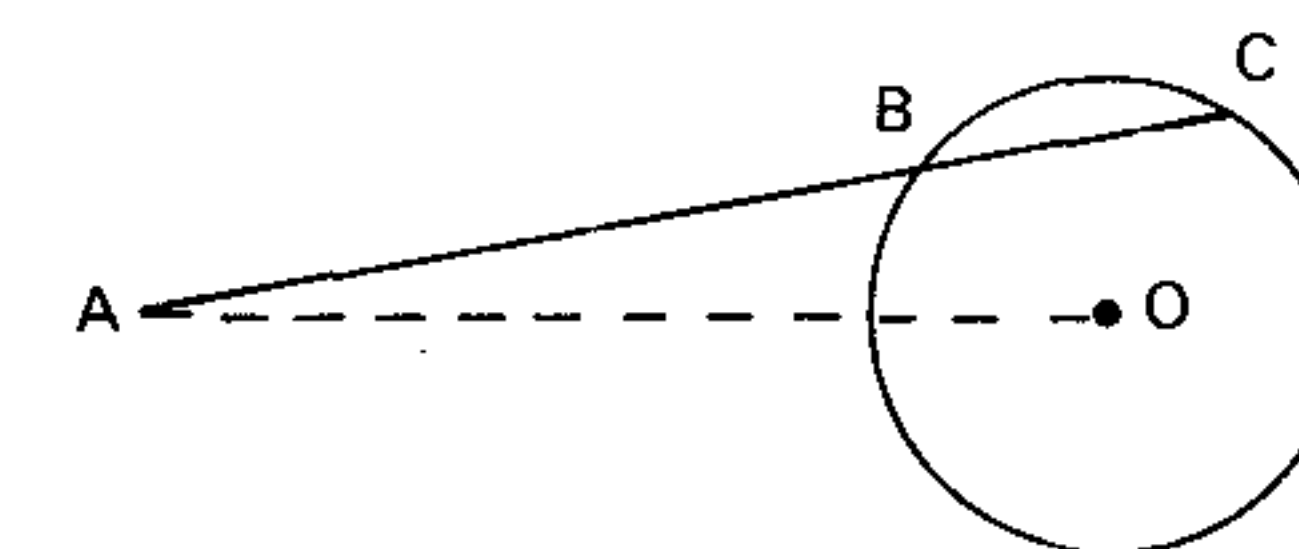
a) $5\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) 8 d) $3\sqrt{5}$ e) 6

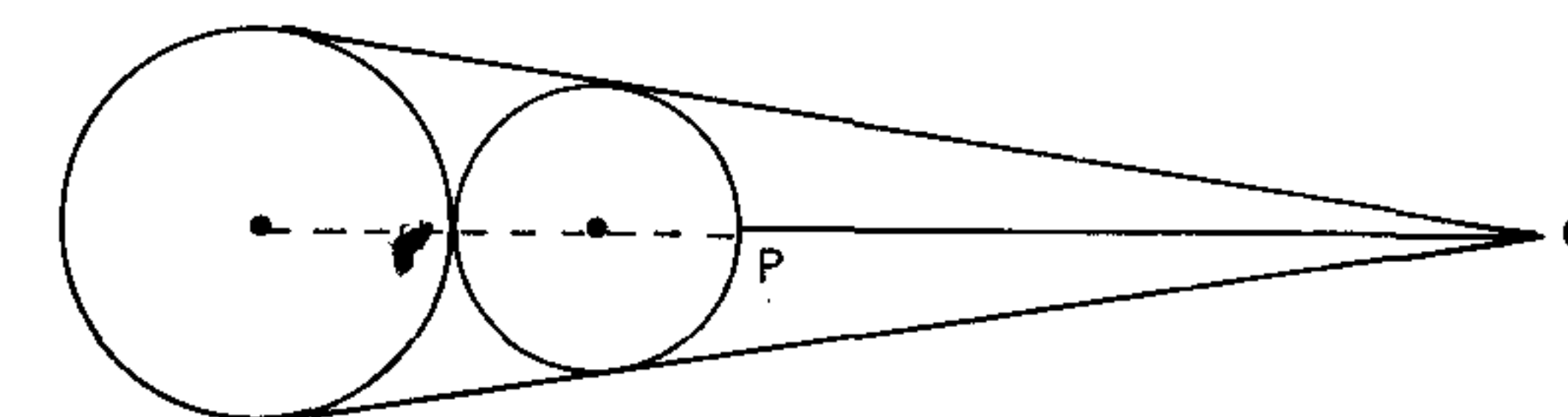
175. (FGV-81) Sendo x o raio do círculo inscrito num setor circular de $90°$ e raio r, então:

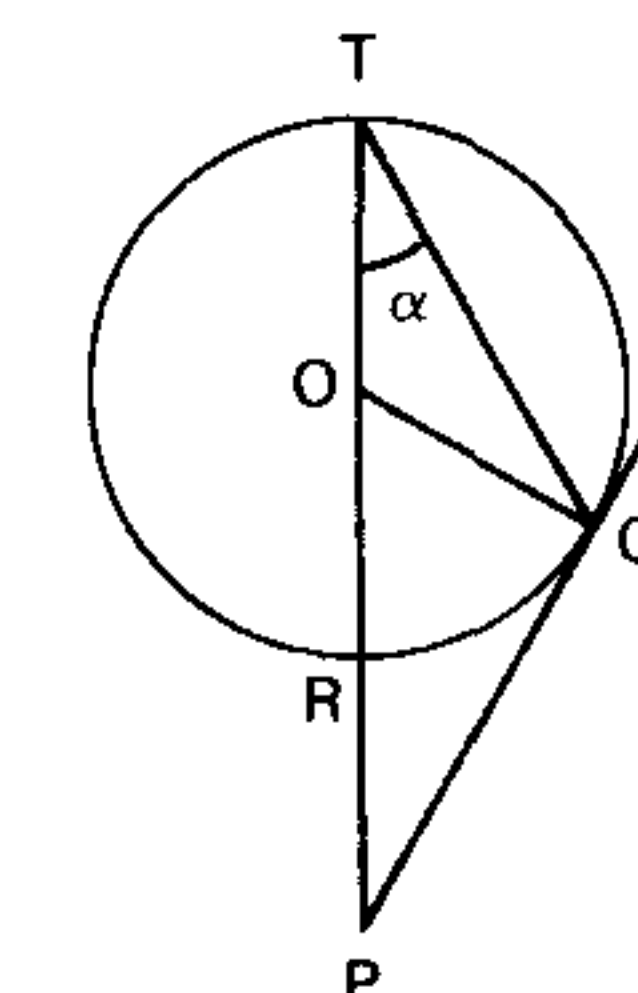
a) $x = r\sqrt{2}$
b) $x = 2r\sqrt{2}$
c) $x = 2r/5$
d) $x = r/3$
e) $x = r(\sqrt{2} - 1)$

176. (U.C.MG-81) Na figura, o retângulo $OACE$ está inscrito num setor circular de $90°$ e raio R. $OA = \frac{2}{3}R$. A medida do segmento AC é:

a) $\frac{R\sqrt{2}}{3}$
b) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{R\sqrt{3}}{5}$
d) $\frac{R\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{R\sqrt{5}}{3}$

177. (PUC-RJ-81) Na figura, ABC representa um trecho reto de uma estrada que cruza o pátio circular de centro O e raio r. Se $AC = 2r = AO$, então BC é igual a:

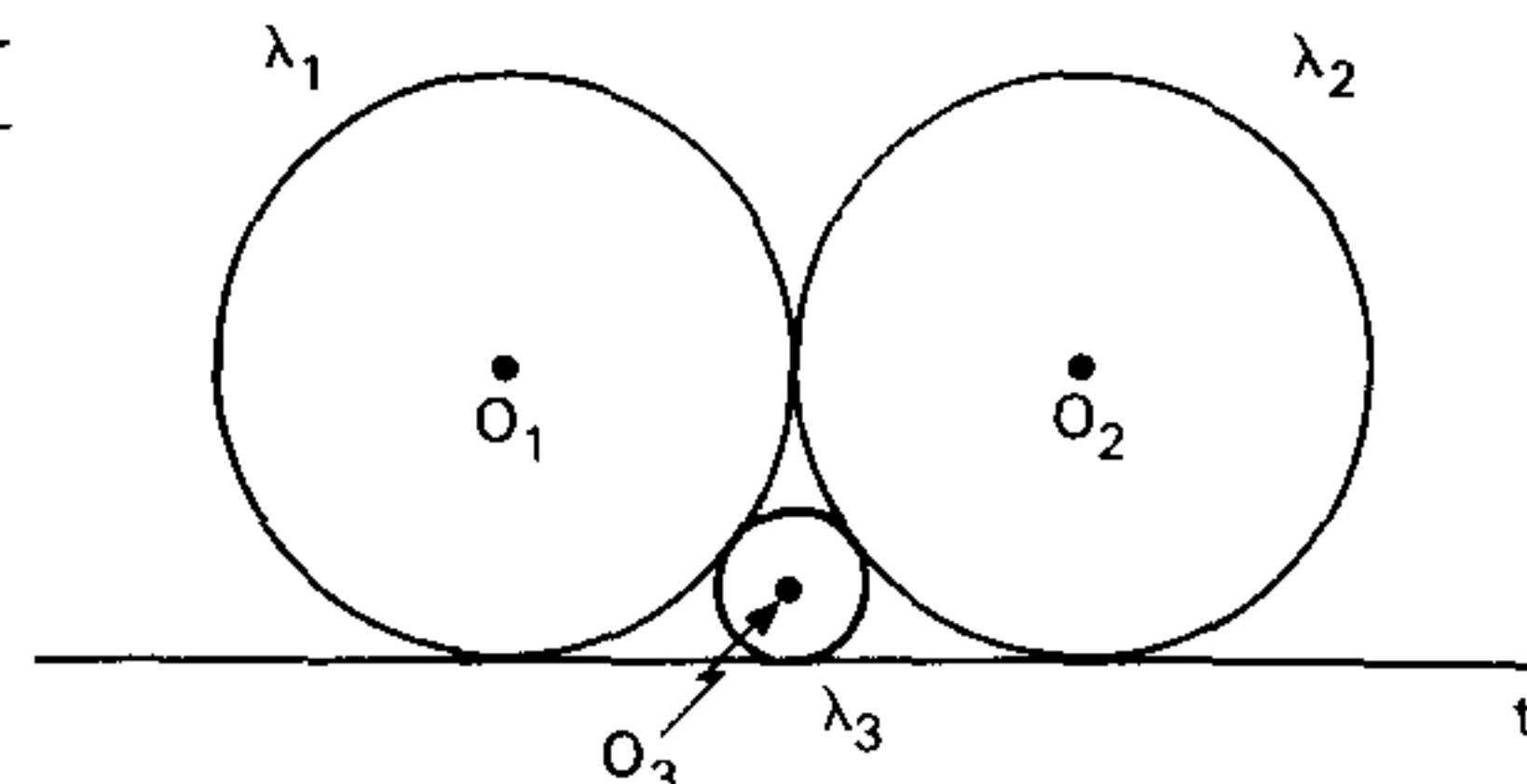
a) o dobro de AB.
b) $2/3$ de AB.
c) AB.
d) a metade de AB.
e) $1/3$ de AB.

178. (U.FORTALEZA-81) Duas circunferências de raios R e r, com $R > r$, são tangentes externas (como mostra a figura abaixo). Então, podemos afirmar que o comprimento do segmento PQ é:

a) $\frac{R^2}{R + r}$
b) $(R + r)(R - r)$
c) $\frac{2r^2}{R - r}$
d) $\frac{R + r}{R - r}$

179. (U.MACK.-82) A circunferência da figura tem centro O e raio 6; se $PQ = 8$, então:

a) $\alpha = \text{arctg}\ \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\alpha = \text{arctg}\ 1$
c) $\alpha = \text{arctg}\ \frac{1}{2}$
d) $\alpha = \text{arctg}\ \sqrt{3}$
e) $\alpha = \text{arctg}\ \frac{1}{4}$

180. (U.C.MG-82) A menor distância de um ponto a uma circunferência é $3\ m$, e o segmento da tangente à circunferência é $5\ m$. O raio da circunferência, em metros, mede:

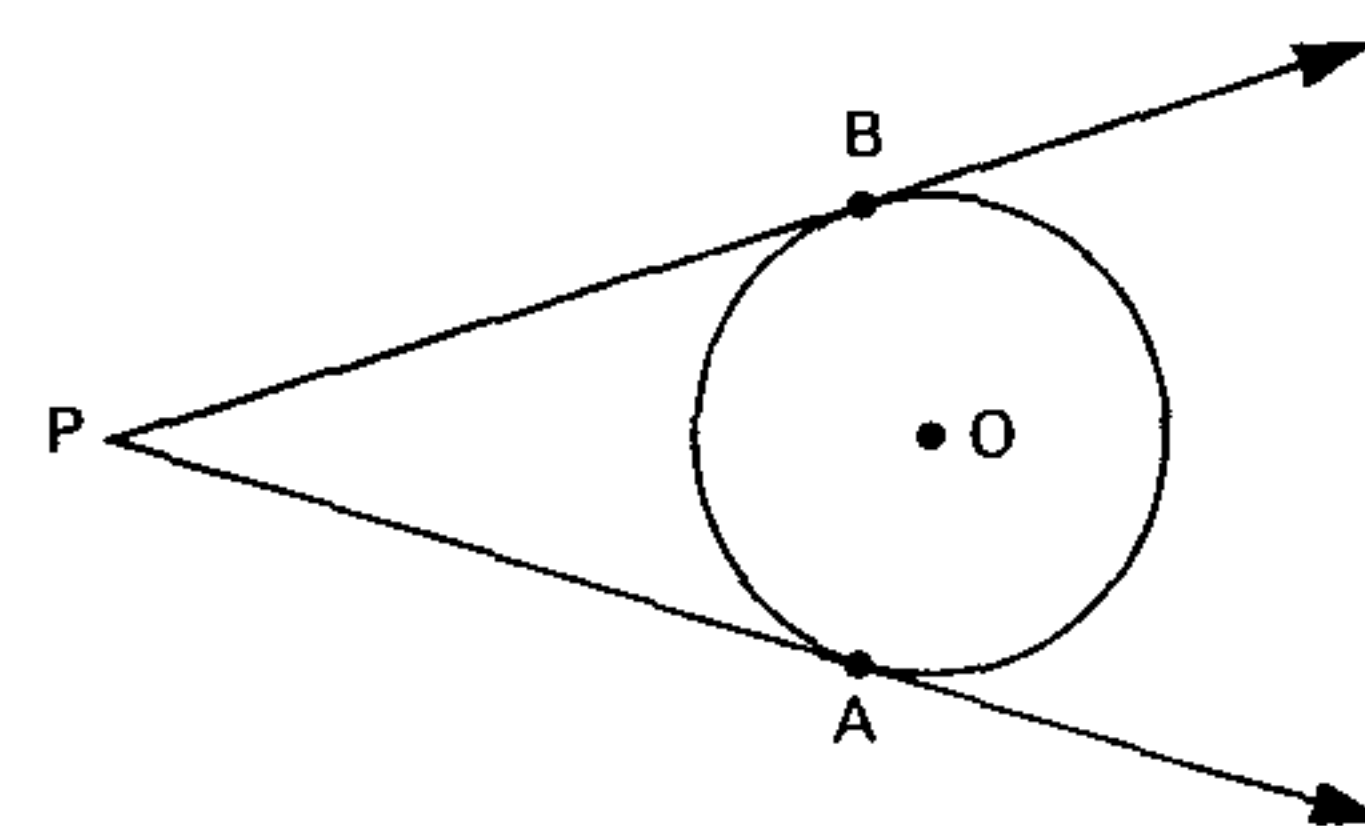
a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{14}{5}$ e) $\frac{17}{8}$

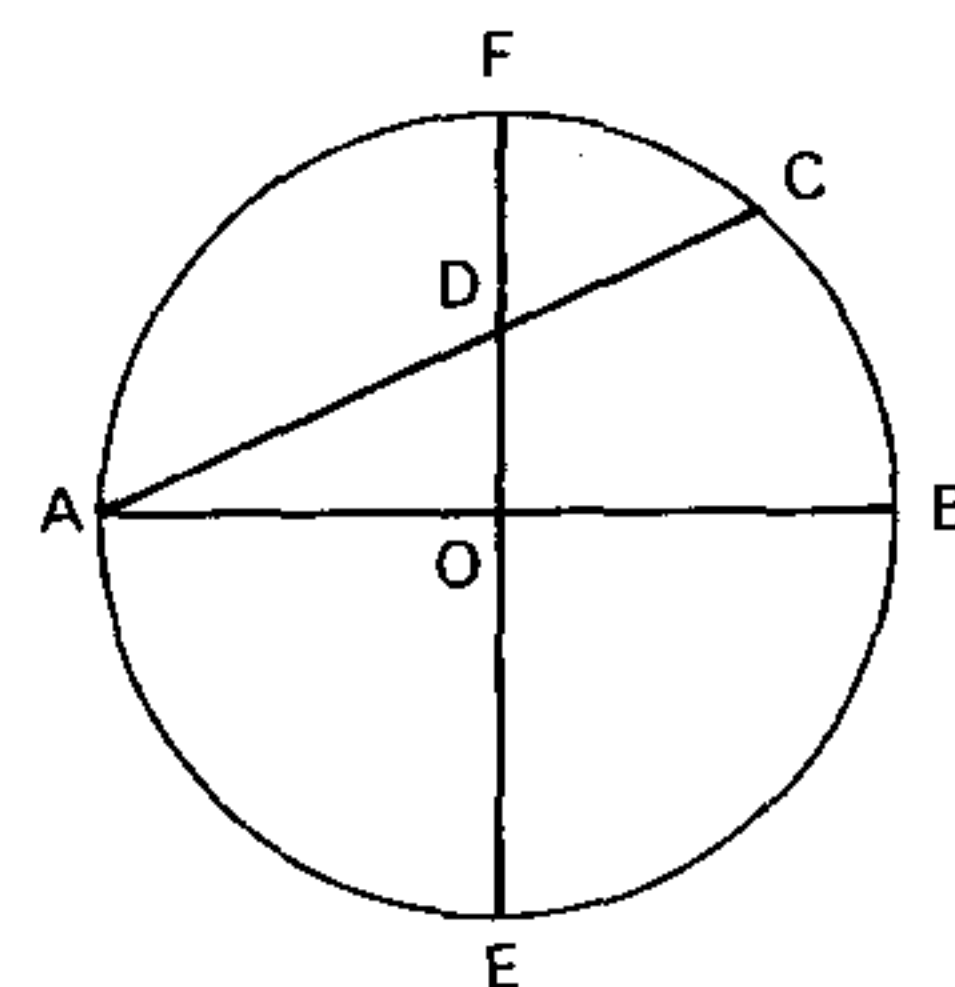
181. (F.C.M.STA.CASA-82) Na figura ao lado, tem-se as circunferências λ_1, λ_2 e λ_3, tangentes entre si, tangentes a uma reta t e de raios r_1, r_2 e r_3, respectivamente. Se $r_1 = r_2$ e $r_3 = 5\ cm$, então r_1 mede, em cm:

a) 10
b) 15
c) 20
d) 25
e) 30

182. (U.F.ES-82) Inscreve-se um triângulo numa semicircunferência cujo diâmetro coincide com um dos lados do triângulo. Os outros lados do triângulo medem $5\ cm$ e $12\ cm$. O raio da semicircunferência mede:

a) $\frac{13}{2}$ cm
b) 13 cm
c) $\frac{15}{2}$ cm
d) 5 cm
e) faltam dados para determinar tal raio

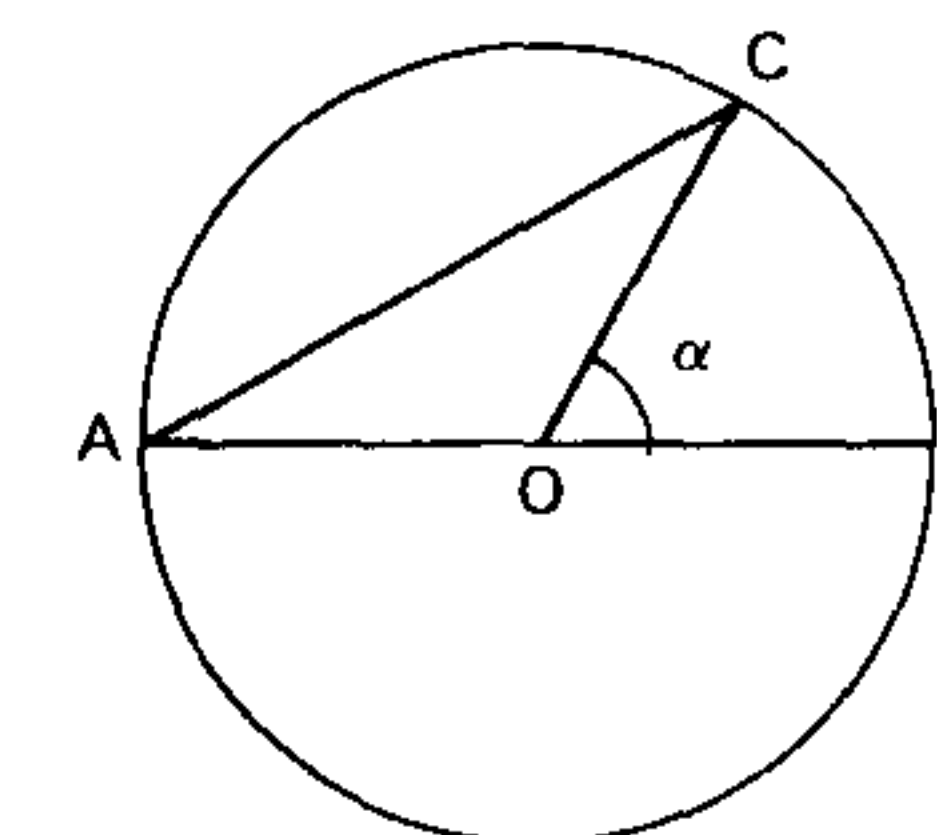
183. (U.E.LONDRINA-84) Na figura ao lado, as semi-retas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ tangenciam a circunferência de centro O nos pontos A e B. Se $OA = 2$ e o ângulo $A\hat{P}B$ mede $60°$, então AP é igual a:

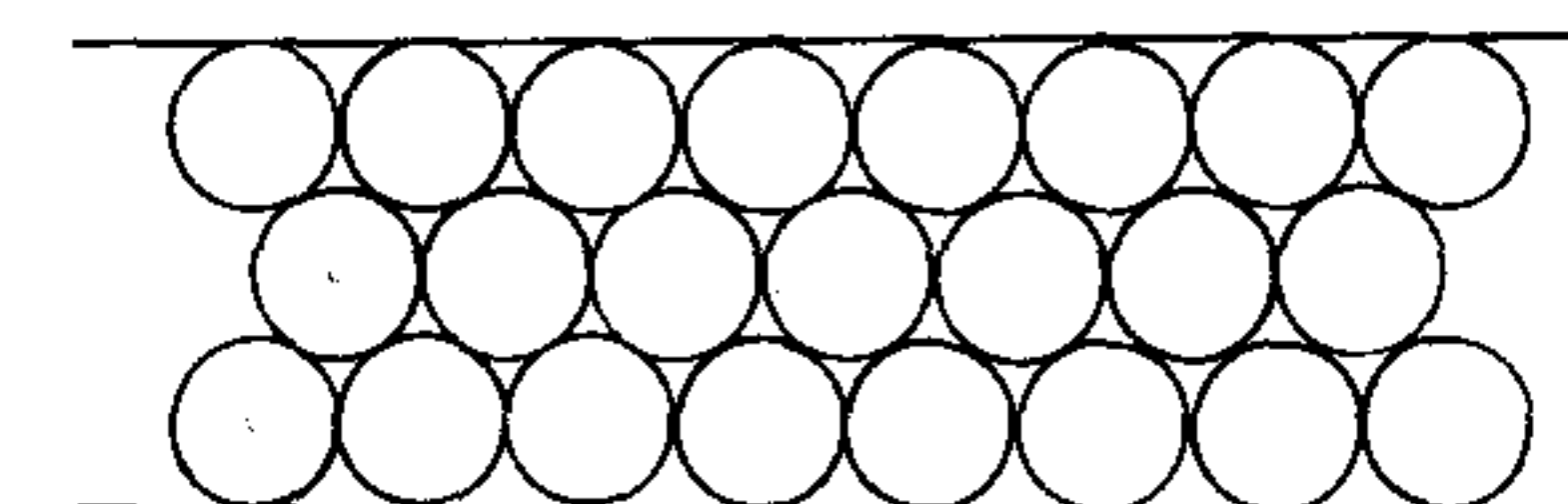
a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) 4
d) $3\sqrt{2}$
e) 6

184. (CESGRANRIO-84) Em um círculo de centro O e raio 10, traçam-se dois diâmetros perpendiculares AB e EF e a corda AC, como mostra a figura. Se $AC = 16$, o segmento AD mede:

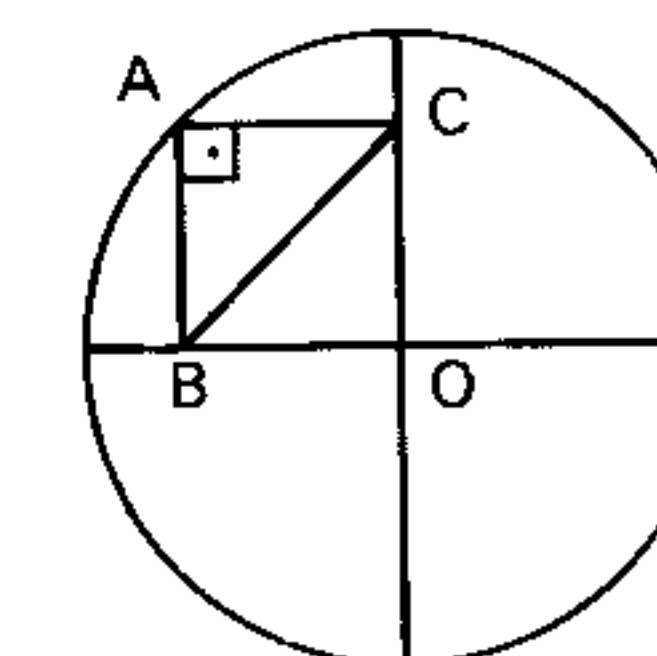
a) $8\sqrt{2}$
b) 12,0
c) 12,5
d) 13,0
e) $6\sqrt{3}$

185. (ITA-85) Considere um triângulo isósceles inscrito em uma circunferência. Se a base e a altura deste triângulo medem $8\ cm$, então o raio desta circunferência mede:

a) 3 cm b) 4 cm c) 5 cm d) 6 cm e) $3\sqrt{2}$ cm

186. (PUC-SP-85) No círculo abaixo, O é o centro, $AB = 2$ e $AC = \sqrt{3}$. Então α vale:

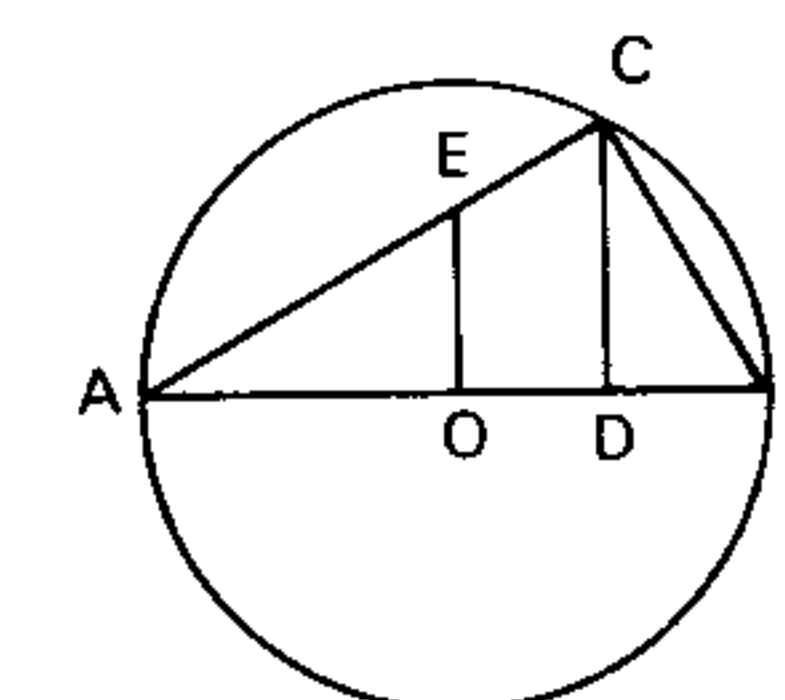
a) 75°
b) 60°
c) 45°
d) 30°
e) 15°

187. (CESESP-85) Um armazenista pretende ajustar as prateleiras reguláveis de uma estante a fim de que possa armazenar vasilhames, de forma cilíndrica com secção circular de $10\ cm$ de diâmetro, deitadas no sentido transverso à prateleira, em três fileiras superpostas, conforme indica a figura abaixo, de modo que a distância entre duas prateleiras contíguas seja mínima.
Assinale, pois, a alternativa correspondente à distância que deve existir entre duas prateleiras contíguas de maneira a atender ao requisito exigido.

a) $10(\sqrt{3} + 1)$ cm
b) $5(\sqrt{3} - 1)$ cm
c) 27 cm
d) 30 cm
e) $10\sqrt{3}$ cm

188. (FATEC-88) Se, na figura abaixo, tem-se $BC = 4\ cm$ e $AB = 3\ cm$, então o diâmetro da circunferência, em centímetros, é:

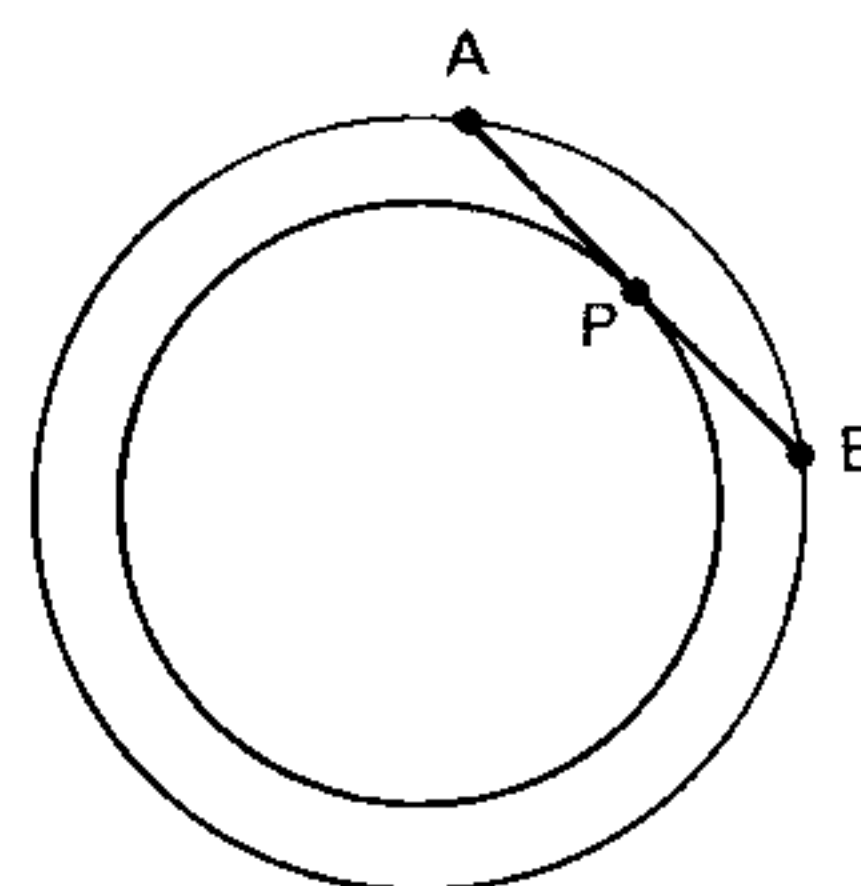
a) 5
b) 8
c) 10
d) 12
e) impossível de ser calculado.

189. (U.F.MG-89) Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O. Seja D o ponto da circunferência tal que o segmento CD contenha a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$.
Se $\overline{AD} = 3\ cm$, $\overline{AC} = 4\ cm$ e $\overline{CD} = 5\ cm$, a medida do segmento CB é, em centímetros:

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{3}$ d) 5 e) $5\sqrt{2}$

190. (U.F.MG-90) Na figura, o triângulo ABC é inscrito numa circunferência de centro O e diâmetro AB. Os pontos E e D pertencem aos lados AC e AB, respectivamente, e são tais que EO e CD são perpendiculares a AB. Se $AD = 12$ e $DB = 3$, pode-se afirmar que OE mede:

a) $\frac{4}{3}$
b) $\frac{9}{4}$
c) 3
d) $\frac{7}{2}$
e) $\frac{15}{4}$

191. (COVEST-90) Na figura abaixo, temos duas circunferências concêntricas, com raio medindo *4 cm* e *5 cm*, respectivamente. Por um ponto *P* da circunferência menor, traça-se a reta tangente à mesma, a qual determina pontos *A* e *B* na circunferência maior. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é:

a) $3\sqrt{2}$ cm
b) 6 cm
c) $3\sqrt{3}$ cm
d) 6,1 cm
e) 5,8 cm

A
P
B

192. (VUNESP-92) Sejam *AB* um diâmetro de uma circunferência e *BC* um segmento de reta tangente a essa circunferência, $\overline{AB} = 3\sqrt{5}\ cm$ e $\overline{BC} = \sqrt{5}\ m$. Por *C* traça-se uma reta perpendicular a *BC* que intercepta a circunferência em *D* e *E*. Se $\overline{CD} < \overline{CE}$, então a medida de *CD* é:

a) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ m

b) $\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$ m

c) $\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$ m

d) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ m

e) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ m

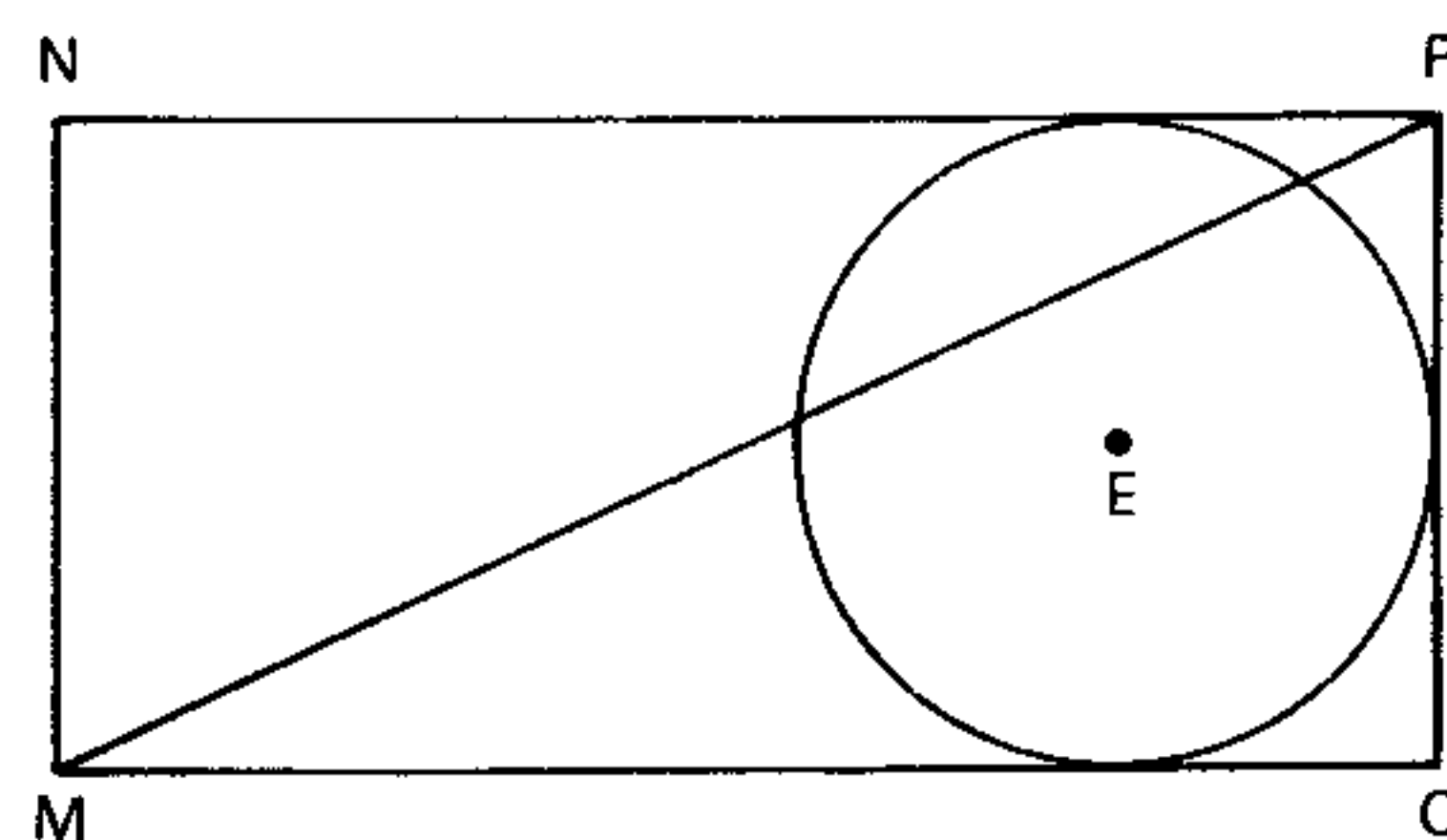
193. (U.E.CE-92) Na figura abaixo, *MNPQ* é um retângulo, o ponto *E* é o centro da circunferência tangente aos lados *NP*, *PQ* e *MQ*. Se $\overline{MN} = 4\ cm$ e $\overline{NP} = 8\ cm$, então a distância do ponto *E* à diagonal *MP*, em *cm*, é:

a) $\frac{\sqrt{12}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

c) $\frac{\sqrt{18}}{5}$

d) $\frac{\sqrt{20}}{5}$

N P
E
M Q

194. (ITA-92) Num triângulo *ABC*, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B} = 60°$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto *D*. Se o segmento de reta *BD* mede *1 cm*, então a hipotenusa mede:

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm
b) $1+\sqrt{3}$ cm
c) $2+\sqrt{3}$ cm
d) $1+2\sqrt{2}$ cm
e) n.d.a.

Triângulos quaisquer — Polígonos regulares — Comprimento da circunferência

195. (EPUSP-66) Os lados de um triângulo estão na razão *6 : 8 : 9*. Então:

a) o triângulo é obtusângulo.
b) o triângulo é acutângulo.
c) os ângulos estão na razão *6 : 8 : 9*.
d) o ângulo oposto ao lado maior é o dobro do ângulo oposto ao lado menor.
e) Nenhuma das respostas anteriores.

196. (EESCUSP-68) Dado o triângulo *ABC* tal que $\overline{AC} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$, $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$, temos:

a) $\overline{AB} = 3$ b) $\overline{AB} = \sqrt{3}$ c) $\overline{AB} = 2$ d) $\overline{AB} = \sqrt{2}$ e) nada disso

197. (PUC-SP-70) *a*, *b* e *c* são as medidas dos lados de um triângulo *ABC*. Então se

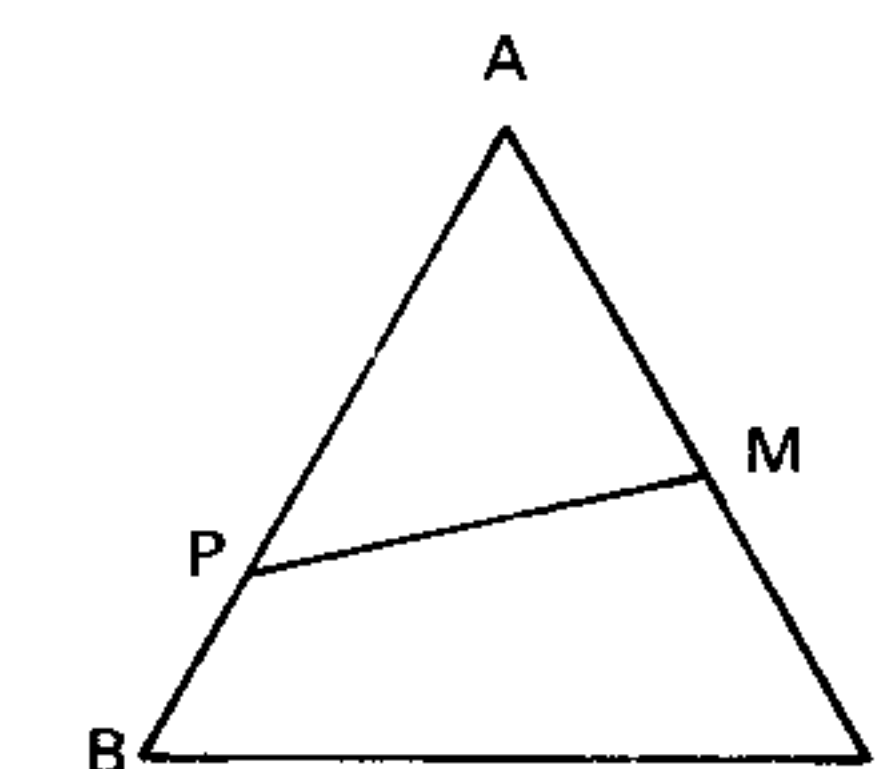
a) $a^2 < b^2 + c^2$, o triângulo *ABC* é retângulo.
b) $a^2 = b^2 + c^2$, o lado *a* mede a soma das medidas de *b* e *c*.
c) $a^2 > b^2 + c^2$, o ângulo oposto ao lado que mede *a* é obtuso.
d) $b^2 = a^2 + c^2$, *a* é hipotenusa e *b* e *c* são catetos.
e) Nenhuma das anteriores é correta.

198. (FEI-71) Assinale a alternativa *falsa* quanto ao tipo do triângulo, dados os lados *a*, *b* e *c*.

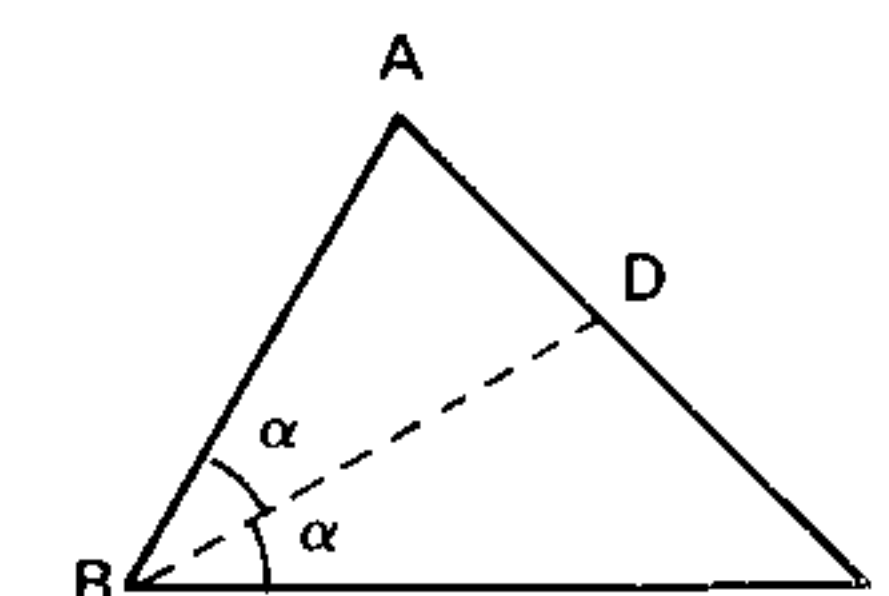
a) Se $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$, o triângulo é retângulo.
b) Se $a = 18$, $b = 5$, $c = 12$, é um triângulo.
c) Se $a = 5$, $b = 5$, $c = 5$, o triângulo é equilátero.
d) Se $a = 5$, $b = 7$, $c = 7$, o triângulo é isósceles.
e) Se $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, não é triângulo.

199. (FUVEST-77) *ABC* é equilátero de lado *4*; $\overline{AM} = \overline{MC} = 2$, $\overline{AP} = 3$ e $\overline{PB} = 1$. O perímetro do triângulo *APM* é:

a) $5+\sqrt{7}$
b) $5+\sqrt{10}$
c) $5+\sqrt{19}$
d) $5+\sqrt{13-6\sqrt{3}}$
e) $5+\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

A
M
P
B C

200. (U.F.BA-81) Na figura ao lado, $AB = 3\ cm$, $BC = 4\ cm$ e $B = 60°$. *AD* é aproximadamente igual a:

a) 1,2 cm
b) 1,4 cm
c) 1,54 cm
d) 1,8 cm
e) 2,04 cm

A
D
α
α
B C

201. (CESESP-82) "Com três segmentos de comprimentos iguais a *10 cm*, *12 cm* e *23 cm*...

a) é possível formar apenas um triângulo retângulo."
b) é possível formar apenas um triângulo obtusângulo."
c) é possível formar apenas um triângulo acutângulo."
d) não é possível formar um triângulo."
e) é possível formar qualquer um dos triângulos: retângulo, acutângulo ou obtusângulo."

202. (PUC-SP-82) A diagonal de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um de *60°* e outro de *45°*. A razão entre os lados menor e maior do paralelogramo é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

203. (ITA-88) Num losango *ABCD*, a soma das medidas dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se a sua diagonal menor mede *d cm*, então sua aresta medirá:

a) $\frac{d}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ c) $\frac{d}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ e) $\frac{d}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

b) $\frac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ d) $\frac{d}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

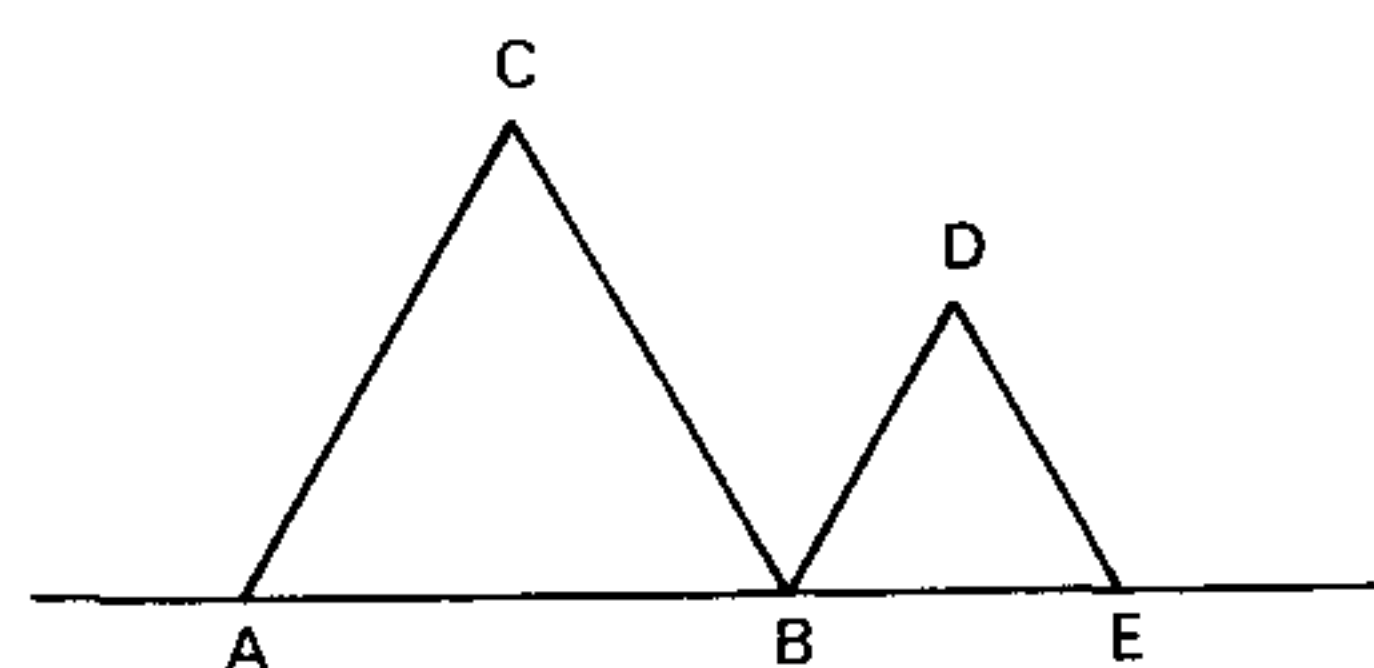
204. (CESGRANRIO-89) Se *4 cm*, *5 cm* e *6 cm* são as medidas dos lados de um triângulo, então o cosseno do seu menor ângulo vale:

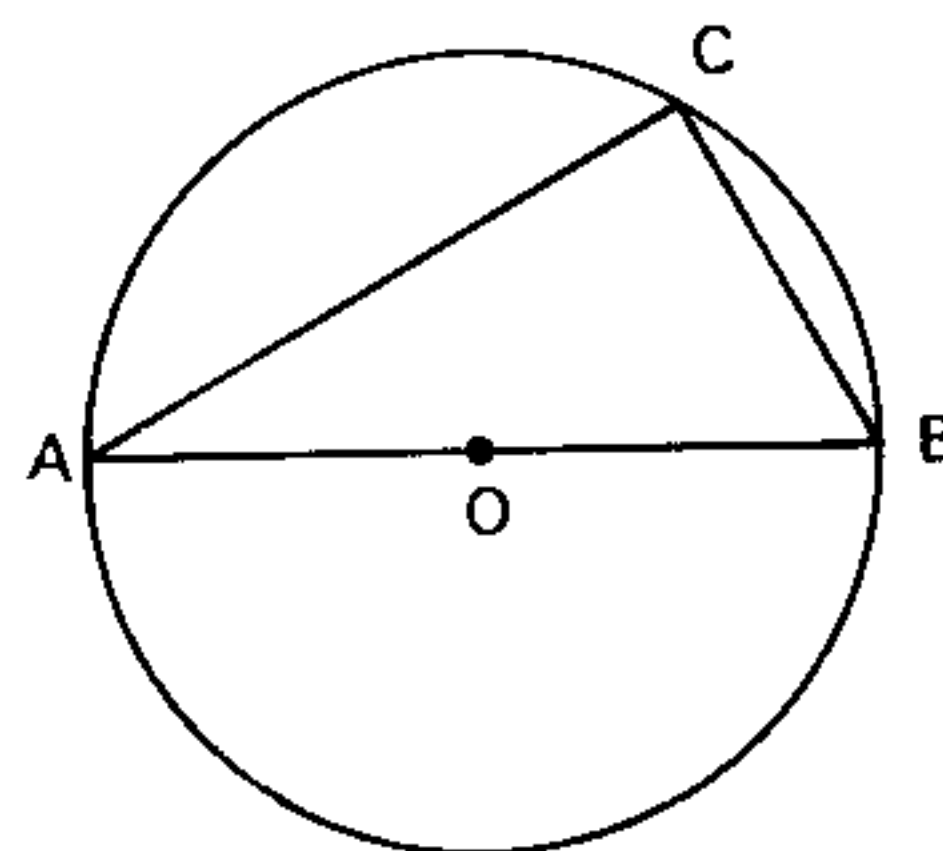
a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

205. (FUVEST-90) Um triângulo *T* tem lados iguais a *4*, *5* e *6*. O cosseno do maior ângulo de *T* é:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{8}$

206. (FESP-91) Na figura abaixo, *ABC* e *BDE* são triângulos equiláteros de lados *2a* e *a*, respectivamente. Podemos afirmar, então, que o segmento $\overline{CD}$ mede:

a) $a\sqrt{2}$
b) $a\sqrt{6}$
c) 2a
d) $2a\sqrt{5}$
e) $a\sqrt{3}$

207. (U.F.MG-92) Observe a figura.
O triângulo *ABC* está inscrito num semicírculo de diâmetro *AB* e centro *O*. As medidas do ângulo *COA* e do lado *AC* são, respectivamente, *120°* e $4\sqrt{3}$ *cm*.
A medida do raio do círculo, em *cm*, é:

a) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$
b) $\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) 4
e) 9

208. (U.F.CE-92) Os lados *AC* e *CD* dos triângulos equiláteros *ABC* e *CED* medem respectivamente *6 m* e *3 m*. Os segmentos *AC* e *CD* estão numa reta *r*, são consecutivos e *AD* mede *9 m*. Se os vértices *B* e *E* estão no mesmo semiplano determinado por *r*, então o perímetro, em metros, do quadrilátero *ABED* é igual a:

a) $3(6+\sqrt{3})$ c) $3\left(7+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e) $3\left(7+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $3\left(6+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ d) $3\left(8-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

209. (ITA-77) O número de diagonais de um polígono regular de *2n* lados, que não passam pelo centro da circunferência circunscrita a este polígono, é dado por:

a) 2n(n − 2) c) 2n(n − 3) e) n.d.a.
b) 2n(n − 1) d) $\frac{n(n-5)}{2}$

210. (FATEC-79) Os pontos *A*, *B* e *C* pertencem a uma circunferência *σ*; *AB* e *AC* são, respectivamente, os lados do quadrado e do triângulo equilátero inscrito em *σ*. Se, ainda, o triângulo *ABC* tem área mínima, então:

a) o ângulo interno $\hat{A}$ mede *15°*.
b) O arco *BC* divide *σ* em *8* arcos congruentes.
c) a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é, nesta ordem, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
d) a razão entre o raio *R* de *σ* e $\overline{BC}$ é, nesta ordem, $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

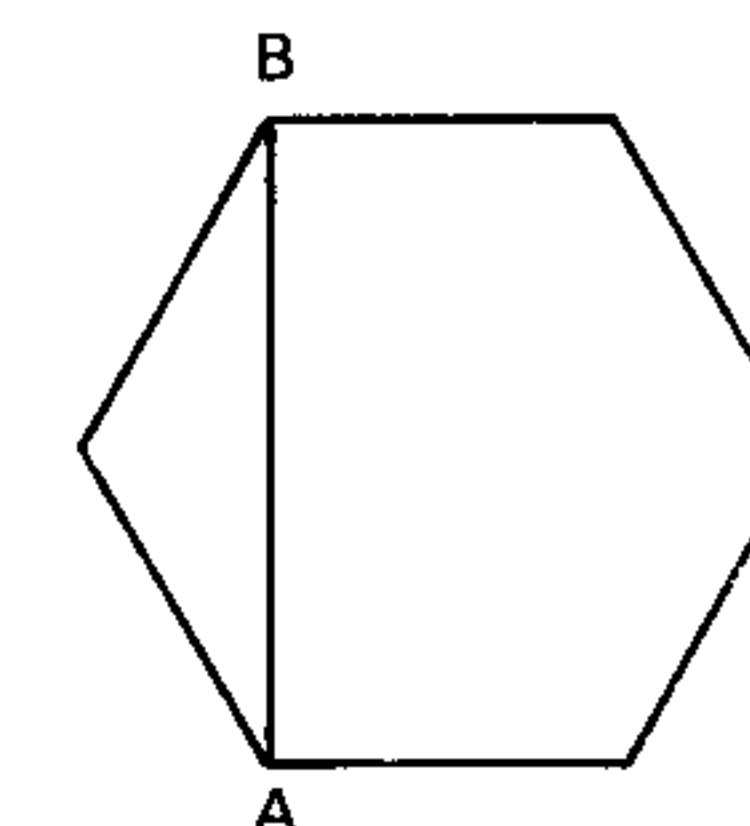
211. (PUC-SP-80) O matemático K. F. Gauss (1777-1855) demonstrou que um polígono regular com *p* lados, onde *p* é primo, só pode ser construído com régua e compasso se *p* é da forma $2^{2^n} - 1$, com *n* natural. Qual dos polígonos abaixo não pode ser construído com régua e compasso?

a) pentágono c) heptágono e) heptadecágono
b) hexágono d) octógono

212. (PUC-SP-81) Qual é a medida do lado de um polígono regular de *12* lados, inscrito num círculo de raio unitário?

a) $2+\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{3}-1$ d) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$

213. (PUC-SP-82) A figura mostra um hexágono regular de lado *a*. A diagonal *AB* mede:

a) 2a d) $a\sqrt{3}$
b) $a\sqrt{2}$ e) $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$
c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

214. (ITA-88) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é *2160°*. Então o número de diagonais deste polígono, que não passam pelo centro da circunferência que o circunscreve, é:

a) 50 b) 60 c) 70 d) 80 e) 90

215. (ITA-89) Considere uma circunferência de centro em *O* e diâmetro *AB*. Tome um segmento *BC* tangente à circunferência, de modo que o ângulo $B\hat{C}A$ meça *30°*. Seja *D* o ponto de encontro da circunferência com o segmento *AC* e *DE* o segmento paralelo a *AB*, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento *DE* será igual:

a) à metade da medida de *AB*.
b) um terço da medida de *AB*.
c) à metade da medida de *DC*.
d) dois terços da medida de *AB*.
e) à metade da medida de *AE*.

216. (FATEC-78) A circunferência C_1, de raio R_1 e perímetro $p_1 = 10^3$, é concêntrica à circunferência C_2, de raio R_2 e perímetro $p_2 = 1 + 10^3$. Se $\Delta = R_2 - R_1$, então:

a) $\Delta = 2 \cdot 10^2$ c) $\Delta < 2 \cdot 10^{-2}$ e) $5 \cdot 10^{-2} \leqslant \Delta \leqslant 10^{-1}$
b) $2 \cdot 10^{-2} \leqslant \Delta \leqslant 15 \cdot 10^{-2}$ d) $\Delta > 15 \cdot 10^{-2}$

217. (CESGRANRIO-79) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer *500 km* sobre uma pista circular de raio *200 m*. O número aproximado de voltas que ele deve dar é:

a) 100 b) 200 c) 300 d) 400 e) 500

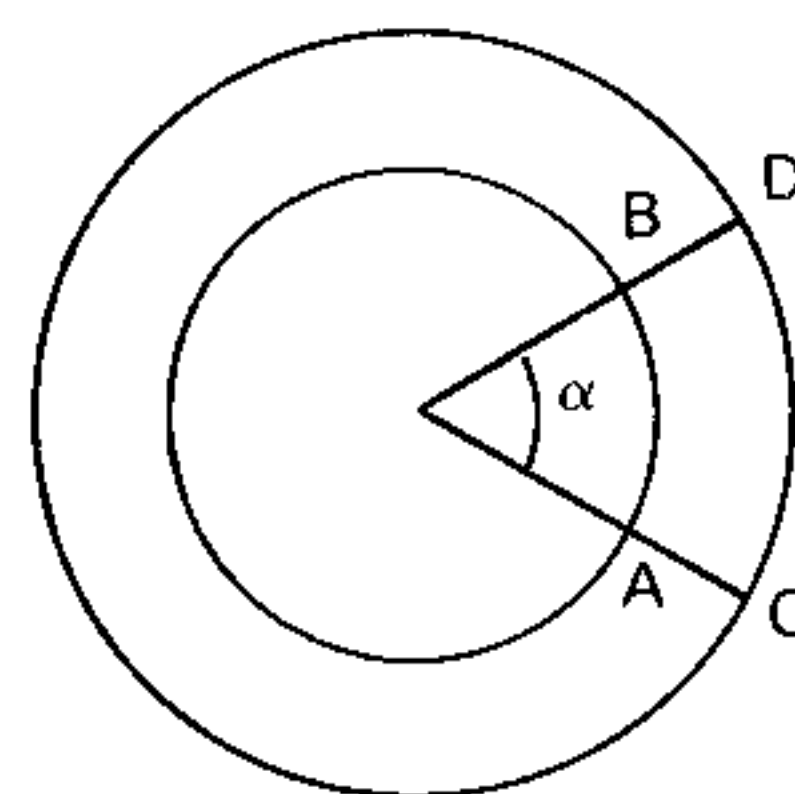
218. (V.UNIF.RS-80) A razão entre os comprimentos das circunferências circunscrita e inscrita a um quadrado é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 2

219. (ITA-80) Consideremos um triângulo retângulo que simultaneamente está circunscrito à circunferência C_1 e inscrito à circunferência C_2. Sabendo-se que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo é *k cm*, qual será a soma dos comprimentos destas duas circunferências?

a) $(2\pi k)/3$ cm b) $(4\pi k)/3$ cm c) $4\pi k$ cm d) $2\pi k$ cm e) πk cm

220. (PUC-SP-81) Na figura abaixo, $\alpha = 1,5$ radiano, $AC = 1,5$ e o comprimento do arco AB é 3. Qual é a medida do arco CD?

a) 2,33
b) 4,50
c) 5,25
d) 6,50
e) 7,25

221. (U.F.PE-81) Assinale a alternativa que completa corretamente a sentença. "No círculo, a razão do comprimento da sua circunferência para o seu diâmetro...

a) dobra caso o círculo tenha seu raio reduzido à metade."
b) vale exatamente *22/7*."
c) vale exatamente *3*."
d) vale exatamente *355/113*."
e) não é igual ao quociente de dois inteiros."

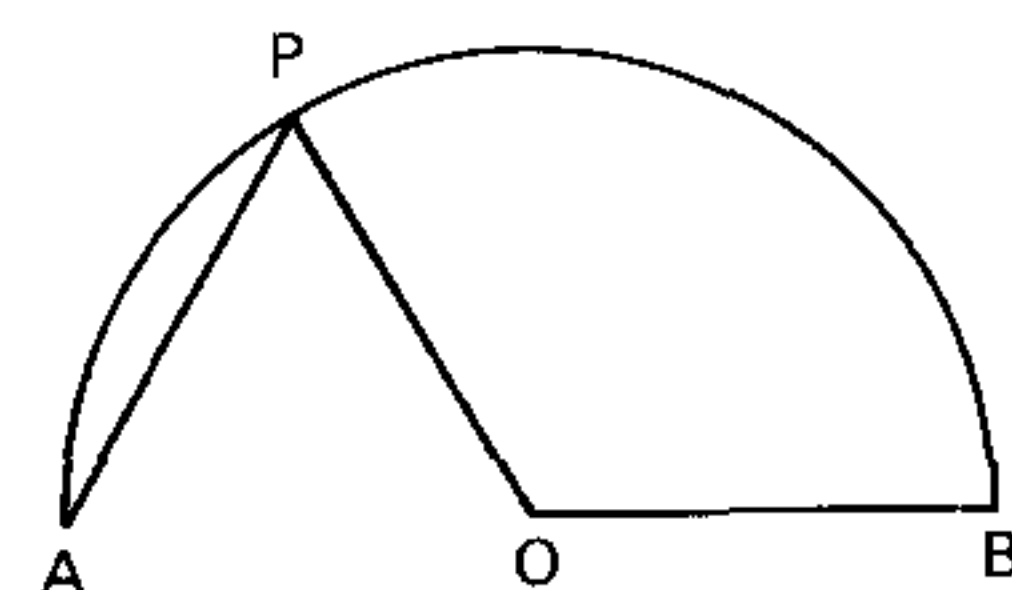
222. (U.F.RS-81) Na figura, $\overset{\frown}{AB}$ é um arco da circunferência de centro O, com raio igual à medida da corda $\overline{AP}$. A, O e B são colineares. A razão entre o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ e o da poligonal $APOB$ é x. Então:

a) $1 < x \leqslant \frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$

c) $x \leqslant \frac{1}{2}$

d) $x \geqslant \frac{3}{2}$

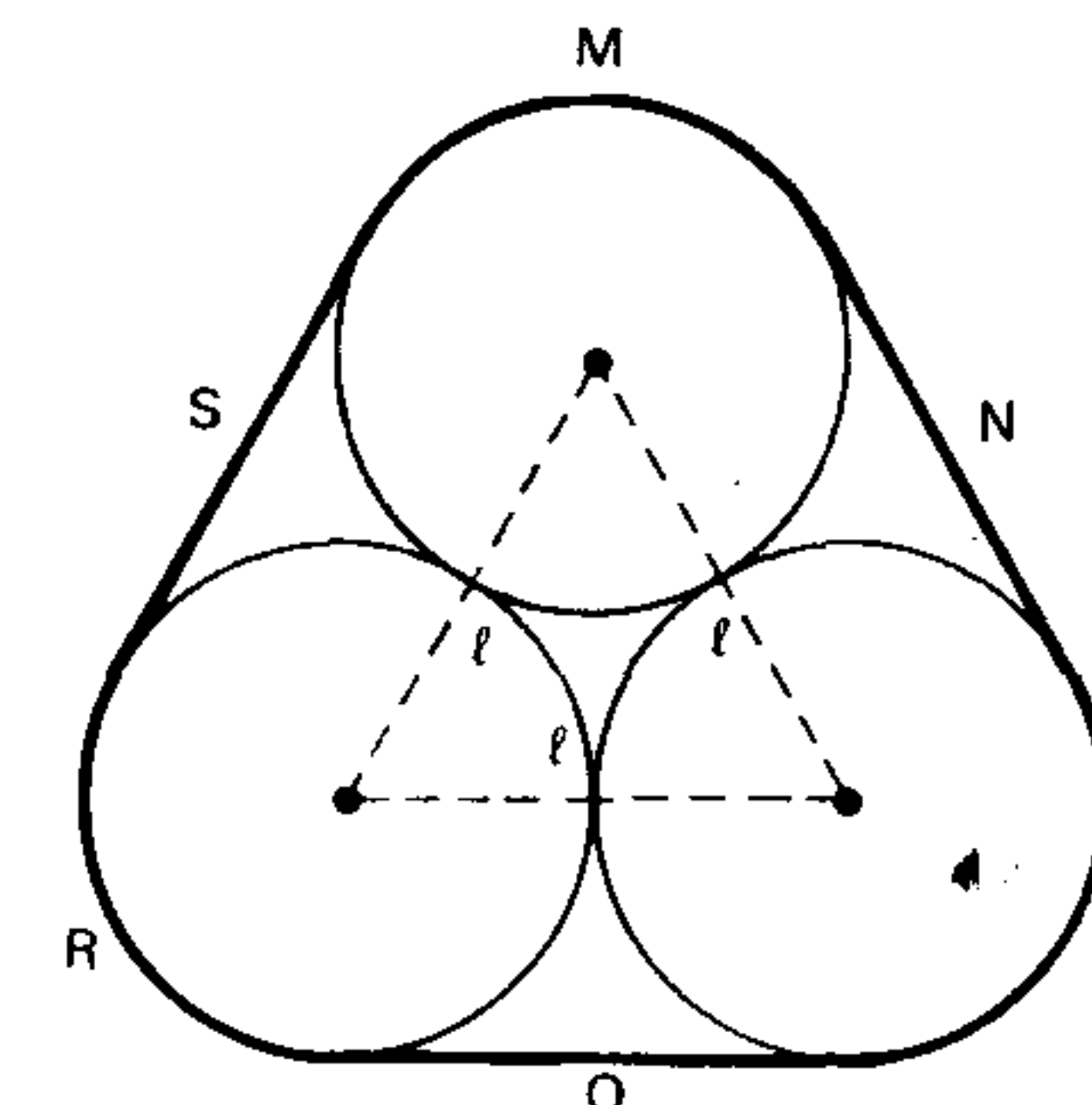
e) $x = 1$

223. (U.C.MG-82) Aumentando o comprimento de uma circunferência de *4 cm*, o seu raio, em centímetros, aumentará:

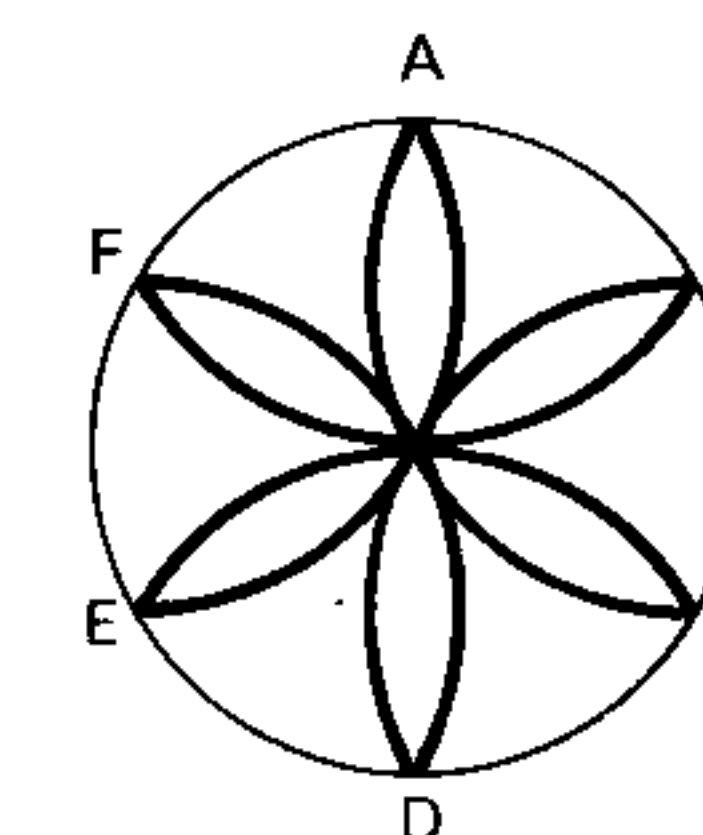
a) 2π b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{2}{\pi}$ d) $\frac{1}{2\pi}$ e) $\frac{4}{\pi}$

224. (U.C.PR-82) Quando o comprimento de uma circunferência aumenta de *10 m* para *15 m*, o raio aumenta:

a) $\frac{5}{2\pi}$ m b) 2,5 m c) 5 m d) $\frac{\pi}{5}$ m e) 5π m

225. (CESGRANRIO-82) Os centros das três polias de um mecanismo estão sobre os vértices de um triângulo equilátero de lado ℓ. O diâmetro de cada polia é muito próximo de ℓ, como sugere a figura. O comprimento da correia *MNPQRSM* que movimenta as polias é, aproximadamente:

a) $(\pi + 3)\,\ell$
b) $(2\pi + 3)\,\ell$
c) $(\pi + 6)\,\ell$
d) $\frac{(\pi + 6)\,\ell}{2}$
e) $6\pi\ell$

226. (U.MACK.-82) A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência de raio 5. Então, a soma dos comprimentos de todos os arcos da figura é:

a) 30
b) 30π
c) 15
d) 15π
e) 6π

227. (FATEC-88) O pneu de um veículo, com *800 mm* de diâmetro, ao dar uma volta completa percorre, aproximadamente, uma distância de:

a) 25,00 m b) 5,00 m c) 2,50 m d) 0,50 m e) 0,25 m

228. (FATEC-88) Um hexágono regular, de lado *3 cm*, está inscrito numa circunferência. Nessa circunferência, um arco de medida *100°* tem comprimento:

a) $\frac{3}{5}\pi$ cm b) $\frac{5}{6}\pi$ cm c) π cm d) $\frac{5}{3}\pi$ cm e) $\frac{10}{3}\pi$ cm

229. (COVEST-89) Um octógono regular está inscrito numa circunferência de modo que o comprimento de arco entre dois vértices consecutivos é de *0,5 m*. Assinale o valor aproximado do diâmetro da circunferência em questão.

a) 140,32 cm b) 133,33 cm c) 127,38 cm d) 120,25 cm e) 160,21 cm

Equivalência plana — Áreas de superfícies planas

230. (CONSART-75) O ponto P pertence à base BC de um triângulo escaleno ABC. As áreas dos triângulos ABP e APC são $40\ cm^2$ e $10\ cm^2$ respectivamente. A razão BP/PC:

a) é 4.
b) é 2.
c) é 8.
d) é AB/AC.
e) só pode ser calculada se conhecida a altura relativa ao lado BC.

231. (ITA-75) Os lados de dois octógonos regulares têm, respectivamente, *5 cm* e *12 cm*. O comprimento do lado de um terceiro octógono regular, de área igual à soma das áreas dos outros dois, é:

a) 17 cm b) 15 cm c) 14 cm d) 13 cm e) n.d.a.

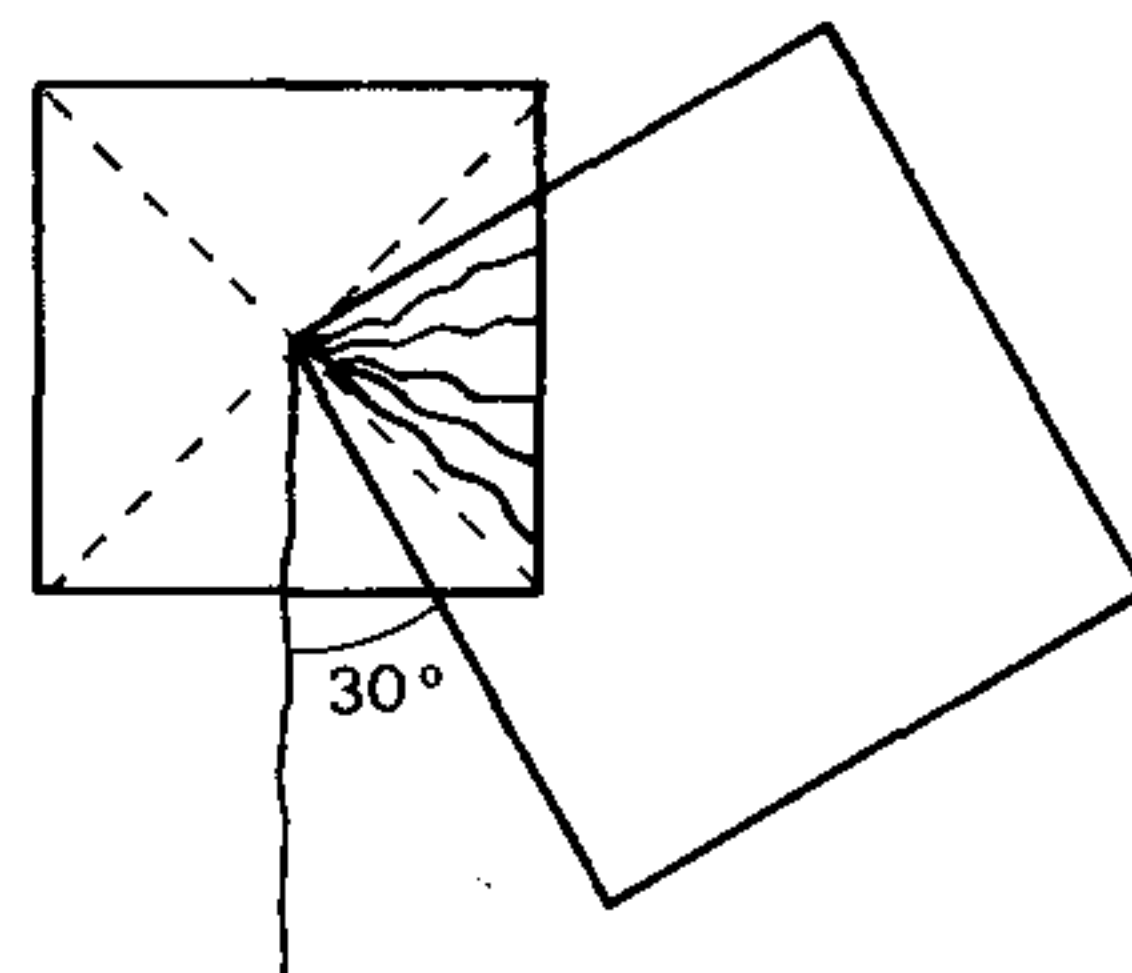
232. (COMBITEC-COMBIMED-75) Dois quadrados interceptam-se conforme a figura, sendo que o quadrado maior, de área *A*, tem um de seus vértices no centro do outro quadrado, de área *a*. A área da superfície tracejada é:

a) $\frac{1}{2}(A + a)$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4} a$

c) $\frac{A\sqrt{3} + a}{4}$

d) $\frac{1}{4} a$

e) $\sqrt{Aa}$

233. (U.MACK.-75) São dados dois lados *b* e *c* de um triângulo e a sua área $S = \frac{2}{5} bc$. O terceiro lado pode ser expresso por:

a) $\sqrt{b^2 + c^2 - \frac{6}{5} bc}$

b) $\sqrt{b^2 + c^2 - \frac{3}{4} bc}$

c) $\sqrt{b^2 + c^2 + bc}$

d) $\sqrt{b^2 + c^2 + 3bc}$

e) $\sqrt{b^2 + c^2 - \frac{1}{7} bc}$

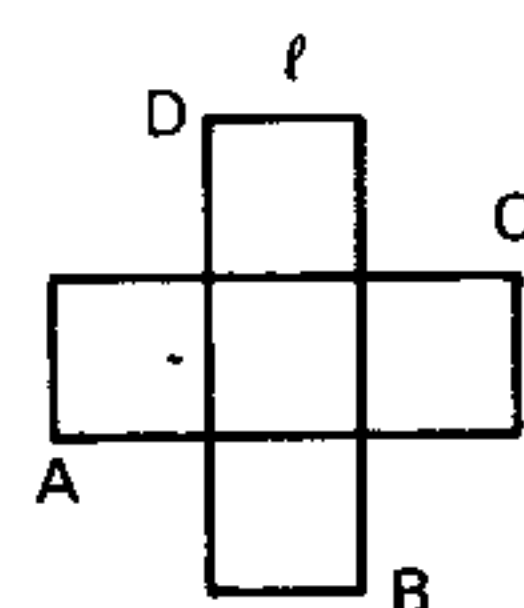
234. (CESGRANRIO-77) Cinco quadrados de lado ℓ formam a cruz da figura. A área do quadrilátero convexo de vértices *A, B, C* e *D* é:

a) $2\sqrt{5}\,\ell^2$

b) $4\ell^2$

c) $4\sqrt{3}\,\ell^2$

d) $5\,\ell^2$

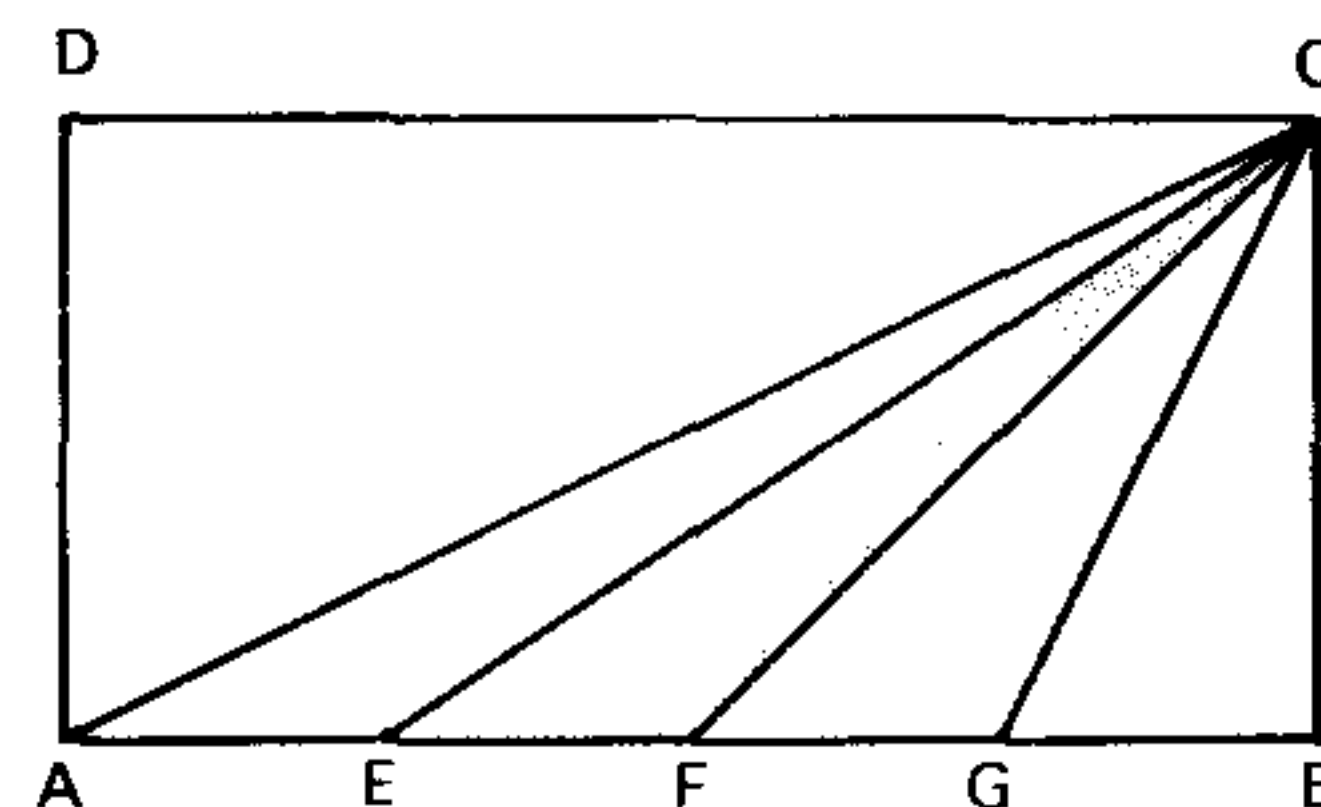
e) $6\,\ell^2$

235. (CESCEM-77) O quadrilátero *ABCD* é um retângulo e os pontos *E, F* e *G* dividem a base $\overline{AB}$ em quatro partes iguais. A razão entre a área do triângulo *CEF* e a área do retângulo é:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{7}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{9}$

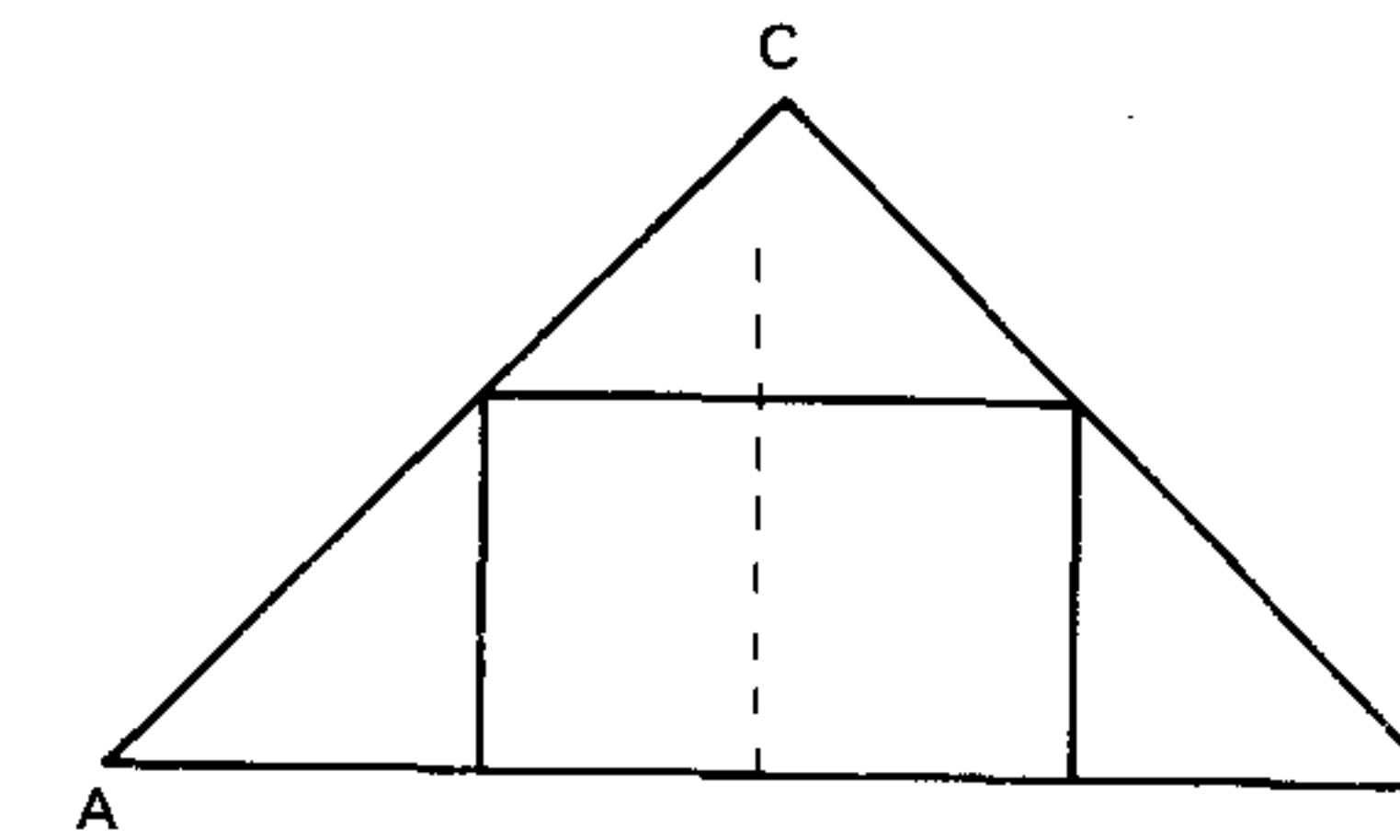
e) $\frac{1}{10}$

236. (F.C.M.STA.CASA-78) Uma estrada de *8 km* de comprimento e *8 m* de largura deve ser asfaltada. O custo total da obra, em milhões de cruzados, sendo *Cz$ 200,00* o preço do metro quadrado asfaltado, é:

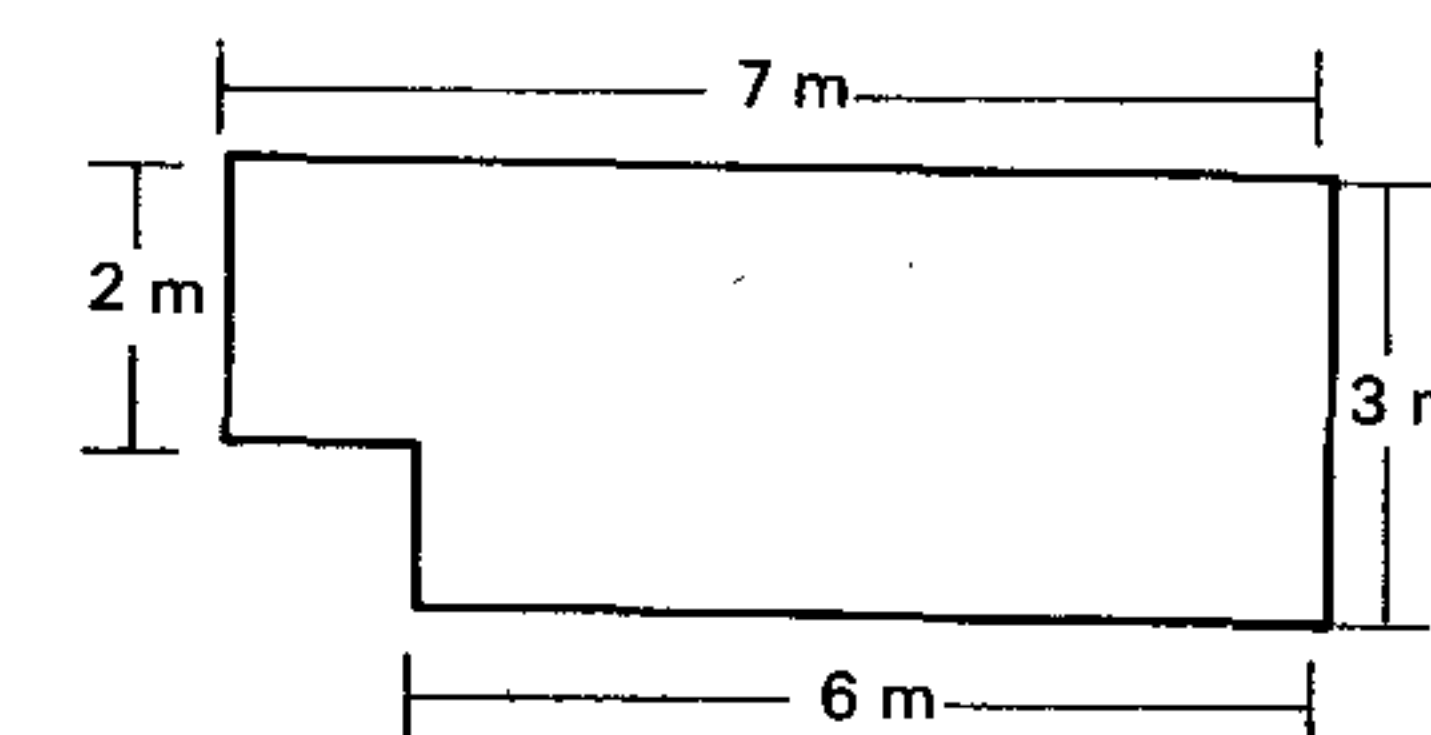
a) 64 b) 50 c) 25,6 d) 12,8 e) 0,0128

237. (FATEC-78) Seja *ABC* um triângulo de área *A*. Se *P* é um ponto que está sobre o lado *AC*, a *1/3* de *A* para *C*, e *Q* é um ponto que está sobre o lado *CB*, a *1/3* de *C* para *B*, então a área do triângulo *PQB* é:

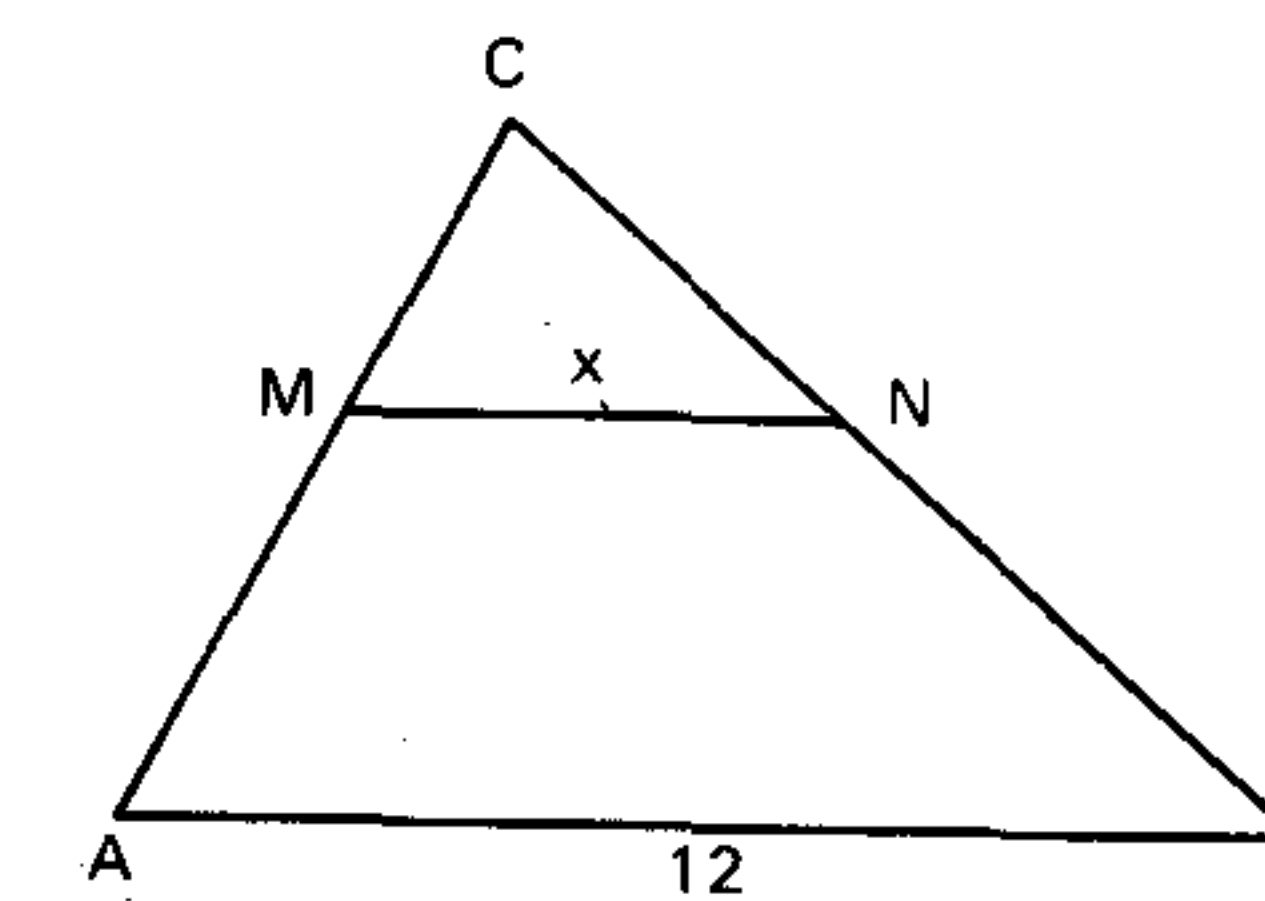
a) $\frac{1}{9}$ de A b) $\frac{2}{9}$ de A c) $\frac{1}{3}$ de A d) $\frac{4}{9}$ de A e) $\frac{5}{9}$ de A

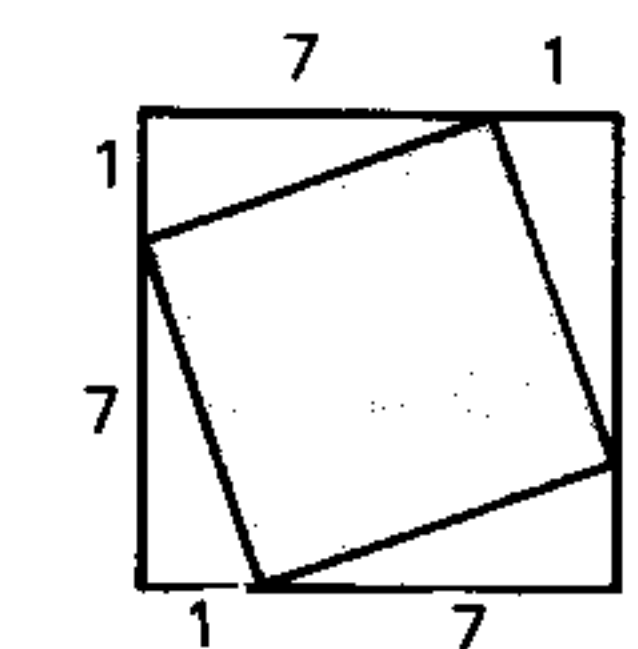
238. (OSEC-78) Dado um triângulo *ABC* de base *8* e altura *6*, o retângulo de área máxima, tendo a base contida no triângulo e os outros dois vértices pertencendo aos outros dois lados do triângulo tem área:

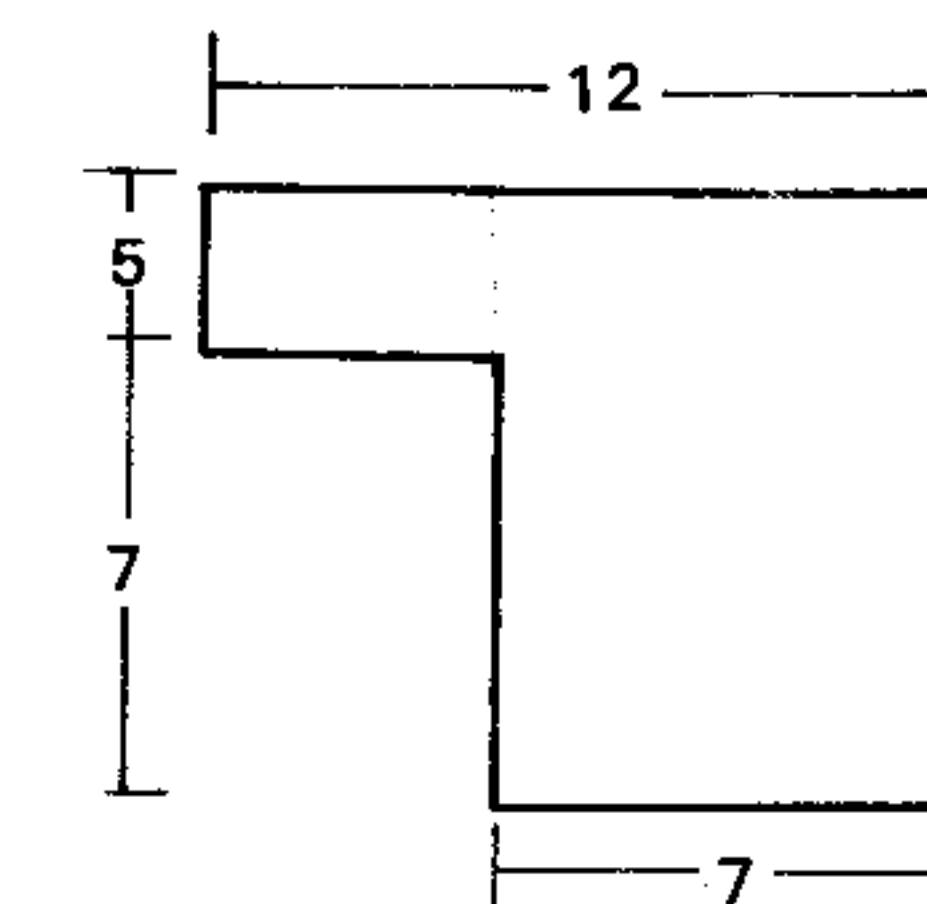
a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

239. (CESGRANRIO-79) A área da sala representada na figura é:

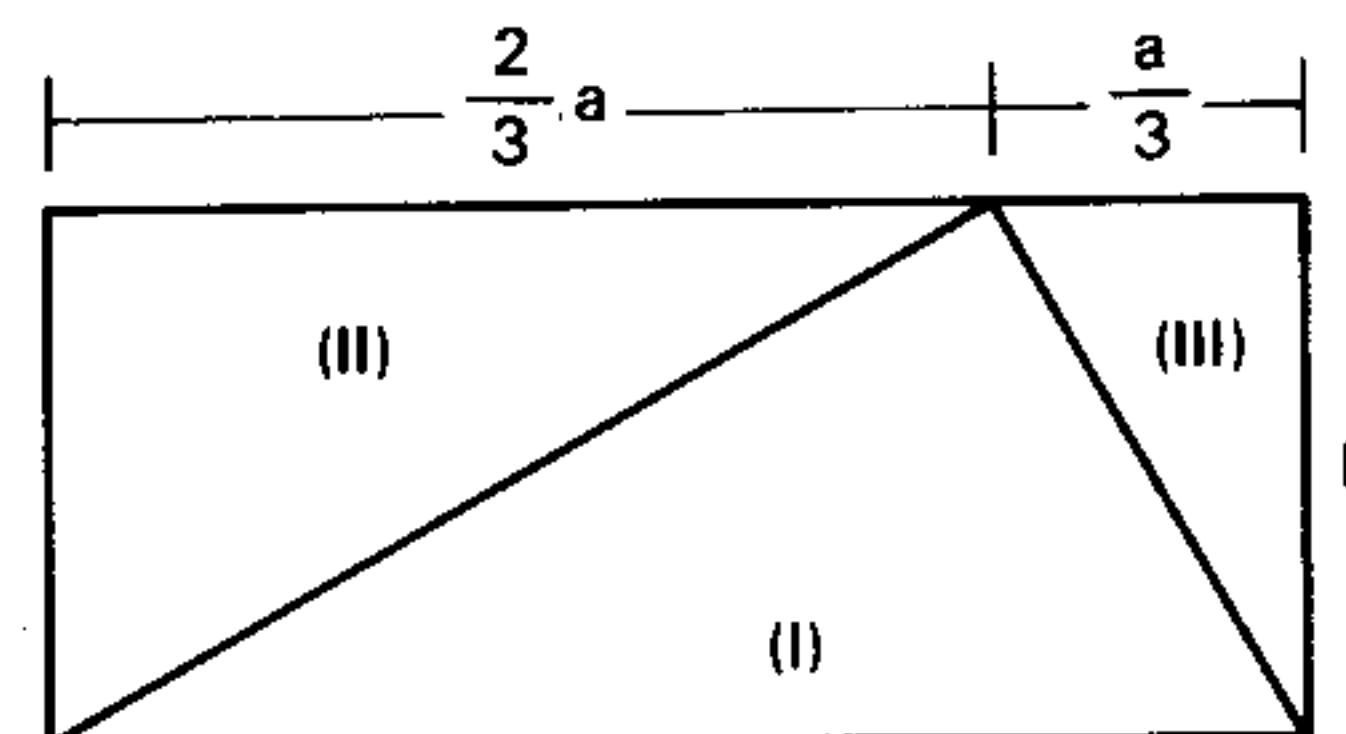
a) 15 m²
b) 17 m²
c) 19 m²
d) 20 m²
e) 21 m²

240. (U.MACK.-79) Na figura, S_1 é a área do quadrilátero *MNAB* e S_2 é a área do triângulo *ABC*. Se $S_1 = 51\%\ S_2$, *x* é igual a:

a) 8
b) 8,4
c) 8,6
d) 8,8
e) 9

Obs: $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.

241. (PUC-SP-80) A área do quadrado sombreado é:

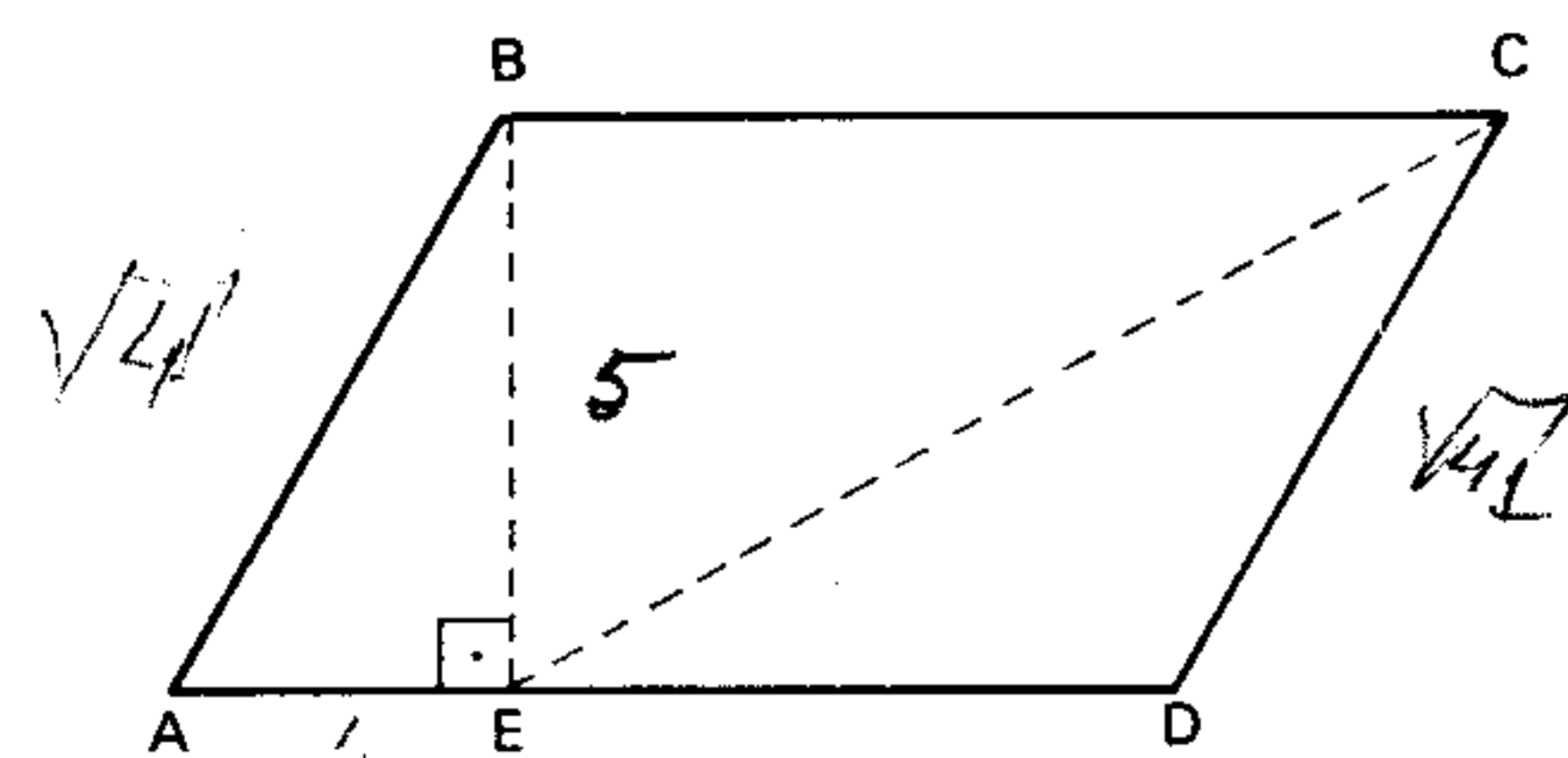
a) 36
b) 40
c) 48
d) 50
e) 60

242. (U.F.PR-80) Qual o valor da área da figura?

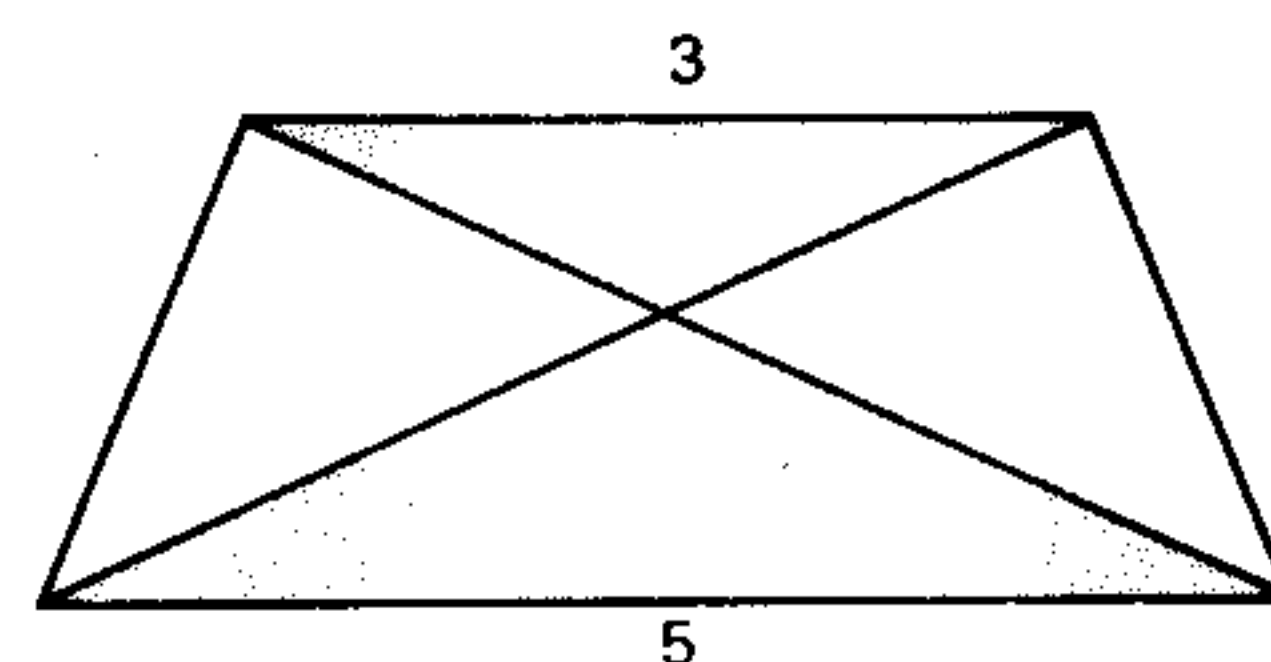
a) 95
b) 144
c) 169
d) 119
e) 109

243. (U.MACK.-80) No retângulo de dimensões a e b, são consideradas as áreas das regiões (I), (II) e (III). Então:

a) área (I) = a · b
b) área (II) + área (III) = área (I)
c) área (II) + área (III) > área (I)
d) área (II) + área (III) = a · b
e) n.d.a.

244. (CESGRANRIO-80) A base de um retângulo de área S é aumentada de *20%* e sua altura é diminuída de *20%*. A área do novo retângulo formado é:

a) 1,04 S b) 1,02 S c) S d) 0,98 S e) 0,96 S

245. (U.F.GO-80) No paralelogramo $ABCD$ abaixo, tem-se que $BE \perp AD$; $\overline{BE} = 5\ cm$, $\overline{BC} = 12\ cm$ e $\overline{AE} = 4\ cm$. Então a área do triângulo EDC, em cm^2, é:

a) 24
b) 10
c) 30
d) 20
e) 48

246. (U.MACK.-80) A altura do trapézio é *4*; então, a diferença entre as áreas dos triângulos assinalados é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

247. (PUC-CAMP-80) Num losango, a soma dos ângulos obtusos é o dobro da dos agudos. Se a diagonal menor do losango mede *12 cm*, então:

a) o losango poderá ser inscrito num círculo de raio igual a *6 cm*.
b) o perímetro do losango medirá *24 cm*.
c) o número que exprime a sua área é igual ao número de diagonais.
d) a área do losango é equivalente à área de um retângulo de dimensões *6 cm* e $12\sqrt{3}\ cm$.
e) n.d.a.

248. (U.C.MG-81) As dimensões de um terreno retangular estão na razão $\frac{5}{8}$. Se a área do terreno é de $1\,000\ m^2$, então sua menor dimensão em metros é de:

a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35

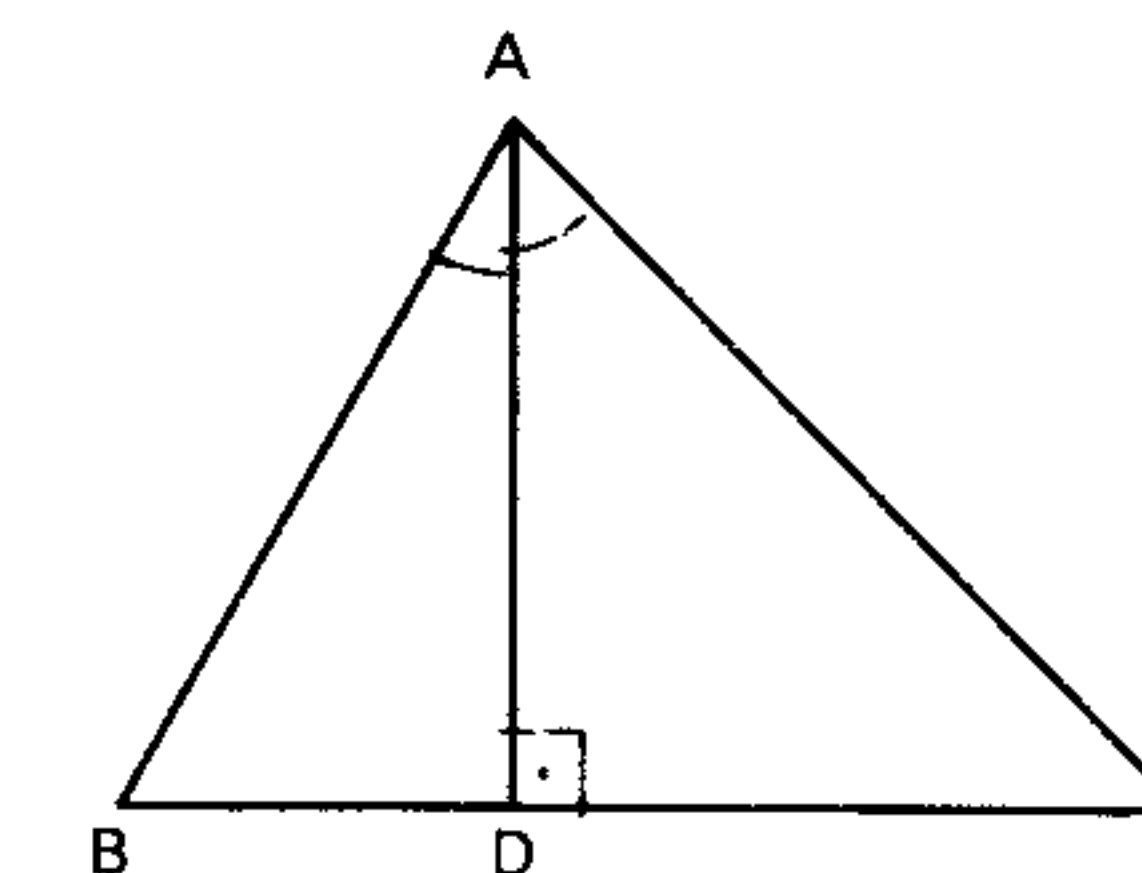
249. (PUC-SP-81) Se S é a área de um triângulo ABC e se M, N e P são os pontos médios dos lados do triângulo ABC, então a área do triângulo MNP é:

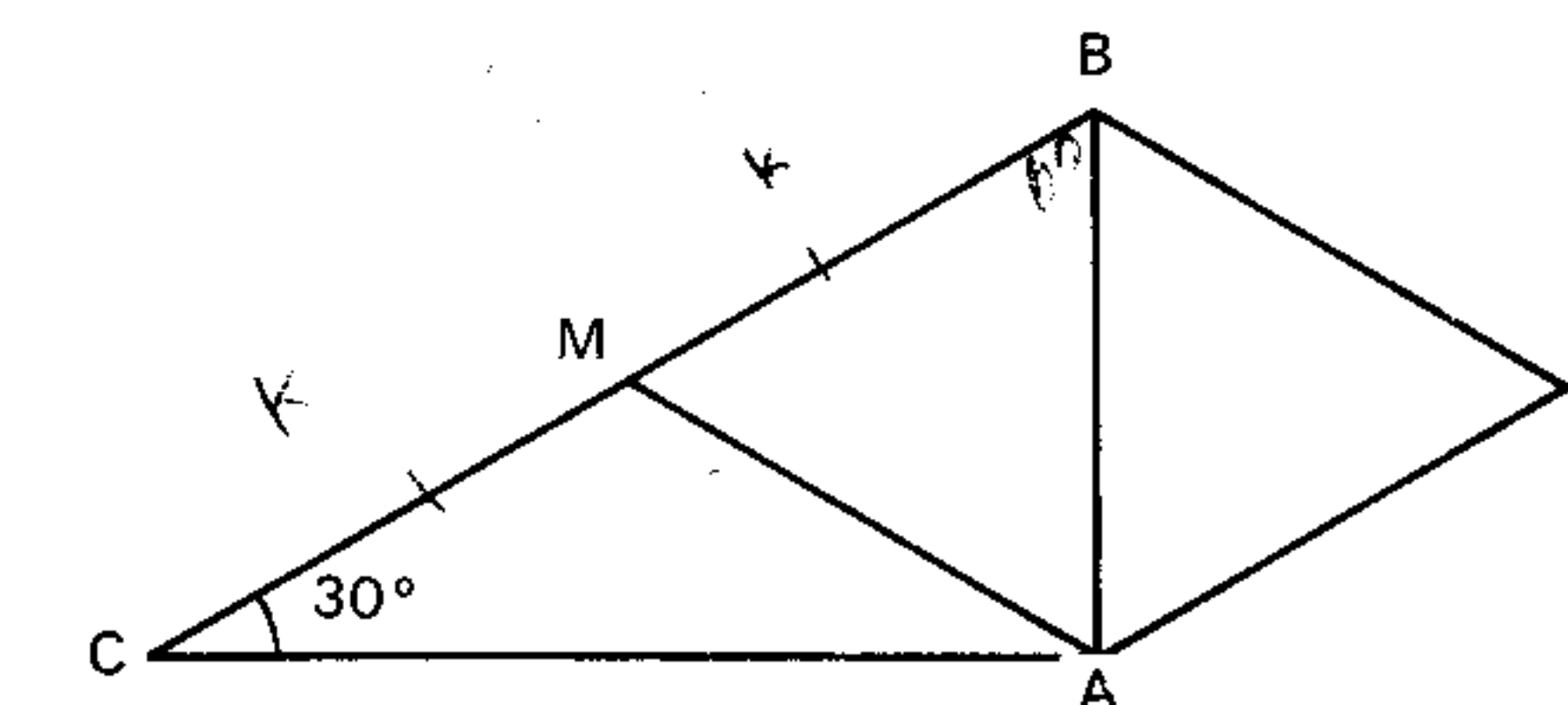
a) $\frac{S}{5}$ b) $\frac{S}{4}$ c) $\frac{S}{3}$ d) $\frac{S}{2}$ e) S

250. (PUC-RJ-81) *30%* da área de um painel de 200×240 centímetros é ocupada por ilustrações e *12%* das ilustrações são em vermelho. Então a área ocupada pelas ilustrações em vermelho é igual a:

a) 1 728 cm^2 c) 172,8 cm^2 e) 17 280 cm^2
b) 17,28 cm^2 d) 1,728 cm^2

251. (F.C.M.STA.CASA-81) Na figura ao lado são dados:
$\measuredangle(B\hat{A}D) = 30°$, $\measuredangle(C\hat{A}D) = 45°$ e $AD = \sqrt{3}\ cm$.
A área do triângulo ABC, em cm^2, é:

a) $3 + \sqrt{3}$ d) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$
b) $3 - \sqrt{3}$ e) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$
c) $3\sqrt{3}$

252. (U.MACK.-82) No triângulo retângulo ABC da figura, sabe-se que:
BC = 2K
$\overline{AM}$ é mediana
$\overline{MB} \parallel \overline{AN}$
$\overline{BN} \parallel \overline{AM}$
Então, a área do losango $AMBN$ é:

a) $K^2\sqrt{3}$ d) $\frac{K^2\sqrt{3}}{4}$
b) $4K^2\sqrt{3}$ e) $\frac{K^2\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{K^2}{2}$

253. (CESESP-82) No sertão de Pernambuco, os agricultores calculam as áreas de suas terras, qualquer que seja a forma geométrica que elas tenham, dividindo em quadriláteros e triângulos e efetuando o cálculo da seguinte maneira:

para os quadriláteros: $s = \frac{a + c}{2} \times \frac{b + d}{2}$ onde a, c, b e d são as medidas dos lados opostos;

para os triângulos: $s = \frac{x + y}{2} \times \frac{z}{2}$ onde x, y e z são as medidas dos lados.

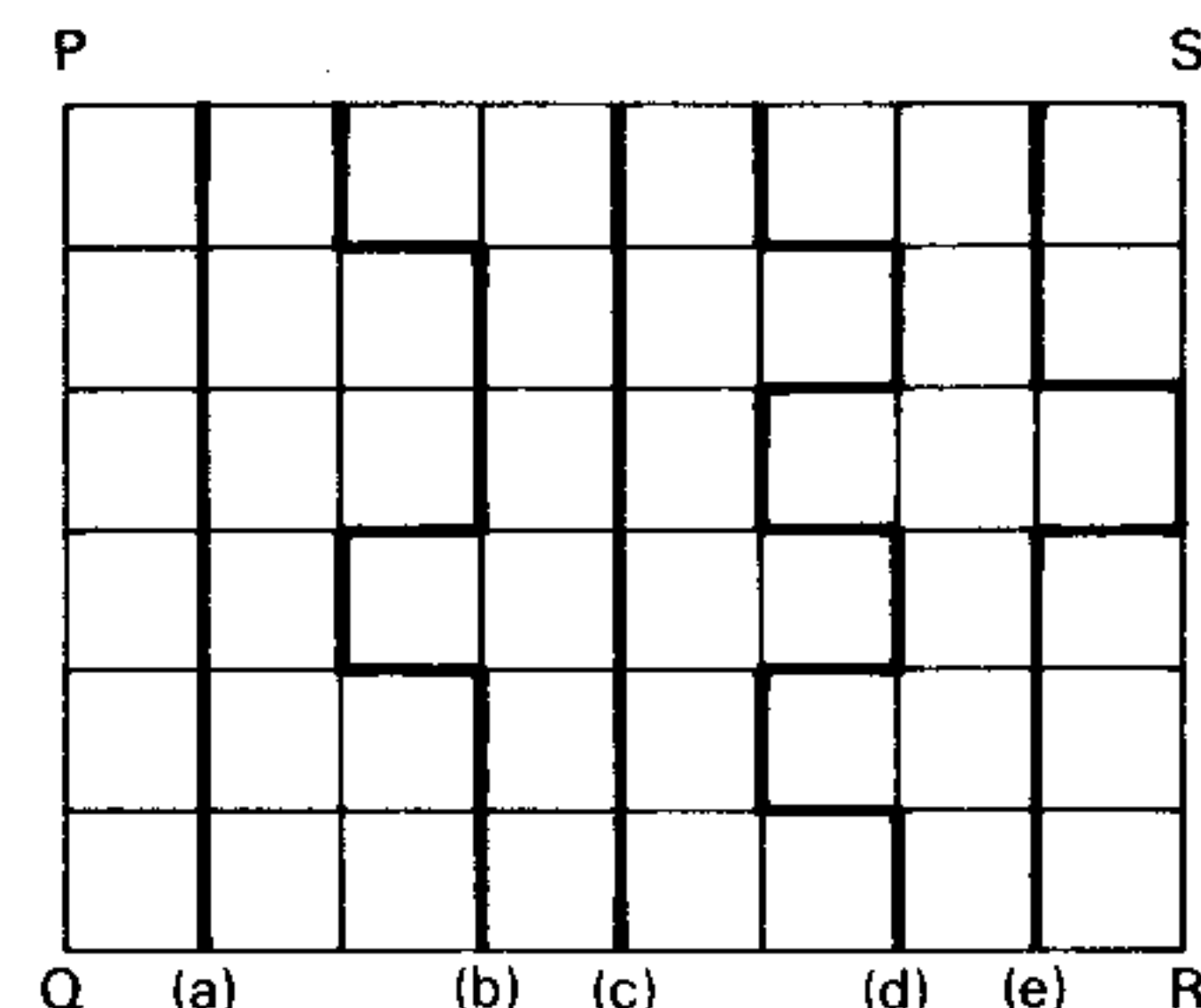
Obviamente essa não é a maneira correta de encontrar as referidas áreas. Se uma propriedade tem a forma de um triângulo equilátero de lado ℓ, assinale, dentre as alternativas abaixo, a que completa corretamente a sentença.
"Se S é a área da referida propriedade calculada corretamente e S' a área calculada segundo o procedimento dos agricultores, teremos...

a) S < S' " b) S > S' " c) S = S' " d) S' > 2S" e) S < S'/5"

254. (CESESP-82) Nas mesmas considerações da questão anterior, se a propriedade tem a forma de um trapézio isósceles de altura h onde a base maior é o triplo da base menor, assinale a alternativa correta:

a) S > S' b) S < S' c) S = S' d) S = 2S' e) S' < S/5

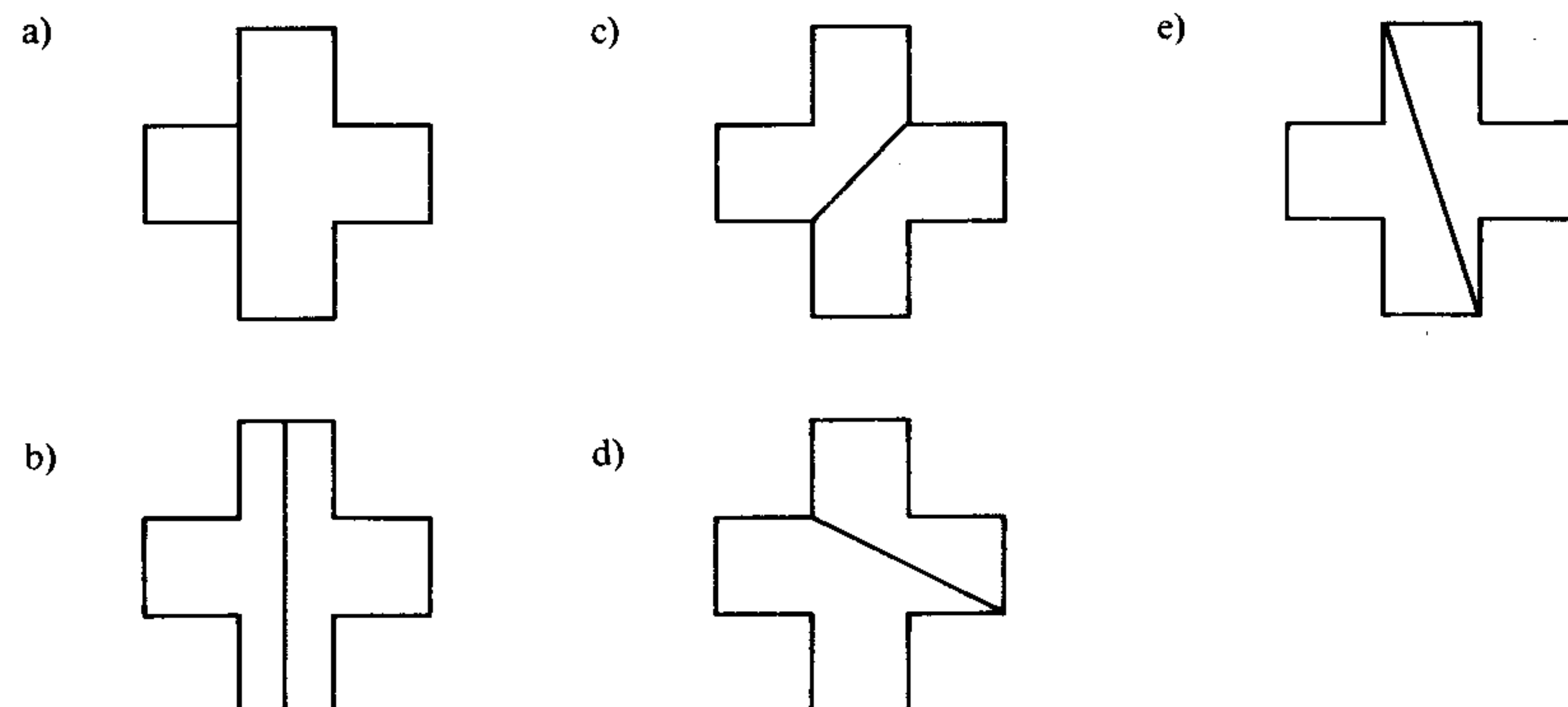
255. (PUC-SP-84) A linha que divide o retângulo *PQRS* na razão de *1* para *2* é a linha:

a) (a)
b) (b)
c) (c)
d) (d)
e) (e)

256. (U.F.GO-84) Para cobrir o piso de um banheiro de *1,00 m* de largura por *2,00 m* de comprimento com cerâmicas quadradas, medindo *20 cm* de lado, o número necessário de cerâmicas é:

a) 15 b) 30 c) 50 d) 75 e) 500

257. (PUC-SP-84) Qual dos segmentos desenhados na cruz representa o lado de um quadrado de área igual à área da cruz?

a) c) e)

b) d)

258. (U.F.RS-84) Com quatro palitos de mesmo comprimento, forma-se um quadrado com $a\ cm^2$ de área e $p\ cm$ de perímetro. Se $a + p = 21$, o comprimento de cada palito, em centímetros, é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

259. (U.F.RN-84) A área de um terreno retangular é de $281{,}25\ m^2$. Se o lado maior do terreno excede de *25%* o lado menor, então o perímetro do terreno é igual, em *m*, a:

a) 67,5 b) 71,5 c) 75,5 d) 79,5 e) 83,5

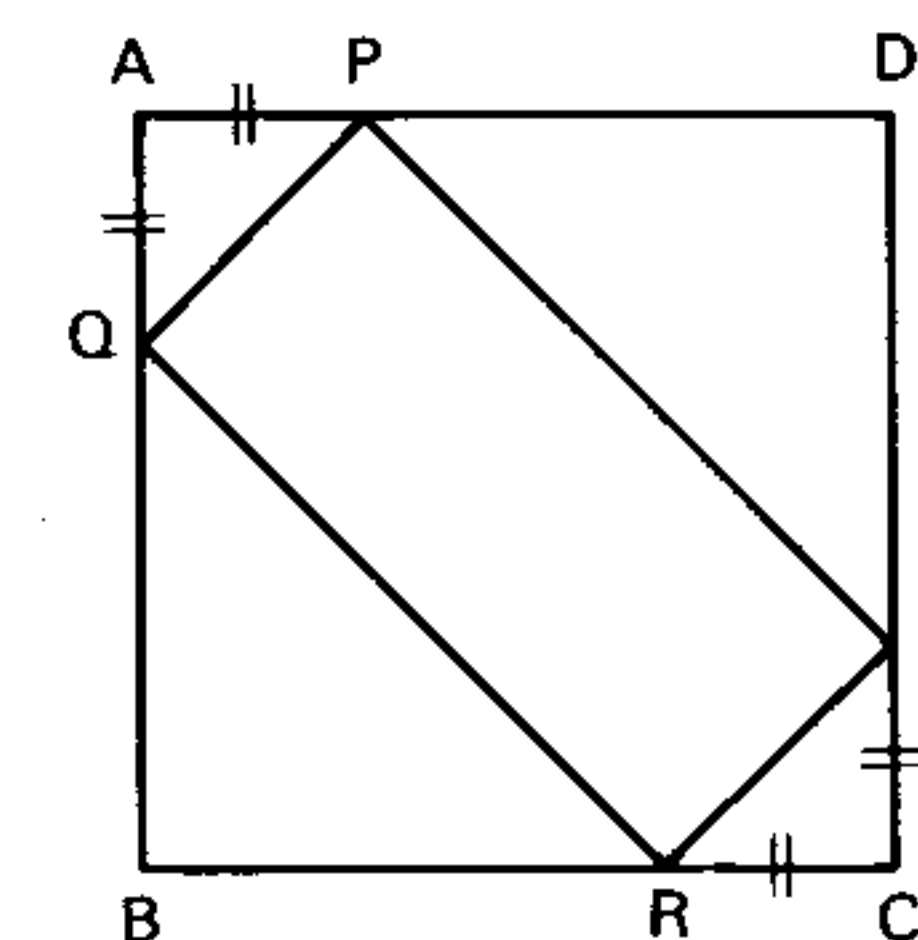
260. (FUVEST-84) Num triângulo retângulo *T* os catetos medem *10 m* e *20 m*. A altura relativa à hipotenusa divide *T* em dois triângulos, cujas áreas, em m^2, são:

a) 10 e 90 b) 20 e 80 c) 25 e 75 d) 36 e 64 e) 50 e 50

261. (U.F.PE-84) Seja *R* um retângulo de área *S* cujos lados medem *a* e *b*. Assinale a alternativa que indica a equação que relaciona corretamente *S*, *a* e *b*.

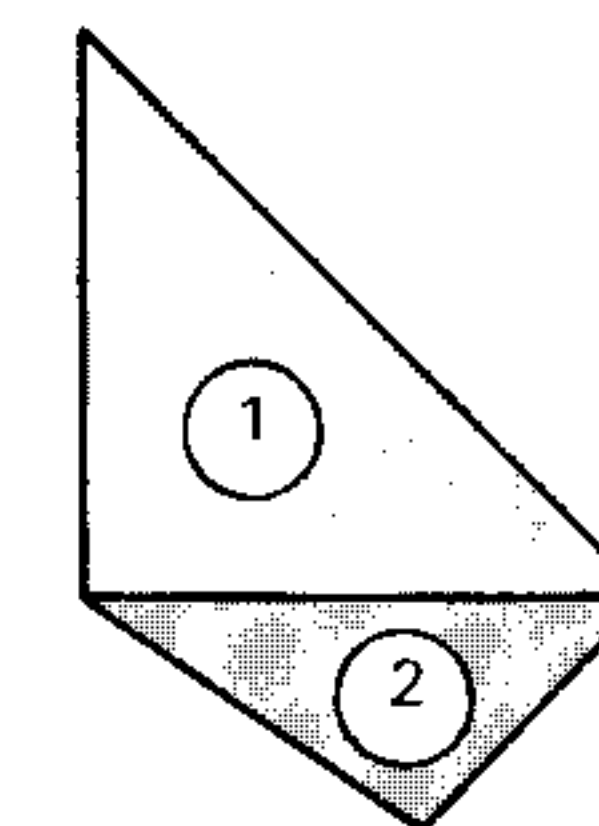
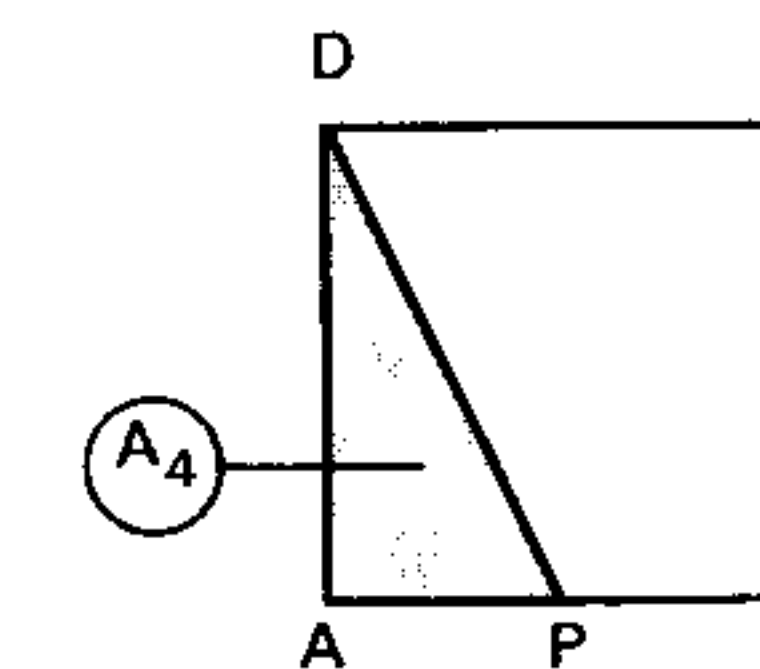
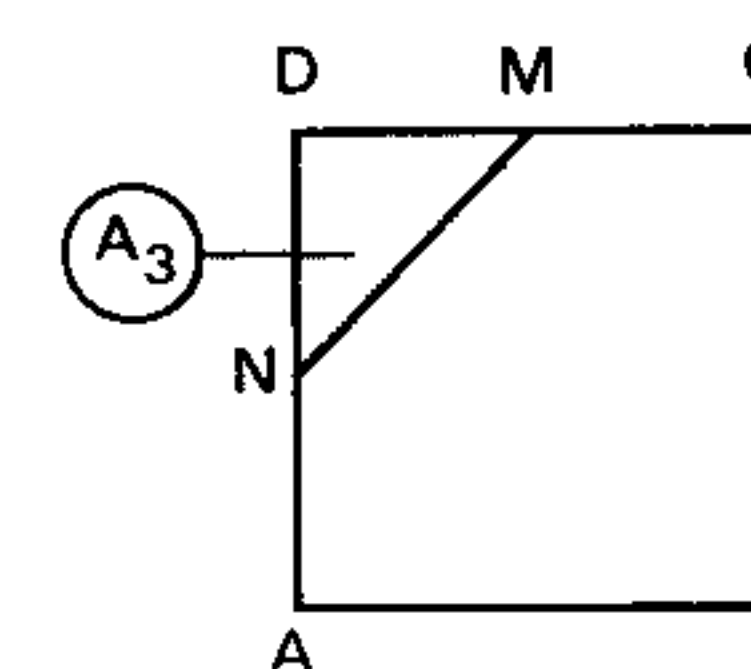
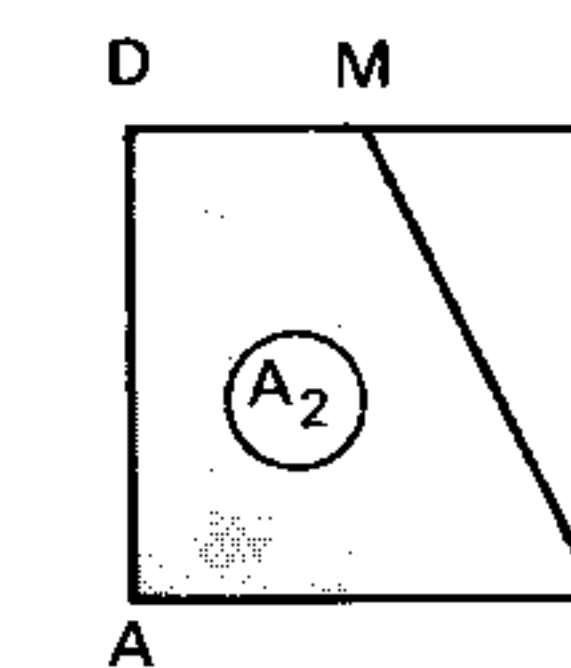
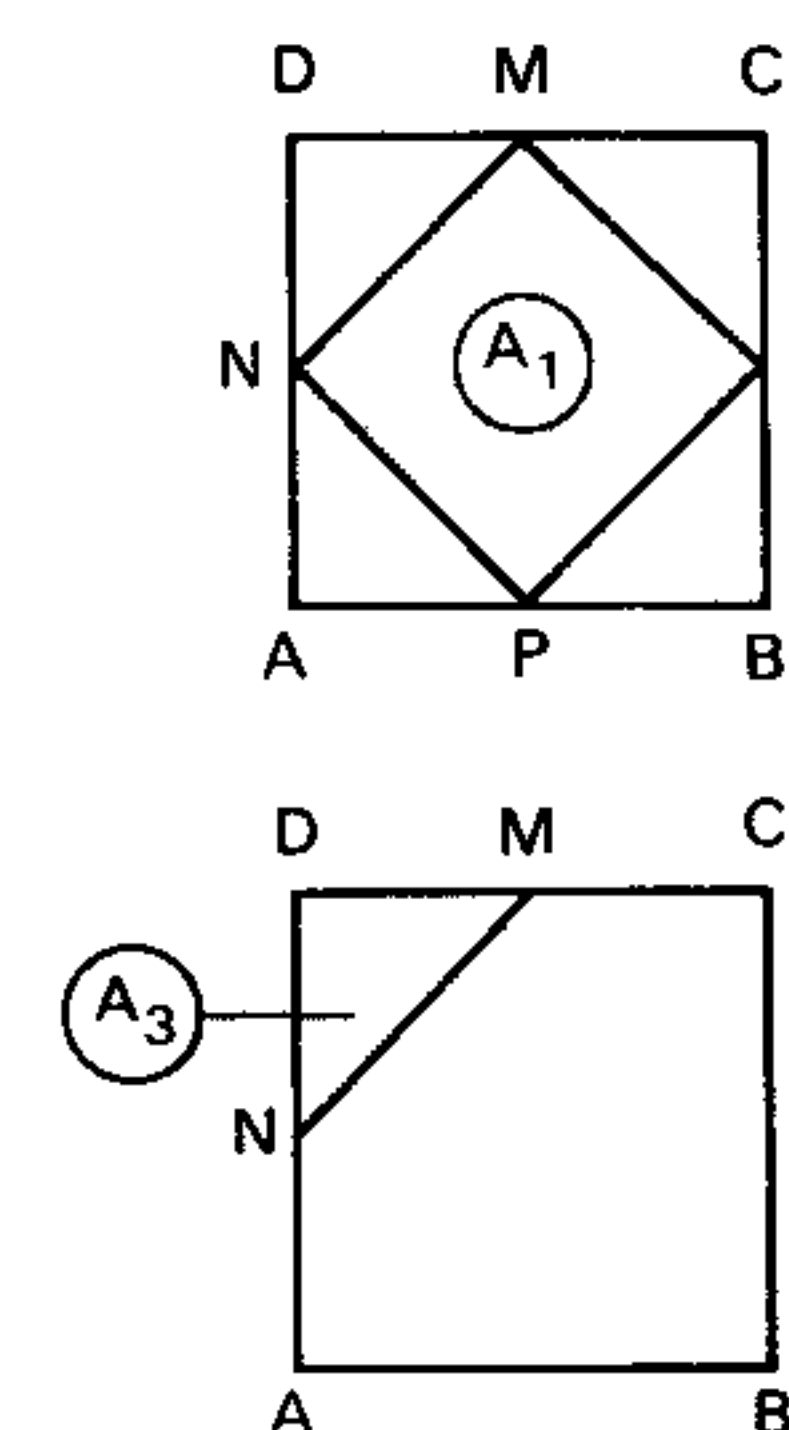
a) $(a + b)X^2 - a^2X + S = 0$
b) $X^2 - (a + b)X - S = 0$
c) $X^2 + (a + b)X + S = 0$
d) $X^2 - (a + b)X + S = 0$
e) $X^2 - a + bX - S = 0$

262. (U.F.SE-84) Seja o retângulo *PQRS* inscrito no quadrado *ABCD*, conforme mostra a figura ao lado. Se $PS = 2 \cdot PQ$ e $AD = 6\ cm$, a área do retângulo *PQRS* é em cm^2:

a) 8
b) 12
c) 16
d) 20
e) 24

263. (FUVEST-85) Um dos catetos de um triângulo retângulo mede *2* e a hipotenusa mede *6*. A área do triângulo é:

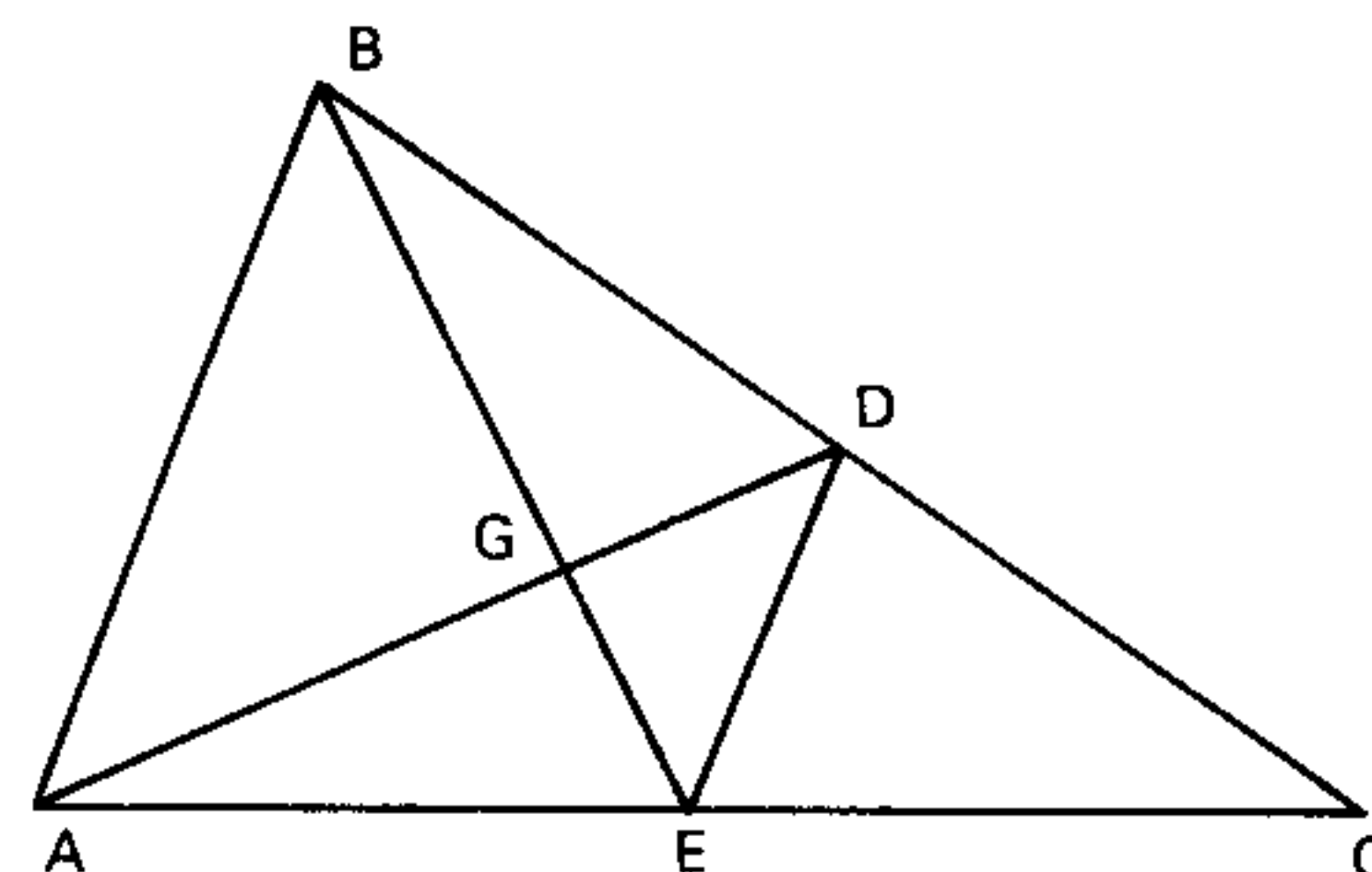
a) $2\sqrt{2}$ b) 6 c) $4\sqrt{2}$ d) 3 e) $\sqrt{6}$

264. (CESGRANRIO-85) Os triângulos (1) e (2) da figura são retângulos isósceles. Então a razão da área de (1) para a de (2) é:

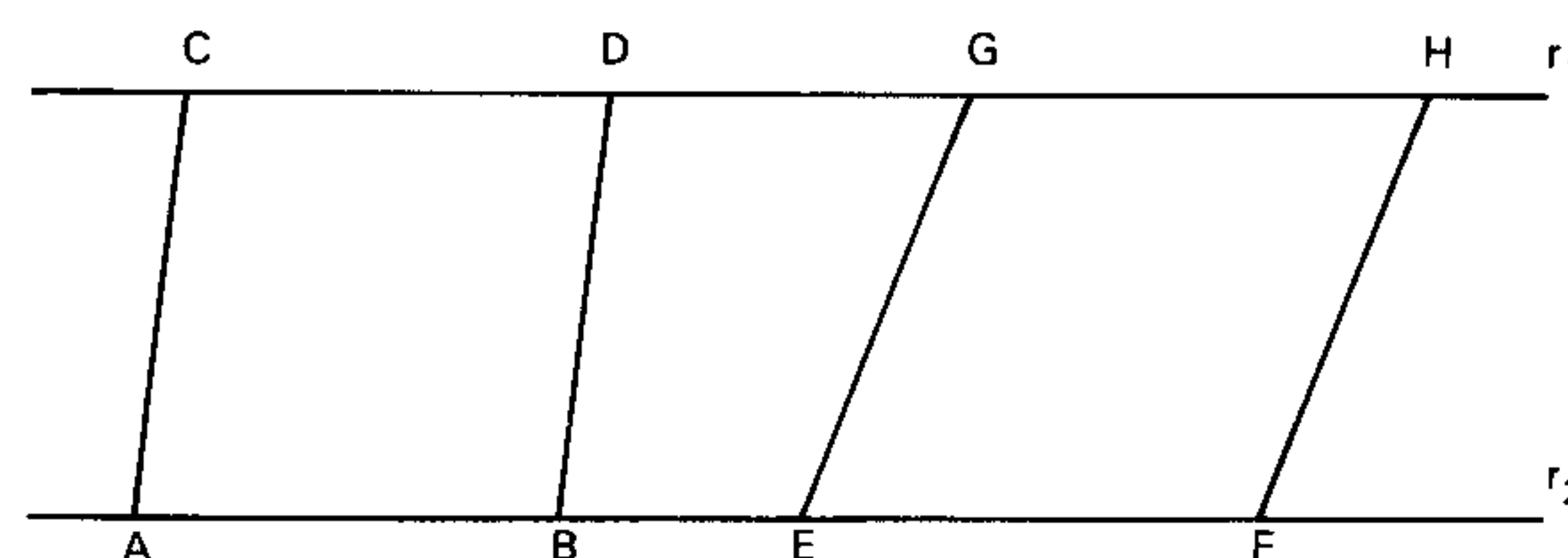
a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{2}$
c) 2
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{3}{2}$

265. (CESGRANRIO-85) Sejam *M, N, P* e *Q* os pontos médios dos lados do quadrado *ABCD*, como se vê nas figuras, e A_1, A_2, A_3 e A_4 as áreas de suas partes sombreadas. Escritas essas áreas em ordem crescente, temos:

a) $A_1 < A_3 < A_2 < A_4$
b) $A_2 < A_1 < A_3 < A_4$
c) $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$
d) $A_3 < A_4 < A_1 < A_2$
e) $A_4 < A_3 < A_2 < A_1$

266. (VUNESP-85) Se o comprimento de um retângulo aumenta em *10%* e a área permanece constante, a largura do retângulo diminui:

a) 9% b) 11% c) $\frac{100}{11}$ % d) $\frac{100}{9}$ % e) 10%

267. (CESESP-85) Considere a figura abaixo, onde G é o baricentro do triângulo ABC.

Assinale a única alternativa que corresponde à razão entre as áreas dos triângulos ABG e EGD.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 12

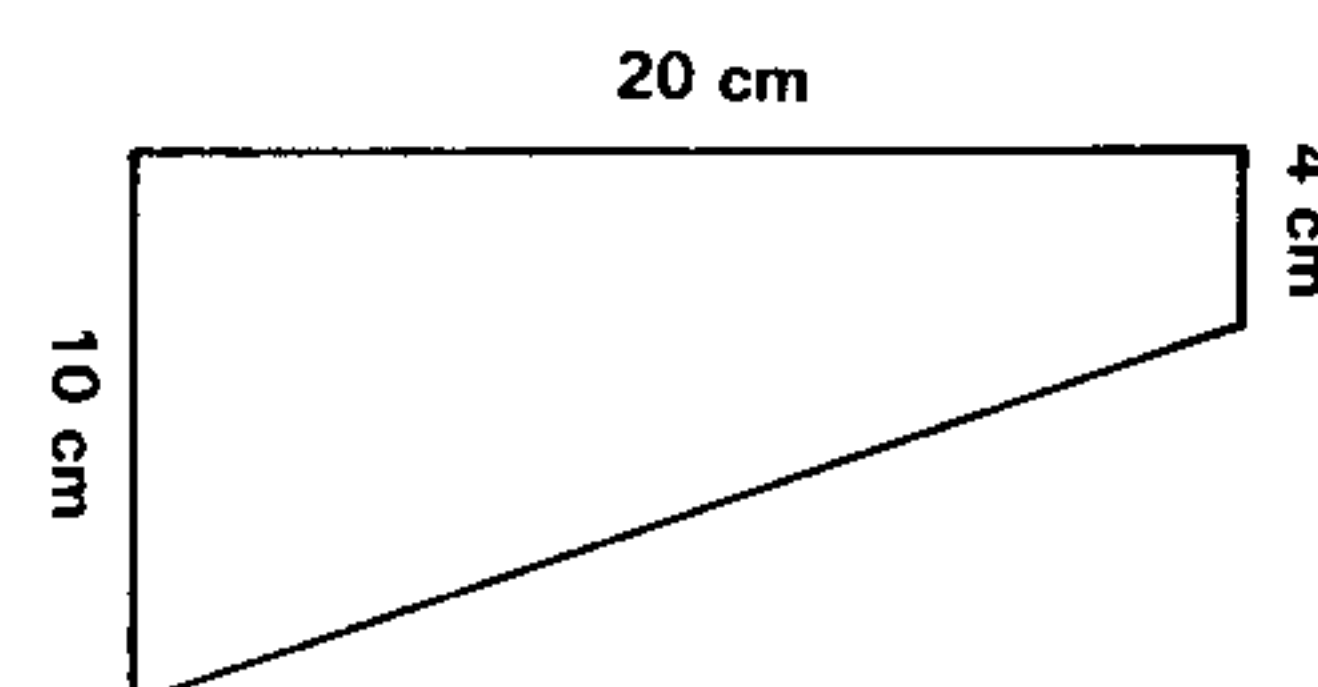
268. (CESESP-85) Considere a seguinte figura:

onde os paralelogramos $ABCD$ e $EFHG$ têm as medidas dos lados AB e EF iguais. Sejam S_1 e S_2 as áreas destes paralelogramos, respectivamente.
Assinale a alternativa correta, qualquer que seja a distância entre as retas r_1 e r_2.

a) $S_1 > S_2$ b) $S_1 < S_2$ c) $S_1 = S_2$ d) $S_1 = 1/S_2$ e) $S_1 + S_2 = 1$

269. (CESGRANRIO-87) Se as duas diagonais de um losango medem, respectivamente, *6 cm* e *8 cm*, então a área do losango é:

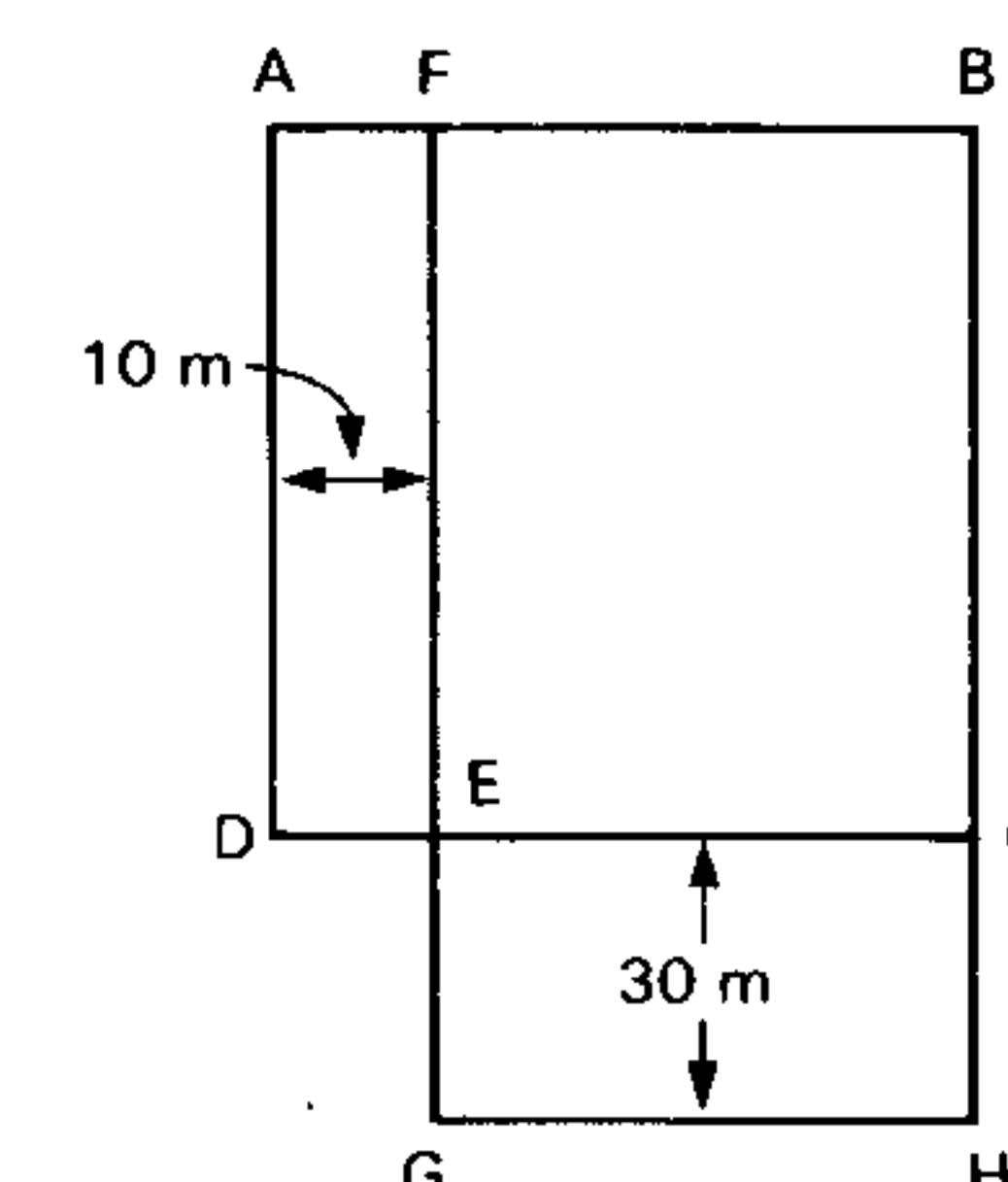
a) 18 cm² b) 24 cm² c) 30 cm² d) 36 cm² e) 48 cm²

270. (U.F.PE-U.F.R.PE-87) A planta de um projeto agrícola, na escala de *1:10 000*, tem a forma e as dimensões especificadas na figura abaixo. Indique a área do projeto em hectares, dentre as alternativas abaixo:

a) 120 ha
b) 250 ha
c) 140 ha
d) 800 ha
e) 630 ha

271. (FUVEST-87) Aumentamos a altura de um triângulo em *10%* e diminuímos a sua base em *10%*. Então a área do triângulo:

a) aumenta *1%*.
b) aumenta *0,5%*.
c) decresce *0,5%*.
d) decresce *1%*.
e) não se altera.

272. (CESGRANRIO-88) João possuía um terreno retangular $ABCD$, de *1800 m²*, do qual cedeu a faixa $ADEF$ com *10 m* de largura, em troca de outra, $CEGH$, com *30 m* de largura, conforme está indicado na figura, e de modo que $ABCD$ e $BHGF$ tivessem a mesma área. O perímetro do terreno $ABCD$ media:

a) 210 m
b) 204 m
c) 190 m
d) 186 m
e) 180 m

273. (CESGRANRIO-88) Um cateto de um triângulo retângulo é duas vezes e meia o outro cateto. Se a área do triângulo vale *20*, o menor cateto mede:

a) 2 b) 4 c) 5 d) $2\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

274. (FGV-88) Num triângulo isósceles, os lados de mesma medida medem *2* e o ângulo formado por eles mede *120°*. A área desse triângulo é:

a) 2 b) 1 c) 1/2 d) 1/4 e) n.d.a.

275. (FATEC-88) A diagonal de um quadrado é $k\sqrt{2}$. O perímetro de um outro quadrado, com $\frac{1}{4}$ da área do primeiro, é:

a) 2 k b) k c) $\frac{k}{2}$ d) $\frac{k}{4}$ e) 4k

276. (FATEC-88) A área do triângulo cujos lados medem *3 cm*, *5 cm* e *6 cm* é:

a) $\frac{2\sqrt{70}}{9}$ cm² b) 4,5 cm² c) $\sqrt{26}$ cm² d) 6,5 cm² e) $\sqrt{56}$ cm²

277. (FUVEST-88) Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de *15%* e *20%* respectivamente, a área do retângulo é aumentada em:

a) 35% b) 30% c) 3,5% d) 3,8% e) 38%

278. (FATEC-88) Sejam A, B e C vértices de um triângulo. Se $AB = 4$ cm e $BC = 5$ cm, então a medida máxima do lado $\overline{AC}$ para que a área deste triângulo não seja inferior a *6 cm²* é:

a) $\sqrt{73}$ cm b) 8 cm c) $\sqrt{41}$ cm d) 6 cm e) 5 cm

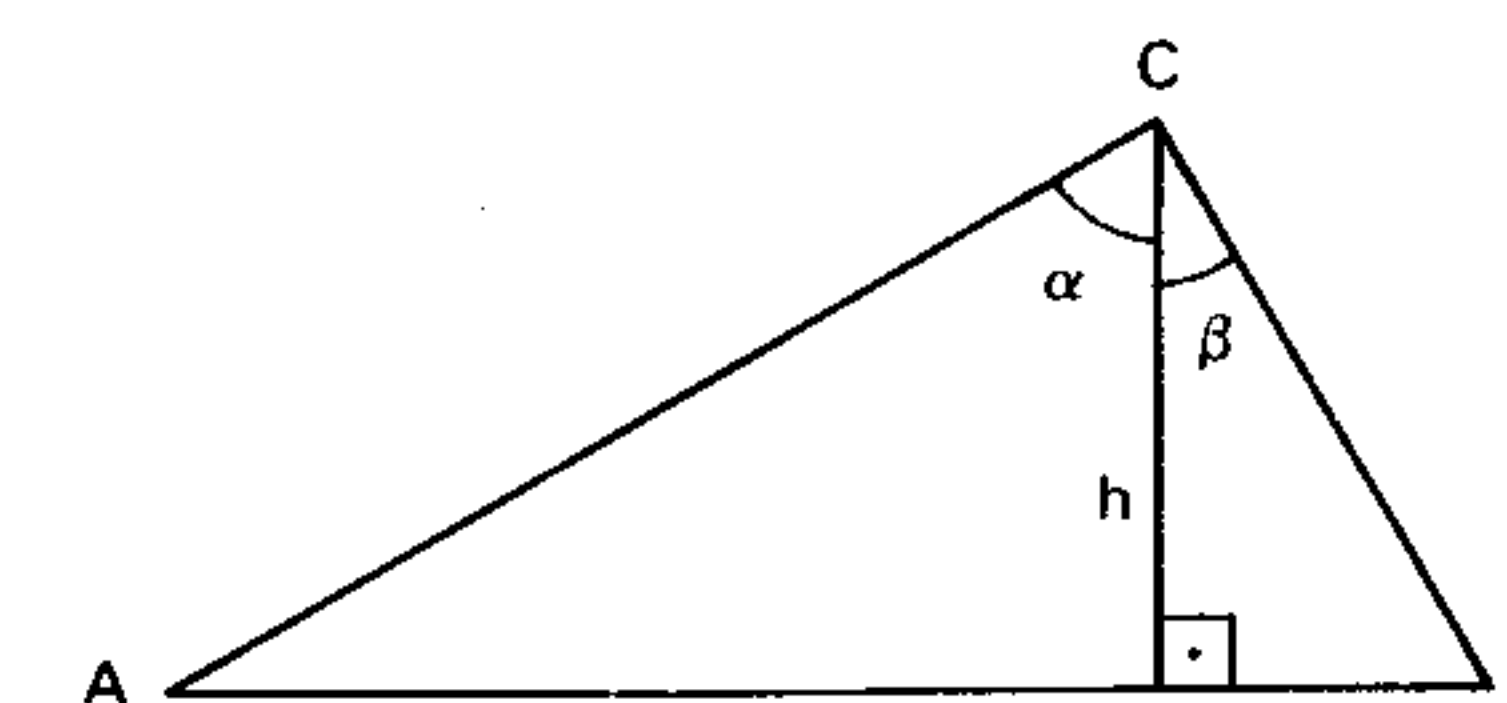
279. (FATEC-88) Na figura abaixo tem-se o triângulo ABC. A altura h, relativa ao lado $\overline{AB}$, forma ângulos de medidas α e β com os lados adjacentes. Se $h = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$, $\alpha = 60°$ e $\beta = 45°$, então a área do triângulo é:

a) 1 cm²

b) $\frac{1}{2}$ cm²

c) $\frac{(\sqrt{2} + 1)\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{4}$ cm²

d) $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{4}$ cm²

e) $\frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2}$ cm²

280. (VUNESP-89) João e Tomás partiram um bolo retangular. João comeu a metade da terça parte e Tomás comeu a terça parte da metade. Quem comeu mais?

a) João, porque a metade é maior que a terça parte.
b) Tomás.
c) Não se pode decidir porque não se conhece o tamanho do bolo.
d) Os dois comeram a mesma quantidade de bolo.
e) Não se pode decidir porque o bolo não é redondo.

281. (FUVEST-89) Os lados de um retângulo de área $12\ m^2$ estão na razão $1:3$. Qual o perímetro do retângulo?

a) 8 m b) 12 m c) 16 m d) 20 m e) 24 m

282. (FUVEST-89) A área de um triângulo de lados a, b e c é dada pela fórmula

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde p é o semiperímetro $(2p = a + b + c)$.
Qual a área de um triângulo de lados 5, 6 e 7?

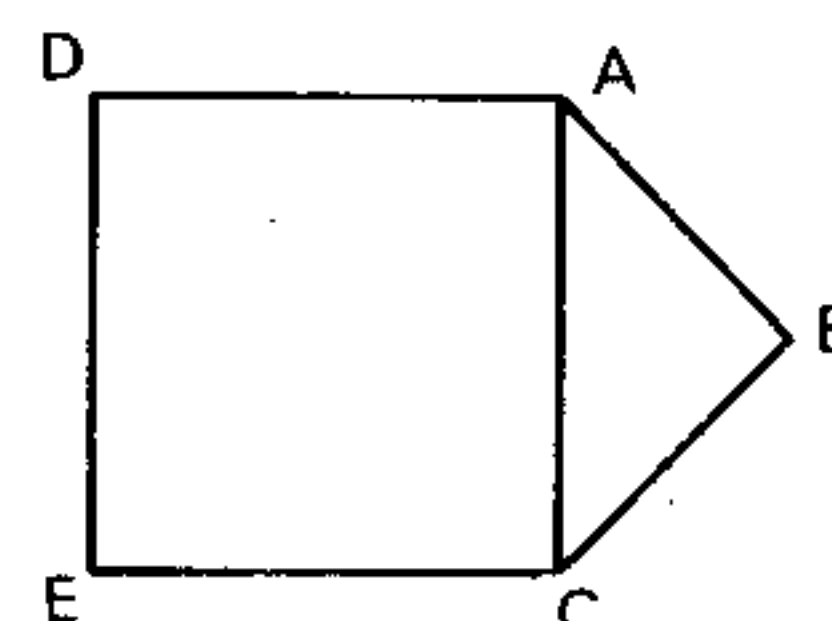
a) 15 b) 21 c) $7\sqrt{5}$ d) $\sqrt{210}$ e) $6\sqrt{6}$

283. (FUVEST-89) Os pontos A, B e C são vértices consecutivos de um hexágono regular de área igual a 6. Qual a área do triângulo ABC?

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

284. (CESGRANRIO-89) Na figura, ABC é um triângulo isósceles e $ACED$ é um quadrado. Se AB mede 4, a área de $ACED$ é de:

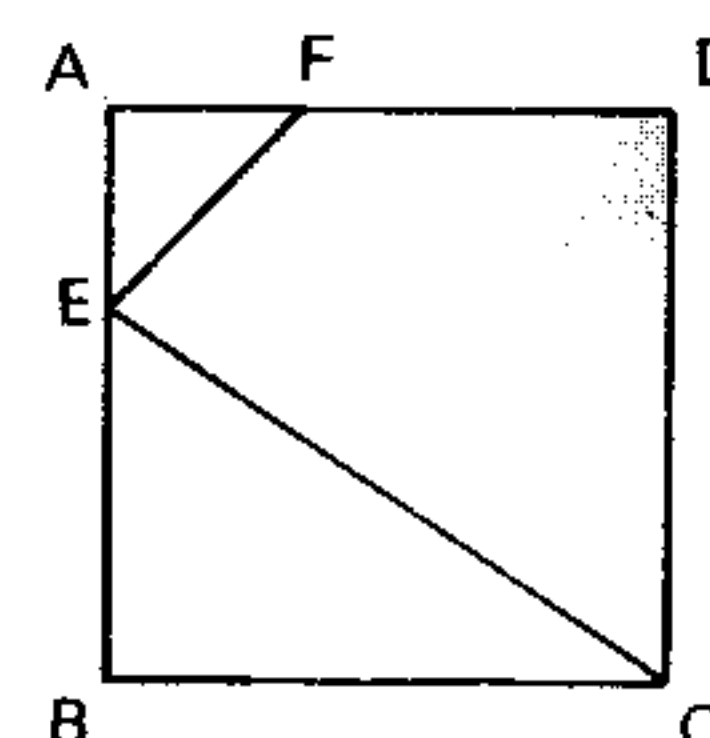
a) $10\sqrt{3}$ d) 32
b) 16 e) 36
c) $20\sqrt{2}$

D A B E C

285. (ITA-89) Se num quadrilátero convexo de área S, o ângulo agudo entre as diagonais mede $\pi/6$ radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a:

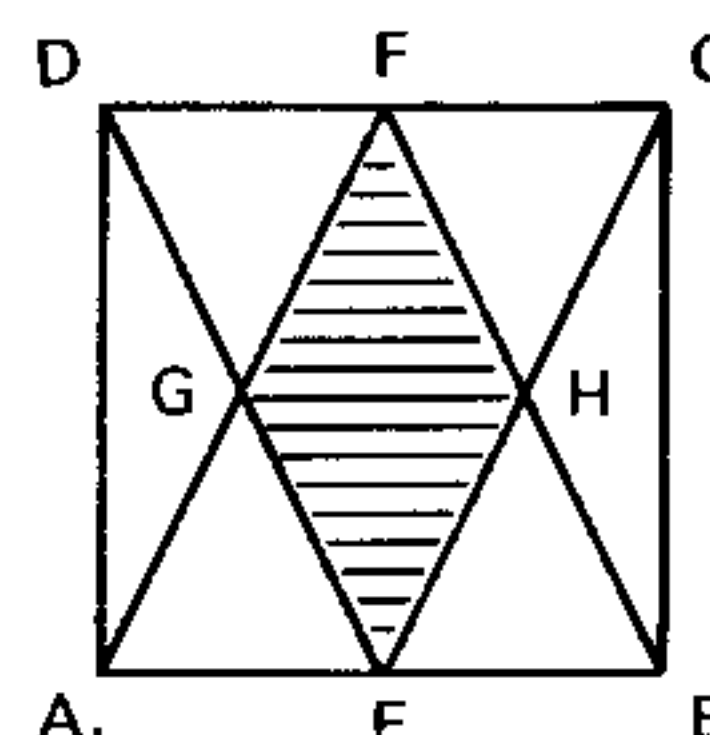
a) S b) 2S c) 3S d) 4S e) 5S

286. (COVEST-89) Na figura abaixo o quadrado $ABCD$ tem área igual a $100\ cm^2$. Sabe-se que $AE = AF$ e que as medidas de $\overline{AE}$ e $\overline{EB}$ estão na razão de 1 para 4. A área da região sombreada é, em cm^2:

a) 63 cm^2
b) 59 cm^2
c) 64 cm^2
d) 70 cm^2
e) 58 cm^2

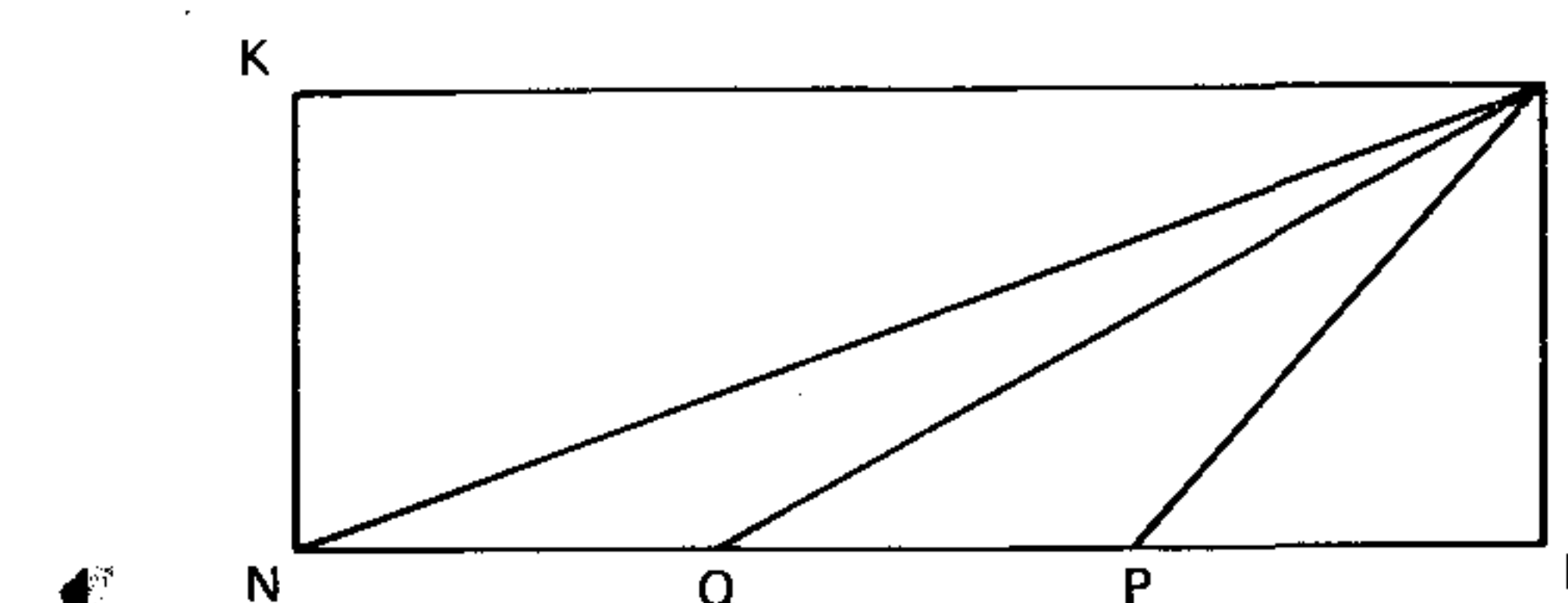
A F D E B C

287. (COVEST-90) Na figura a seguir, o quadro $ABCD$ tem área total de $40\ cm^2$. Sabendo-se que E e F são os pontos médios dos lados AB e CD, respectivamente, forma-se então o quadrilátero hachurado $FGEH$, que tem área igual a:

a) 30 cm^2
b) 25 cm^2
c) 11 cm^2
d) 10 cm^2
e) $10\sqrt{2}$ cm^2

D F C G H A E B

288. (U.F.MG-90) Considere $NQ = MP = \frac{MN}{3}$, sendo MN a base do retângulo $KNML$.

Se a soma das áreas dos triângulos NQL e PLM é 16, a área do retângulo $KNML$ é:

a) 24
b) 32
c) 48
d) 72
e) 96

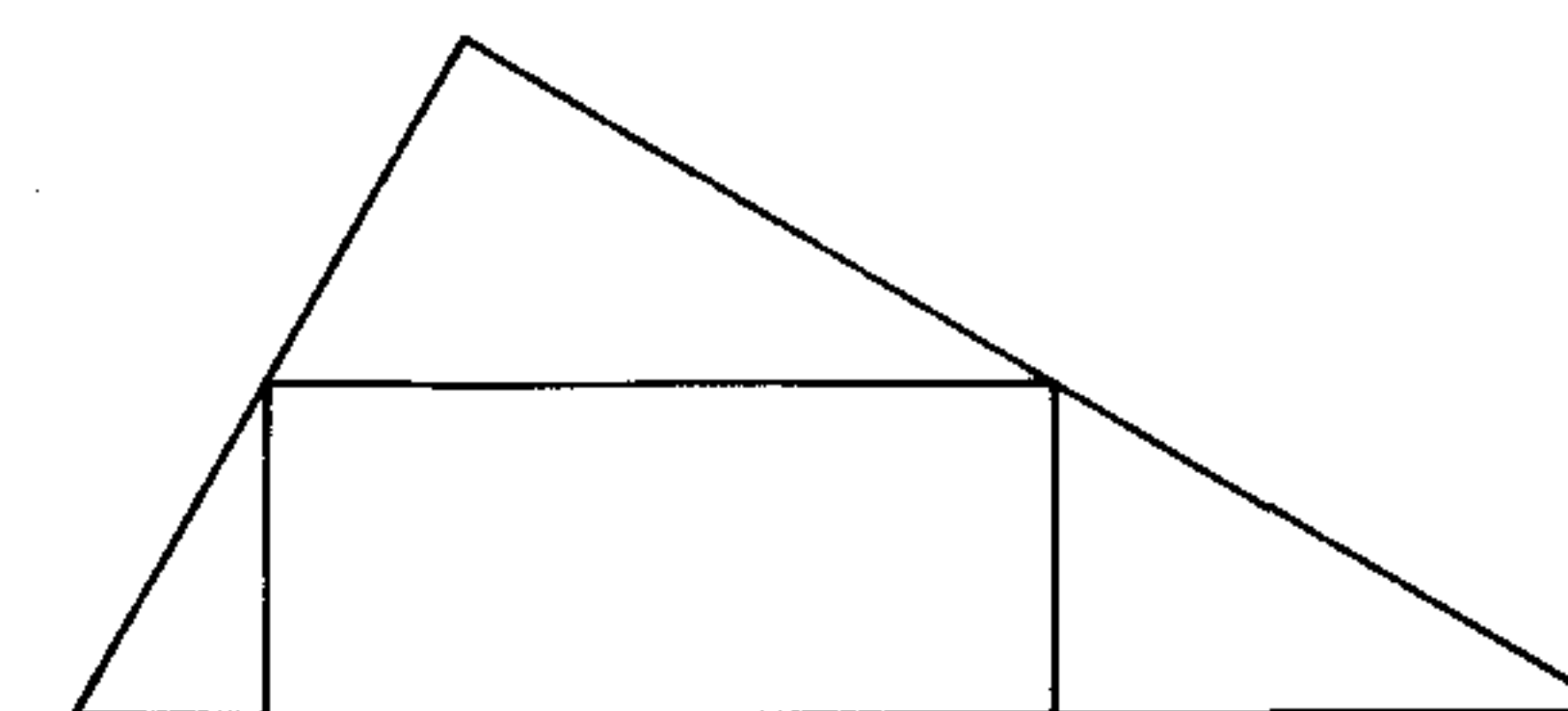
K L N Q P M

289. (U.F.MG-90) A base de um triângulo e a altura relativa a essa base medem, respectivamente, b e h. Um retângulo de altura x é inscrito no triângulo, sendo que sua base está contida na base desse triângulo. A área do retângulo, em função de b, x e h, é:

a) $\dfrac{hx\,(b - x)}{b}$

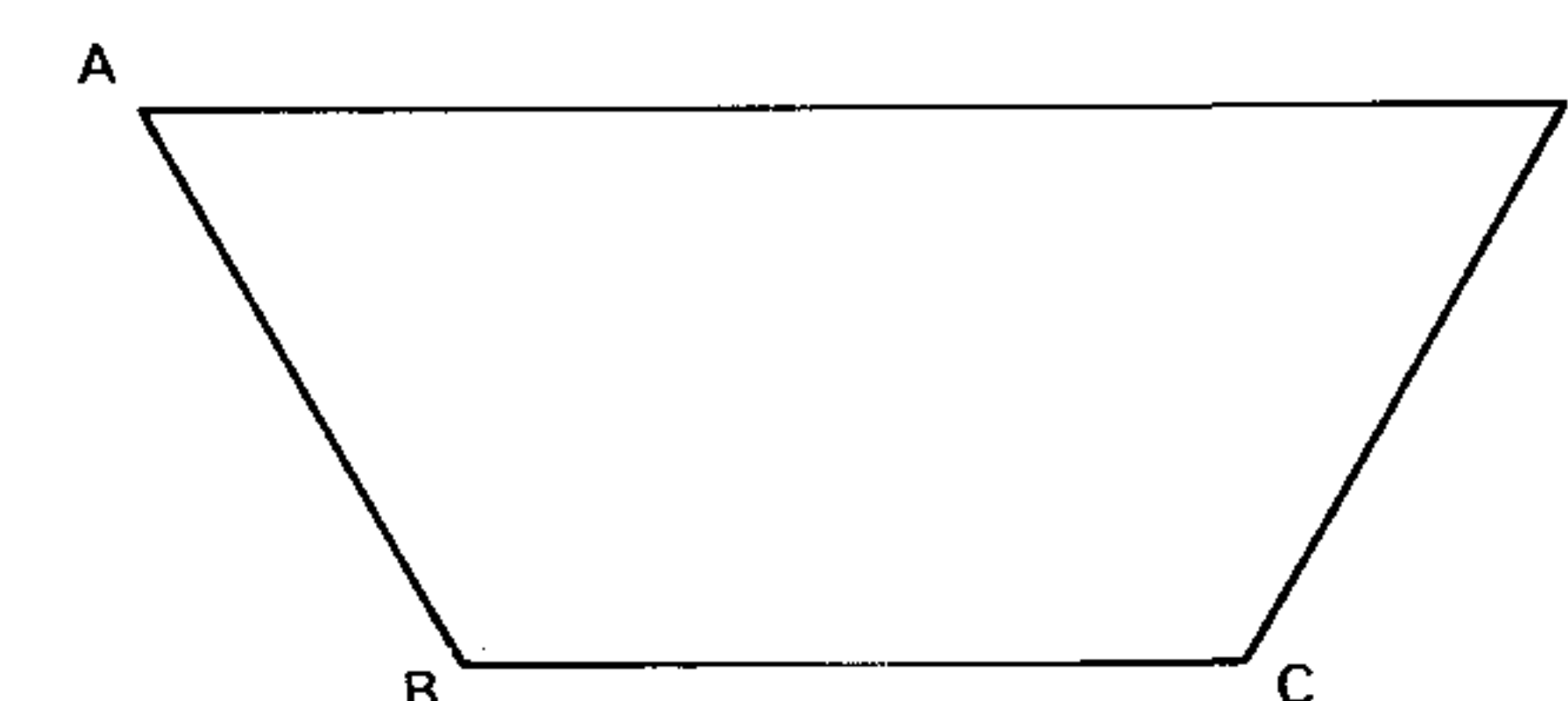
b) $\dfrac{bx\,(h - x)}{h}$

c) $\dfrac{bx\,(h - 2x)}{h}$

d) $\dfrac{bx\,(h + x)}{h}$

e) $\dfrac{1}{4}$

290. (U.F.MG-90) Considere um trapézio isósceles $ABCD$, em que $AB = BC = CD = 4\ cm$. Se $AD = 8\ cm$, pode-se afirmar que a área do trapézio, em cm^2, é:

a) $4\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) $8\sqrt{3}$
d) $12\sqrt{3}$
e) $24\sqrt{3}$

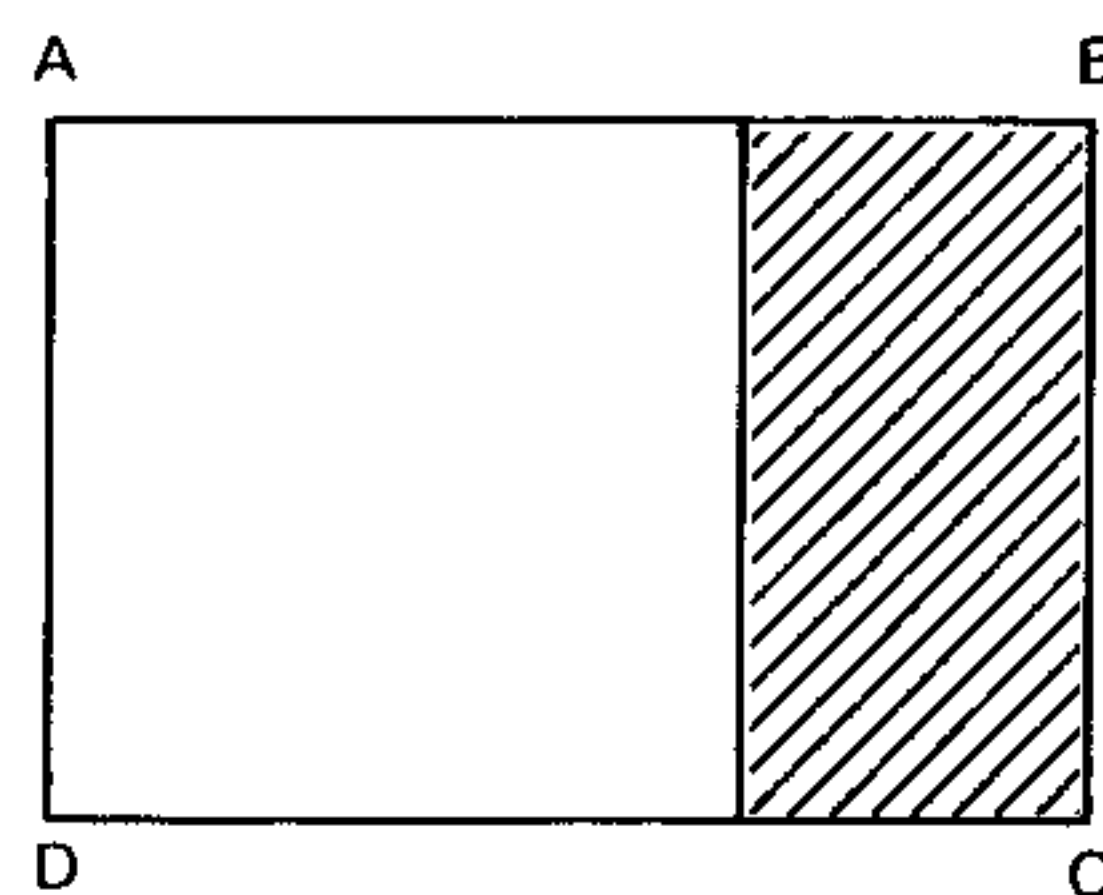
A D B C

291. (U.F.MG-90) Uma casa tem dez janelas, cada uma com quatro vidros retangulares e iguais, de $0{,}45\ m$ de comprimento e $0{,}40\ m$ de largura.
Cada vidro custa *Ncz$ 0,25* o dm^2 e a mão-de-obra para colocá-lo, *Ncz$ 4,00* por janela.
A importância a ser gasta para colocar os vidros nessas janelas é:

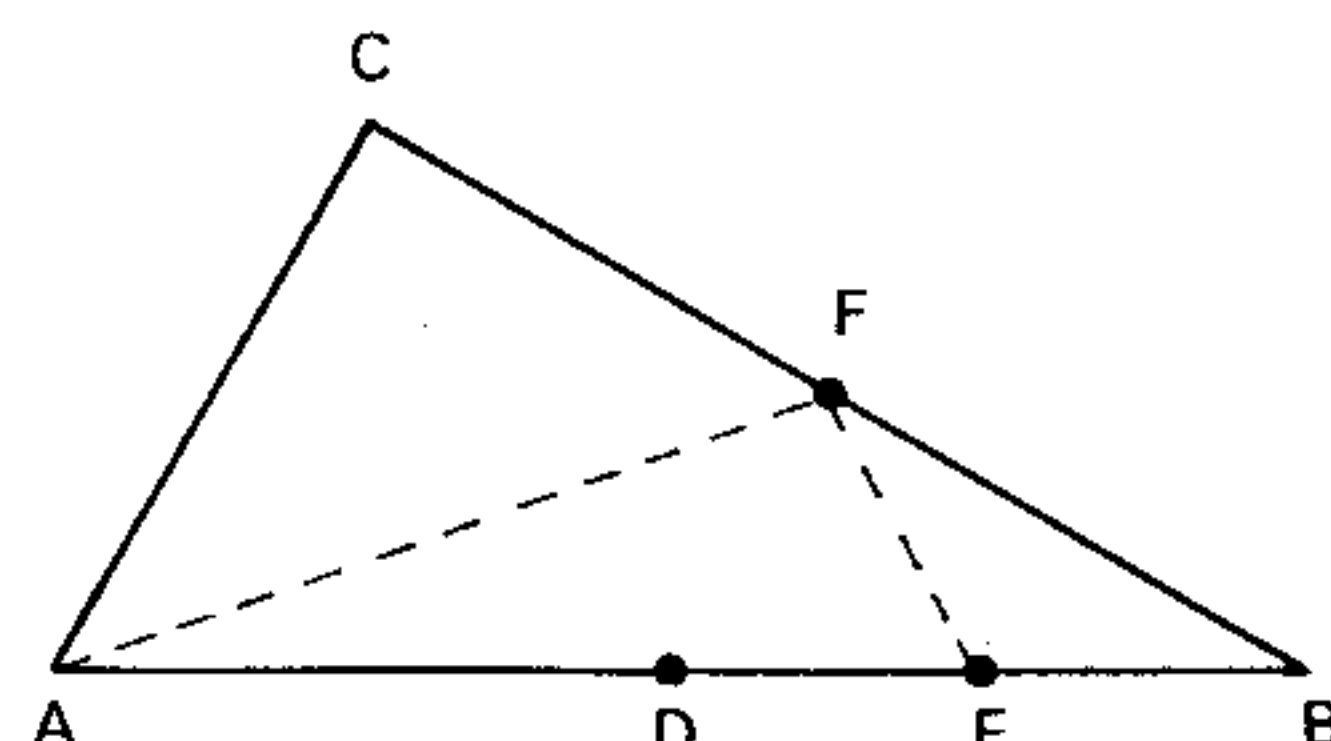
a) Ncz$ 44,50 c) Ncz$ 225,00 e) Ncz$ 450,00
b) Ncz$ 220,00 d) Ncz$ 445,00

292. (U.E.CE-91) Em um trapézio a soma das bases é $24\ cm$, a altura é igual à metade da base maior e a base menor é igual à altura. A área desse trapézio, em cm^2, é:

a) 60 b) 72 c) 84 d) 96

293. (FUVEST-91) O retângulo *ABCD* representa um terreno retangular cuja largura é *3/5* do comprimento. A parte hachurada representa um jardim retangular cuja largura é também *3/5* do comprimento. Qual a razão entre a área do jardim e a área total do terreno?

a) 30%
b) 36%
c) 40%
d) 45%
e) 50%

294. (CESGRANRIO-91) Seja *D* o ponto médio do lado *AB* do triângulo *ABC*. Sejam *E* e *F* os pontos médios dos segmentos *DB* e *BC*, respectivamente, conforme se vê na figura. Se a área do triângulo *ABC* vale *96*, então a área do triângulo *AEF* vale:

a) 42
b) 36
c) 32
d) 30
e) 28

295. (COVEST-91) Se todos os lados de um heptágono regular forem aumentados em *50%*, em quanto aumenta a sua área?

a) 50% b) 75% c) 100% d) 125% e) 150%

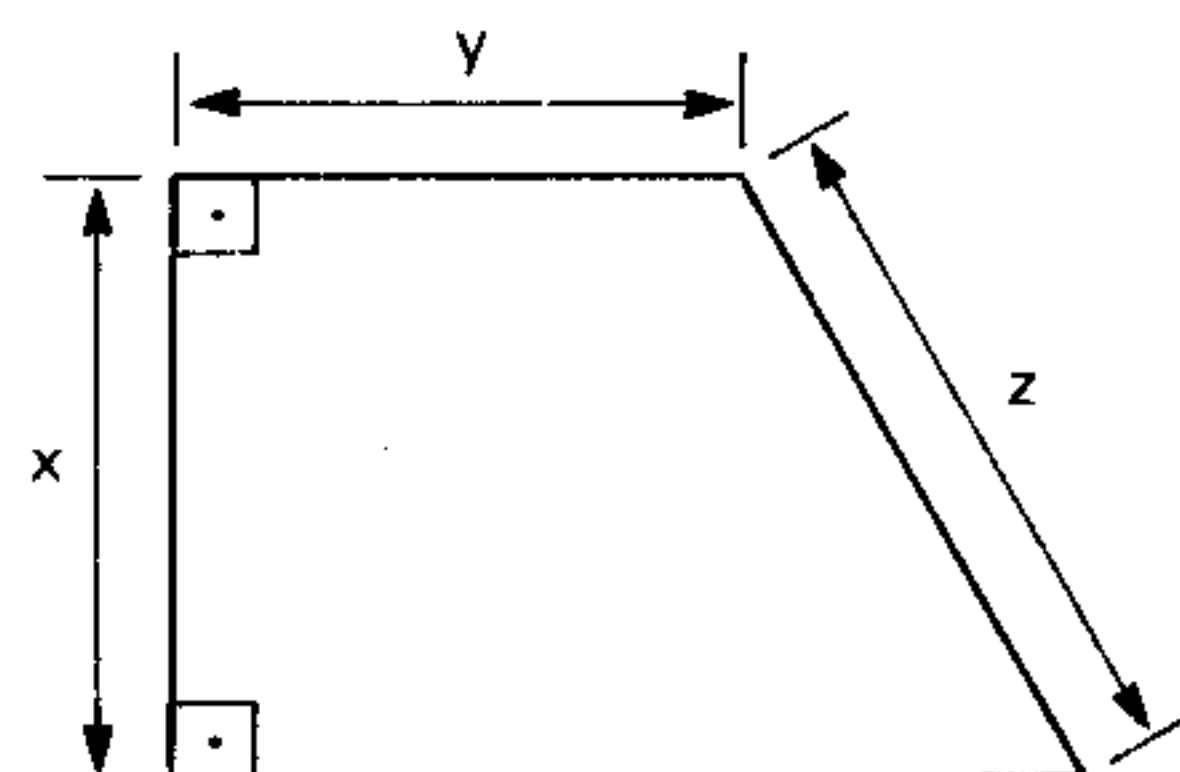
296. (COVEST-U.F.R.PE-91) A área do trapézio da figura é:

a) $x\left(y + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - x^2}\right)$

b) $x\left(y - \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - x^2}\right)$

c) $\frac{1}{2}(z + x)y$

d) $\frac{1}{2}(x + y)z$

e) $xy + \frac{1}{2}xz$

297. (U.F.MG-92) Ao reformar-se o assoalho de uma sala, suas *49* tábuas corridas foram substituídas por tacos. As tábuas medem *3 m* de comprimento por *15 cm* de largura e os tacos, *20 cm* por *7,5 cm*. O número de tacos necessários para essa substituição foi:

a) 1 029 b) 1 050 c) 1 470 d) 1 500 e) 1 874

298. (PUC-MG-92) Um triângulo tem base *0,7 m* e altura *15 m*. Um segundo triângulo tem base *1,2 dm* e altura *0,5 m*. A razão entre a área do primeiro e do segundo triângulo é:

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{6}{7}$

299. (U.F.MG-92) Aumentando-se o comprimento e a largura de um retângulo *R* em *3 cm* e *2 cm*, respectivamente, sua área aumenta em *54* cm^2.
Diminuindo-se o comprimento e a largura de *R* em *2 cm* e *3 cm*, respectivamente, a área diminui em *46* cm^2.
Pode-se afirmar que o perímetro de *R*, em *cm*, é:

a) 20 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

300. (PUC-MG-92) O número pelo qual se devem multiplicar as dimensões de um retângulo, para que sua área seja aumentada *25%*, é:

a) $\sqrt{5}$ b) $0,2\sqrt{5}$ c) $0,3\sqrt{5}$ d) $0,4\sqrt{5}$ e) $0,5\sqrt{5}$

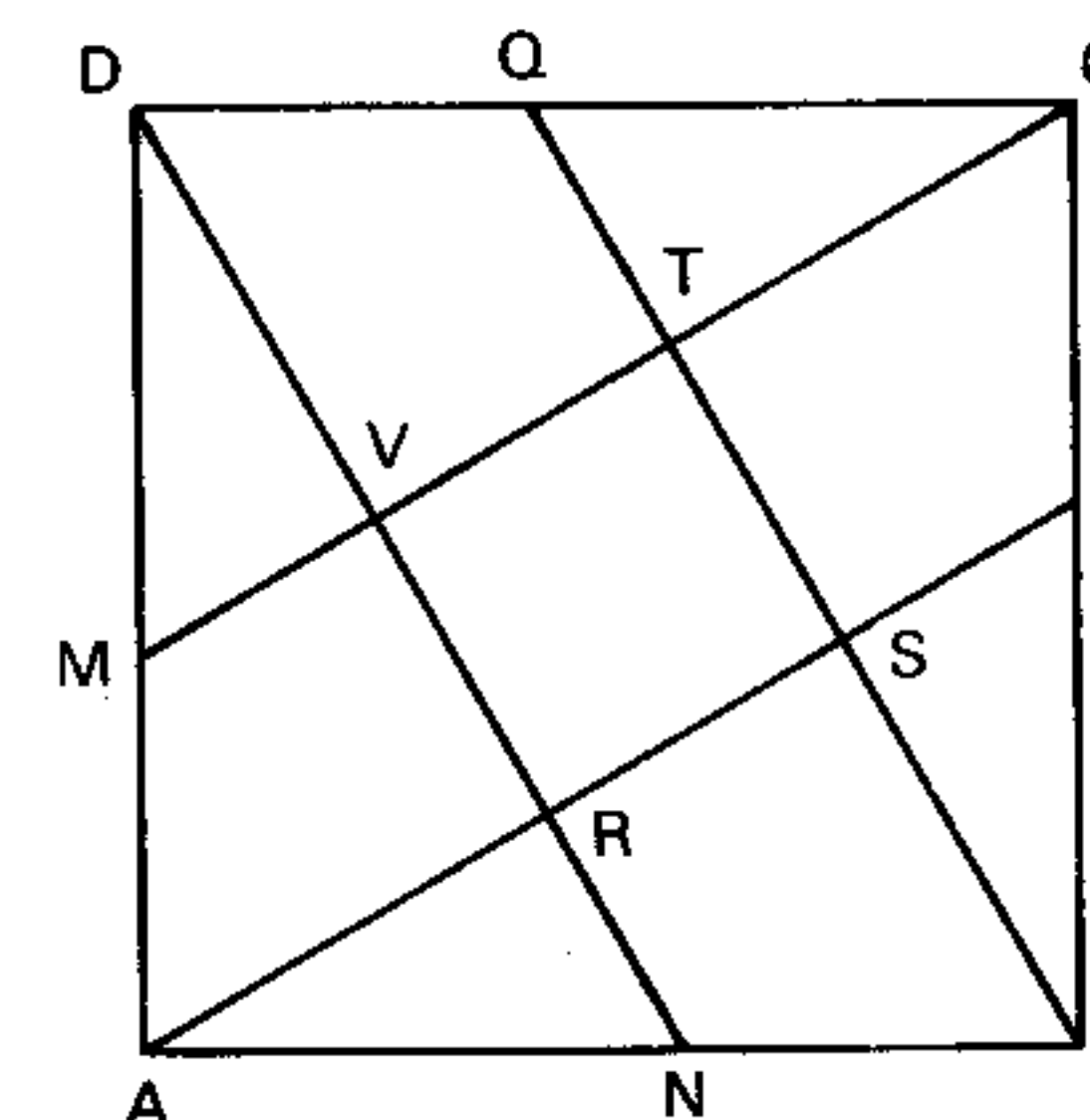
301. (U.F.MG-92) Precisa-se colar uma gravura retangular, cujas dimensões são *34 cm* e *14 cm*, em um pedaço de cartolina. As margens superior, inferior e laterais da cartolina devem ter uma largura constante. A área total da cartolina é de *800* cm^2.
A medida da largura da margem, em *cm*, é um divisor de:

a) 7 b) 11 c) 15 d) 20 e) 32

302. (U.F.MG-92) A hipotenusa e a área de um triângulo retângulo medem, respectivamente, $4\sqrt{5}$ *cm* e *16* cm^2.
A diferença das medidas dos catetos, em *cm*, é:

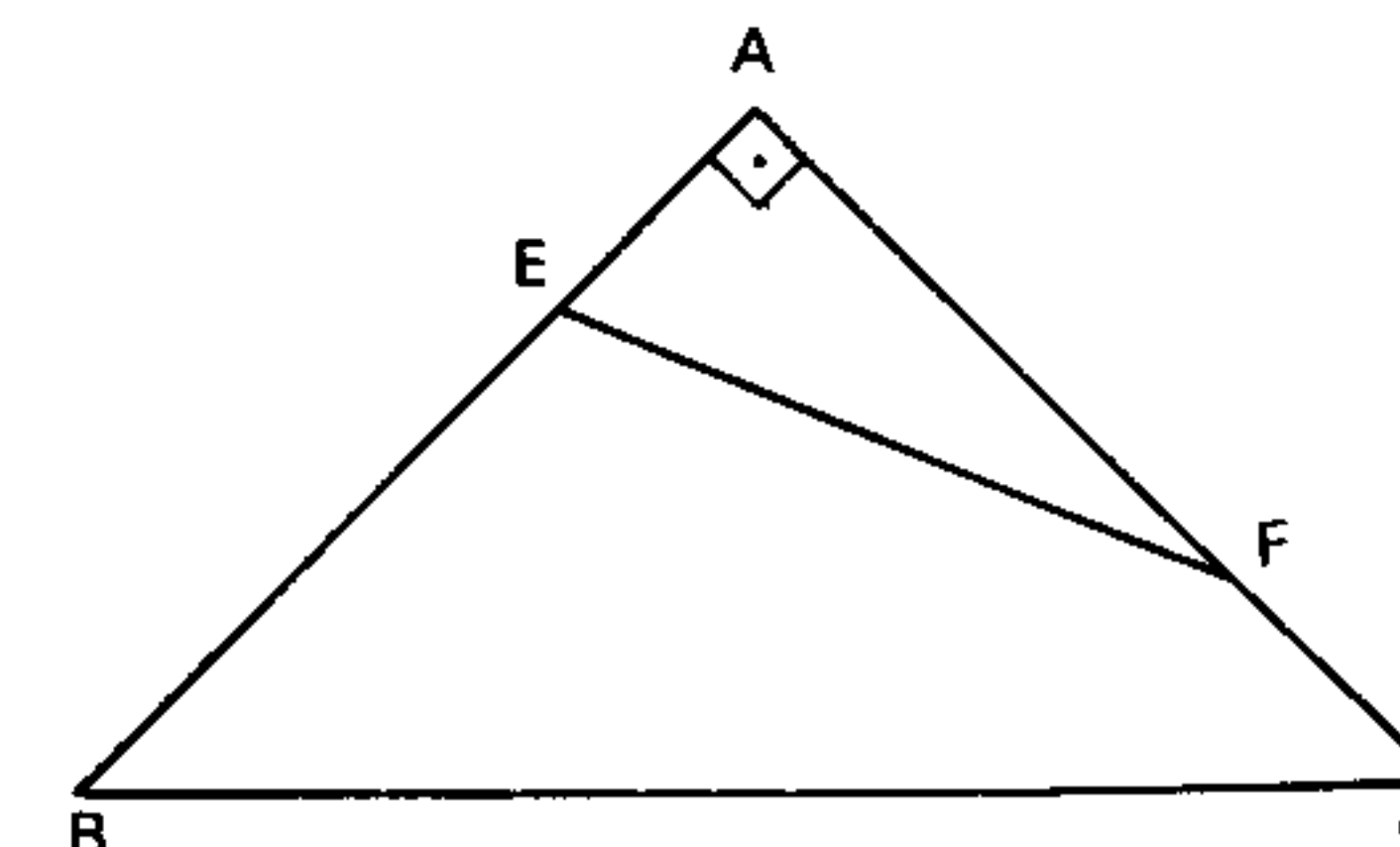
a) 4 b) $3\sqrt{5}$ c) 3 d) $2\sqrt{5}$ e) 2

303. (U.F.MG-92) Observe a figura.
Nessa figura, os pontos *M, N, P, Q* são pontos médios dos lados do quadrado *ABCD*, cuja área mede *16* cm^2.
A área do quadrado *RSTV*, em cm^2, mede:

a) 4
b) 8
c) 10
d) $\frac{16}{3}$
e) $\frac{16}{5}$

304. (U.F.MG-92) A diferença entre as medidas das bases maior e menor de um trapézio é igual à medida da sua altura. Se a base menor e a área medem, respectivamente, *2 cm* e *6* cm^2, pode-se afirmar que a altura, em *cm*, é:

a) um múltiplo de *3*.
b) um múltiplo de *4*.
c) um múltiplo de *7*.
d) um múltiplo de *10*.
e) um número primo.

305. (U.F.MG-92) Observe a figura.
BC é a hipotenusa do triângulo retângulo *ABC*, $AE = \frac{1}{4}AB$, $FC = \frac{1}{4}AC$ e a área do quadrilátero *BCFE* é igual a *30* cm^2.
A área do triângulo *AEF* é igual a:

a) 10
b) 20
c) $\frac{60}{13}$
d) $\frac{80}{13}$
e) $\frac{90}{13}$

306. (PUC-MG-92) Os lados de um triângulo retângulo têm medidas $2(a + 1)$, $3a + 2$ e $4a + 2$, $a > 0$. A área desse triângulo, em unidades de área, é:

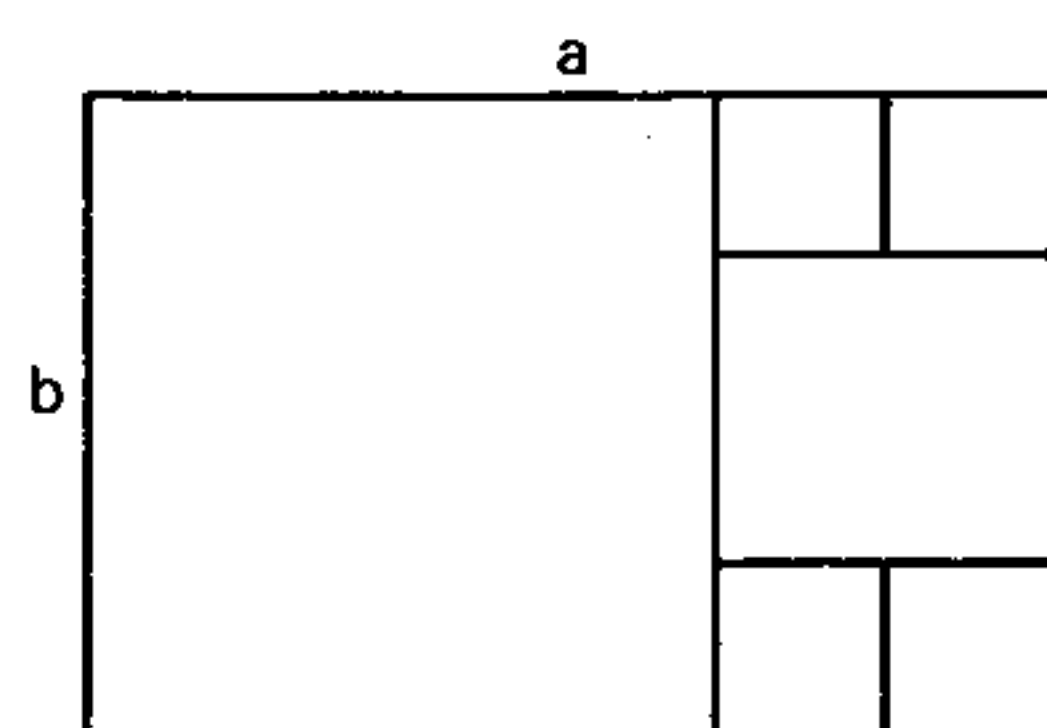
a) 30 b) 24 c) 18 d) 16 e) 12

307. (PUC-MG-92) A área de um polígono regular, de apótema a e de n lados, inscrito numa circunferência de raio r, em unidades de área, é:

a) $\frac{1}{2} na \sqrt{r^2 - a^2}$ c) $na \sqrt{r^2 - a^2}$ e) $4na \sqrt{r^2 - a^2}$

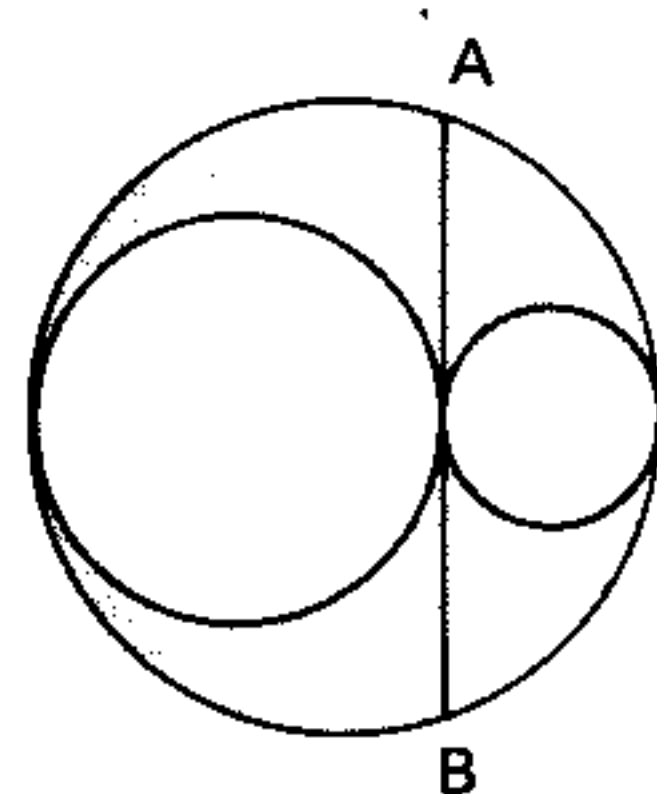
b) $\frac{1}{4} na \sqrt{r^2 - a^2}$ d) $2na \sqrt{r^2 - a^2}$

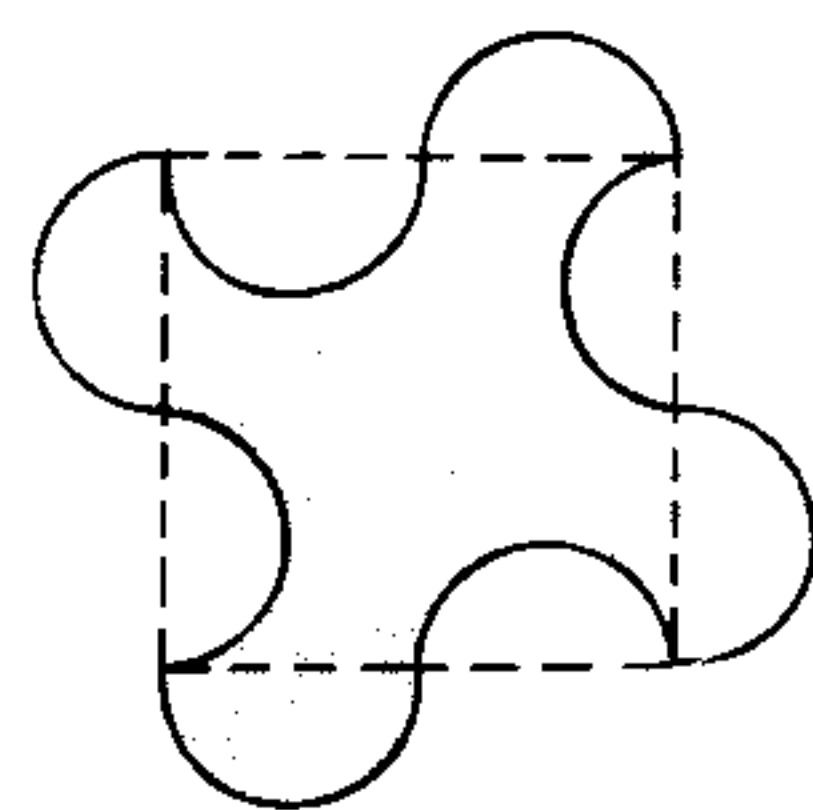
308. (FUVEST-92) O retângulo abaixo de dimensões a e b está decomposto em quadrados. Qual o valor da razão a/b?

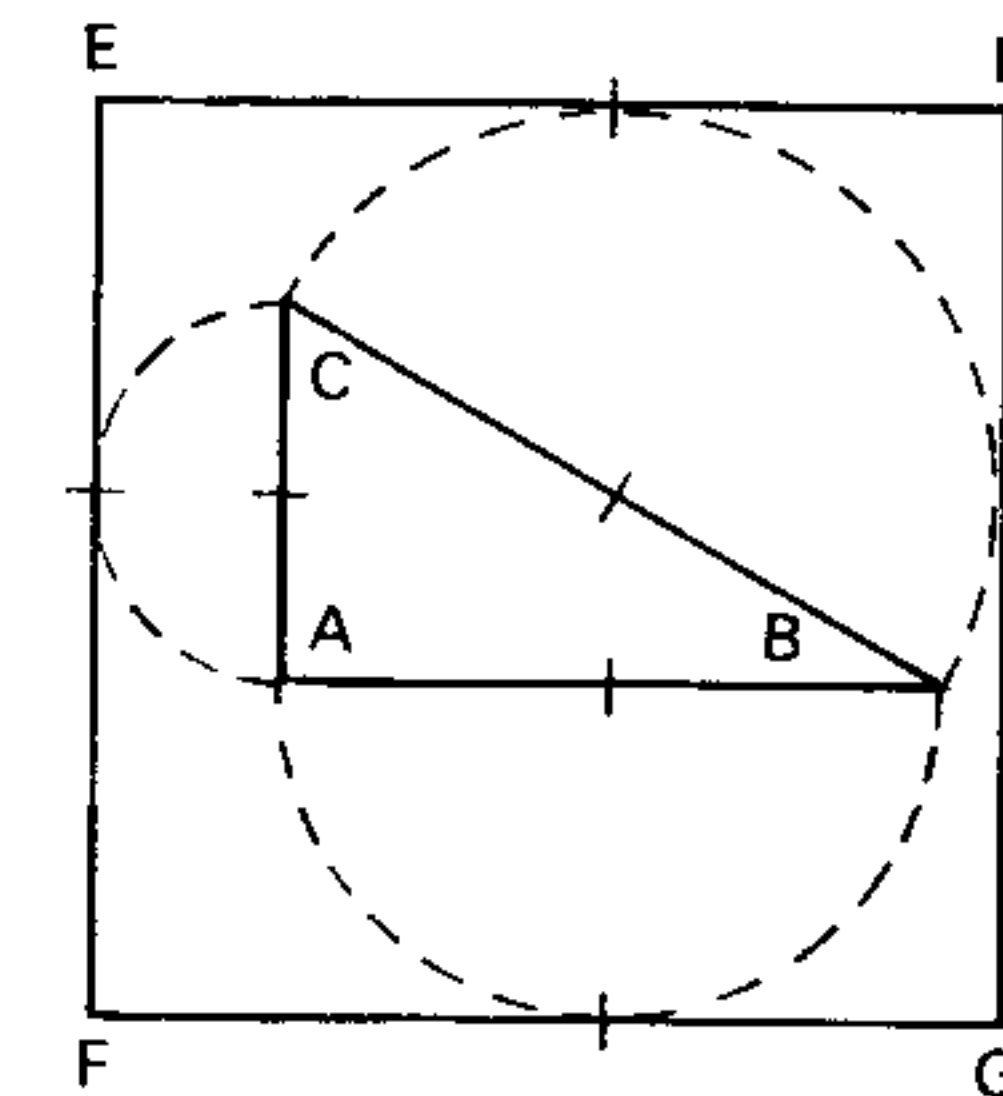
a) 5/3
b) 2/3
c) 2
d) 3/2
e) 1/2

309. (ITA-92) A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cujo apótema mede $10\ cm$, circunscrito a esta mesma circunferência é:

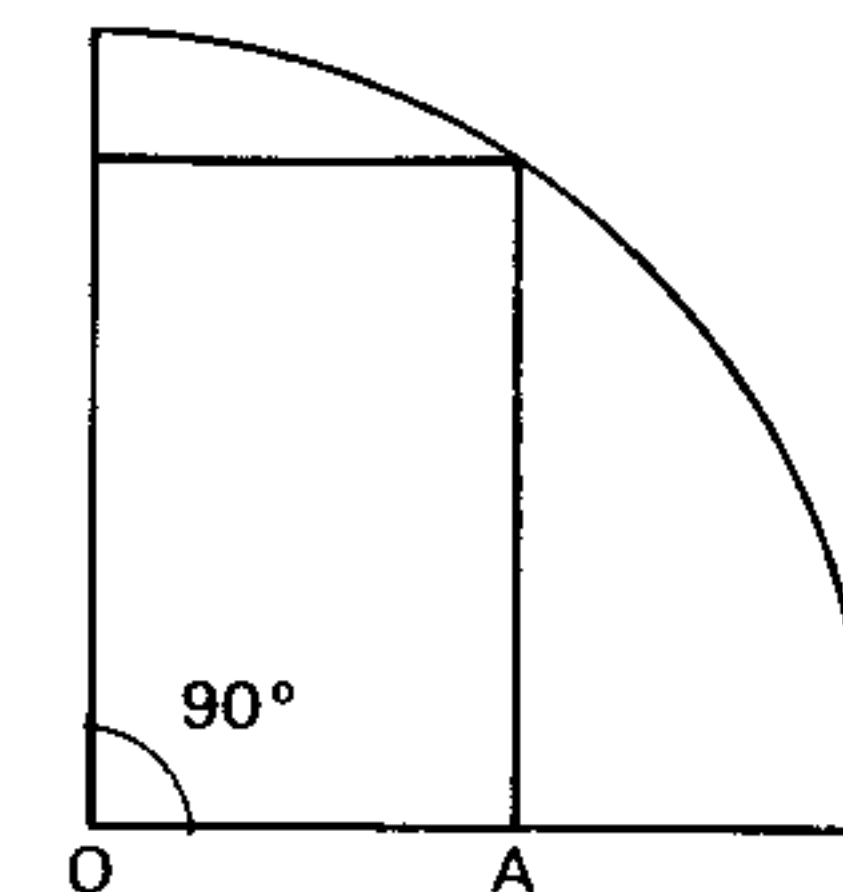
a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{8}$ e) n.d.a.

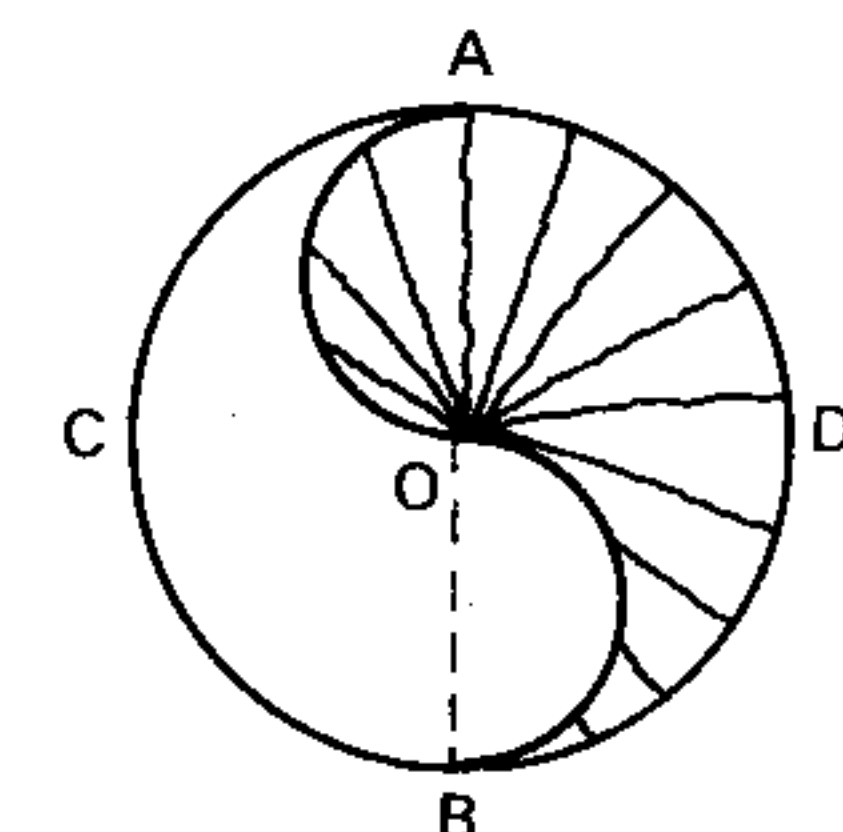
310. (CICE-70) Na figura abaixo, r é o raio do círculo maior e t é o comprimento da tangente AB comum aos dois círculos menores. Então a área assinalada, compreendida entre o círculo maior e os dois menores, é igual a:

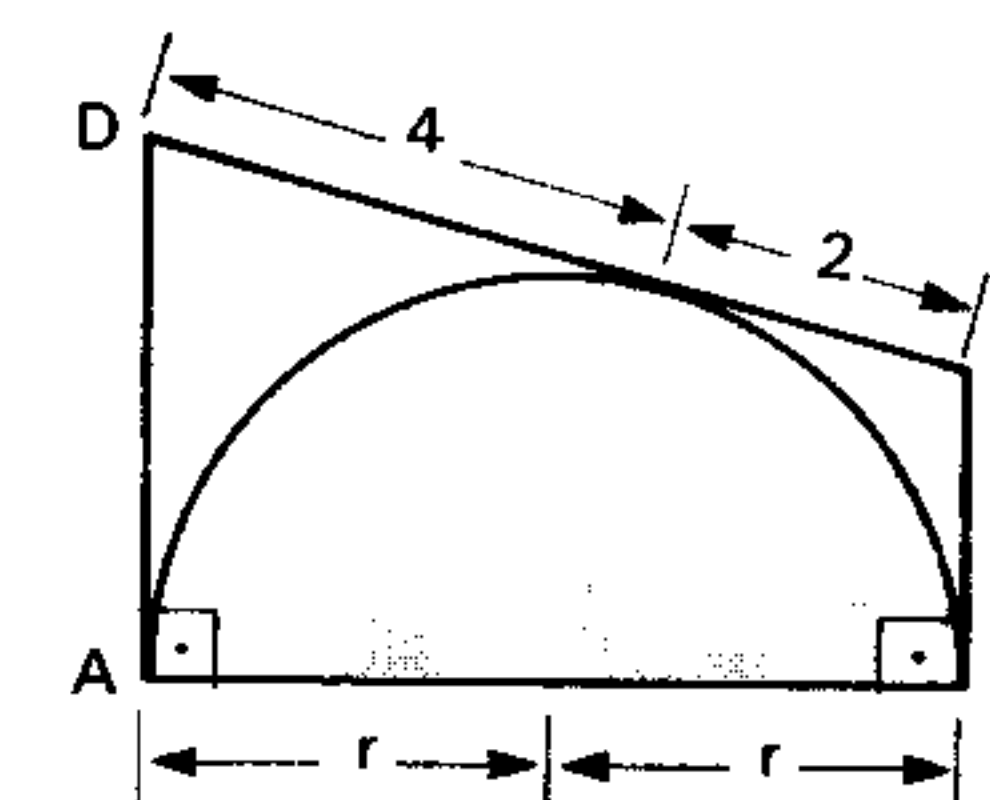
a) $\frac{\pi r^2}{8}$
b) $\frac{\pi rt}{8}$
c) $\frac{\pi t^2}{8}$
d) $\frac{\pi (t - r)^2}{8}$
e) nada disso

311. (U.MACK.-74) A diagonal $\overline{AD}$ do quadrado $ABCD$ mede $\sqrt{2}\ cm$. Se o diâmetro de cada uma das semicircunferências na figura ao lado é igual à metade do lado do quadrado, a área da região assinalada é:

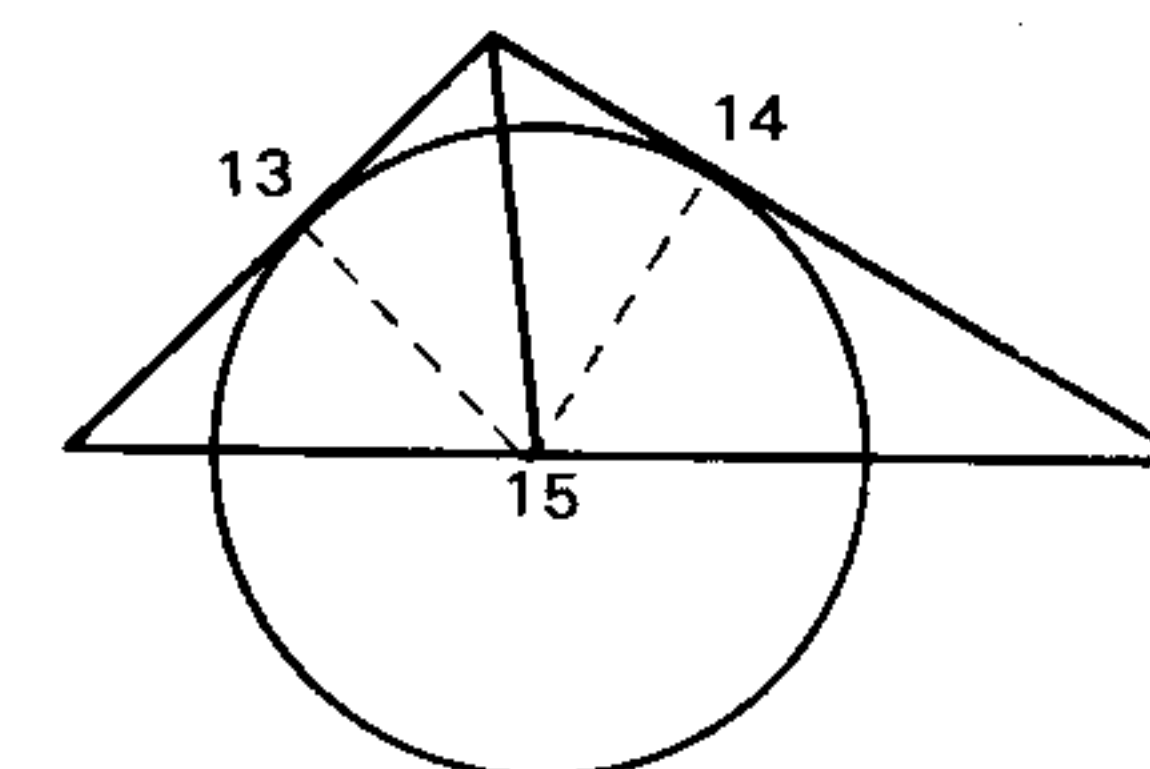
a) 1 d) 2
b) $\frac{1}{\pi}$ e) π
c) $\frac{\pi}{8}$

312. (CONSART-75) Cada um dos lados do retângulo $DEFG$ é paralelo a algum dos catetos do triângulo retângulo ABC e tangente a alguma das semicircunferências tracejadas do desenho. Sabendo-se que $AC = 6\ cm$ e $AB = 8\ cm$, a área do retângulo é:

a) $136\ cm^2$ d) $144\ cm^2$
b) $140\ cm^2$ e) $200\ cm^2$
c) $164\ cm^2$

313. (CESCEM-75) Na figura ao lado, temos a representação de um retângulo inscrito em um setor de $90°$ cujo raio mede $6\ cm$. Medindo o lado OA do retângulo $\frac{2}{3}$ do raio, a área do retângulo é:

a) $4\sqrt{5}\ m^2$ d) $16\ m^2$
b) $8\sqrt{5}\ m^2$ e) $24\ m^2$
c) $8\sqrt{13}\ m^2$

314. (CONSART-75) O ponto O é o centro do círculo $ACBD$ e extremidade das semicircunferências OA e OB da figura. A reta que contém O e divide a região tracejada em duas partes de mesma área faz com OA um ângulo de:

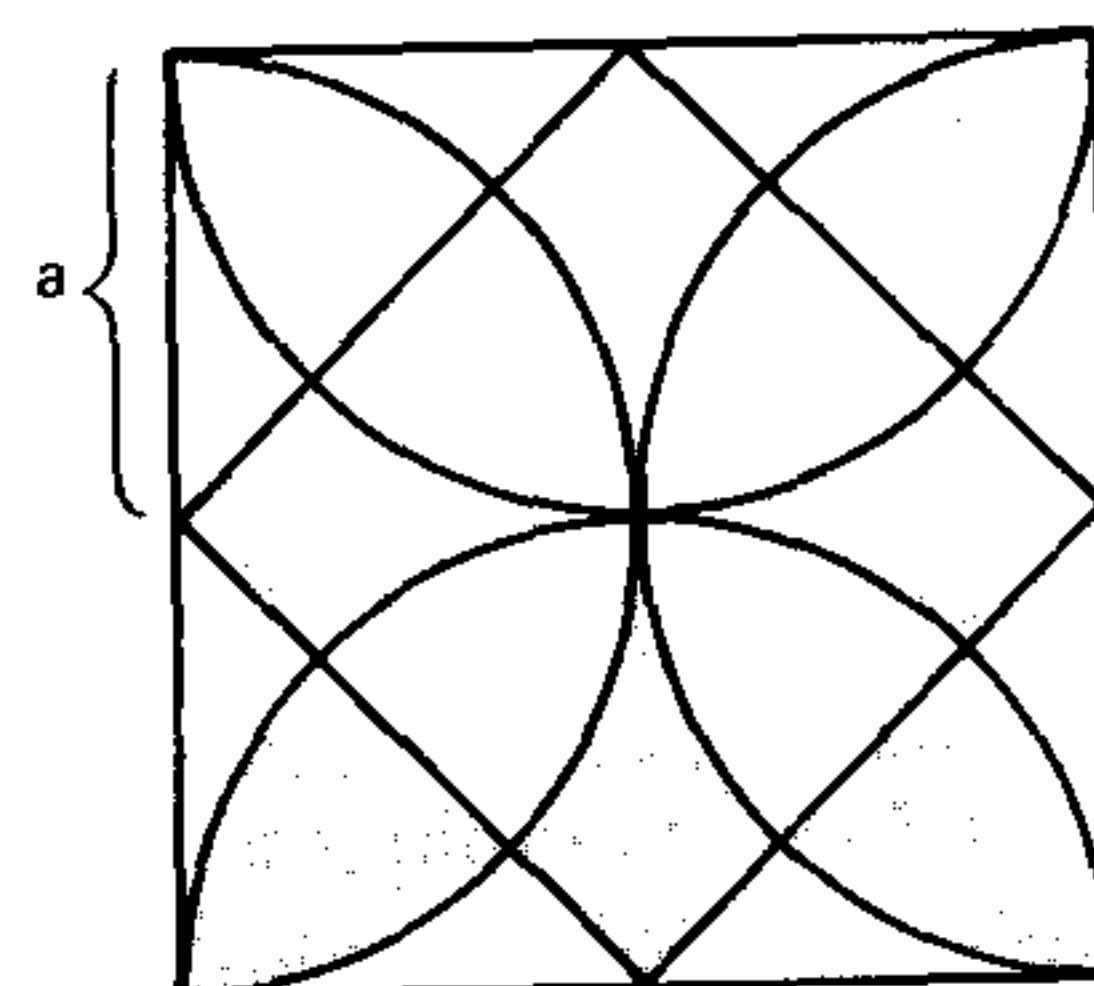
a) 36° d) 60°
b) 45° e) 75°
c) 52° 30′

315. (U.MACK.-75) A área do trapézio da figura é 12. A área da parte sombreada é:

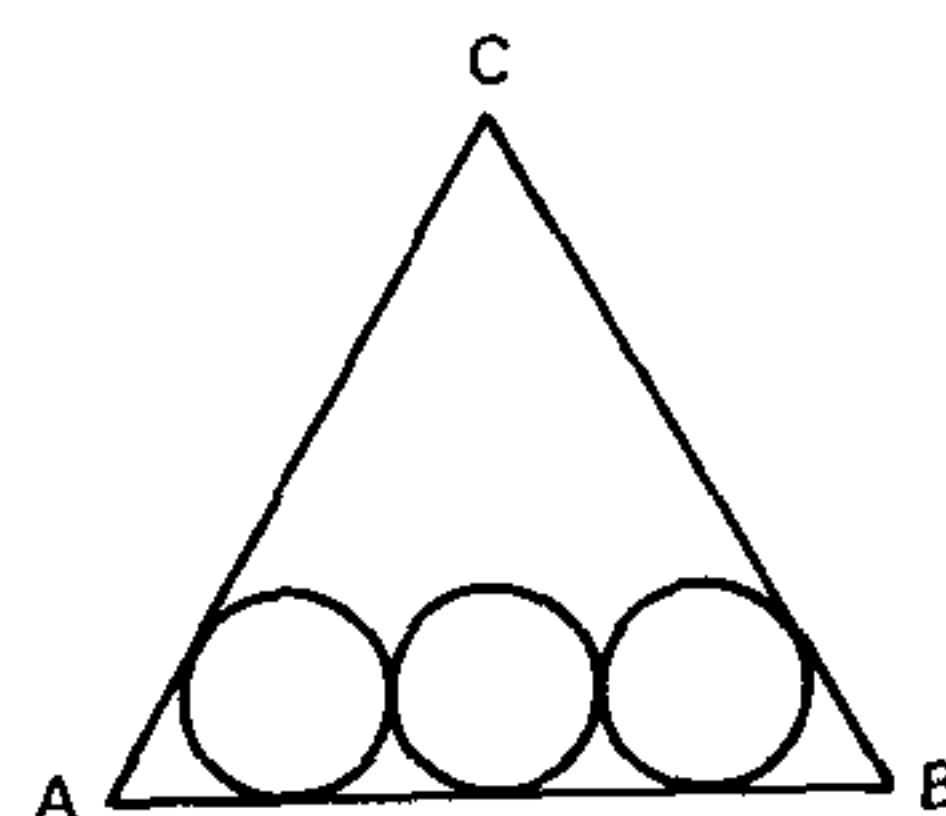
a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

316. (U.MACK.-75) Os lados de um triângulo são $a = 13$, $b = 14$ e $c = 15$. Os lados a e b são tangentes a uma circunferência cujo centro está sobre o lado c. O raio dessa circunferência é:

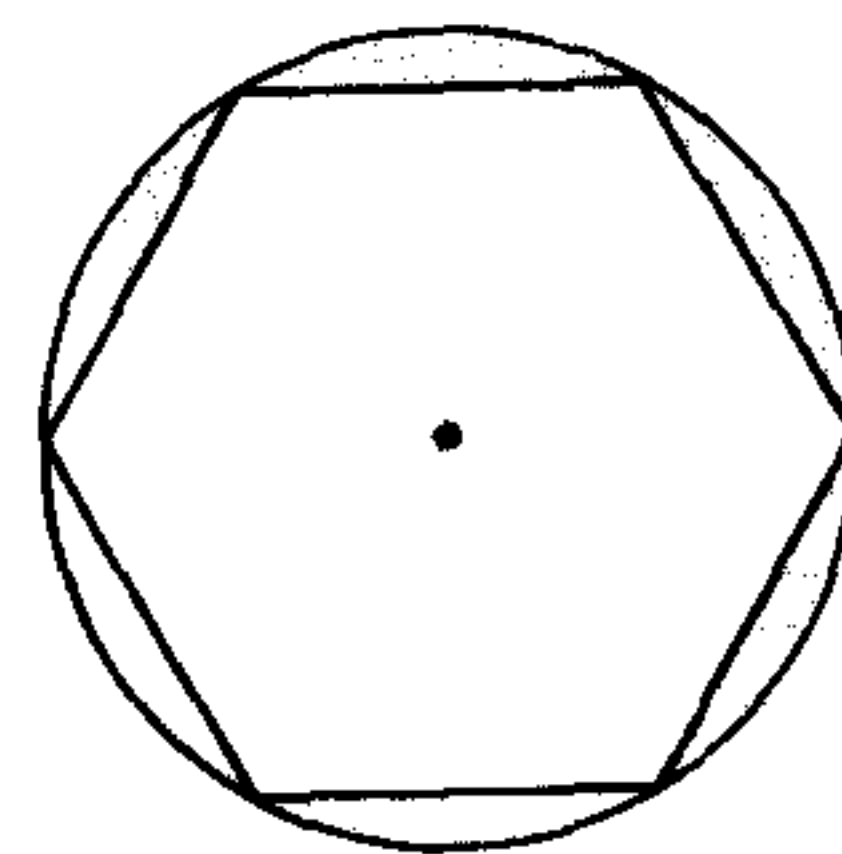
a) $\frac{56}{9}$
b) $\frac{47}{3}$
c) $\frac{28}{11}$
d) 7
e) 19

317. (CESCEM-77) Sendo A a área de um quadrado inscrito em uma circunferência, a área de um quadrado circunscrito à mesma circunferência é:

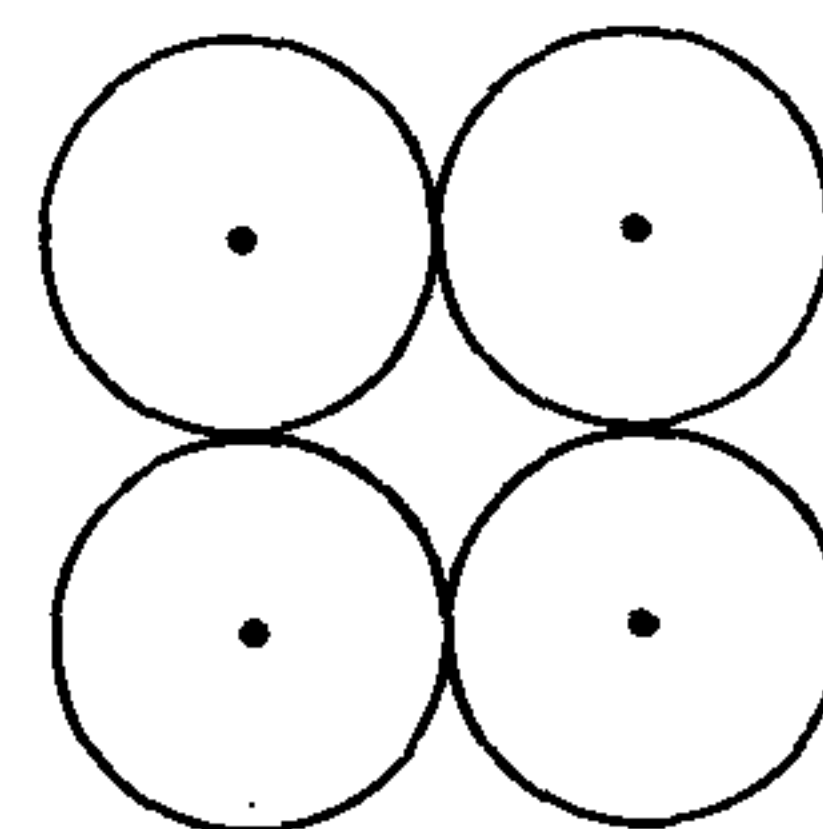
a) 4A b) 2A c) $\frac{4}{3}$A d) $\sqrt{2}$A e) 1,5A

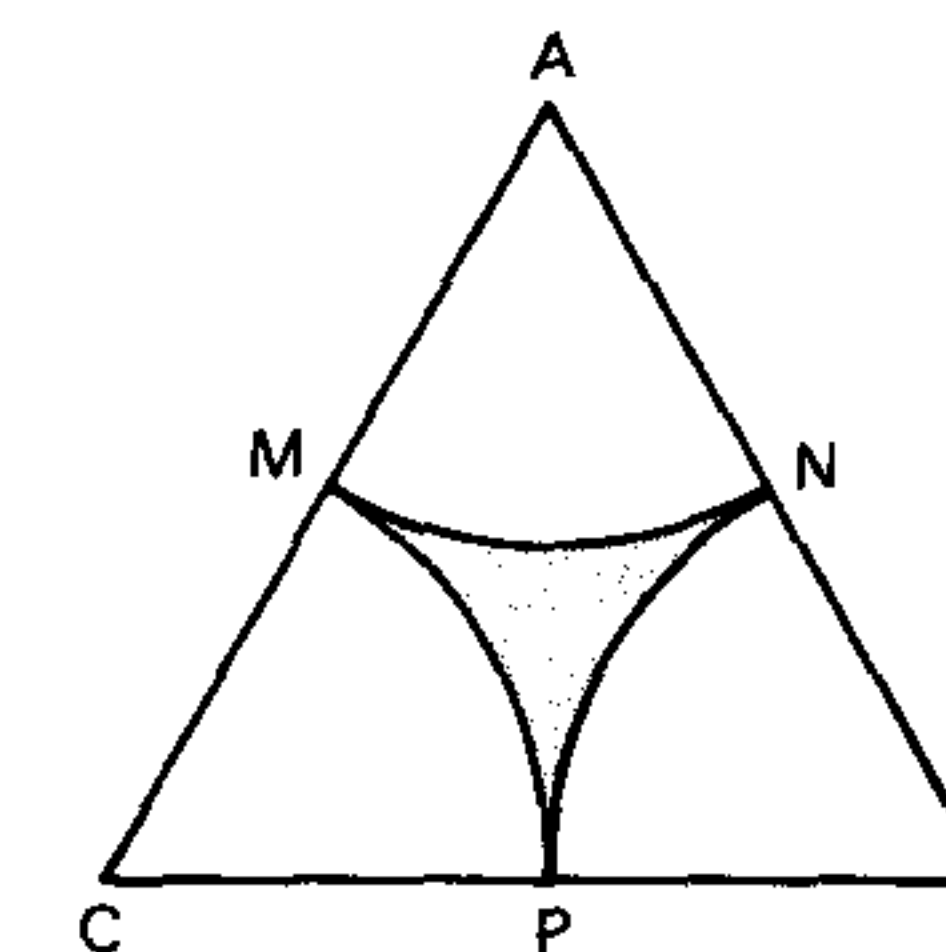
318. (U.MACK.-77) A área da parte sombreada vale:
(A figura contém semicircunferências de raio a e centro nos vértices do quadrado menor.)

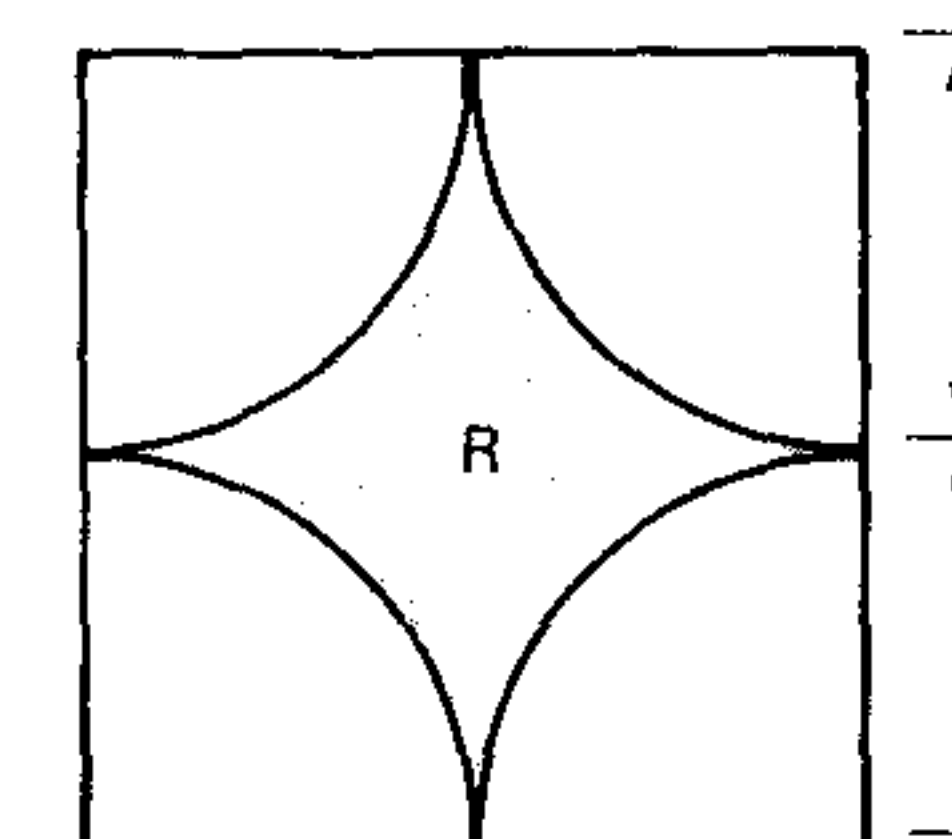
a) $a^2(4-\pi)$
b) $a^2(\pi-2)$
c) $2a^2$
d) πa^2
e) não sei

319. (U.MACK.-77) Se a soma das áreas dos três círculos de mesmo raio é 3π, a área do triângulo equilátero ABC é:

a) $7\sqrt{3}+12$
b) $7+4\sqrt{3}$
c) $19\sqrt{3}$
d) $11\sqrt{3}$
e) não sei

320. (CESCEM-78) A figura ao lado representa um hexágono regular, inscrito num círculo de centro O e raio $8\sqrt{2}$. A área da região assinalada na figura é:

a) $48\pi-32\sqrt{3}$
b) $64\pi-192\sqrt{3}$
c) $96\pi-32\sqrt{3}$
d) $128\pi-192\sqrt{3}$
e) $136\pi-32\sqrt{3}$

321. (U.MACK.-78) Quatro círculos de raio unitário, cujos centros são vértices de um quadrado, são tangentes exteriormente dois a dois. A área da parte sombreada é:

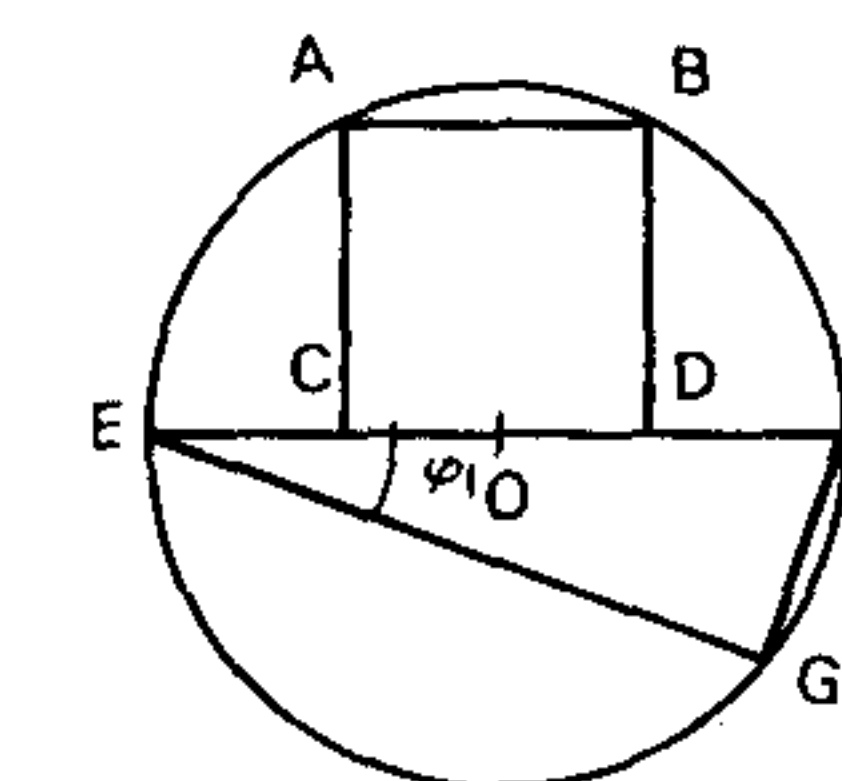
a) $2\sqrt{3}-\pi$
b) $3\sqrt{2}-\pi$
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $4-\pi$
e) $5-\pi$

322. (FUVEST-78) Na figura abaixo ABC é um triângulo equilátero de lado igual a 2. $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$ e $\widehat{PM}$ são arcos de circunferências com centros nos vértices A, B e C, respectivamente, e de raios todos iguais a 1. A área da região sombreada é:

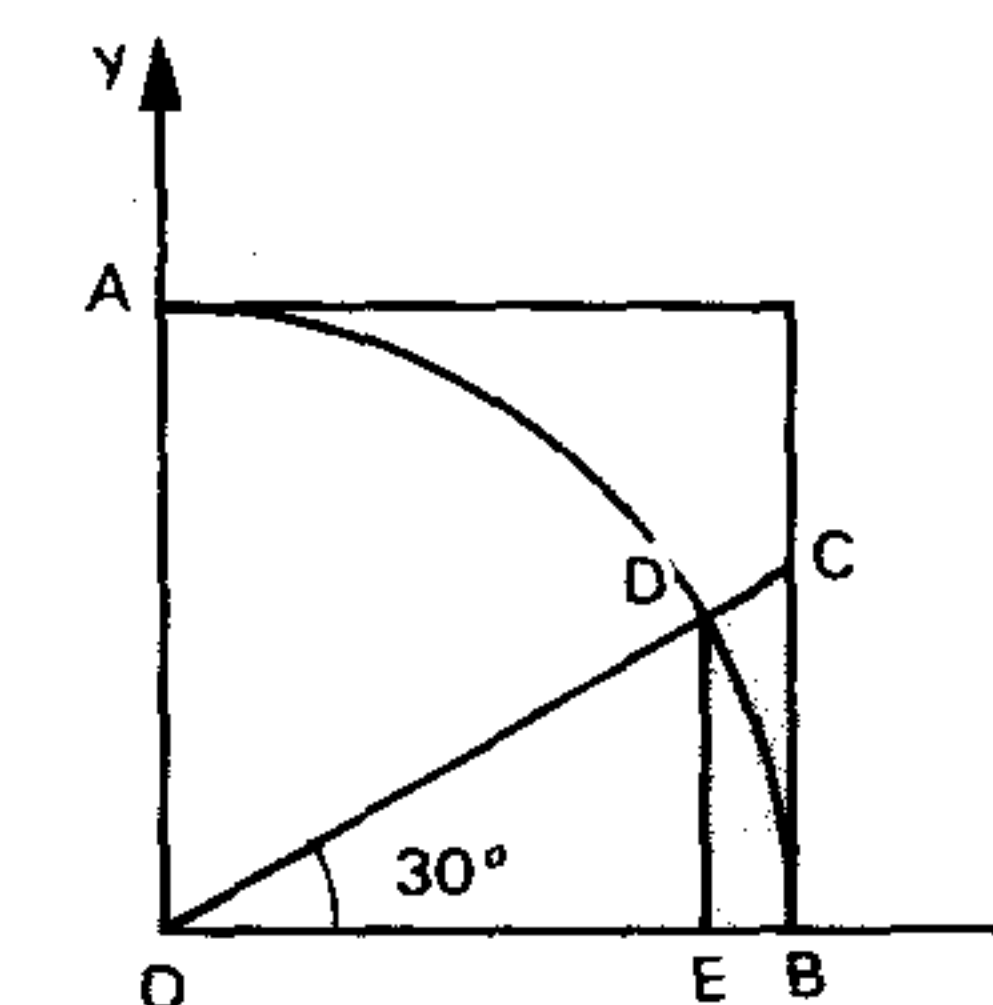
a) $\sqrt{3}-\frac{3\pi}{4}$
b) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$
c) $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$
d) $4\sqrt{3}-2\pi$
e) $8\sqrt{3}-3\pi$

323. (CESGRANRIO-80) A região sombreada R da figura é limitada por arcos de circunferência centrados nos vértices do quadrado de lado 2ℓ. A área de R é:

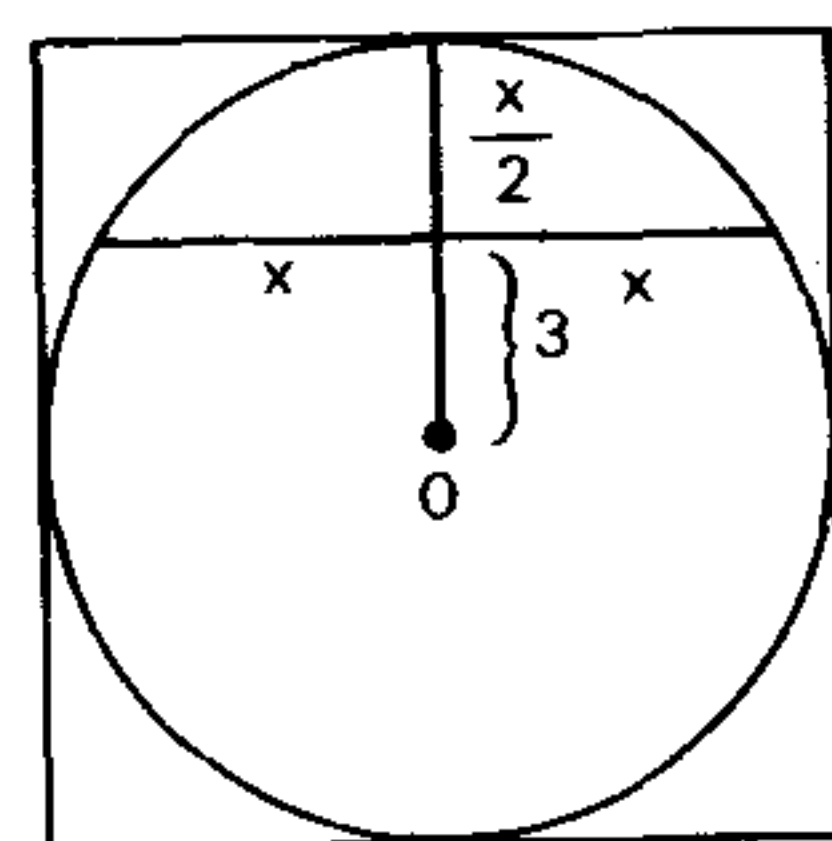
a) $\frac{\pi\ell^2}{2}$
b) $(\pi-2\sqrt{2})\ell^2$
c) $\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\ell^2$
d) $(4-\pi)\ell^2$
e) $\sqrt{2}\,\ell^2$

324. (U.F.GO-80) A área máxima da região limitada por um triângulo retângulo inscrito em um círculo de raio R é:

a) $2R^2$ b) πR^2 c) R^2 d) $\frac{R^2}{2}$ e) $2\pi R^2$

325. (V.UNIF.RS-80) Na figura $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{OG}$, $ABCD$ é um quadrado de área 80, C e D pertencem ao diâmetro EF e o ângulo φ ($\measuredangle$ FEG) mede $\pi/6$ rad.
A área do triângulo EFG é:

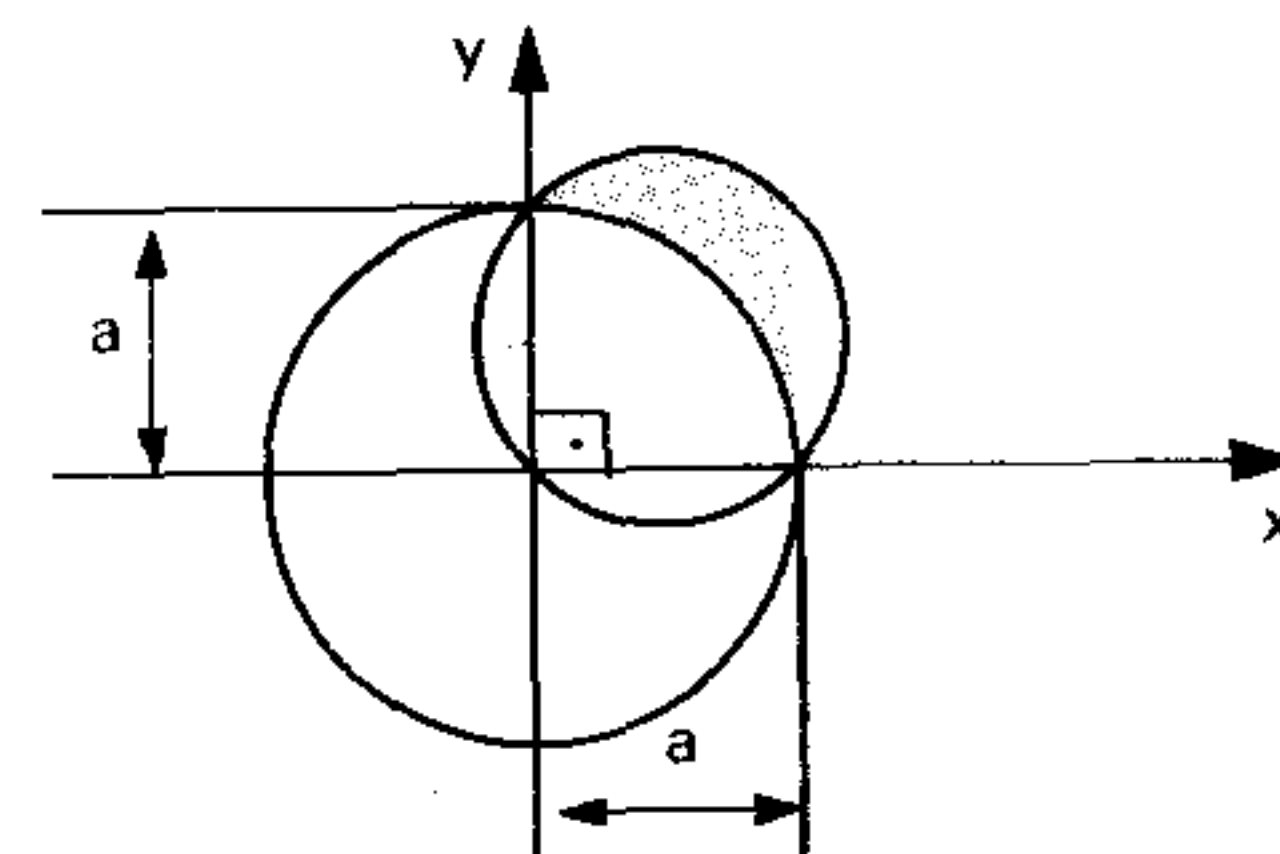
a) $40\sqrt{3}$
b) $50\sqrt{3}$
c) $80\sqrt{3}$
d) 80
e) 100

326. (V.UNIF.RS-80) Na figura, $\widehat{AB}$ é um arco de uma circunferência de raio 1. A área do trapézio retângulo $BCDE$ é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{24}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{18}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{12}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

327. (U.MACK.-80) Na figura, a área do quadrado de centro O é:

a) 10
b) 16
c) 25
d) 100
e) 2 500

328. (CESGRANRIO-80) Um círculo de área C e um triângulo equilátero de área T têm o mesmo perímetro. A razão $\frac{C}{T}$ vale:

a) 1 b) $\frac{9}{\pi}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ d) $\frac{8}{\pi}$ e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

329. (F.C.M.STA.CASA-80) Na figura ao lado, considere o segmento $a = 2\ m$. A área da superfície sombreada é igual a:

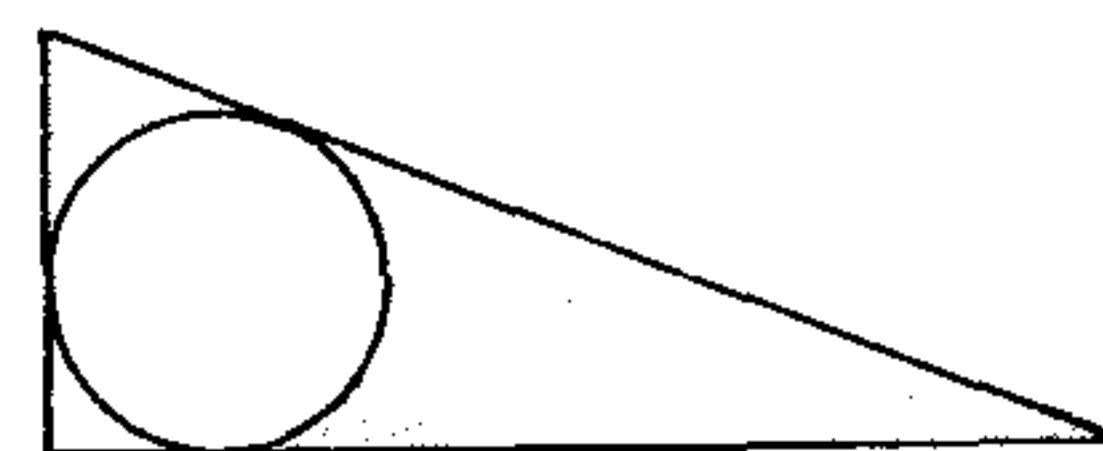
a) $2\pi\ m^2$
b) $4\ m^2$
c) $2\ m^2$
d) $\pi\ m^2$
e) n.d.a.

330. (PUC-SP-81) Os diâmetros das pizzas grande e média são *40 cm* e *36 cm*, respectivamente. Qual deve ser o preço da média se a grande custa *Cz$ 200,00* e os preços são proporcionais às áreas das pizzas?

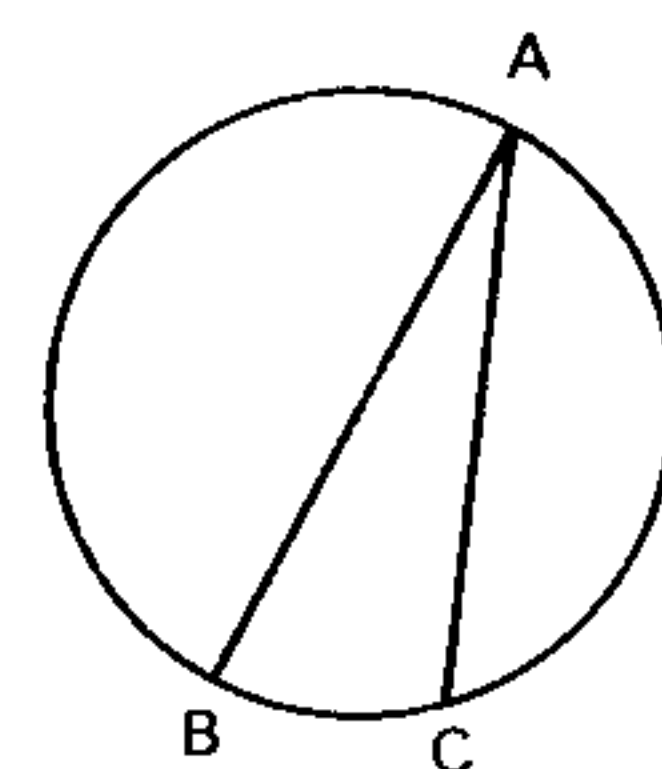
a) Cz$ 155,00 b) Cz$ 162,00 c) Cz$ 174,00 d) Cz$ 185,00 e) Cz$ 190,00

331. (U.F.MG-81) A área de uma coroa circular de raios r e R, sendo $r < R$, é:

a) $\pi(R - r)^2$
b) $\pi(R + r)^2$
c) $\pi(R^2 + r^2)$
d) $\pi(R - r)(R + r)$
e) $2\pi(R - r)$

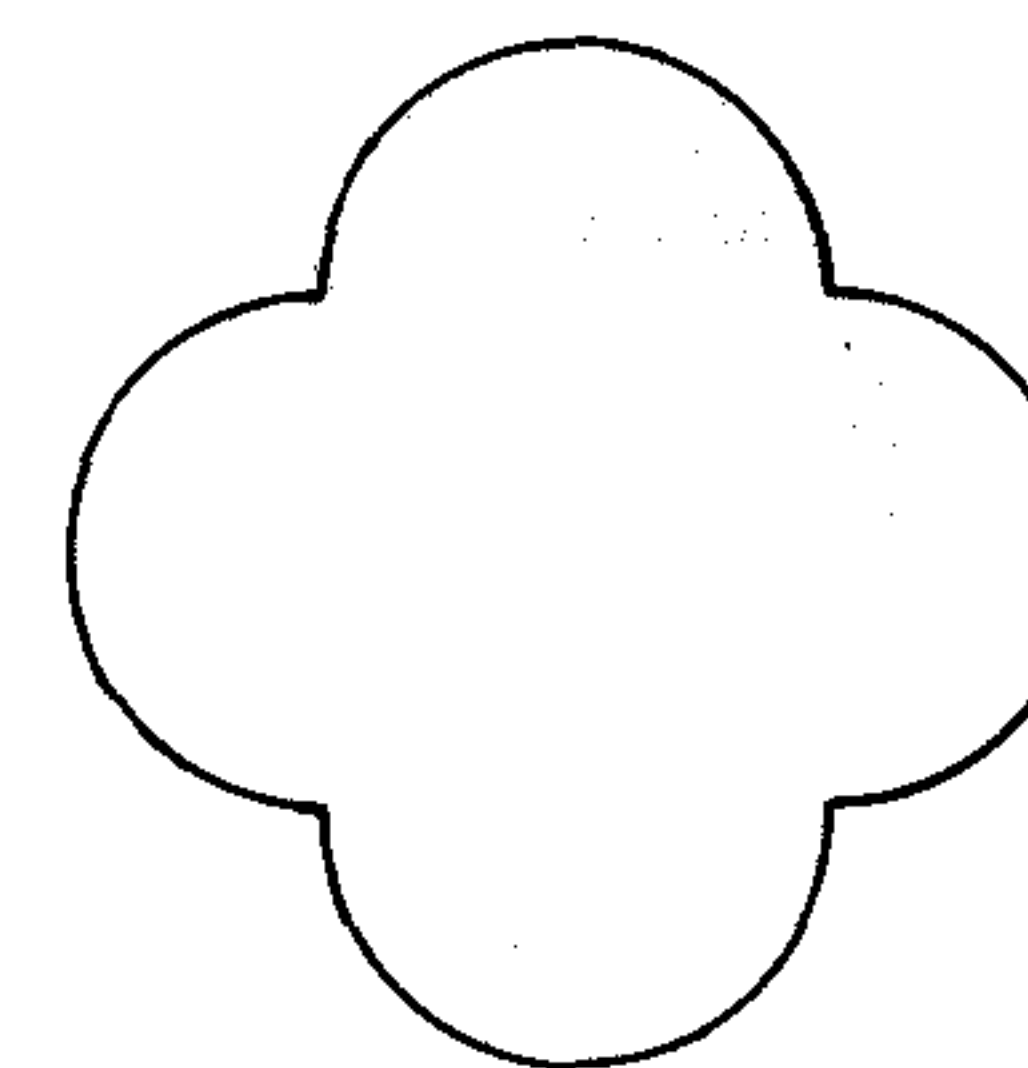
332. (F.C.M.STA.CASA-81) Na figura ao lado temos o triângulo retângulo cujos lados medem *5 cm, 12 cm* e *13 cm* e a circunferência inscrita nesse triângulo. A área da região sombreada é, em cm^2:

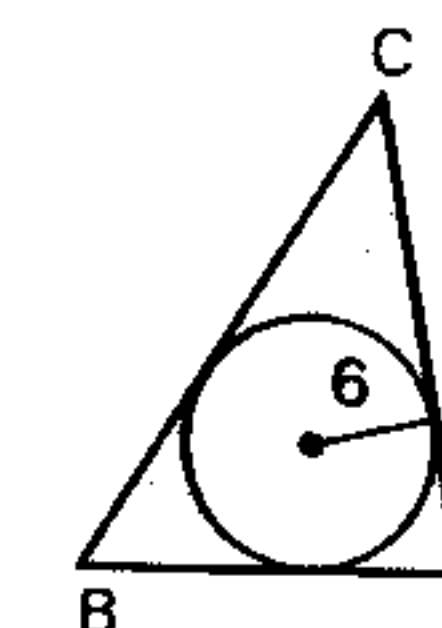
a) $30(1 - \pi)$
b) $5(6 - 1{,}25\pi)$
c) $3(10 - 3\pi)$
d) $2(15 - 8\pi)$
e) $2(15 - 2\pi)$

333. (U.F.UBERLÂNDIA-81) Na figura abaixo, AB é o diâmetro de um círculo de raio *7,5 cm*. Se $AC = 10\ cm$, a área do triângulo ABC vale:

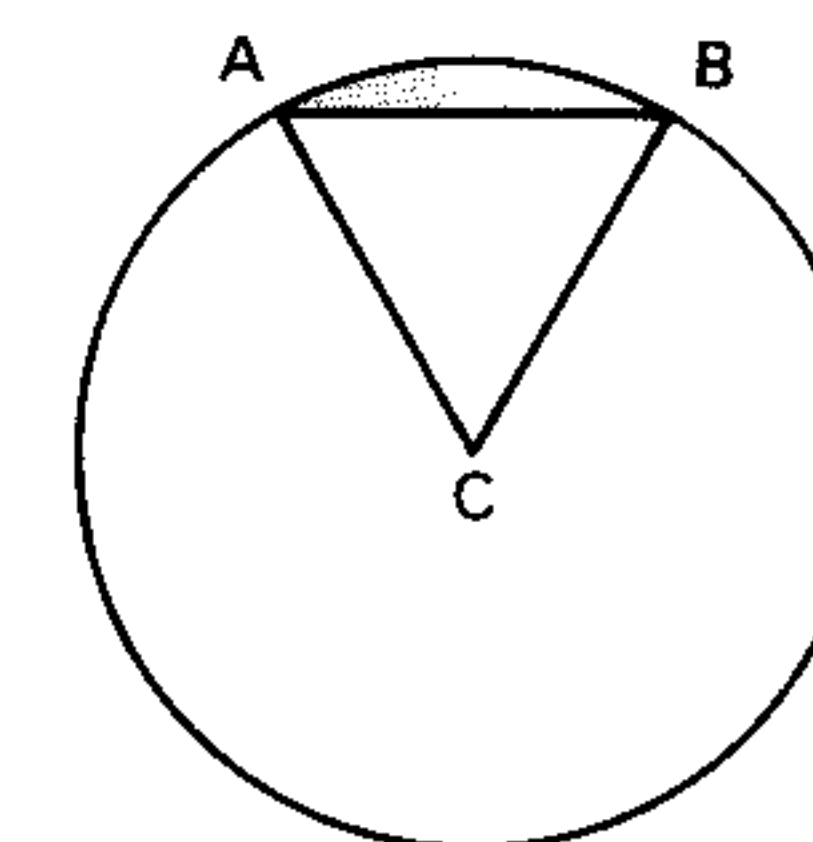
a) $5\sqrt{5}\ cm^2$
b) $75\sqrt{5}\ cm^2$
c) $15\sqrt{5}\ cm^2$
d) $25\sqrt{5}\ cm^2$
e) $35\sqrt{5}\ cm^2$

334. (PUC-RJ-81) Dados dois discos concêntricos, de raios 1 e $\frac{1}{2}$, a área da coroa circular compreendida entre eles é:

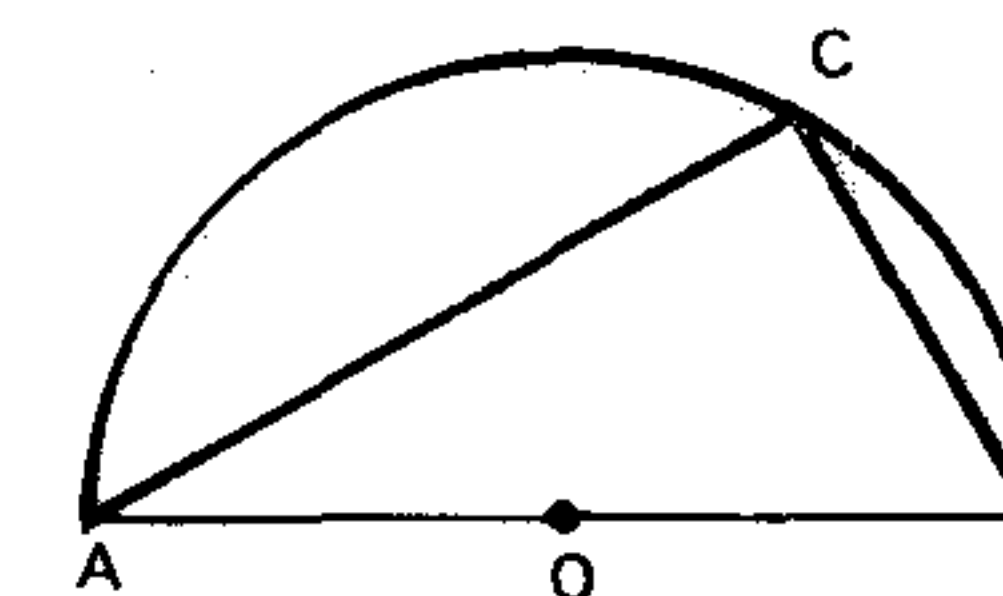
a) *50%* da área do disco menor.
b) *75%* da área do disco maior.
c) igual à área do disco menor.
d) o dobro da área do disco menor.
e) a metade da área do disco menor.

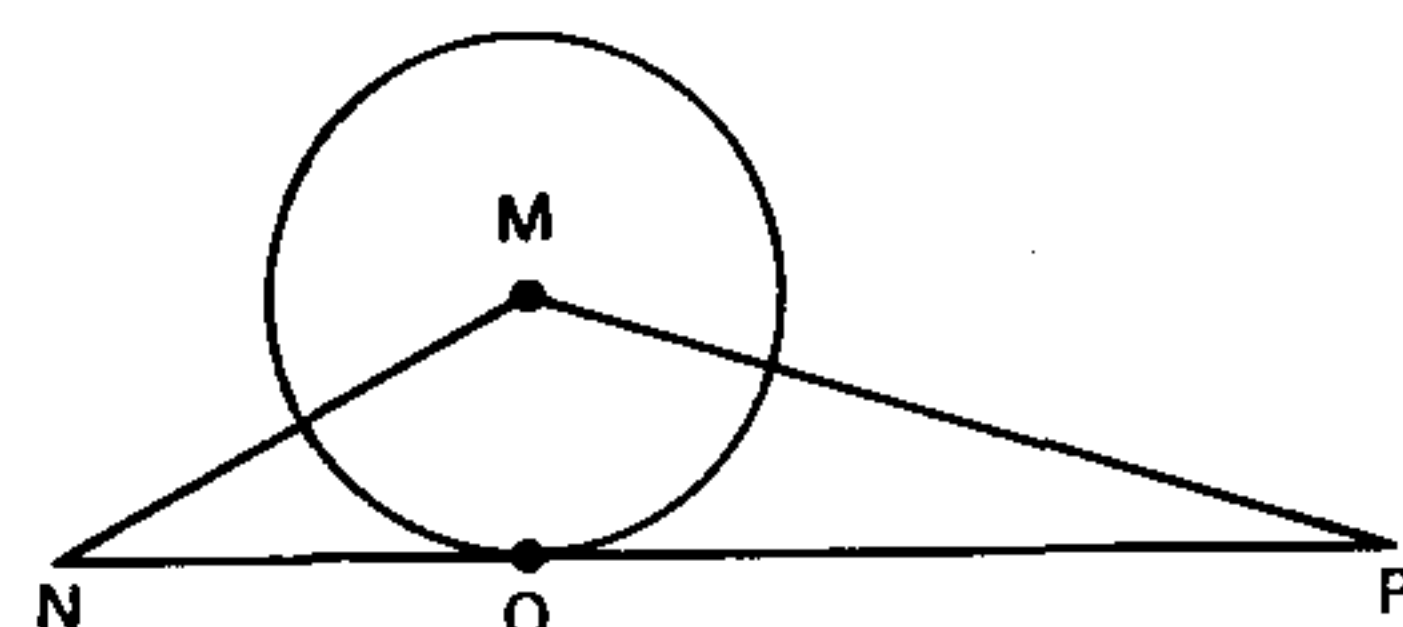
335. (U.F.RS-81) A região representada na figura é limitada por *4* semicircunferências de raio R. A área da região é:

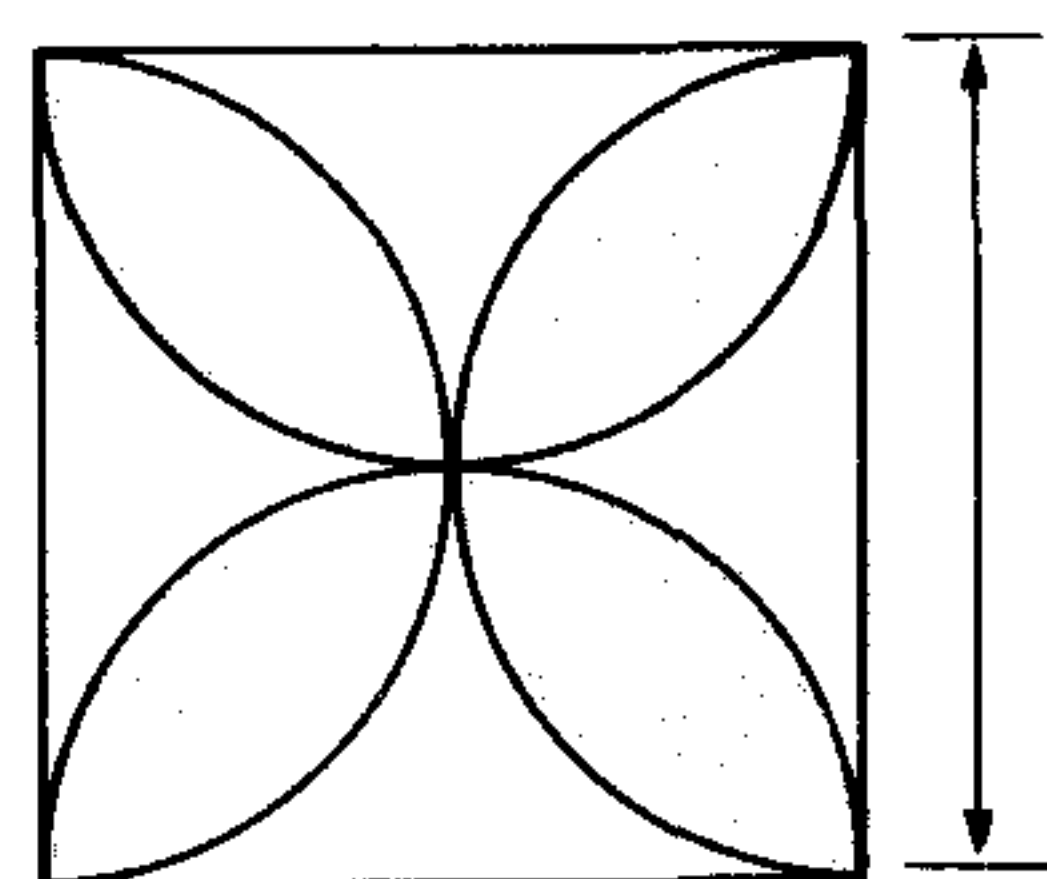
a) $4R^2(\pi + 1)$
b) $2R^2(\pi + 2)$
c) $R^2(2\pi + 1)$
d) $4\pi R^2$
e) $2\pi R^2$

336. (U.FORTALEZA-82) Considere um triângulo ABC e a circunferência nele inscrita, como na figura abaixo. Se o raio do círculo é *6 cm* e o perímetro do triângulo é *P cm*, então a área do triângulo, em cm^2, é:

a) P
b) 2P
c) 3P
d) 4P

337. (F.C.M.STA.CASA-82) Na figura ao lado, tem-se uma circunferência de centro C, cujo raio mede *8 cm*. O triângulo ABC é equilátero e os pontos A e B estão na circunferência. A área da região sombreada, em cm^2, é:

a) $\frac{16(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}$
b) 64π
c) $32(\pi - 1)$
d) $96\sqrt{3}$
e) $16(4\pi - \sqrt{3})$

338. (CESGRANRIO-82) O triângulo ABC está inscrito no semicírculo de centro O e diâmetro $AB = 2$. Se o ângulo $C\hat{A}B = 30°$, a área da região sombreada é:

a) $\frac{\pi}{3}$
b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$
d) $\pi - 2$
e) $\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}$

339. (U.E.CE-82) Seja MNP um triângulo de área igual a $24\ cm^2$. Se $\overline{NP} = 8\ cm$, então a área, em cm^2, do círculo centrado em M e tangente ao lado NP em Q é:

a) 16π
b) 18π
c) 32π
d) 36π

340. (U.F.ES-82) A figura sombreada abaixo é limitada por semicircunferências e inscrita num quadrado de lado $\ell = 2\ m$. Sua área vale:

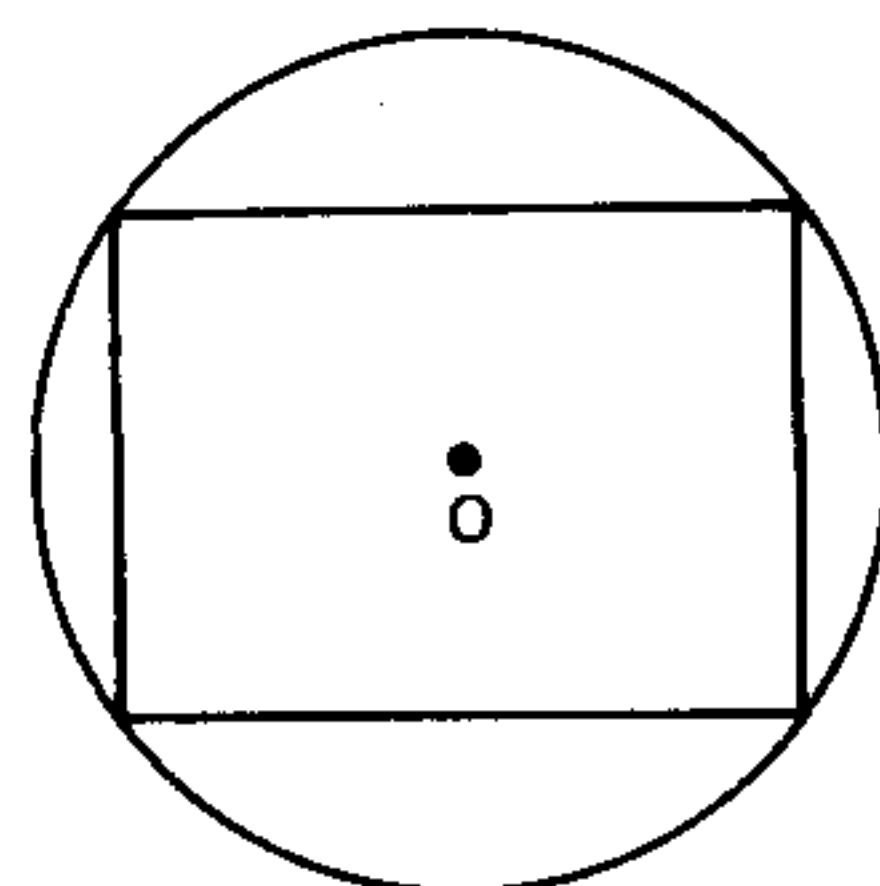
a) $2\ m^2$
b) $(4 - \pi)\,m^2$
c) $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) m^2$
d) $(2\pi - 4)\,m^2$
e) $(\pi - 2)\,m^2$

341. (U.F.RS-84) A área da coroa limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um quadrado de lado 3 é:

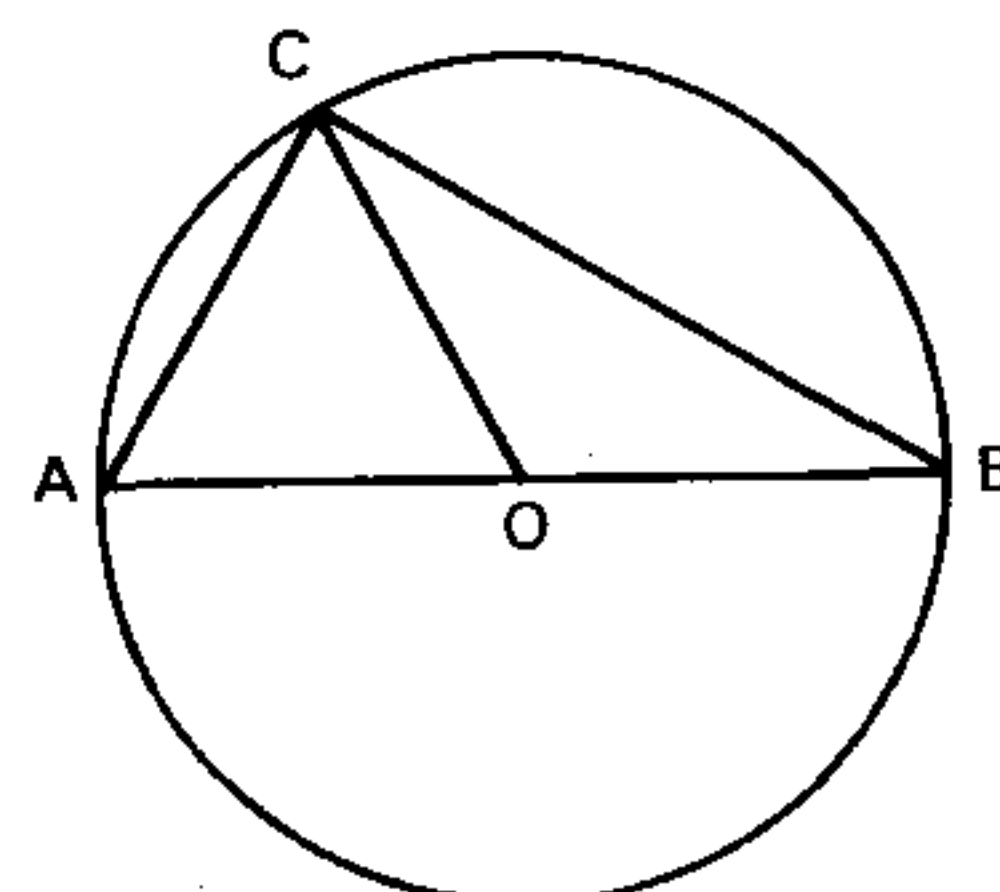
a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 2π d) $\frac{9\pi}{4}$ e) $\frac{9\pi}{2}$

342. (U.F.RN-84) Se a área de um círculo é igual a $4\pi\ cm^2$, então a área do quadrado circunscrito vale:

a) $8\ cm^2$ b) $10\ cm^2$ c) $12\ cm^2$ d) $14\ cm^2$ e) $16\ cm^2$

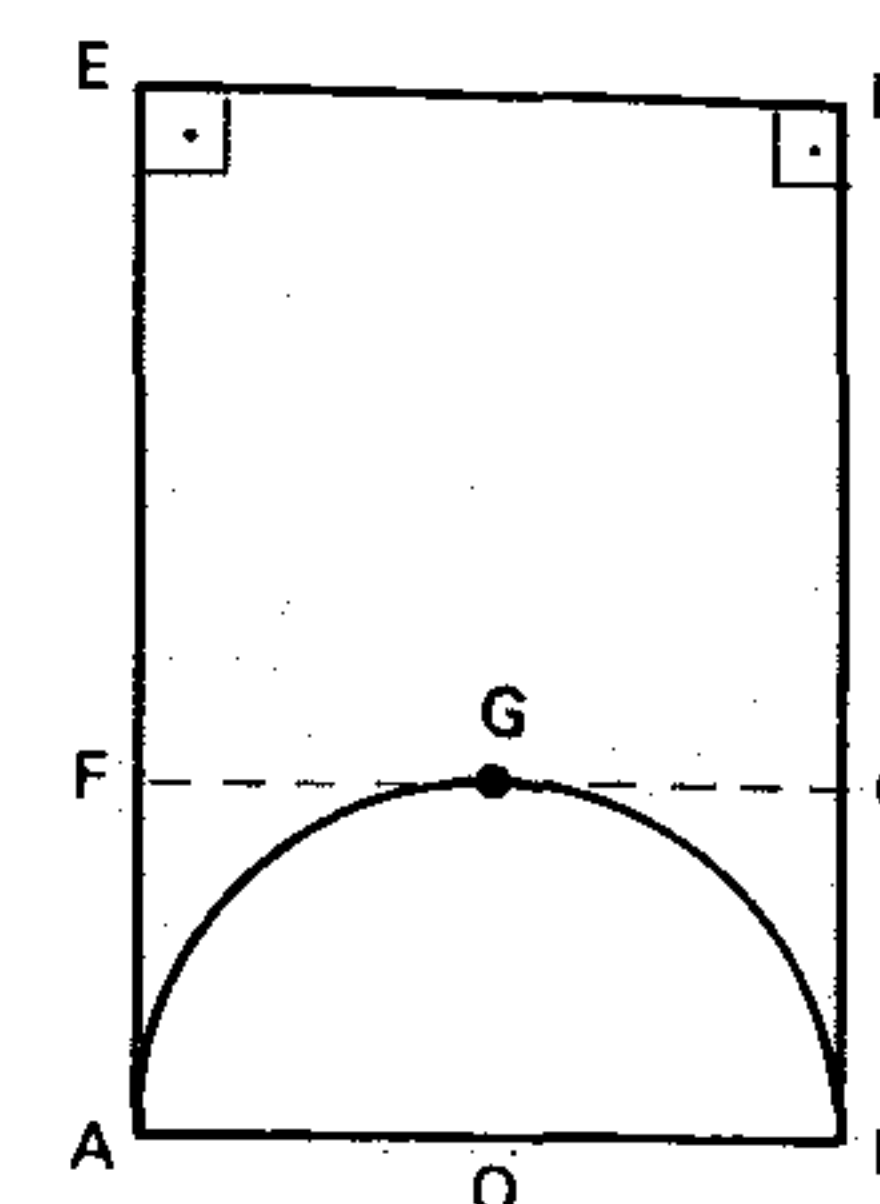
343. (U.E.LONDRINA-84) Os lados do retângulo representado na figura ao lado medem $6\ cm$ e $8\ cm$. A área do círculo limitado pela circunferência que o circunscreve, em cm^2, é:

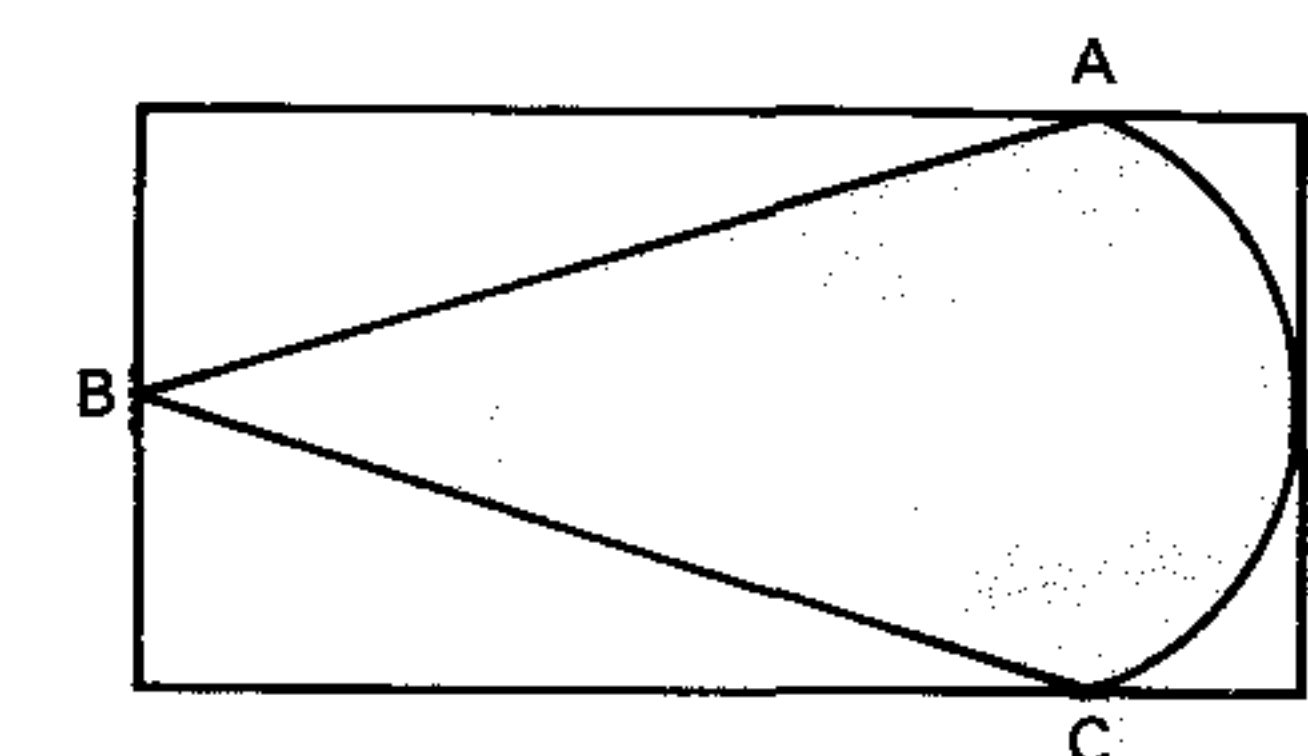
a) 5π
b) 10π
c) 25π
d) 50π
e) 100π

344. (CESGRANRIO-84) AB é o diâmetro do círculo de centro O no qual o triângulo ABC está inscrito. A razão $\frac{s}{S}$ entre as áreas s do triângulo ACO e S do triângulo COB é:

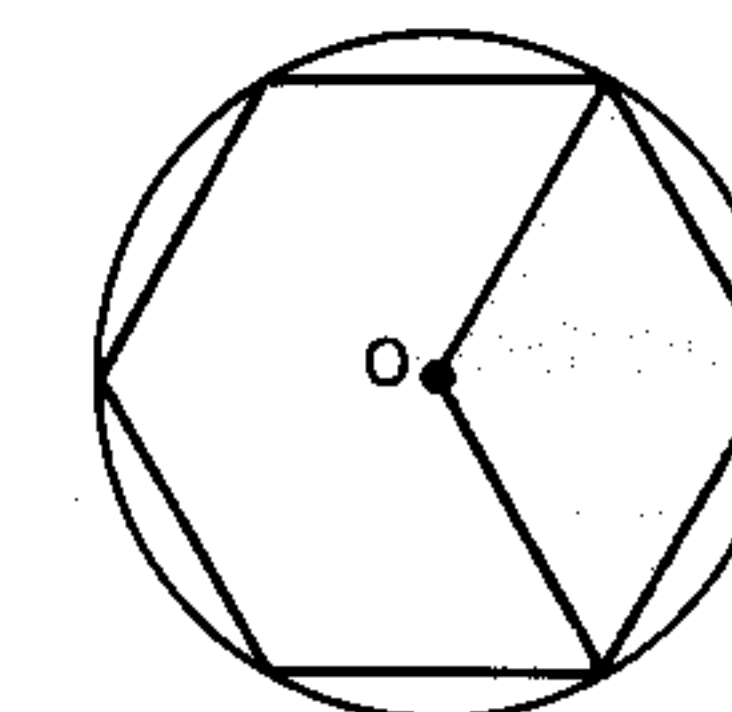
a) $\frac{5}{4}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{3}{4}$
d) 1
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

345. (U.F.RS-84) O segmento AB é uma corda do círculo de centro O e diâmetro 12, com o ângulo AOB medindo $150°$. A área do triângulo AOB é:

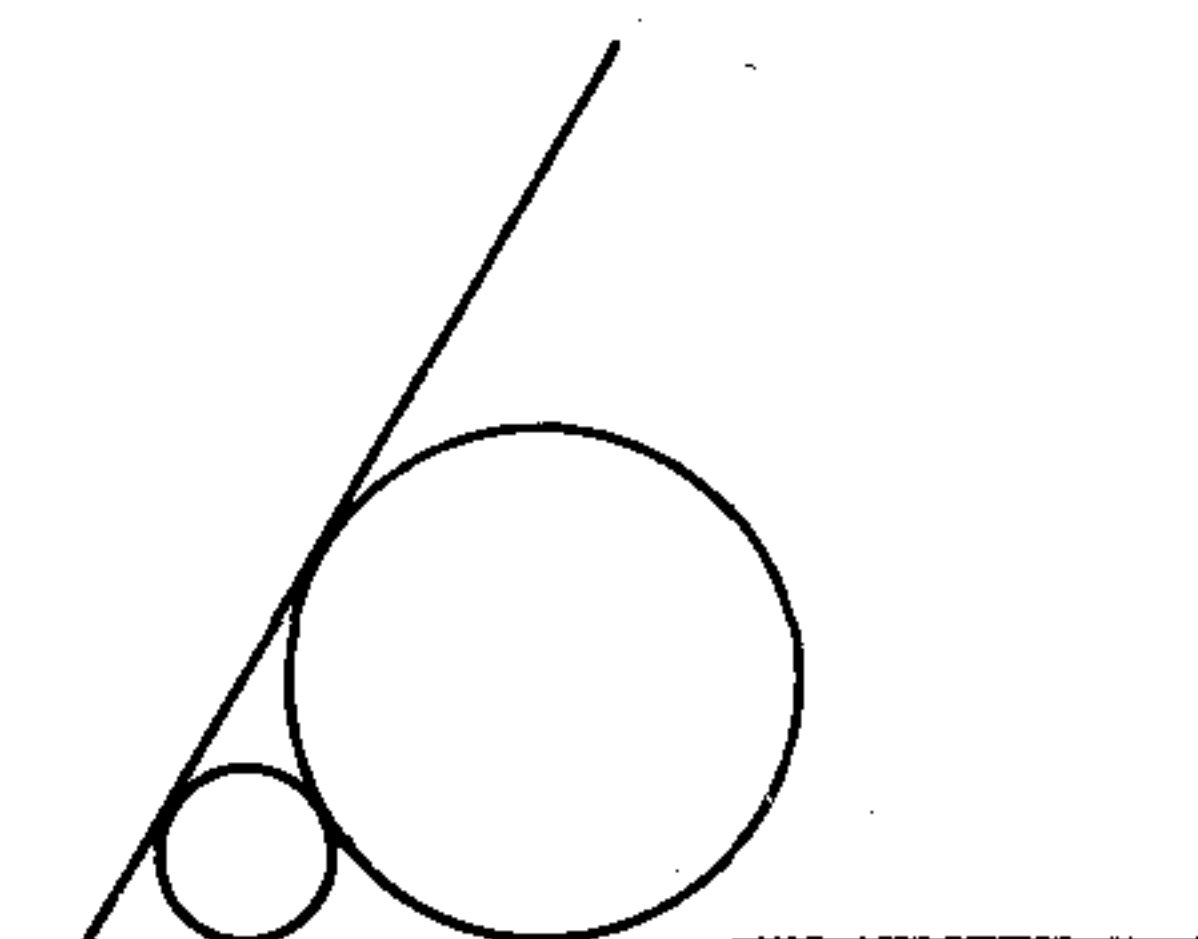
a) 9 b) $9\sqrt{2}$ c) $9\sqrt{3}$ d) 18 e) 6

346. (U.E.BA-84) Na figura ao lado, temos que o arco $\overset{\frown}{AGB}$ é uma semicircunferência de raio $3\ cm$; $BC = \frac{1}{3} BD$ e $\overline{AB} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FC}$. A área da região sombreada, em cm^2, é:

a) $54 - 9\pi$
b) $27 - 9\pi$
c) $\frac{54 - 9\pi}{2}$
d) 36
e) $\frac{108 - 9\pi}{2}$

347. (U.F.RS-84) Na figura, o triângulo ABC é equilátero, e ADC é um semicírculo. O perímetro da região sombreada é $4 + \pi$. A área do retângulo circunscrito é:

a) $2(\sqrt{3} + 5)$
b) $2(\sqrt{3} + 1)$
c) $(\sqrt{3} + 1)$
d) 4
e) 3

348. (U.E.BA-84) Seja o hexágono regular inscrito na circunferência de centro O e raio $6\ cm$, conforme a figura abaixo. A área da região sombreada, em cm^2, é:

a) $9\sqrt{3}$
b) $12\sqrt{3}$
c) $15\sqrt{3}$
d) $18\sqrt{3}$
e) $20\sqrt{3}$

349. (CESGRANRIO-84) Considere os círculos tangentes da figura, cujas tangentes comuns exteriores formam um ângulo de $60°$. A razão entre as áreas do menor e do maior círculo é:

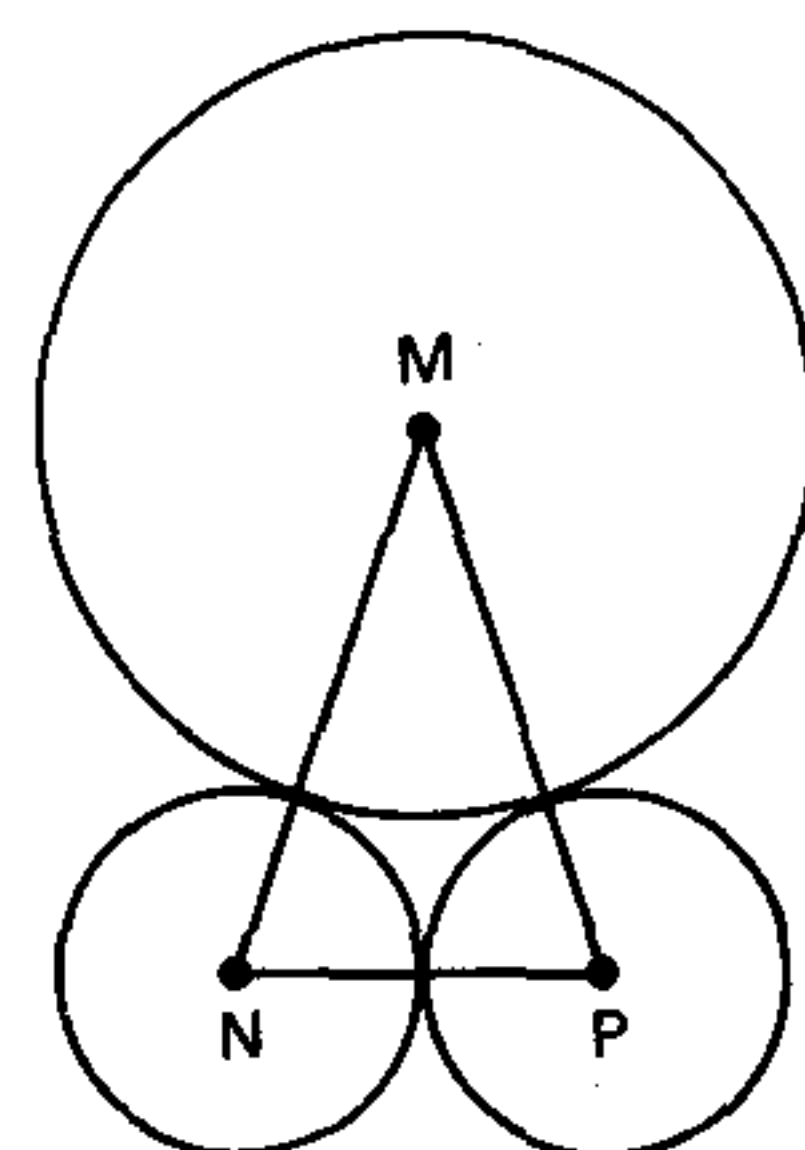
a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{1}{9}$

350. (U.F.RN-84) Considere 3 circunferências, tangentes duas a duas e de raios unitários. Se M, N e O são os seus centros, então a área do triângulo MNO vale:

a) 2 b) 3 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

351. (U.F.PA-85) A área de um círculo é $5\pi\ cm^2$. Sua circunferência mede:

a) 10π cm
b) 5π cm
c) $\frac{5}{2}$ cm
d) $\sqrt{5\pi}$ cm
e) $2\sqrt{5\pi}$ cm

352. (CESGRANRIO-85) As circunferências da figura, de centros M, N e P, são mutuamente tangentes. A maior tem raio 2 e as outras duas têm raio 1. Então a área do triângulo MNP é:

a) $\sqrt{6}$
b) $\frac{5}{2}$
c) 3
d) $2\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{2}$

353. (UNICAP-87) O círculo cujo raio mede o mesmo que o lado do quadrado de perímetro $12\sqrt{2}\ cm$ tem área igual a:

a) $18\pi\ cm^2$ b) $36\pi\ cm^2$ c) $24\pi\ cm^2$ d) $12\pi\ cm^2$ e) $6\pi\ cm^2$

354. (FUVEST-87) Um comício político lotou uma praça semicircular de $130\ m$ de raio. Admitindo uma ocupação média de 4 pessoas por m^2, qual é a melhor estimativa do número de pessoas presentes?

a) Dez mil.
b) Cem mil.
c) Meio milhão.
d) Um milhão.
e) Muito mais do que um milhão.

355. (UNICAP-87) A área do hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio R é, em unidade de área:

a) $R^2\sqrt{3}$ b) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\pi R^2\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\pi R^2}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

356. (CESGRANRIO-87) De uma placa circular de raio 3, recorta-se um triângulo retângulo de maior área possível. A área do restante da placa vale:

a) $9\pi - 9$ b) $6\pi - 9$ c) $9\pi - 10$ d) $9\pi - 12$ e) $6\pi - 6$

357. (ITA-88) Considere as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero de lado ℓ. A área da coroa circular formada por estas circunferências é dada por:

a) $\frac{\pi}{4}\ell^2$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}\pi\ell^2$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\ell^2$ d) $\sqrt{3}\pi\ell^2$ e) $\frac{\pi}{2}\ell^2$

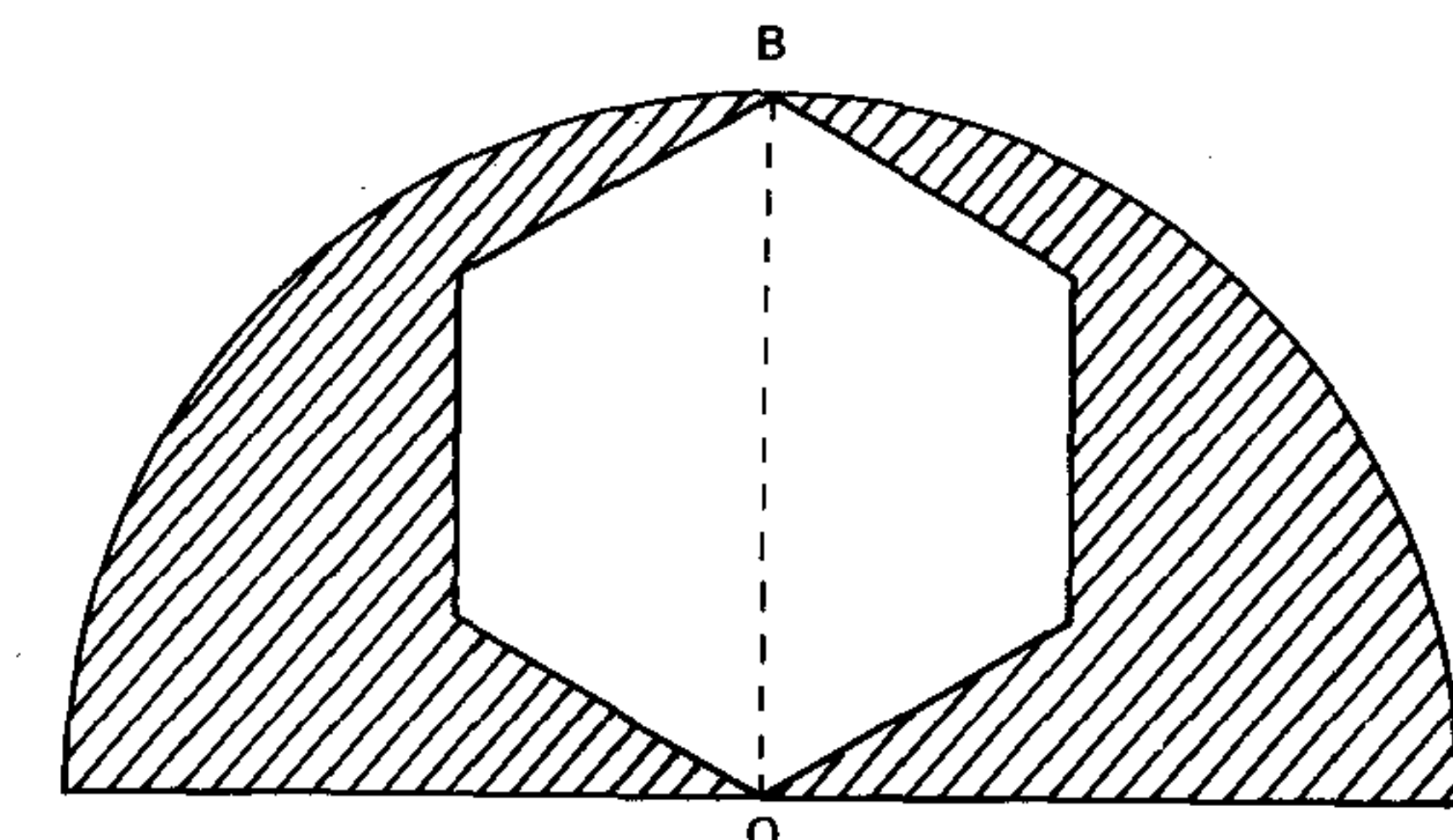
358. (FATEC-89) Dado um círculo de raio R, medido em cm, para que a área desse círculo tenha um acréscimo de $8\pi R^2\ cm^2$, o raio deve aumentar:

a) R cm b) 2R cm c) 3R cm d) 4R cm e) 5R cm

359. (COVEST-89) Se o comprimento do raio de um círculo é aumentado em 30% de seu valor, então a sua área aumenta em:

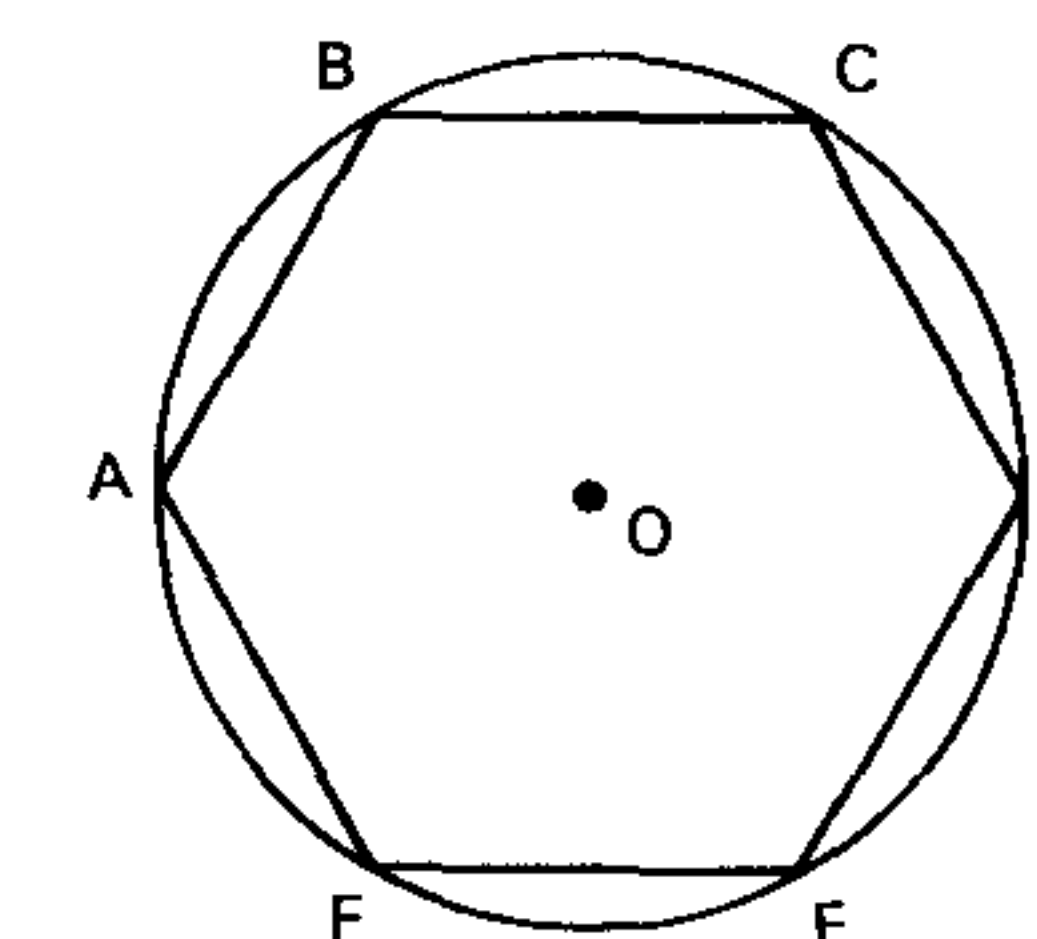
a) 60% b) 69% c) 80% d) 35% e) 43%

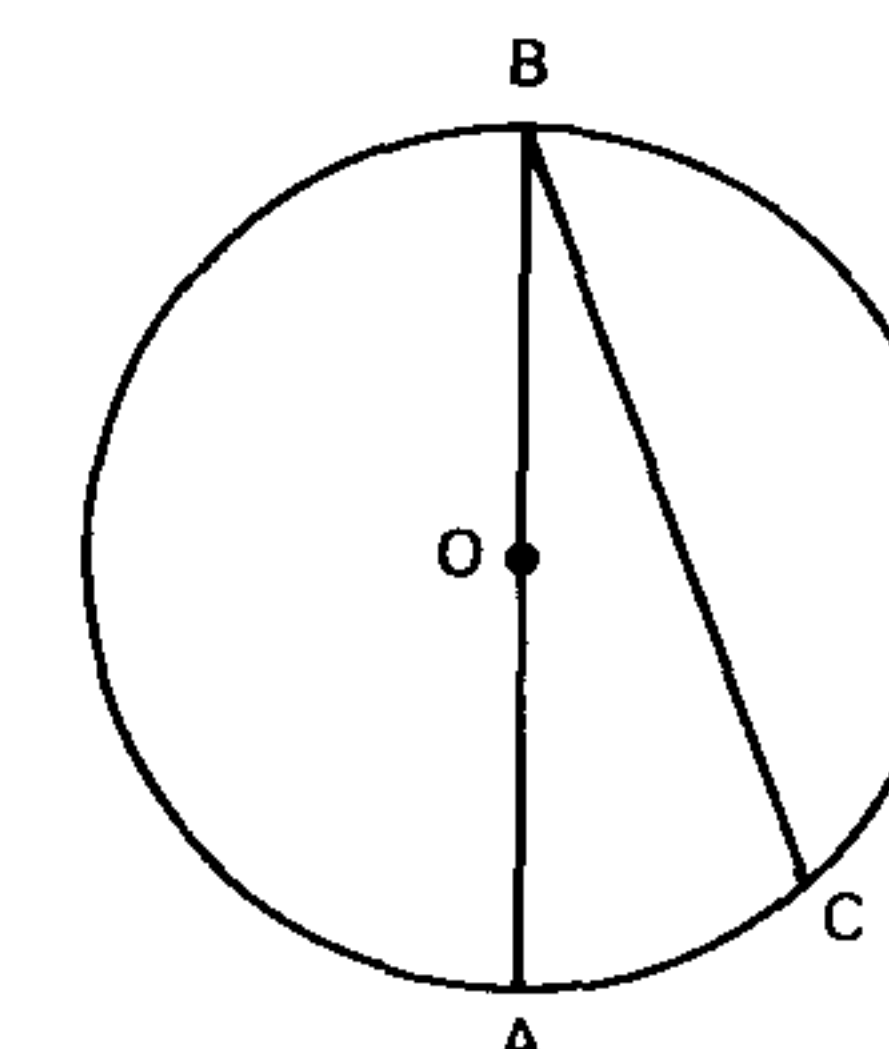
360. (COVEST-89) Na figura abaixo, o raio da semicircunferência mede $4\ cm$; o polígono é um hexágono regular, e o ângulo $A\hat{O}B$ é reto. Assinale na coluna I as alternativas corretas, para a medida da área da região sombreada, e na coluna II as alternativas incorretas.

I	II
a) —	a) $(\sqrt{3} - 2\pi)\ cm^2$
b) —	b) $\pi\sqrt{3}\ cm^2$
c) —	c) $(\pi - \sqrt{3})\ cm^2$
d) —	d) $2(4\pi - 3\sqrt{3})\ cm^2$
e) —	e) $(6\pi - 2\sqrt{3})\ cm^2$

361. (ITA-89) Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir $20x\ cm$ e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a x, então a área do círculo, em cm^2, será igual a:

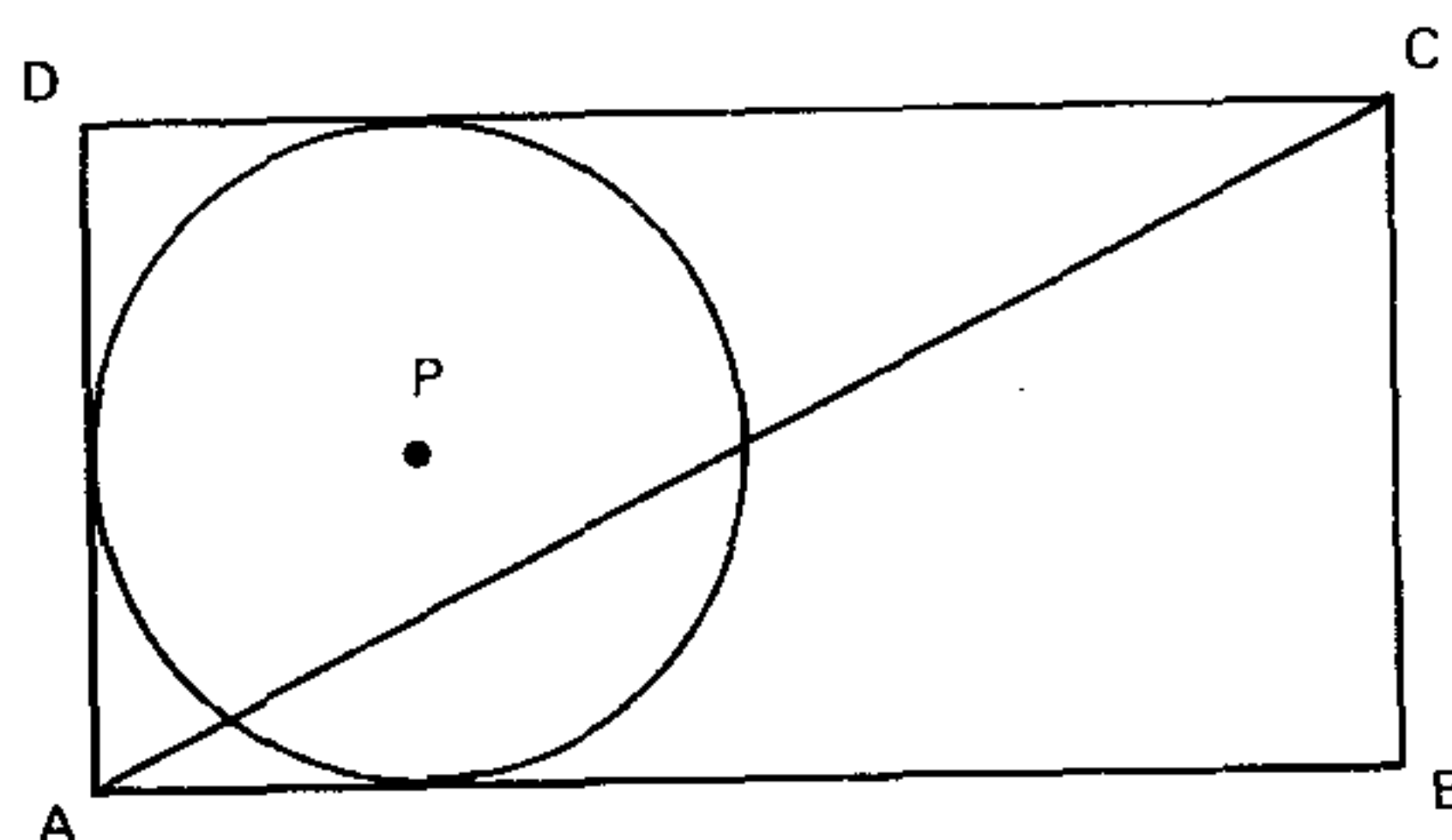
a) 50π b) 75π c) 100π d) 125π e) 150π

362. (U.F.MG-90) Na figura, o hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito no círculo de centro O. Se $AB = 4\ cm$, a área do quadrilátero $ABOF$ é:

a) $8\sqrt{2}\ cm^2$
b) $8\sqrt{3}\ cm^2$
c) $16\ cm^2$
d) $16\sqrt{2}\ cm^2$
e) $16\sqrt{3}\ cm^2$

363. (U.F.MG-90) Na figura, AB é o diâmetro do círculo de centro O e C é um ponto da circunferência tal que o ângulo $A\hat{B}C$ mede $30°$.
Se $AB = 6\ cm$, a área da região limitada pelas cordas BC e AB e pelo arco menor AC, em cm^2, é:

a) $\frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{3\pi}{4}$
b) $9\sqrt{3}$
c) $\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{3\pi}{2}$
d) $\frac{9\sqrt{3}}{4} + 6\pi$
e) $\frac{3\pi}{4}$

364. (U.F.VIÇOSA-90) Na figura abaixo, a circunferência de centro P e raio 2 é tangente a três lados do retângulo $ABCD$ de área igual a 32. A distância do ponto P à diagonal AC vale:

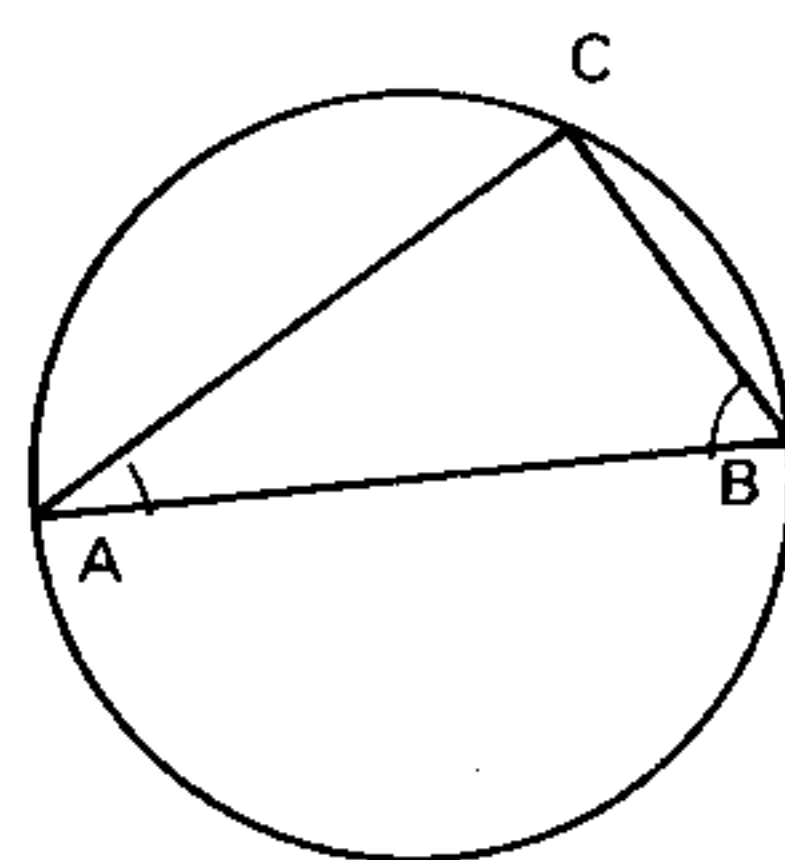
a) $2\sqrt{5}/5$
b) $\sqrt{5}/2$
c) $\sqrt{5}/5$
d) $2\sqrt{5}$
e) $3\sqrt{5}/5$

D C P A B

365. (CESGRANRIO-91) O triângulo ABC está inscrito em círculo cujo diâmetro AB mede 1 e cujos ângulos satisfazem a condição $\hat{B} = 2\hat{A}$ conforme se vê na figura. A área desse triângulo ABC vale:

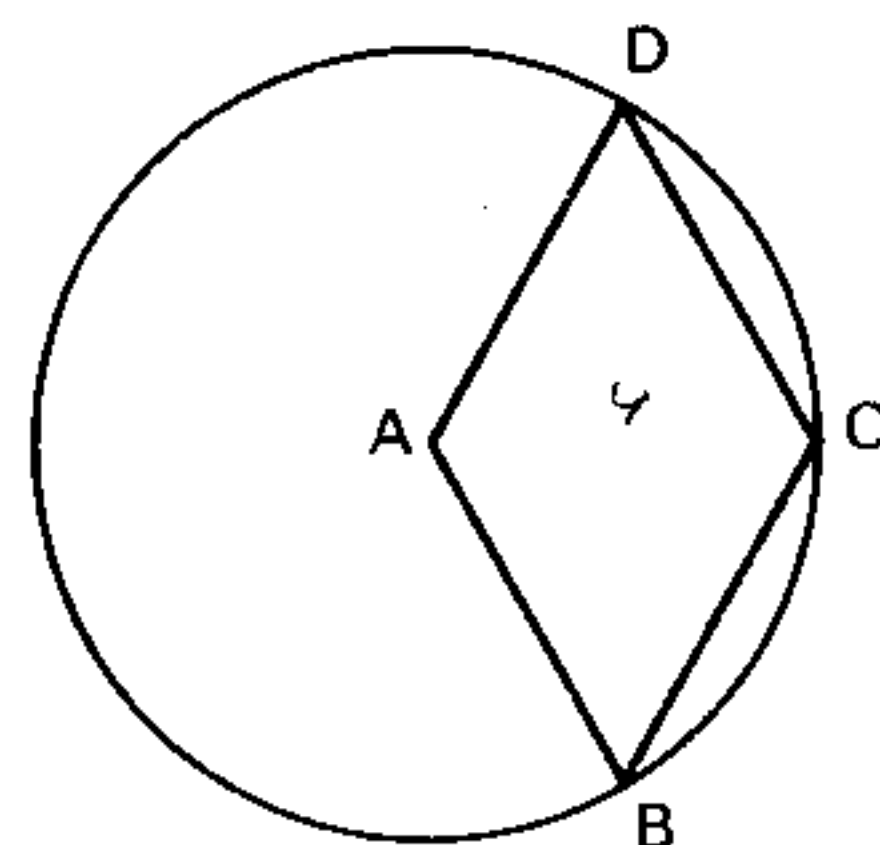
a) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

C A B

366. (U.C.SALVADOR-91) Na figura ao lado, $ABCD$ é um losango e A é o centro da circunferência de raio 4 cm. A área desse losango, em centímetros quadrados, é:

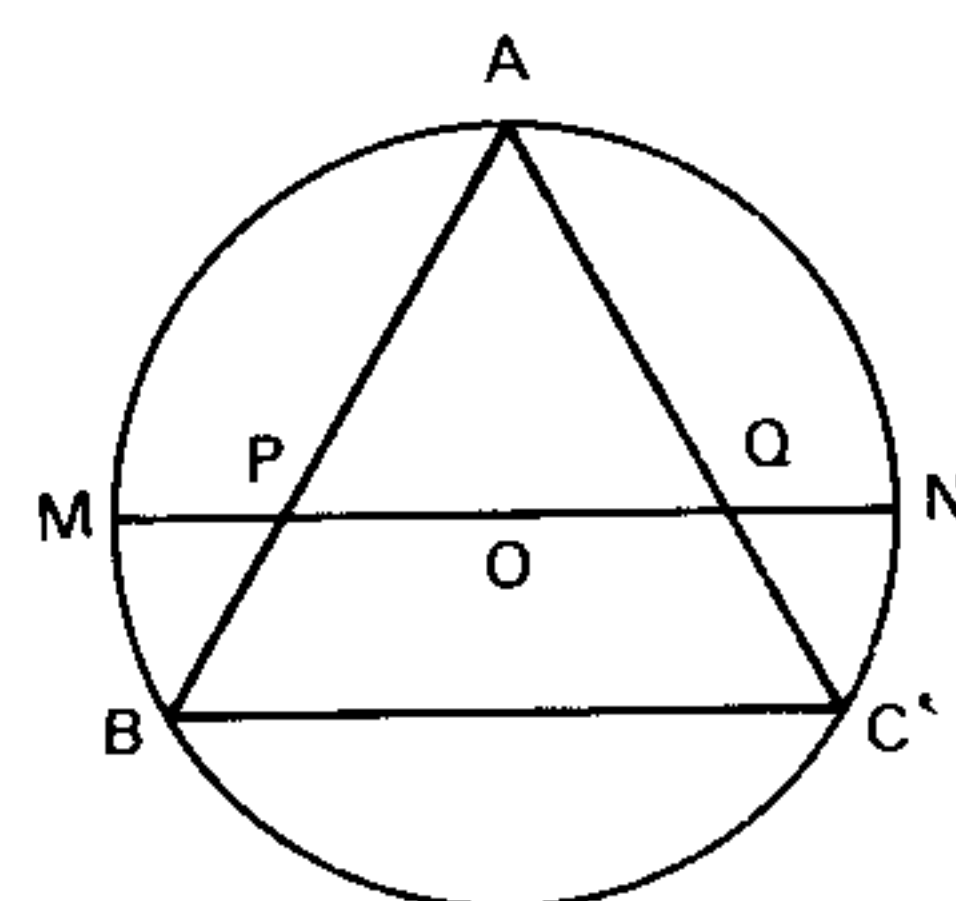
a) $4\sqrt{3}$
b) 8
c) 12
d) $8\sqrt{3}$
e) $12\sqrt{3}$

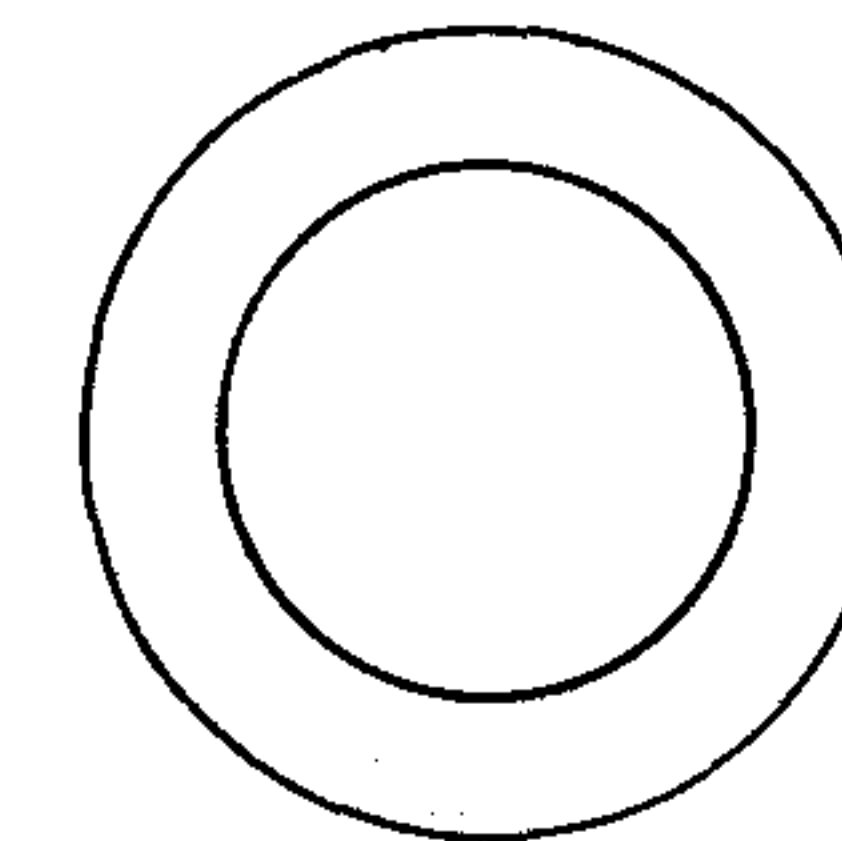
D A C B

367. (FESP-91) Um triângulo equilátero ABC está inscrito numa circunferência de raio igual a 6 cm. O triângulo é interceptado por um diâmetro de circunferência, formando um trapézio, conforme a figura abaixo. Podemos afirmar então que a razão entre a área do triângulo ABC e a do trapézio é igual a:

a) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{9}{4}$

b) $\frac{9}{5}$ e) $\frac{8}{5}$

c) $\frac{9}{8}$

A P Q M O N B C

368. (U.C.SALVADOR-92) Na figura abaixo temos dois círculos concêntricos, com raios 5 cm e 3 cm. A área da região sombreada, em centímetros quadrados, é:

a) 9π
b) 12π
c) 16π
d) 20π
e) 25π

369. (PUC-MG-92) Se o raio de uma circunferência foi aumentado em 10%, sua área, em porcentagem, fica aumentada em:

a) 10 b) 11 c) 20 d) 21 e) 100

370. (PUC-MG-92) A hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos r_1 e $r_2 > r_1$ mede 15 m. A diferença entre as áreas das circunferências de raios r_1 e r_2 é 63π m^2. Em m^2, a área da circunferência de raio $r = r_1 + r_2$ é:

a) 225π b) 226π c) 441π d) 675π e) 676π

371. (PUC-MG-92) A diferença entre as áreas de um quadrado e de um círculo nele inscrito é $4(4 - \pi)$ m^2. A área do quadrado, em m^2, é:

a) 16 b) 14 c) 12 d) 8 e) 4

372. (PUC-MG-92) A área de um setor circular de $2n$ graus, $0 < n < 180$, é $\frac{n\pi}{10}$ unidades de área. O raio do setor circular é igual a:

a) $5\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

373. (PUC-MG-92) Um trapézio isósceles tem base maior igual a 6 cm e altura igual a 2 m. Uma circunferência tem raio igual à base menor do trapézio. Se a área do trapézio é igual a $62,5\,(\pi)^{-1}\%$ da área da circunferência, em m, seu perímetro é:

a) $6 + \sqrt{6}$ b) $6 + \sqrt{5}$ c) $5 + \sqrt{5}$ d) $2(6 + \sqrt{6})$ e) $2(5 + \sqrt{5})$

Respostas dos Testes

1. b
2. a
3. a
4. e
5. d
6. d
7. b
8. d
9. e
10. b
11. a
12. e
13. d
14. e
15. b
16. a
17. e
18. d
19. b
20. a
21. d
22. a
23. a
24. d
25. b
26. b
27. c
28. e
29. d
30. c
31. c
32. d
33. a
34. b
35. b
36. b
37. d
38. c
39. e
40. b
41. e
42. a
43. c
44. c
45. b
46. d
47. c
48. c
49. c
50. d
51. e
52. b
53. d
54. c
55. b
56. e
57. e
58. e
59. d
60. c
61. d
62. b
63. c
64. c
65. c
66. d
67. a
68. a
69. d
70. a
71. a
72. d
73. b
74. c
75. b
76. d
77. d
78. d
79. d
80. a
81. e
82. d
83. d
84. b
85. d
86. a
87. d
88. e
89. c
90. b
91. d
92. c
93. d
94. c
95. e
96. c
97. c
98. b
99. b

100. c
101. e
102. d
103. a
104. c
105. b
106. c
107. b
108. d
109. e
110. e
111. b
112. b
113. b
114. d
115. a
116. b
117. c
118. d
119. d
120. c
121. e
122. b
123. a
124. e
125. e
126. b
127. a
128. d
129. b
130. e
131. b
132. b
133. c
134. b
135. c
136. e
137. a
138. d
139. d
140. d
141. d
142. c
143. c
144. a
145. e
146. d
147. b
148. b
149. c
150. d
151. e
152. e
153. e
154. e
155. c
156. d
157. d
158. b
159. a
160. b
161. c
162. c
163. b
164. d
165. e
166. b
167. c
168. a
169. d
170. c
171. a
172. b
173. a
174. b
175. e
176. e
177. e
178. c
179. c
180. b
181. c
182. a
183. b
184. c
185. c
186. b
187. a
188. b
189. a
190. e
191. b
192. b
193. d
194. b
195. b
196. e
197. c
198. b
199. a
200. c
201. d
202. d
203. b
204. c
205. e
206. e
207. d
208. a
209. a
210. a
211. e
212. b
213. d
214. c
215. a
216. d
217. d
218. b
219. e
220. c
221. e
222. b
223. c
224. a
225. a
226. b
227. c
228. d
229. c
230. a
231. d
232. d
233. a
234. d
235. c
236. d
237. d
238. e
239. d
240. b
241. d
242. e
243. b
244. e
245. d
246. d
247. d
248. c
249. b
250. a
251. d
252. e
253. a
254. b
255. b
256. c
257. d
258. c
259. a
260. b
261. d
262. c
263. c
264. c
265. d
266. c
267. d
268. c
269. b
270. c
271. d
272. e
273. b
274. e
275. a
276. e
277. e
278. a
279. a

280. d
281. c
282. e
283. a
284. d
285. d
286. e
287. d
288. c
289. b
290. d
291. b
292. d
293. b
294. b
295. d
296. a
297. c
298. d
299. c
300. e
301. c
302. a
303. e
304. e
305. e
306. b
307. c
308. a
309. d
310. c
311. a
312. d
313. b
314. b
315. b
316. a
317. b
318. c
319. a
320. d
321. d
322. b
323. d
324. c
325. b
326. a
327. d
328. c
329. d
330. b
331. d
332. e
333. d
334. b
335. b
336. c
337. a
338. c
339. d
340. d
341. d
342. e
343. c
344. d
345. a
346. e
347. b
348. d
349. e
350. d
351. e
352. e
353. a
354. b
355. e
356. a
357. a
358. b
359. b
360. I: d
II: a, b, c, e
361. c
362. b
363. c
364. a
365. e
366. d
367. b
368. c
369. d
370. c
371. a
372. d
373. e